Minimização Direta da Energia Cinética Final em Colisões Perfeitamente Inelásticas

Rafael Silva de Amorim

26 de Abril, 2025

Introdução

Em colisões perfeitamente inelásticas, os corpos colidem e permanecem juntos após a colisão. Queremos demonstrar matematicamente que a condição de **velocidade comum** minimiza a energia cinética final, mantendo a conservação do momento linear.

Configuração do Problema

Sejam:

- m_1, m_2: massas dos corpos 1 e 2;
- u_1, u_2: velocidades iniciais dos corpos;
- v_1, v_2: velocidades finais dos corpos.

Relações matemáticas essenciais

Energia cinética do sistema após a colisão

$$K_{\text{final}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Conservação do momento linear

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

Método de Minimização Direta

Passo 1: Expressar v_2 em função de v_1

Pela conservação do momento:

$$v_2 = \frac{m_1(u_1 - v_1)}{m_2} + u_2$$

Passo 2: Substituir em $K_{\textbf{final}}$

Substituindo v_2:

$$K_{\text{final}}(v_1) = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2m_2}(m_1(u_1 - v_1) + m_2 u_2)^2$$

Passo 3: Derivar e encontrar o ponto crítico

Calculamos a derivada:

$$\frac{d}{dv_1}K_{\text{final}} = m_1 v_1 - \frac{m_1}{m_2}(m_1(u_1 - v_1) + m_2 u_2)$$

Igualando a zero e reorganizando:

$$v_1 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

Passo 4: Encontrar v_2

Substituindo de volta:

$$v_2 = v_1$$

Resultado Principal

$$v_1 = v_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

Conclusão

A minimização direta da energia cinética final sob a conservação do momento leva naturalmente à condição:

Os corpos se movem juntos com a mesma velocidade.

Essa configuração corresponde à máxima perda possível de energia cinética, respeitando as leis da física.