עבודת הגשה בתקשורת ספרתית

סימולציית MATLAB במערכות תקשורת באפנון QPSK

QPSK – QUADRATURE PHASE SHIFT KEYING

מחלקת הנדסת חשמל ואלקטרוניקה

מתרגל הקורס – מר פאר טל

מרצה הקורס – ד"ר משה זוהר

מגיש – אופיר בר

תוכן עניינים

שאלות הכנה 3

סימלוציית MATLAB:

יצירת בסיס נתונים 17

בניית משדר 18

בניית מקלט, קליטה ללא רעש 21

קליטה עם רעש 25

קליטה עם הפרש פאזה קבועה 28

מקורות 32

1. התיאור המתמטי של האות המשודר$S_M(t)$ בצורתו הבסיסית באפנון $QPSK$ הוא:

$$S_m(t) = Re\left\{S_d(t) \cdot \sqrt{2P_C} \cdot e^{j\omega_c t}\right\}$$

כאשר:

- $S_d(t)$ הוא אות המידע לפני הכניסה למודולטור
- $\sqrt{2P_C} \cdot e^{j\omega_c t}$ הוא אות גל הנושא

באפנון QPSK (Quadrature Phase Shift Keying) הסימבולים נבחרים מתוך מערכת של ארבעה אפשרויות שונות, וכל סימבול מיוצג כזוג של אותות אורתוגונליים הנושאים מידע בשני ממדים שונים. באפנון זה, כל סימבול מסמל קומבינציה של שני ביטים, כאשר כל תת-סימבול מקודד את אחד הביטים. החלק הממשי והחלק המדומה של הסימבול מתוארים באמצעות פונקציות גל סינוסיות וקוסינוסיות שמספקות כיוון פאזה שונה עבור כל אחד מהסימבולים האפשריים. השיטה מביאה לכך ששידור הסימבולים יכול להתבצע בצורה מדויקת ויעילה תוך שמירה על הפרדה בין הערכים הממשיים והמדומים של הסימבולים.

לאחר פיתוח הביטוי נקבל את הביטוי הבא:

$$S_m(t) = \sqrt{2P_c}\left[\sum_k A_k|\cos(\varphi_K)) \cdot g(t-KT_s) \cdot \cos(\omega_c t) - \sum_k A_k|sin(\varphi_K) *\cdot g(t-KT_s) \cdot \sin(\omega_c t)\right]$$

לפי הפרמטרים נכניס למשוואה: $S_m(t) = \ A_C * \left[S_{di}(t) \cdot cos(\omega_c t) - S_{dq}(t) \cdot sin(\omega_c t)\right]$

$$A_C = \sqrt{2P_c}$$

$$S_{di}(t) = \sum_k A_k cos(\omega_c t) \cdot g(t-KT_s)\ ;\ real\ part$$

$$S_{dq}(t) = \sum_k A_k \sin(\omega_c t) \cdot g(t-KT_s)\ ;\ imaginary\ part + 90^{\circ}$$

1. הביטוי של האות המשודר במישור התדר $S_m(f)$:

$$\mathcal{F}\{S_m(t)\} = \frac{A_C^2}{4} \cdot \left[S_{di}(f-f_c) + S_{dq}(f-f_c) + S_{di}(f+f_c) + S_{dq}(f+f_c)\right]$$

$$S_d(f) = \frac{\sigma^2}{T_s}|G(f)|^2 + \frac{\mu^2}{T_s^2} \cdot \sum_k \left|G\left(\frac{K}{T_s}\right)\right|^2 \cdot \delta\left(f - \frac{K}{T_s}\right)$$

נחשב את תוחלת והשונות אך קודם את גודל המילון:

$$NQ = 4\,, \qquad Fmax = 800Hz, \qquad Bw\ channel = 3.2k\ Hz$$

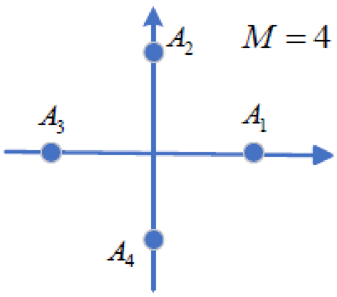
$$NQ = \log_2 K$$

$$2^K = 4, \qquad K = 2\frac{Bits}{sym}$$

$$M = 2^K, \qquad M = 4$$

נחשב כעת את התוחלת ואת השונות בהתאם לאיפנון PSK בגודל מילון $M = 4$

הסימבולים $A_K = (\pm 1, \pm j)$



חישוב תוחלת:

$$\mu = \sum_{i=1}^{M} A_i\, pi = \sum_{1}^{4} \frac{1}{4} \cdot A_i = \frac{1}{4} \cdot (1 + (-1) + j + (-j)) = 0$$

חישוב שונות:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{M} p_i * |Ai|^2 - \mu^2 = \frac{1}{4}\cdot[1^2 + (-1)^2 + j\cdot j^* + (-j)\cdot(-j)^*]$$

$$= \frac{1}{4}\cdot[1+1+1+1] = 1$$

נתון לנו ש $g(t) = \begin{matrix} 1; & 0 \le t \le T_s \\ 0; & else \end{matrix}$

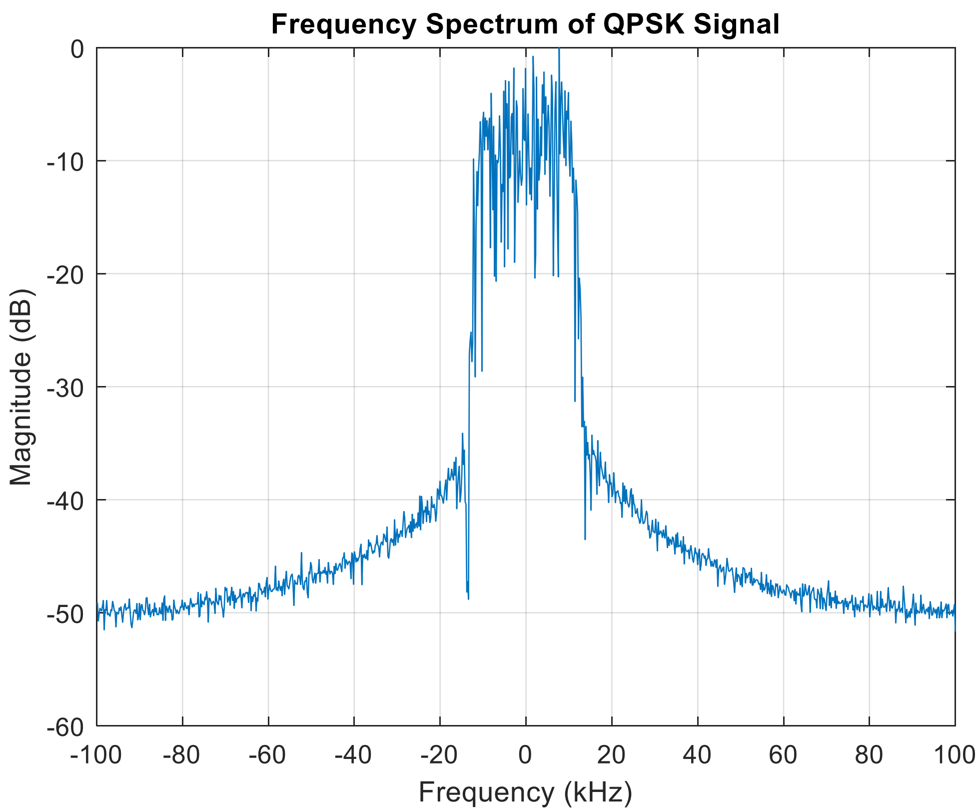
$$G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\} = T_s \cdot sinc(\pi T_s f)e^{-j\pi f T s}$$

$$Sd(f) = T_s \cdot sinc^2(\pi T_s f)$$

$$S_M(f) = A_C^2 \cdot \frac{T_s}{4}[sinc^2(\pi T_s \cdot (f - f_C)) + sinc^2(\pi T_s \cdot (f + f_C))]$$

גרף צפיפות ההספק הספקטרלית סביב $f_C \ = 20K\ H_Z$ עבור אפנון $QPSK$ באמצעות MATLAB:

ניתן לראות שהגרף נמצא גם בתדרים שליליים אך ניתן להזניח אותם ולקחת את הטווח הרלוונטי מתדירות 0 ועד $20K\ HZ$



2. הקשר בין קצב שידור הסימבולים Rs , מספר הביטים לסימבול Kb וקצב שידור הביטים Rb הוא

$R_s = \frac{BW}{2}$ קצב שידור סימבולים

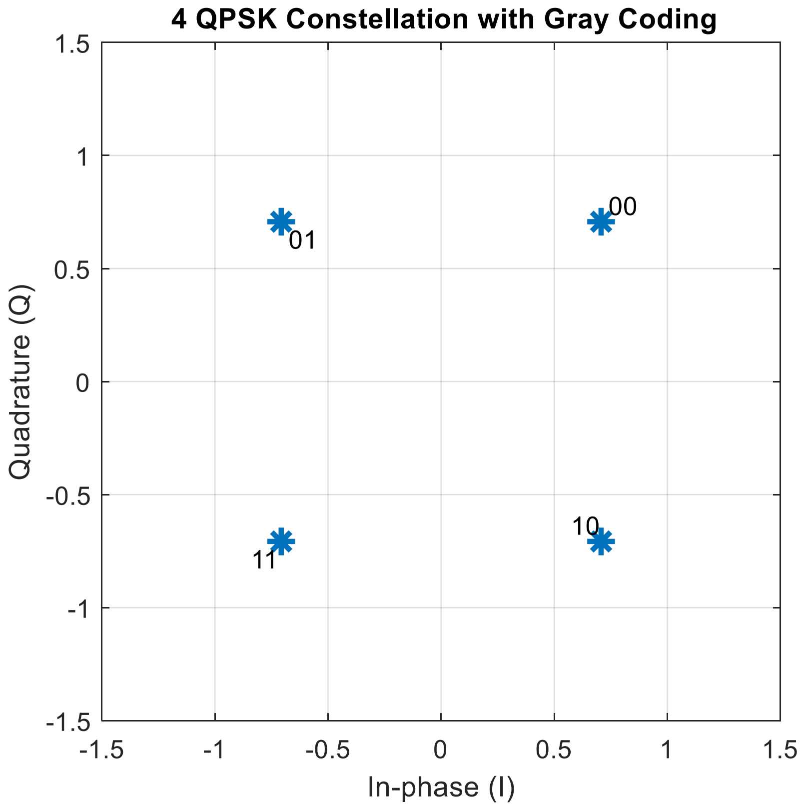
$K_b = log_2M$ מספר ביטים בסימבול

$R_b = K \cdot 2fmax$ קצב שידור ביטים כתלות בתדר המקסימלי ורמת הקוונטיזציה לפי $NQ = \log_2 K$.

כאשר BW רוחב פס ערוץ וM מספר המילון.

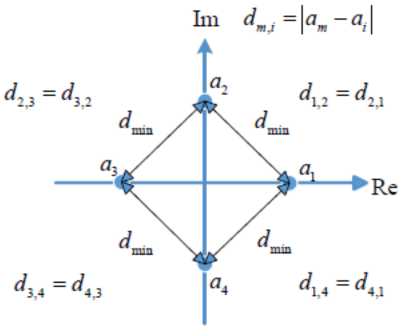
3. קוד GRAY מתאפיין בכך שרק ביט אחד משתנה בין כל שני איברים סמוכים, מה שהופך אותו לקידוד אידיאלי למיפוי סימבולים באיפנונים שונים במערכות תקשורת ספרתיות. תכונה זו מאפשרת מיפוי בטוח יותר של סימבולים. כאשר אות משודר בערוץ תקשורת, הוא מושפע מרעשים והפרעות ממקורות שונים כמו תחנות שכנות, רעשים במקלט, והפרעות בין סימבולים סמוכים, מה שעלול להוביל לסיווג שגוי של הסימבול.
קוד GRAY מפחית את ההסתברות לשגיאה ומשפר את ביצועי המערכת בכך שהוא מבטיח שבמקרה של קבלת סימבול שגוי, רק ביט אחד ישתנה. תכונה זו מקטינה את מורכבות תיקון השגיאות במערכת. בנוסף, קוד GRAY לא רק שמפחית את הסיכוי לשגיאות, אלא גם משפר את ביצועי מערכות המשתמשות במודולציות מסדר גבוה, שהן רגישות יותר לשגיאות מיפוי. יתר על כן, השימוש בקוד GRAY מחזק את עמידות המערכת בערוצי תקשורת עם יחס אות לרעש נמוך (SNR).

.4



	Symbol	Binary		Code Gray		Phase Shift $\{Rad\}$
A_K		b_1	b_2	b_1	$\boldsymbol{b_2}$	$+\frac{\pi}{2}K$
A_1	1	0	0	0	0	$\frac{\pi}{4}$
A_2	j	0	1	0	1	$\frac{3\pi}{4}$
A_3	-1	1	0	1	1	$\frac{5\pi}{4}$
A_4	$-j$	1	1	1	0	$\frac{7\pi}{4}$

.5



$$d_{\min} = d_{1,2} = \frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0 \cdot E_g}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\left(A_{1_i} - A_{2_i}\right)^2 + \left(A_{1_q} - A_{2_q}\right)^2}$$

$$d_{\min} = d_{1,2} = |a_1 - a_2| = \left|\left(\frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot A_{1_i}\cdot E_g}{\sqrt{2}} + j\cdot\frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot A_{1_q}\cdot E_g}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot A_{2_i}\cdot E_g}{\sqrt{2}} + j\cdot\frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot A_{2_q}\cdot E_g}{\sqrt{2}}\right)\right|$$

$$d_{\min} = d_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot A_{1_i}\cdot E_g}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot A_{2_i}\cdot E_g}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot A_{1_q}\cdot E_g}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot A_{2_q}\cdot E_g}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$d_{\min} = d_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot E_g}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(A_{1_i} - A_{2_i}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot E_g}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(A_{1_q} - A_{2_q}\right)^2}$$

$$d_{\min} = d_{1,2} = \frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot E_g}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\left(A_{1_i} - A_{2_i}\right)^2 + \left(A_{1_q} - A_{2_q}\right)^2}$$

$$M = 4 \Rightarrow d_{\min} = d_{1,2} = \frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot E_g}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot E_g}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$$

$$\boxed{d_{\min} = d_{1,2} = \sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot E_g}$$

נניח ש $\sqrt{p_r}\cdot A_K\cdot E_g = 1$ אז נחשב לפי מיקום הסימבולים בקונסטלציה:

$$d_{1,2} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

.6

<u>רעש אדיטיבי</u>, ובמיוחד רעש גאוסי לבן (AWGN), הוא אחד הגורמים העיקריים לשגיאות במערכות תקשורת דיגיטליות. במערכת QPSK, הרעש האדיטיבי משפיע על הפאזה והאמפליטודה של הסימבולים המתקבלים במקלט. הרעש עלול לגרום לשגיאה בפענוח של הסימבול על ידי הזזת הנקודה בקונסטלציה של הסימבול למיקום שגוי, מה שמוביל להחלטה שגויה לגבי הביטים שהתקבלו. ככל שעוצמת הרעש עולה ביחס לאות (יחס אות לרעש נמוך יותר), כך גדלה ההסתברות לשגיאה במערכת.

$G_n(f)=\frac{N_0}{2}$ - צפיפות הספק ספקטרלית של רעש לבן גאוסי

$E\{n(t)\}=0$ - תוחלת הרעש

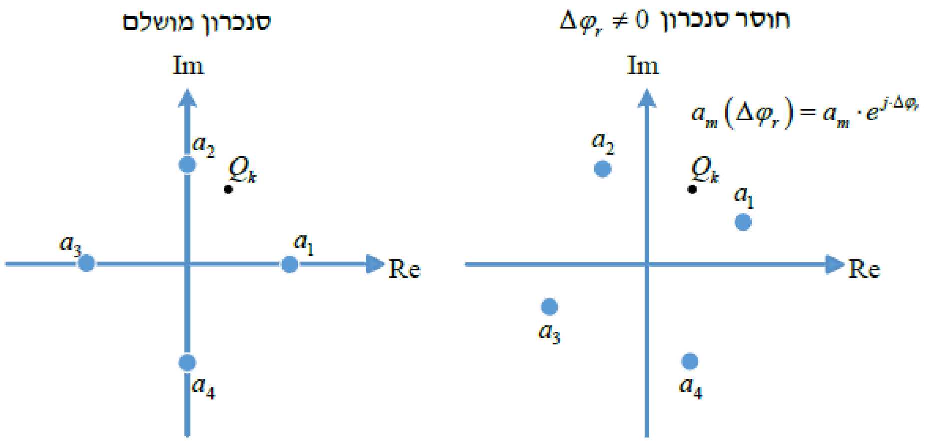
$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}}$ - פונקציית צפיפות ההסתברות

<u>רוחב פס מוגבל</u> (ISI - Inter-Symbol Interference) - כאשר הערוץ מוגבל ברוחב הפס, מתרחשת תופעה של הפרעות בין סימבולים סמוכים. בערוץ כזה, לא ניתן להעביר את האות בדיוק כמו שהוא, והתגובה האימפולסית של הערוץ גורמת להתמרחות של הסימבולים המועברים בזמן. תוצאה של התמרחות זו היא שמקיימת הפרעה של סימבולים קודמים בסימבולים הנוכחיים, מה שגורם לשגיאות בפענוח שלהם במקלט. כדי להתמודד עם תופעת ה ISI, משתמשים בטכניקות כמו סינון התאמה
(Matched Filtering) או שיטות דיגיטליות כגון Equalization במקלט.

<u>הסחת פאזה והסחת תדר</u> (Phase Shift and Frequency Shift) - במערכות תקשורת, האותות העוברים בערוץ עלולים לעבור הסחות פאזה או הסחות תדר כתוצאה מתנודות בתדרים, תנועה של השולח או המקלט (אפקט דופלר), או אי דיוקים בתדר השעון של השולח והמקלט. במקרה של הסחת פאזה באות QPSK , קיים סיכון גבוה לשגיאות בפענוח הסימבולים, שכן אפנון QPSK רגיש מאוד לשינויים בפאזה. הסחת פאזה גורמת לכך

שהסימבול מתקבל במיקום שגוי בקונסטלציה. כדי להתמודד עם בעיות של הסחת פאזה, נהוג להשתמש בטכניקות כמו PLL (Phase-Locked Loop) או שיטות לאפנון סינכרוני.

במידה ומתווספת פאזה בערוץ לאות ששודר נקבל כי הסימבול שמתקבל במקלט מתרחק מהמיקום בו אמור להיות.



אנו רואים שכתוצאה מחוסר הסנכרון הקונסטלציה במקלט צריכה להסתובב, עבור Q_k המתואר אנו נקבל החלטה כי שודר סימבול A_2, אך אם ניקח בחשבון את חוסר הסנכרון "יותר סביר" כי שודר הסימבול A_1.

.7

במערכת תקשורת דיגיטלית, ה Decision Device (או "התקן ההחלטה") הוא מרכיב קריטי בתהליך הקליטה והפענוח של האותות. תפקידו המרכזי הוא לקבל את האות הדיגיטלי שהתקבל במקלט לאחר שהוא עבר דרך הערוץ (שהוסיף רעש והפרעות) ולהחליט לאיזה סמל (או ביט) הוא תואם מבין כל האפשרויות האפשריות במערכת.

תפקיד התקן ההחלטה:

1. פענוח אותות דיגיטליים :האות שהתקבל במקלט מגיע מעוות על ידי רעש והפרעות. ה Decision Device משווה את הערך שהתקבל לערכים ה"תקניים" (הסימבולים שהיו צריכים להישלח) ומחליט לאיזה סימבול הוא הכי קרוב.

2. בחירה בסימבול הקרוב ביותר :ה Decision Device בוחר את הסימבול הקרוב ביותר לערך שהתקבל, בהתאם לקבוצת הסימבולים האפשריים במערכת. לדוגמה, אם מדובר ב QPSK עם מילון בגודל 4, ההחלטה תהיה לבחור את אחד מארבעת הסימבולים האפשריים.

3. תיקון שגיאות :ה Decision Device מקבל את הערך המעוות וממפה אותו לערך הקרוב ביותר מהסימבולים התקניים, ובכך מפחית את ההשפעה של רעשים והפרעות.

היחס בין האות לרעש נמדד לרוב בנקודה בה האות מגיע ל Decision Device שבמקלט. מדד זה מציין את היחס בין עוצמת האות הרצוי, הנושא את המידע, לבין עוצמת הרעש. כאשר ה-SNRגבוה, האות שנקלט במקלט הוא ברור ונוח לשחזור.כשהSNR נמוך זאת אומרת שהרעש גדול משמעותית מהאות וקשה יותר לנתח את האות ולקבל את האות המקורית לאחר שיעבור בהתקן ההחלטה, ניתן לתאר את הSNR בשתי צורות:

- יחס אות לרעש לביט (SNR per bit): מדד מנורמל המתאר את היעילות של מערכת התקשורת, ללא תלות בסוג האיפנון, הקידוד או רוחב הפס.

$$SNR_{per\ bit} = \frac{E_b}{N_0}$$

כאשר E_b אנרגית האות לביט. שווה לסך הכל האנרגיה של האות חלקי קצב שידור הביטים וN_o צפיפות ההספק הספקטרלית של הרעש

- יחס אות לרעש לסימבול (SNR per symbol): מתאר את היחס בין ההספק הממוצע של הסימבול לבין הספק הרעש. ישנו קשר בין יחס האות לרעש לביט לבין יחס האות לרעש לסימבול, והוא תלוי במספר המילים במילון האיפנון.

$$SNR_{per\ symbol} = \frac{E_b}{N_0} \cdot \log_2 M = \frac{E_{sr}}{N_0}$$

ניתן לבטא את יחס האות לרעש לביט בעזרת יחס האות לרעש לסימבול:

$$SNR_{bit} = \frac{SNR_{sym}}{\log_2 M} = \frac{SNR_{sym}}{2}$$

N_0 צפיפות הספק ספקטרלית של הרעש.

M מספר המילים במילון.

E_{sr} אנרגיה ממוצעת לסימבול.

$$S_r(t) = \sqrt{2 \cdot Pr} \cdot \left[A_{ki} \cdot g(t) \cdot \cos(\omega_c \cdot t) - A_{kq} \cdot g(t) \cdot \sin(\omega_c \cdot t)\right]$$

$$A_k = \pm 1, \pm \mathrm{j}; \quad M = 4; \; A_m = |A_k| \cdot e^{j\varphi k} = A_{ki} + j \cdot A_{kq}; \quad |A_k| = 1;$$

$$\varphi_k = 2\pi \cdot \frac{k-1}{M}; \quad k \in \{1,2,3,4\}$$

$$A_{ki} = |A_k| \cdot \cos(\varphi_k)\,; \;\; A_{kq} = |A_k| \cdot \sin(\varphi_k)$$

$$E_{sr}(k) = \int_0^{T_s} S_{k_r}^2(t)dt = \int_0^{T_s} \sqrt{2p_r}\, \left[A_{Ki} \cdot g(t) \cdot \cos(\omega_c \cdot t) - A_{kq} \cdot g(t) \cdot \sin(\omega_c \cdot t)\right]$$

$$E_{sr}(k) = P_r \cdot E_g \cdot \left[A_{ki}^2 + A_{kq}^2\right] = P_r E_g A_k$$

$$E_{sr}(k) = \int_0^{T_s} S_{k_r}^2(t)dt = P_r E_g |A_k|; \quad |A_k| = 1 \;\rightarrow E_{s_r}(k) = P_r E_g$$

לאפנון QPSK שלנו הוא יש מילון $M = 4$ לכן נסכום את ארבעת האלמנטים ונחלק ל4 כדי לקבל ממוצע הערך שלהם כפול אנרגית הפולס.

$$E_{s_r} = \sum_{k=1}^{4} p_k \cdot E_{s_r}(k) = \frac{1}{4} \cdot [P_r \cdot E_g + P_r \cdot E_g + P_r \cdot E_g + P_r \cdot E_g] = P_r \cdot E_g$$

כך קיבלנו את האנרגית הפולס של האות לאחר אפנון, כעת נוכל להציב בנוסחא למציאת יחס רעש לסימבול

$$SNR_{per\ symbol} = \frac{E_b}{N_0} \cdot \log_2 M = \frac{E_{sr}}{N_0}$$

8. הקשר בין $Q(x)$ ל $erfc(x)$:

ההגדרה המתמטית של $Q(x)$ היא:

$$Q(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

את פונקצית $Q(x)$ ניתן להביא בעזרת הפונקציה $erfc(x)$ באופן הבא:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot erfc(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

כאשר $erfc(x)$ היא פונקציית השגיאה הרגילה

ו$Q(x)$ מתארת את ההסתברות שמשתנה אקראי עם התפלגות נורמלית סטנדרטית יעלה על X, ניתן להשתמש ב$erfc(x)$ כדי לחשב את הסתברות זו גם כן.

9. על מנת למצוא את הסתברות השגיאה לסימבול עלינו למצוא את שונות הרעש ומרחק סימבול מסימבול אחר קרוב אליו לפי הנוסחא:

$$(5) \qquad p_{er(sym)} = \sum_{m=1}^{M} p_m \cdot p\left(er/A_m\right) = \sum_{m=1}^{M} p_m \cdot \left\{1 - \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{M}\left[1 - Q\left(\frac{d_{m,i}}{2\cdot\sigma_z}\right)\right]\right\}$$

מפני שהקונסטלציה סימטרית הסתברות השגיאה של כל אחד מהסימבולים הינה זהה:

$$p\left(er/A_1\right) = p\left(er/A_2\right) = p\left(er/A_3\right) = p\left(er/A_4\right)$$

$$p\left(er/A_1\right) = 1 - \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq 1}}^{M=4}\left[1 - p\left(A_{ir}/A_1\right)\right] = 1 - \left[1 - p\left(A_{2r}/A_1\right)\right]\cdot\left[1 - p\left(A_{3r}/A_1\right)\right]\cdot\left[1 - p\left(A_{4r}/A_1\right)\right]$$

$$p\left(er/A_1\right) = 1 - \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq 1}}^{M=4}\left[1 - Q\left(\frac{d_{i,1}}{2\cdot\sigma_z}\right)\right] = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{d_{2,1}}{2\cdot\sigma_z}\right)\right]\cdot\left[1 - Q\left(\frac{d_{3,1}}{2\cdot\sigma_z}\right)\right]\cdot\left[1 - Q\left(\frac{d_{4,1}}{2\cdot\sigma_z}\right)\right]$$

$$p\left(er/A_1\right) = 1 - \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq 1}}^{M=4}\left[1 - Q\left(\frac{d_{i,1}}{2\cdot\sigma_z}\right)\right] = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{d_{\min}}{2\cdot\sigma_z}\right)\right]\cdot\left[1 - Q\left(\frac{\overbrace{\sqrt{2}\cdot d_{\min}}^{\sqrt{2}\cdot d_{\min} > d_{\min}}}{2\cdot\sigma_z}\right)\right]\cdot\left[1 - Q\left(\frac{d_{\min}}{2\cdot\sigma_z}\right)\right]$$

$$p\left(er/A_1\right) \approx 1 - \left[1 - Q\left(\frac{d_{\min}}{2\cdot\sigma_z}\right)\right]^2 = 1 - \left[1 - 2\cdot Q\left(\frac{d_{\min}}{2\cdot\sigma_z}\right) + \cancel{Q^2\left(\frac{d_{\min}}{2\cdot\sigma_z}\right)}\right] \approx 2\cdot Q\left(\frac{d_{\min}}{2\cdot\sigma_z}\right)$$

$$\boxed{p\left(er/A_1\right) \approx 2\cdot Q\left(\frac{d_{\min}}{2\cdot\sigma_z}\right)}$$

בשלב האחרון נתאר את הסתברות השגיאה כפונקציה של SNR_s, את הביטוי ל $\overline{E_r}$ ניקח מהתוצאה שקיבלנו בביטוי $(***)$, $\overline{E_r} = P_r \cdot E_g$:

$$\gamma_d = SNR_s = \frac{\overline{E_r}}{N_0} = \frac{P_r\cdot E_g}{N_0}$$

נציב את הביטוי של $d_{\min}$ ואת הביטוי של שונות הרעש בביטוי של הסתברות השגיאה ונקבל:

$$\boxed{p_{er(sym)} \approx 2\cdot Q\left(\frac{d_{\min}}{2\cdot\sigma_z}\right) = 2\cdot Q\left(\frac{\sqrt{P_r}\cdot A_0\cdot E_g}{2\cdot\sqrt{\frac{A_0^2\cdot N_0}{4}\cdot E_g}}\right) = 2\cdot Q\left(\sqrt{\frac{P_r\cdot E_g}{N_0}}\right)}$$

$$\boxed{p_{er(sym)} \approx 2\cdot Q\left(\sqrt{SNR_s}\right) \quad or \quad p_{er(sym)} \approx 2\cdot Q\left(\sqrt{\gamma_d}\right)}$$

נתחיל בחישוב השונות: Z_k

$$n_r(t) = n_i(t) \cdot cos(\omega_c \cdot t) - n_q(t) \cdot sin(\omega_c \cdot t)$$

$$Z_k = \int_0^{T_s} n_r(t) \cdot A_0 \cdot cos(\omega_c \cdot t) \cdot g(t) \cdot dt$$

$$Z_k = \int_0^{T_s} (n_i(t) \cdot cos(\omega_c \cdot t) - n_q(t) \cdot sin(\omega_c \cdot t)) \cdot A_0 \cdot cos(\omega_c \cdot t) \cdot g(t) dt$$

$$Z_k = A_0 \int_0^{T_S} n_i(t) \cdot g(t) \cdot \cos^2(\omega_c t) dt - A_0 \int_0^{T_s} n_q(t) \cdot g(t) \cdot sin(\omega_c \cdot t) \cdot cos(\omega_c \cdot t) dt$$

$$Z_{k_i} = A_0 \int_0^{T_s} n_i(t) g(t) [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot cos(2 \cdot \omega_c \cdot t)] dt - A_0 \int_0^{T_s} n_q(t) \cdot g(t) \cdot \frac{si\,n(2\omega_C \cdot t)}{2} dt$$

החלק של n_q נופל מכיוון שהאינטגרל שווה לאפס ונשאר רק החלק הממשי של n_i

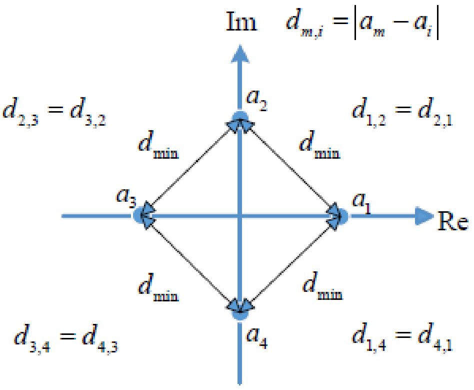
$$Z_{ki} = \frac{A_0}{2} \int_0^{T_s} n_i(t) g(t) dt$$

ידוע לנו ששונות הרעש מתפלגת באופן הבא כאשר Z_k משתנה גאוסי עם תוחלת אפס ושונות:

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G_{n_i}(f) \cdot |G(f)|^2 \cdot df$$

$$\sigma_z^2 = \frac{A_0}{4} \cdot \int_{-\frac{B_w}{2}}^{\frac{B_w}{2}} N_0 \cdot |G(f)|^2 df = A_0^2 \cdot \frac{N_0}{4} \cdot \int_{-\frac{B_w}{2}}^{\frac{B_w}{2}} |G(f)|^2 df \approx \frac{A_0^2 N_0}{4} Eg$$

נמצא את $d_{1,2\ min}$ לפי



$$d_{\min} = d_{1,2} = \frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot E_g}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(A_{1_i} - A_{2_i}\right)^2 + \left(A_{1_q} - A_{2_q}\right)^2}$$

$$d_{\min} = d_{1,2} = |a_1 - a_2| = \left| \left(\frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot A_{1_i} \cdot E_g}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot A_{1_q} \cdot E_g}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot A_{2_i} \cdot E_g}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot A_{2_q} \cdot E_g}{\sqrt{2}} \right) \right|$$

$$d_{\min} = d_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot A_{1_i} \cdot E_g}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot A_{2_i} \cdot E_g}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot A_{1_q} \cdot E_g}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot A_{2_q} \cdot E_g}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

$$d_{\min} = d_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot E_g}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(A_{1_i} - A_{2_i}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot E_g}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(A_{1_q} - A_{2_q}\right)^2}$$

$$d_{\min} = d_{1,2} = \frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot E_g}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(A_{1_i} - A_{2_i}\right)^2 + \left(A_{1_q} - A_{2_q}\right)^2}$$

$$M = 4 \Rightarrow d_{\min} = d_{1,2} = \frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot E_g}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \frac{\sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot E_g}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}$$

$$\boxed{d_{\min} = d_{1,2} = \sqrt{P_r} \cdot A_0 \cdot E_g}$$

הפרמטרים שנתונים לנו לפי האפנון:

$$Pr = 10\,w; \qquad A_k = \pm 1, \pm j; \qquad E_g = \frac{E_r}{P_r}$$

נעביר את המשוואות שיתאימו עם משוואת יחס אות לסימבול SNR_S

$$SNR_S = \gamma_d = \frac{Er}{N_0} = P_r \cdot \frac{E_g}{N_0}$$

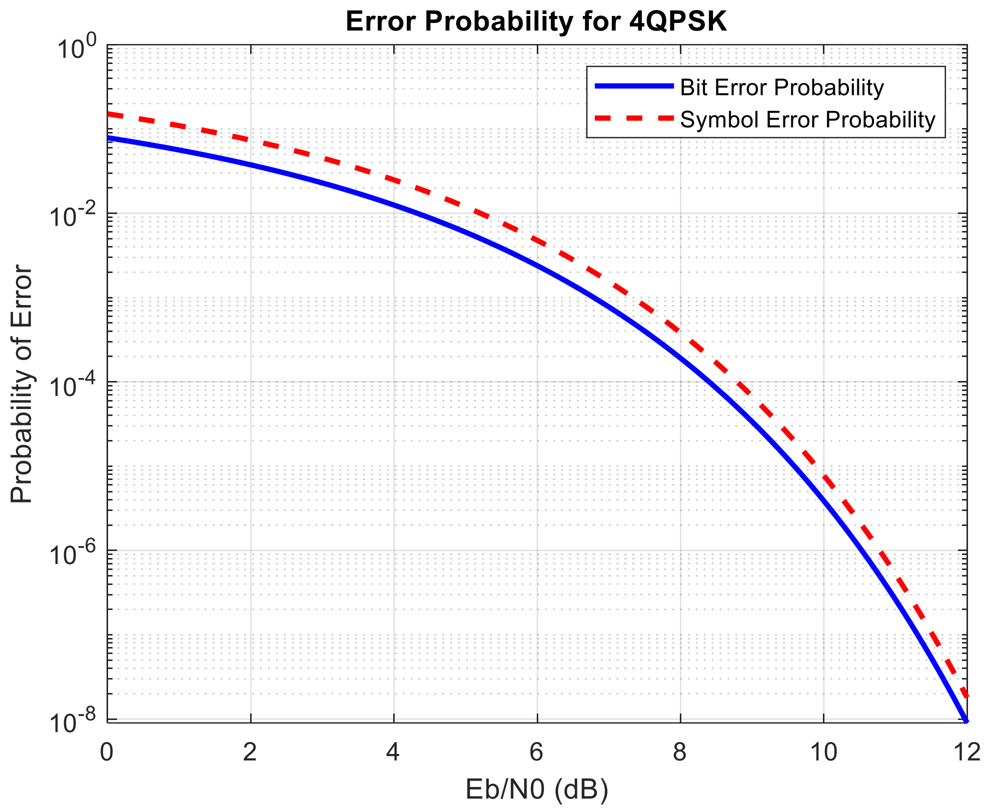
$$per_{sym} \approx 2 \cdot Q\left(\frac{d_{1,2\ min}}{2\sigma_z}\right) = 2 \cdot Q\left(\frac{\sqrt{P_r \cdot A_0 \cdot E_g}}{2\sqrt{\frac{A_0^2 \cdot N_0 \cdot E_g}{4}}} \cdot \right) = 2 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{P_r \cdot E_g}{N_0}}\right)$$

$$Per_{(sym)} = 2 \cdot Q\left(\sqrt{SNR_S}\right) = 2 \cdot \mathrm{Q}\left(\sqrt{\gamma_d}\right)$$

$$\gamma_d = k \cdot \gamma_b; \qquad k = \log_2 M; \quad k = 2; \quad \rightarrow \quad \gamma_b = \frac{1}{2}\gamma_d$$

$$Per_{bit} = s\frac{1}{2}Per_{sym} = Q(\sqrt{2 \cdot \gamma_b}) = \frac{1}{2}erfc(\sqrt{\frac{\gamma_d}{2}})$$

לאחר חישובים במאטלב קיבלנו את הגרף הבא של הסתברות שגיאה של ביט ביחס להסתברות השגיאה לסימבול:



סימולציית MATLAB

יצירת בסיס הנתונים

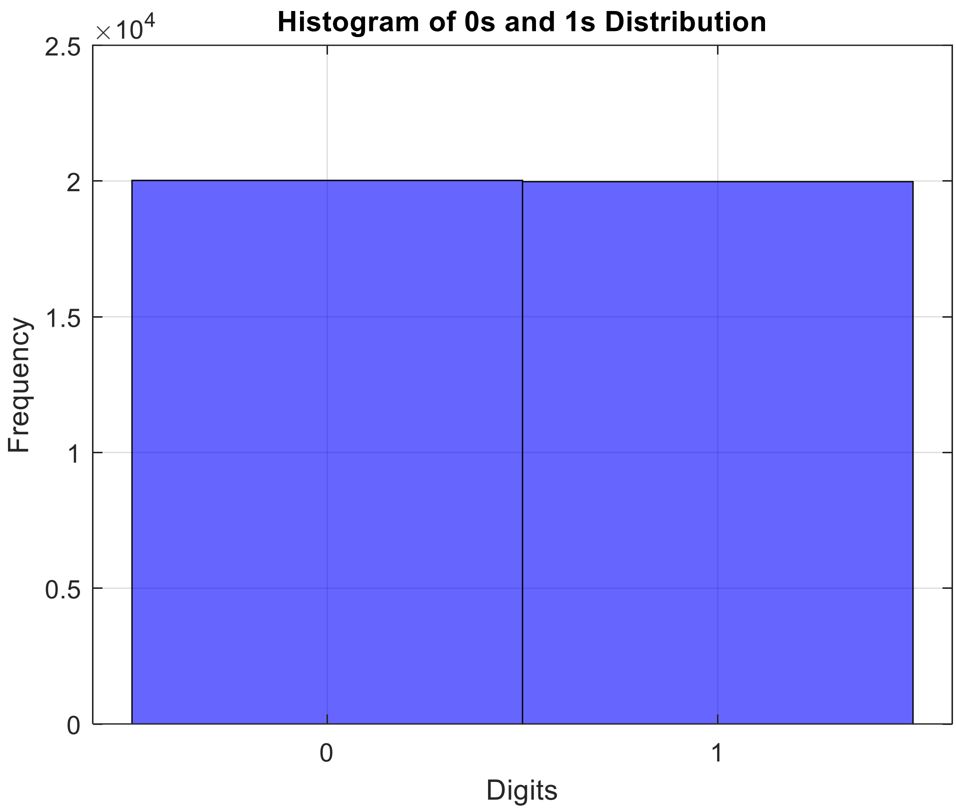
בסיס הנתונים עבור אפנון $QPSK$ לפי מילון בגודל 4 $=M$ורמת קוונטיזציה $NQ = 4$ ומספר ביטים לסימבול 2 $= K_b$ נראה באופן הבא:

[00 01 10 11]

ככה קיבלנו את מספר הביטים לסימבול $N_Q = \log_2 K_b$.

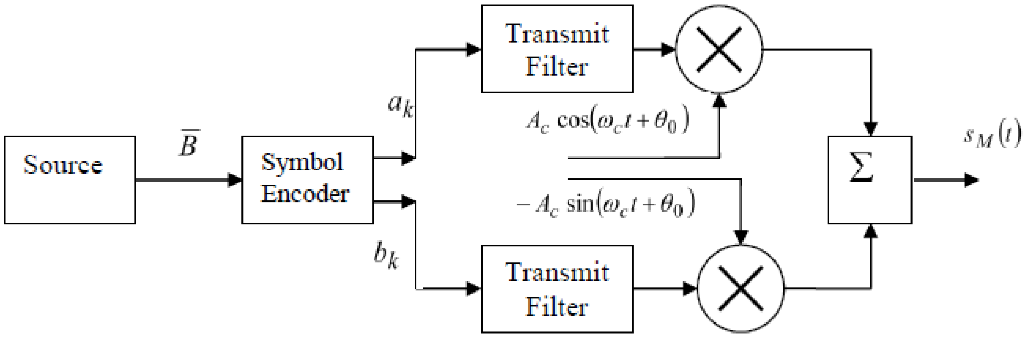
נתון לנו ש $N_B = 10{,}000 \cdot \log_2 M$ הוא מספר הביטים שקיימים לנו בבסיס הנתונים אך מכיוון שעבור כל 2 ביטים מהווה סימבול צריך לכפול את N_B ב2 על מנת לקבל 40,000 ביטים בבסיס הנתונים סך הכל.

בעזרת קוד במאטלב נייצר 40,000 ביטים בהתפלגות שווה בקירוב בשם database.



בניית המשדר

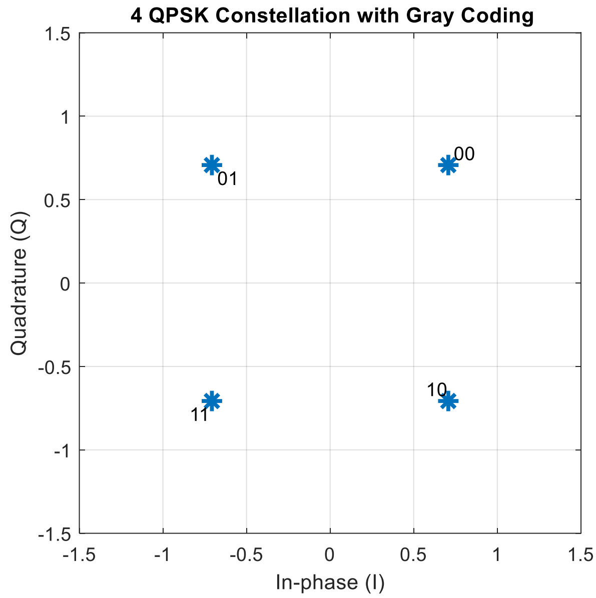
לפי אפנון $QPSK$ קיימים אלמנטים ממשיים ומדומים ולפי הרכב אות המידע $S_M(t)$ שהוצג בשאלות ההכנה המשדר נראה באופן הבא:



קידוד הסימבולים לפי קוד GRAY:

	Symbol	Binary		Code Gray	
A_K		b_1	b_2	b_1	$\boldsymbol{b_2}$
A_1	1	0	0	0	**0**
A_2	j	0	1	0	**1**
A_3	-1	1	0	1	**1**
A_4	$-j$	1	1	1	**0**

ולפי הקונסטלציה:

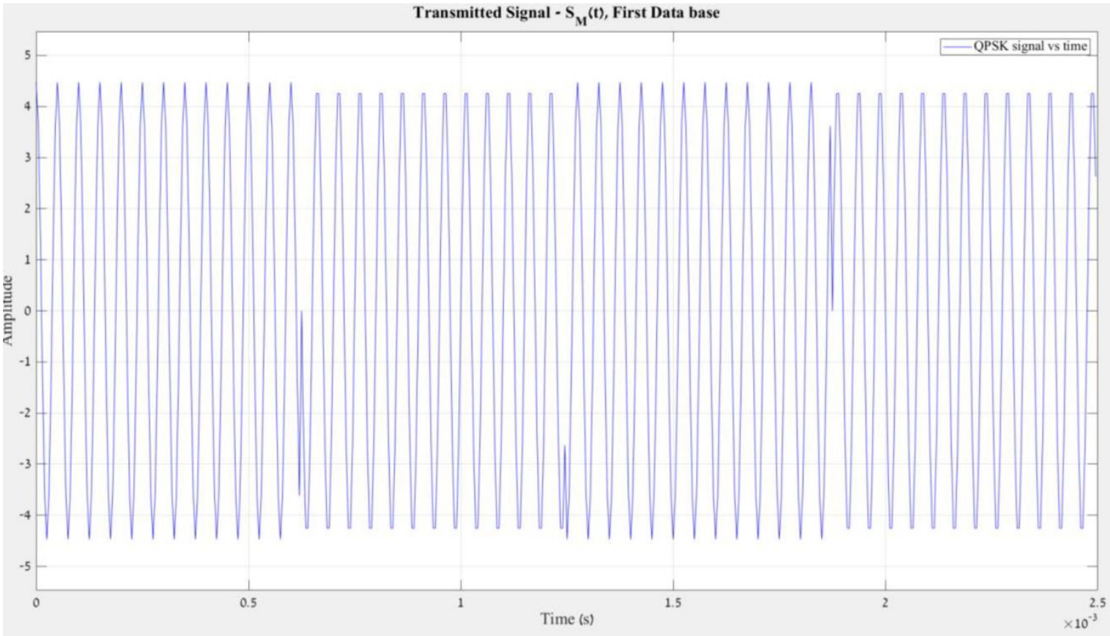


שידור בסיס הנתונים הראשון של $S_M(t)$ בישור הזמן:

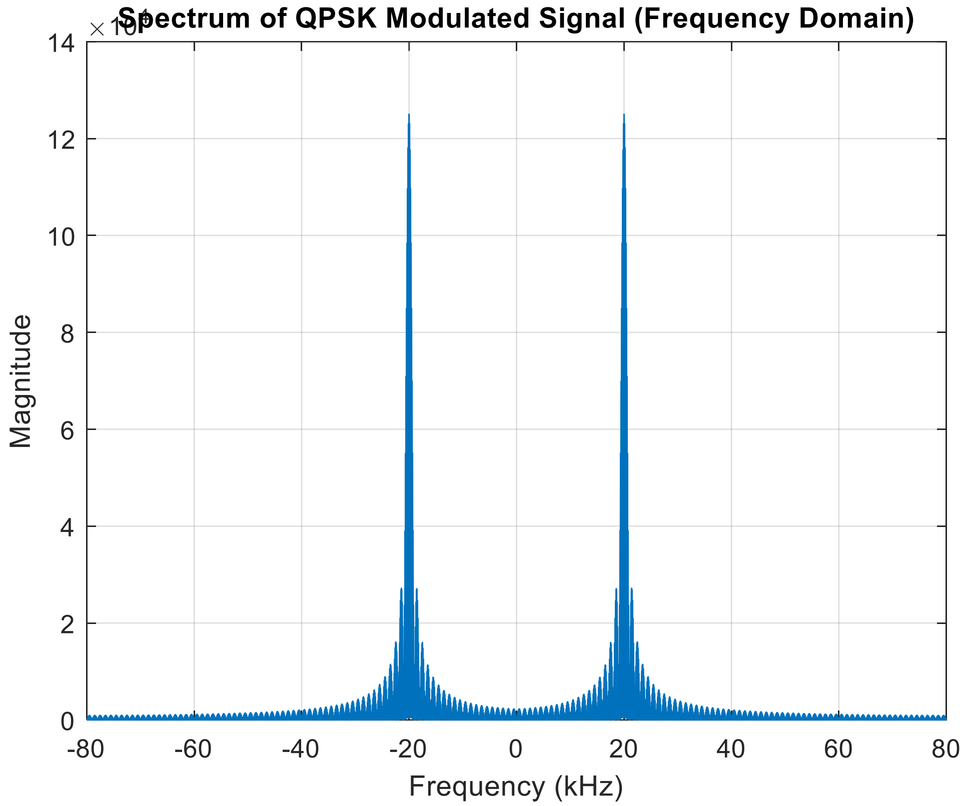
על פי הפרמטרים:

$$P_T = 10\,, A_C = \sqrt{2P_T} = \sqrt{20}$$

$$F_c = 20K\ Hz$$



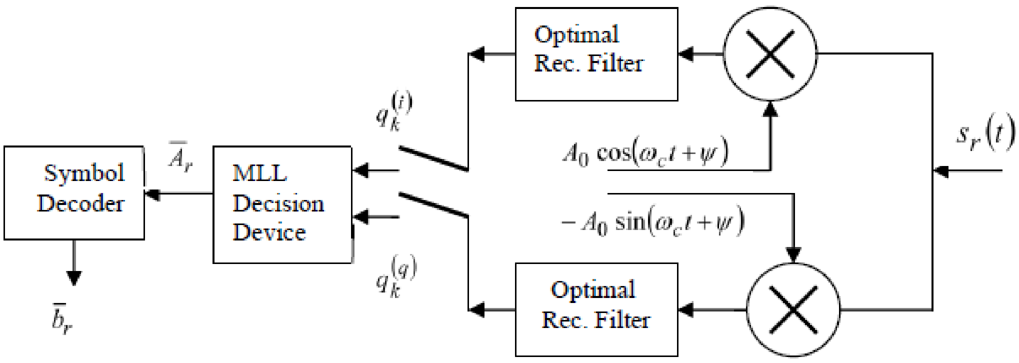
שידור בסיס נתונים שני במישור התדר כאשר אין הפרשי פאזות: $S_M(f)$



<u>בנית המקלט, קליטה ללא רעש</u>

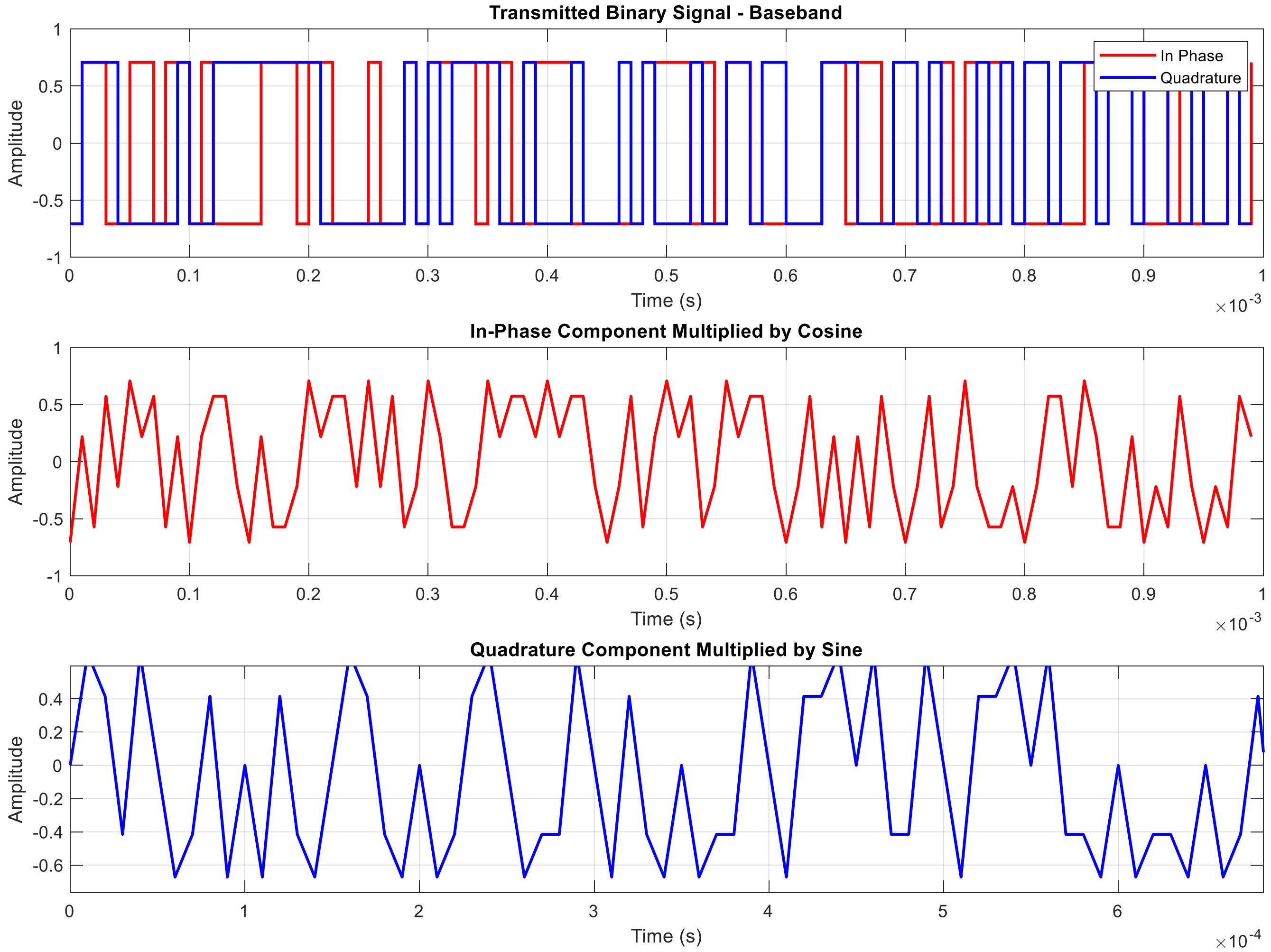
בניית המקלט לפי הפרמטרים של אפנון $QPSK$:

תדר מרכזי של $F_C \ = 20K\ H_Z$



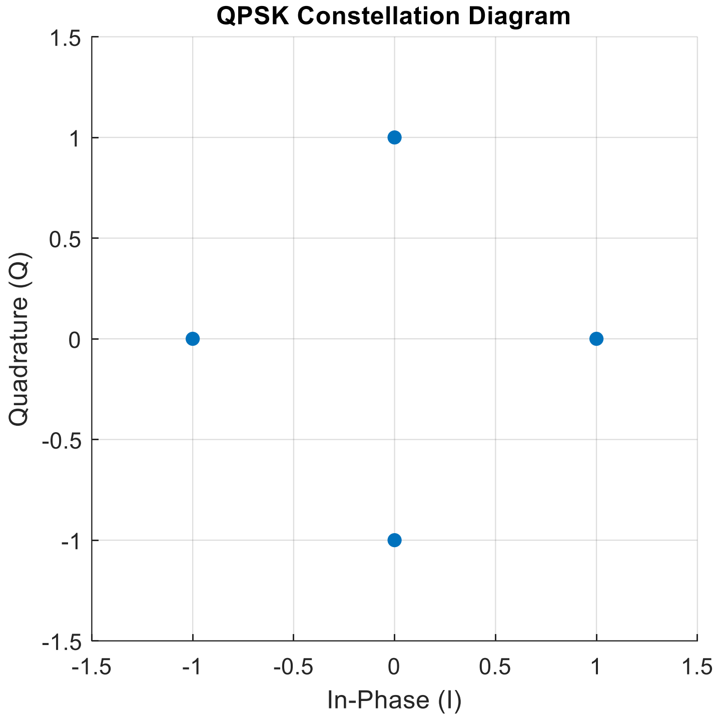
המקלט נבנה על פי דיאגרמת הזרימה, האות המתקבל $S_r(t)$ מורד לתדר בסיס ($baseband$) ולאחר מכן עובר דרך המסנן האופטימלי $Optimal\ Rec\ Filter$, שבו מתקבלים הרכיבים $(\ q_k^q\ )\&(\ q_k^i\ )$ כדי לקבוע איזה סימבול התקבל, הרכיבים מועברים ל$MLL\ Decision\ Device$, שם המכשיר קובע את הסימבול הקרוב ביותר באמצעות חישוב המרחק של הסימבול הנקלט מהקונסטלציה.

שידור בסיס נתונים ראשון מהמשדר למקלט – ערוץ אידיאלי ללא ניחות, ISI או הסחת פאזה



ניתן לראות שהאות הבינארית משודרת באופן מובהק בין 1 ל-1- עוד לפני שהיא נכנסת ל $(MLL\ DECISION\ DEVICE)$ ולאחר הכפלה בקוסינוס וסינוס מקבלת ערכים שמהווים את אפנון $QPSK$

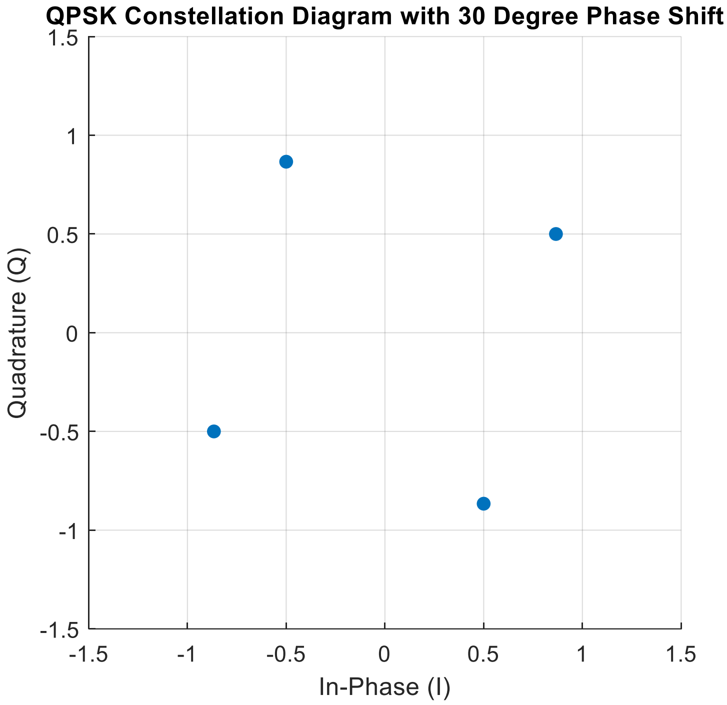
קונסטלציית הסימבולים של אפנון $QPSK$



מרחק הסימבולים אחד מהשני:

	QPSK Symbol Locations:	Distance between other symbols
A_1	$1.00 + 0.00i$	$\sqrt{2}$
A_2	$0.00 + 1.00i$	$\sqrt{2}$
A_3	$-1.00 + 0.00i$	$\sqrt{2}$
A_4	$-0.00 + -1.00i$	$\sqrt{2}$

הקונסטלציה במקלט לאחר ששודרה עם תוספת של 30 מעלות:



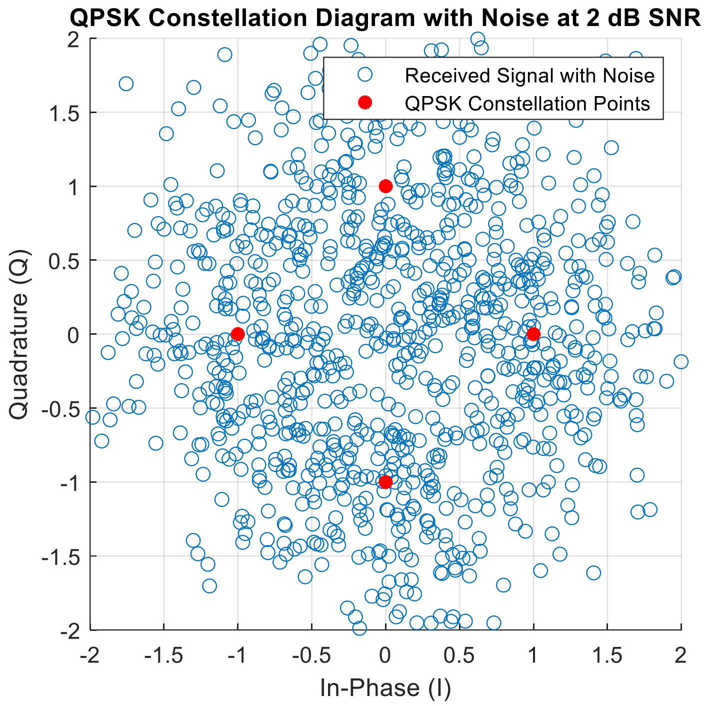
מרחק בין הסימבולים ומיקומם

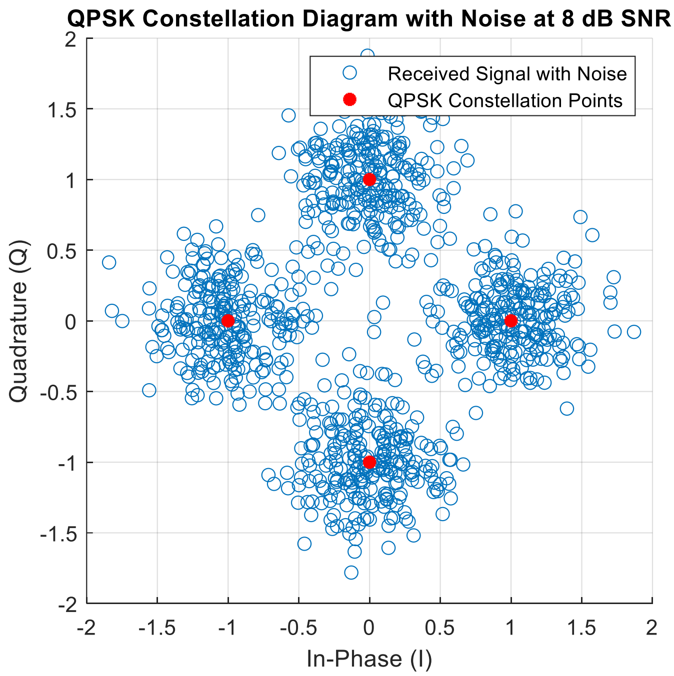
A_K	QPSK Symbol Locations with 30 Degree Phase Shift:	Distance between other symbols
A_1	$0.87 + 0.50i$	$\sqrt{2}$
A_2	$-0.50 + 0.87i$	$\sqrt{2}$
A_3	$-0.87 + -0.50i$	$\sqrt{2}$
A_4	$0.50 + -0.87i$	$\sqrt{2}$

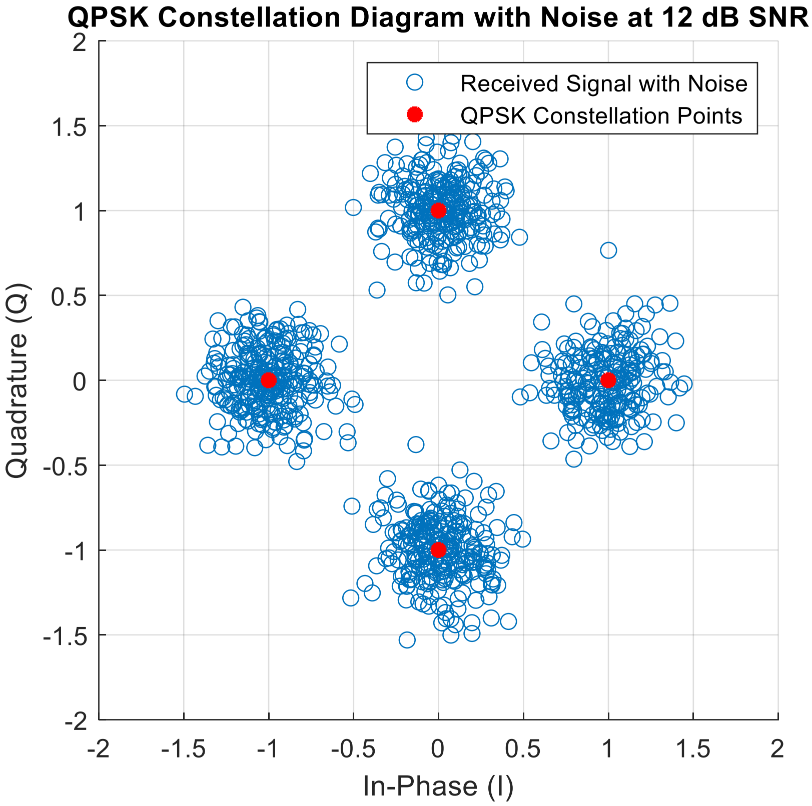
בביצוע השוואה בין קונסטלציית הסימבולים במשדר ובמקלט, ניתן לראות ששינוי המרחקים בין הסימבולים נשמר גם במקרה של סנכרון וגם במקרה של חוסר סנכרון. ההבדל טמון במיקום הסימבולים בקונסטלציה. חוסר סנכרון במקלט גורם לקונסטלציה להסתובב סביב צירה, דבר שמשנה את מיקום הסימבולים. שינוי זה יכול להוביל לבעיה של חוסר החלטיות במקלט, שבו הסימבולים שנקלטים עשויים להתפרש כקרובים לסימבולים אחרים, דבר שעלול לפגוע משמעותית בביצועי המערכת ולהגביר את הסתברות השגיאות.

קליטה עם רעש

נבחר ערכים שנכונים לאפנון QPSK על מנת שנוכל לראות את השפעות הרעש על קונסטלציית הסימבולים ואיך רעש יכול להפריע למכשיר קבלת ההחלטות לקבל החלטה שגויה לסימבול לפי הסתברויות שגיאה שונים ויחסי אות לרעש שונים.







לפי $P_{er_{sym}} = 2 \cdot Q(\sqrt{SNR_S})$

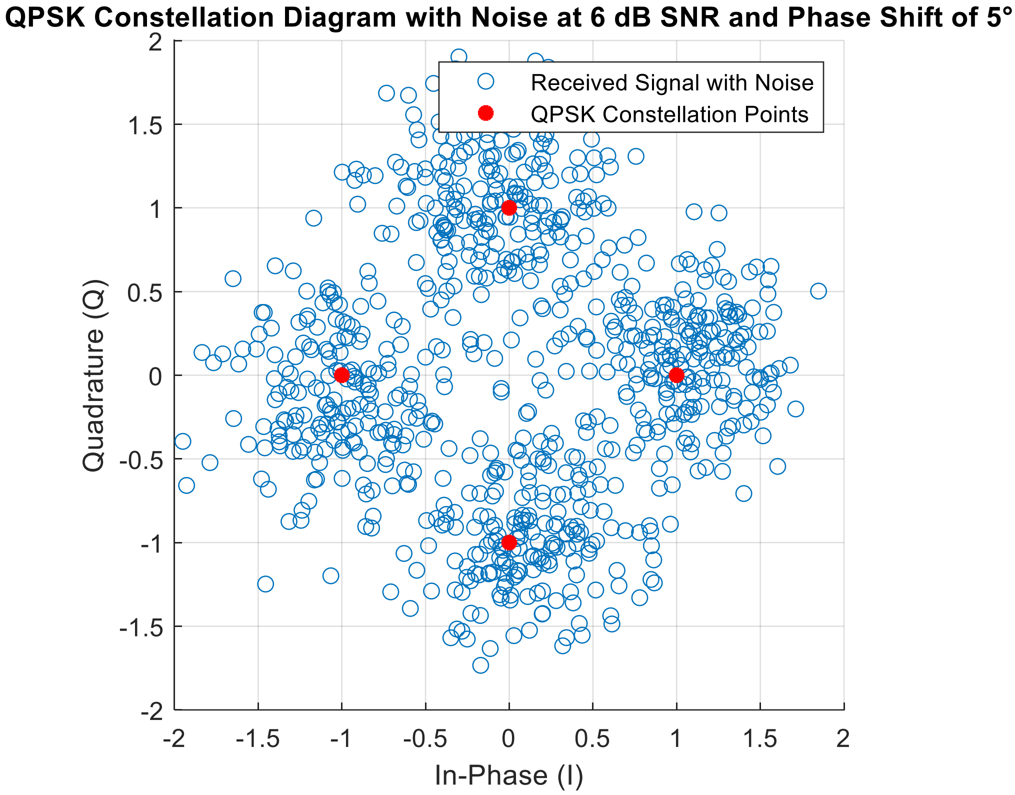
כאשר רעש מוכנס למערכת, הוא מעוות את דיאגרמת הסימבולים. רעש, בדרך כלל בדגם של רעש גאוסי, מוסיף אקראיות לאות המתקבל, וגורם לסמלים להתפשט מהמיקומים האידיאליים שלהם. התפשטות רעש זו גורמת לענן של סמלים שהתקבלו סביב הנקודות האידיאליות ולא הנקודות המדויקות עצמן. ככל שרמת הרעש עולה, ענן זה מתרחב, מה שמוביל לחפיפה גדולה יותר בין סמלים והופך את זה למאתגר יותר עבור המקלט להבחין ביניהם.

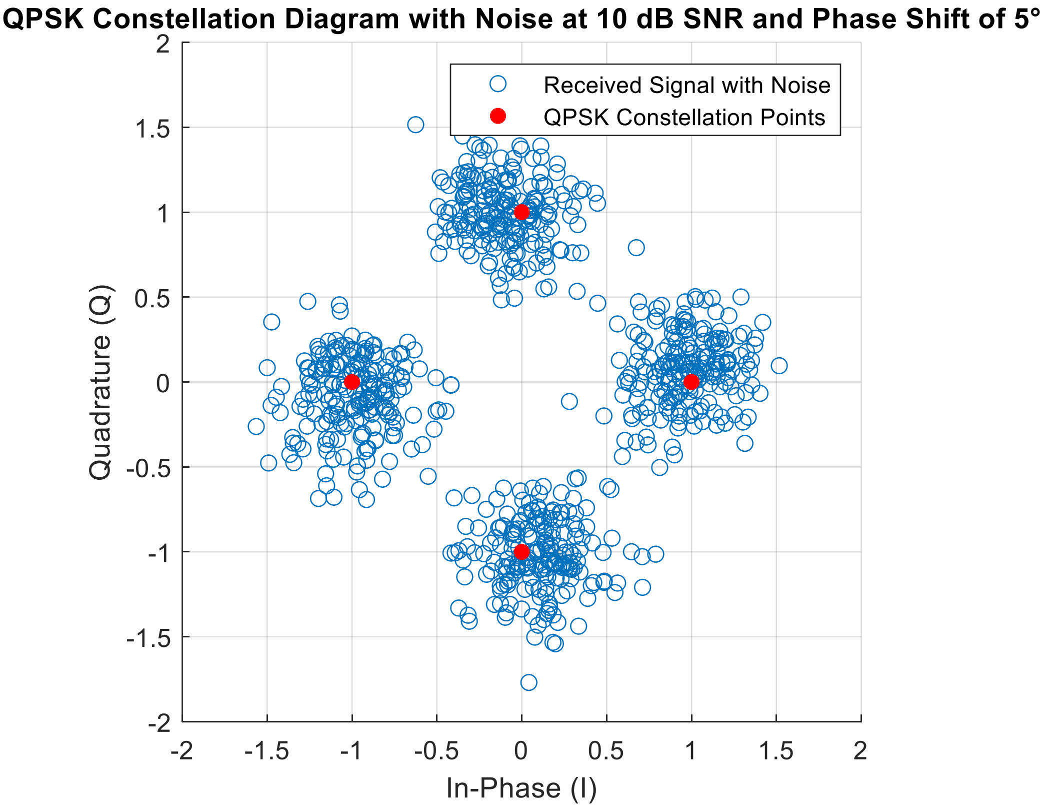
הנוכחות של רעש בתרשים קבוצת הכוכבים מוצגת על ידי ציור הסמלים שהתקבלו כעלילת פיזור. במקרים עם רעש נמוך, הסמלים מתקבצים מקרוב סביב מיקומם האידיאליים, בעוד שעם רמות רעש גבוהות יותר, ההתפשטות גדלה באופן משמעותי, והסמלים חופפים יותר. חפיפה זו גורמת לשיעור שגיאות סיביות גבוה יותר (BER) מכיוון שלמקלט קשה יותר

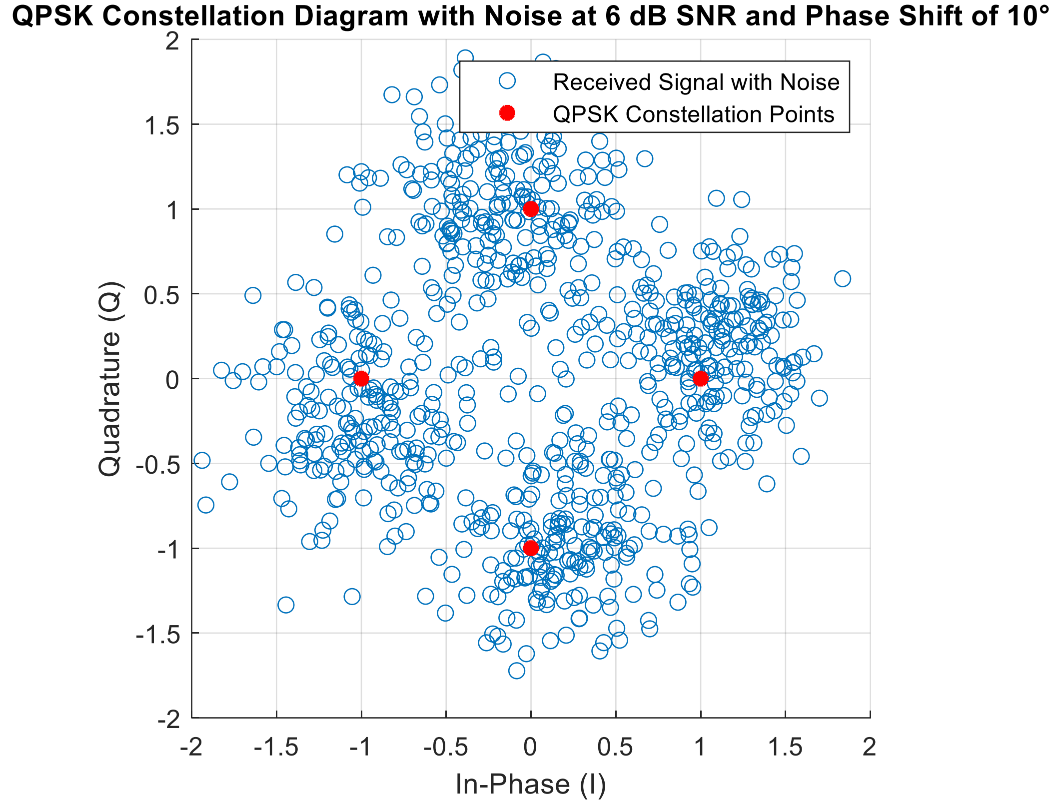
לפענח במדויק את הסמלים המשודרים. יחס האות לרעש (SNR) ממלא תפקיד מכריע בתהליך זה: SNR גבוה יותר מוביל לקונסטלציה הדוקה יותר עם פחות שגיאות, בעוד SNR נמוך יותר מביא לפיזור רחב יותר ולעלייה ב-BER.

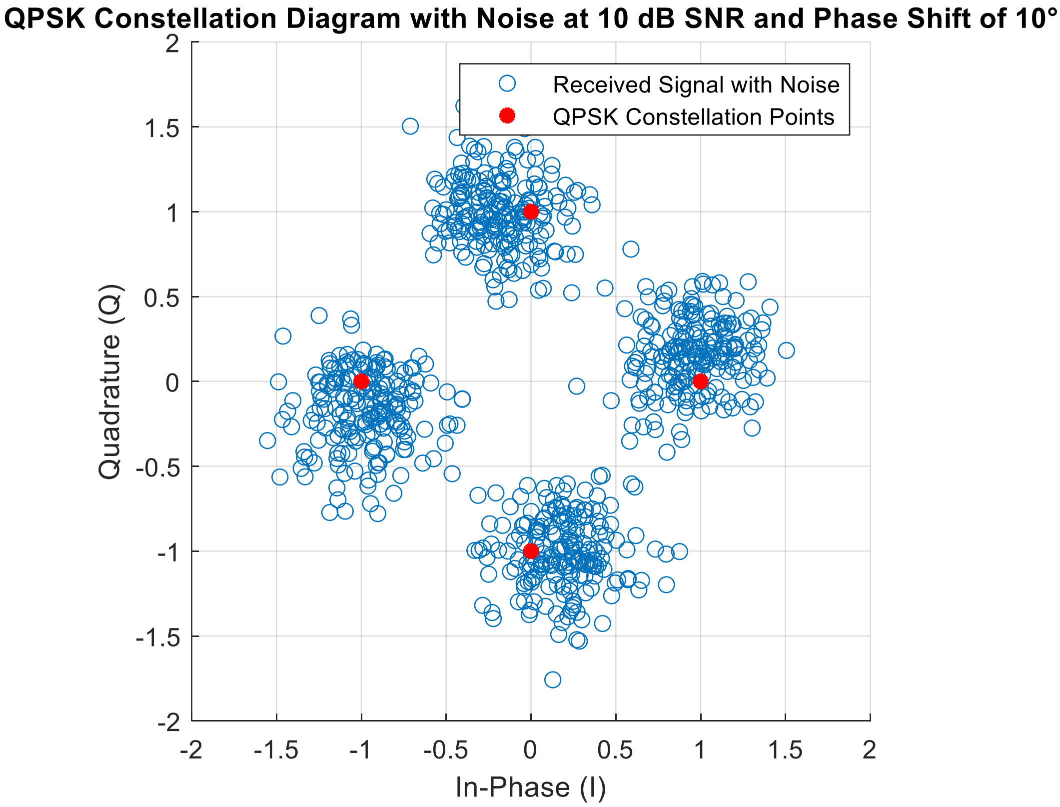
לסיכום, תרשים קונסטלציה עם רעש ממחיש כיצד מיקומם האידיאלי של סמלים מושפעים מרעש, מראה התפשטות שגדלה עם רמת הרעש, מה שבסופו של דבר משפיע על הדיוק של זיהוי הסמלים ומגביר את הסבירות לשגיאות במערכת התקשורת.

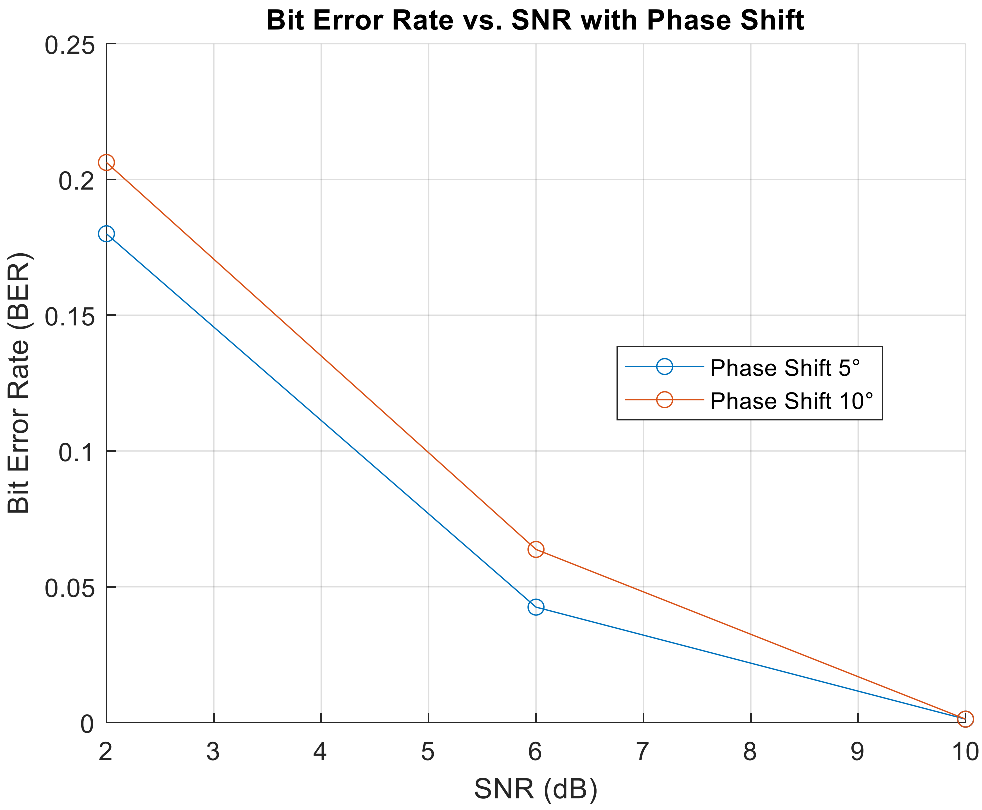
קליטה עם הפרש פאזה קבוע






QPSK Constellation Diagram with Noise at 6 dB SNR and Phase Shift of 10°
Received Signal with Noise
QPSK Constellation Points
Quadrature (Q)
In-Phase (I)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2


QPSK Constellation Diagram with Noise at 10 dB SNR and Phase Shift of 10°
Received Signal with Noise
QPSK Constellation Points
Quadrature (Q)
In-Phase (I)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2



<u>ללא שינוי פאזה (מקרה אידיאלי)</u>

כאשר אין שינוי פאזה, נקודות הקונסטלציה במקלט מתיישרות בצורה מושלמת עם אלו שבמשדר. הזיהוי הוא פשוט, ושגיאות תלויות בעיקר ברמת הרעש.

<u>עם הסטת פאזה</u>

שינוי פאזה גורם לנקודות להיות מוטעות. המקלט, אשר מניח שאין שינוי פאזה, יפרש באופן שגוי את קבוצת הכוכבים המסובבת, מה שיוביל לעלייה בשגיאות הסמלים. חוסר יישור זה מביא ל-B_{ER} גבוה יותר עבור אותו SNR בהשוואה למקרה האידיאלי.

שינויי פאזה מציגים שגיאות בזיהוי סמלי $QPSK$ על ידי סיבוב של דיאגרמת קונסטלציה. סיבוב זה מיישר לא נכון את הסמלים, וגורם לעלייה בשיעור שגיאות הסיביות. כתוצאה מכך, עבור אותו SNR, מערכות עם הזזות פאזה מציגות ביצועים גרועים יותר בהשוואה למערכות עם סנכרון פאזה מושלם. זה מוביל ל-B_{ERs} גבוה יותר וממחיש את החשיבות הקריטית של סנכרון פאזה במערכות תקשורת.

בעבודתי על תקשורת דיגיטלית, התמקדתי באפנון QPSK, תוך בחינת כיצד המערכת מתנהגת גם עם ובלי רעש. יצרתי גרפים שמראים כיצד סמלים מזוהים בתנאי רעש שונים, מה שמראה בבירור שהזיהוי משתפר ככל שה-SNR עולה. למדתי גם על תהליך העברת אות מאופנן, החל מהמרת נתונים בינאריים לאות רציף באמצעות רכיבים, ולאחר מכן אפנון, שידור, קליטה, דמודולציה, ולבסוף שימוש בהתקן החלטה MLL כדי לזהות במדויק את המידע המשודר. זה העמיק את ההבנה שלי כיצד רעש משפיע על איכות האות וכיצד המערכת מעבדת נתונים מהשידור ועד לזיהוי.

מקורות ספרותיים:

- הרצאות קורס תקשורת ספרתית (ד״ר משה זוהר).
- J. G. Proakis and M. Salehi – Digital Communications (2007)
- Mathuranathan Viswanathan - Wireless Communication Systems in MATLAB- Gaussian Waves (2020).
- John G. Proakis, Masoud Salehi - Fundamentals of Communication Systems- Prentice Hall (2013).