Vorlesung Computational Intelligence:

Teil 2: Fuzzy-Logik
Inferenz, Defuzzifizierung

Ralf Mikut, Wilfried Jakob, Markus Reischl
Karlsruher Institut für Technologie, Institut für Automation und angewandte Informatik
E-Mail: ralf.mikut@kit.edu, wilfried.jakob@kit.edu

jeden Donnerstag 14:00-15:30 Uhr, Nusselt-Hörsaal

Gliederung

Implikation

Implikation: WENN A DANN B mit $\mu_A(u)$

- bei Verknüpfung mit modus ponens $\mu_B(u) = \mu_A(u)$
- ACHTUNG ! ergibt sich nicht direkt aus Verallgemeinerung, weil es Fehlschluss zulässt (wenn nicht A, dann nicht B), richtige Semantik erst durch zusätzliche Regeln gesichert!

In Regelbasen liegen Regeln dann oft so vor:

$$R_r : \text{WENN } \underbrace{\underbrace{x_1 = A_{1,Rr}}_{\text{Teilprämisse } V_{r1}} \text{ UND } \cdots \text{ UND } \underbrace{x_s = A_{s,Rr}}_{\text{Teilprämisse } V_{rs}}}_{\text{Prämisse } V_r} \text{ DANN } y = C_r$$

Beispiel: Suche nach einem geeigneten Weg

- Kriterium:
  WENN Strecke=kurz UND Fahrzeit=gering DANN Weg=geeignet
- Zugehörigkeitsfunktionen
  - Kurz = Trapez [m_1=0, m_2=0, b_1 = 0, b_2=10], Einheit: km
  - Gering = Trapez [m_1=0, m_2=0, b_1 = 0, b_2=30], Einheit: min
- mehrere Wege zur Auswahl : (* - Semantikproblem)

	Minimum	Produkt	Beschränkte Differenz
A: 5 km (0.5), 21 min (0.3)	0.3	0.15	0*
B: 5 km (0.5), 15 min (0.5)	0.5*	0.25	0*
C: 3 km (0.7), 15 min (0.5)	0.5*	0.35	0.2

- Semantische Probleme:
  - Minimum: keine (Teil-) Kompensation
  - beschränkte Differenz: Summe Wahrheitswerte <1
- EMPFEHLUNG: Produkt als UND-Operator

Weitere wünschenswerte Eigenschaften

Die folgenden wünschenswerten Eigenschaften gelten leider nicht für alle Operatoren

$$\cap(\mu_1, \mu_1) = \mu_1 \qquad \text{(Idempotenz bei UND-Verknüpfungen)}$$

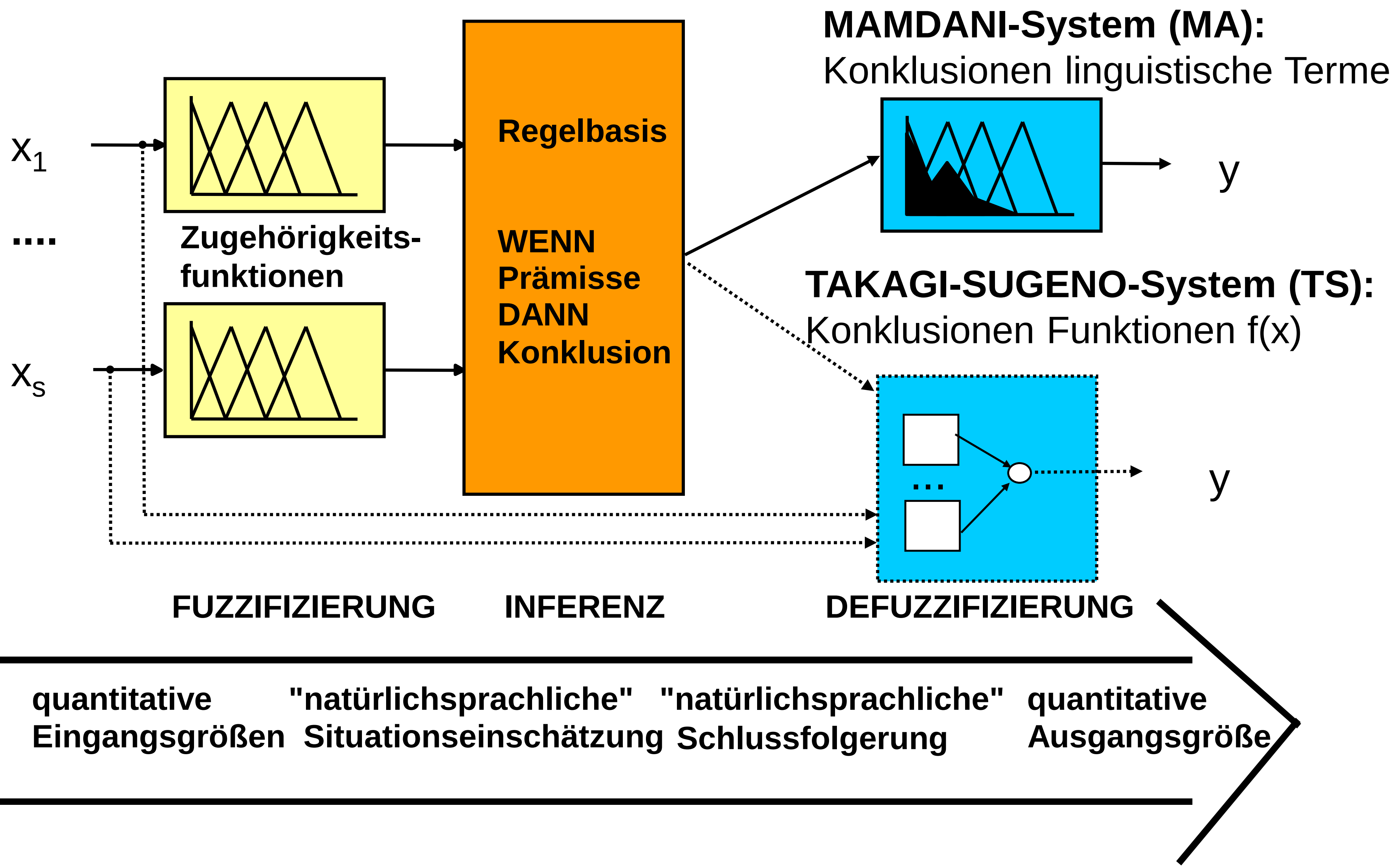
$$\cup(\mu_1, \mu_1) = \mu_1 \qquad \text{(Idempotenz bei ODER-Verknüpfungen)}$$

$$\cap(\mu_1, \overline{\mu_1}) = 0 \qquad \text{(Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch)}$$

$$\cup(\mu_1, \overline{\mu_1}) = 1 \qquad \text{(Satz vom ausgeschlossenen Dritten)}$$

	Minimum	Produkt	Beschr. Differenz	Maximum	Alg. Summe	Beschr. Summe	Summe
Verkn. mit Eins-Element:	x	x	x	x	x	x	-
Verkn. mit Null-Element:	x	x	x	x	x	x	x
Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch/Dritten	-	-	x	-	-	x	x
Idempotenz	x	-	-	x	-	-	-
Kommutativität	x	x	x	x	x	x	x
Assoziativität	x	x	x	x	x	x	x
Semantik Wegbeispiel	-	x	-				

Fuzzy-Modelle (Struktur)

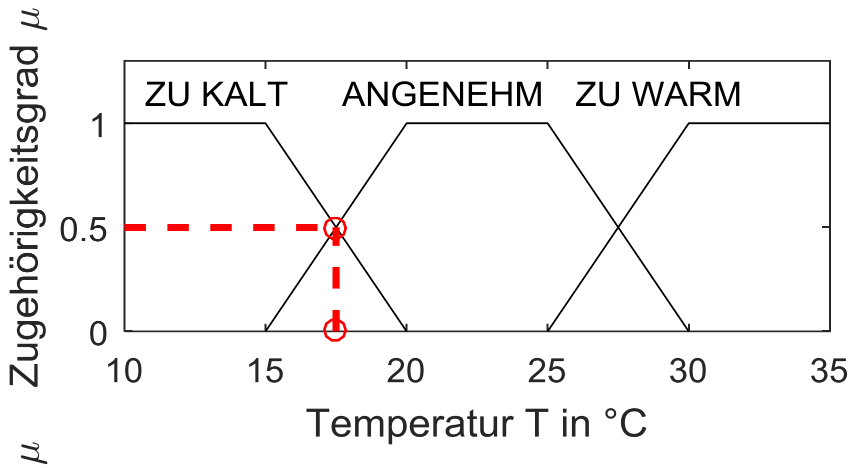


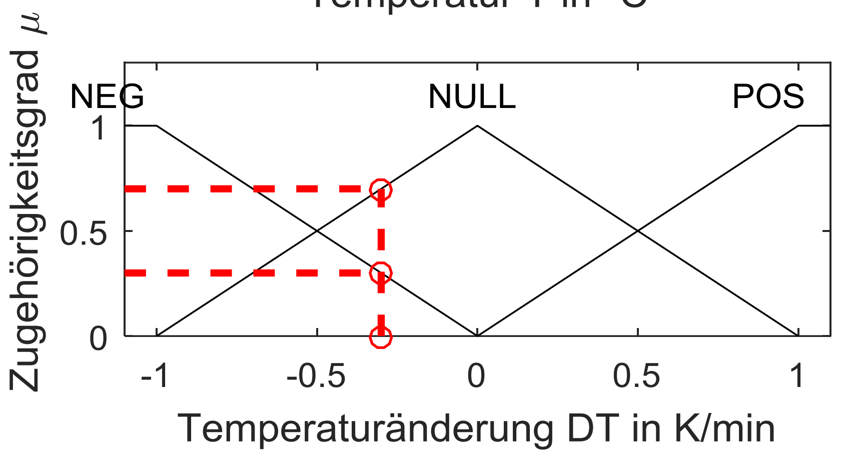
Notwendige Informationen für ein Fuzzy-System

- Beschreibung des Fuzzy-Systems:
  - strukturelle Festlegung Ein- und Ausgangsgrößen
  - Zugehörigkeitsfunktionen für Ein- und Ausgangsgrößen
  - Regelbasis (Art der Konklusionen beschreibt auch den Regeltyp)
  - optional: Regelplausibilitäten (meist nicht verwendet, dann als Wahr bzw. 1)
  - Fuzzy-Operatoren für UND/ODER (t-Norm und t-Konorm)
- Zur Berechnung der Ausgangsgröße müssen alle reellwertigen Eingangsgrößen bekannt sein
- Auswertung:
  - Fuzzifizierung (siehe letzte Vorlesung)
  - Inferenz (heute)
  - Defuzzifizierung (nächste Vorlesung)

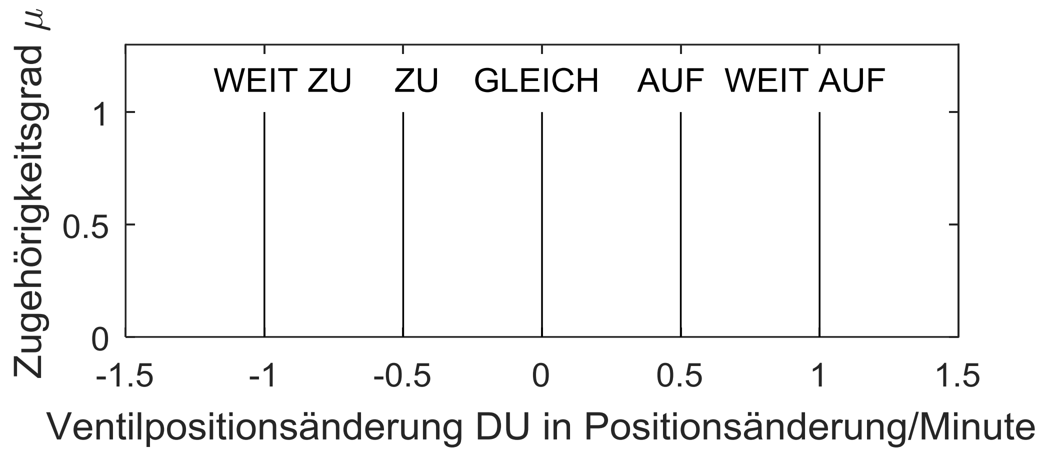
Beispiel Temperaturregelung: ZGFs

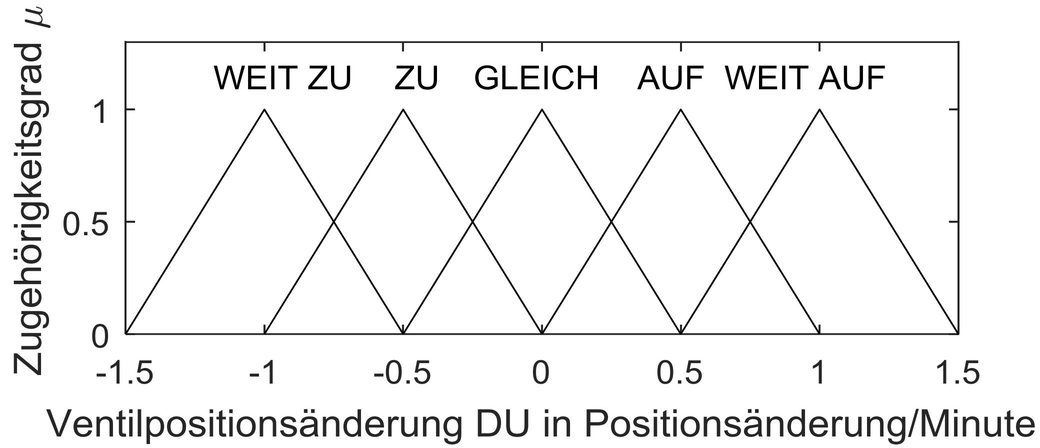
Zwei Eingangsgrößen x_1 = T, x_2 = DT





Eine Ausgangsgröße y = DU in 2 Varianten Singletons (oben), Dreieck (unten)





Beispiel für alle folgenden Folien:

T = 17.5°C: $\mu_{ZU\ WARM} = 0.0$, $\mu_{ANGENEHM} = 0.5$, $\mu_{ZU\ KALT} = 0.5$

DT = -0.3 K/min: $\mu_{POS} = 0.0$, $\mu_{NULL} = 0.7$, $\mu_{NEG} = 0.3$

gesucht: DU

Beispiel Temperaturregelung: Regelbasis

Zwei wichtige Formen am Beispiel Temperaturregelung mit T: Temperatur,

DT: Temperaturänderung, DU: Öffnung Heizventil (Richtung der Änderung!!)

- LISTE:
  1. WENN T=ZU WARM UND DT=POS DANN DU=WEIT ZU
  2. WENN T=ANGENEHM UND DT=POS DANN DU=ZU
  3. WENN T=ZU KALT UND DT=POS DANN DU=GLEICH
  4. WENN T=ZU WARM UND DT=NULL DANN DU=ZU
  5. WENN T=ANGENEHM UND DT=NULL DANN DU=GLEICH
  6. WENN T=ZU KALT UND DT=NULL DANN DU=AUF
  7. WENN T=ZU WARM UND DT=NEG DANN DU=GLEICH
  8. WENN T=ANGENEHM UND DT=NEG DANN DU=AUF
  9. WENN T=ZU KALT UND DT=NEG DANN DU=WEIT AUF
- TABELLE:

T DT	ZU WARM	ANGENEHM	ZU KALT
POS	WEIT ZU	ZU	GLEICH
NULL	ZU	GLEICH	AUF
NEG	GLEICH	AUF	WEIT AUF

Typen von Fuzzy-Regeln: Konklusionen

In Regelbasen liegen Regeln meist so vor:

$$R_r : \text{WENN } \underbrace{\underbrace{x_1 = A_{1,Rr}}_{\text{Teilprämisse } V_{r1}} \text{ UND } \cdots \text{ UND } \underbrace{x_s = A_{s,Rr}}_{\text{Teilprämisse } V_{rs}}}_{\text{Prämisse } V_r} \text{ DANN } y = C_r$$

Konklusionen:

- Mamdani-Systeme:
  linguistische Terme $y = C_r = B_c$ (häufigster Fall, wie im Beispiel)
  ... DANN DU=WEIT ZU

- Takagi-Sugeno-Systeme (TS)
  (Synonyme: Takagi-Sugeno-Kang-Systeme, TSK): $y = C_r = f_r(\mathbf{x})$
  ... DANN $y = DU = a\,(T_{soll}-T) + b\,(DT)^2$
  mit Konstanten a, b und zusätzlichem Eingang T_{soll}

- Singleton-Systeme (Sonderfall von Mamdani-Systemen mit Singletons als ZGF und Sonderfall vom Takagi-Sugeno-System mit Konstanten als Funktionen):
  $y = y_r$, y_r reellwertig
  ... DANN $y = DU = -1\ \text{min}^{-1}$

Typen von Fuzzy-Regeln: Teilprämissen

In Regelbasen liegen Regeln standardmäßig so vor:

$$R_r : \text{WENN } \underbrace{\underbrace{x_1 = A_{1,Rr}}_{\text{Teilprämisse } V_{r1}} \text{ UND } \cdots \text{ UND } \underbrace{x_s = A_{s,Rr}}_{\text{Teilprämisse } V_{rs}}}_{\text{Prämisse } V_r} \text{ DANN } y = C_r$$

Typen von Teilprämissen V_{rl}, Welche linguistischen Terme pro Eingangsgröße:

- genau ein Term (häufigster Fall) $A_{l,Rr} = A_{l,i}$

  Beispiel: WENN T = ZU WARM UND ...

- mehrere (benachbarte) Terme $A_{l,Rr} = A_{l,r_s} \cup \cdots \cup A_{l,r_e}, \quad 1 \leq r_s < r_e \leq m_l$

  Beispiel: WENN (T = ANGENEHM ODER ZU WARM) UND ...

- alle Terme $A_{l,Rr} = A_{l,1} \cup A_{l,2} \cdots \cup A_{l,m_l}$

  Beispiel: WENN (T = ZU KALT ODER ANGENEHM ODER ZU WARM) UND ...

  In diesem Fall kann bei geeigneten ZGFs und Operatoren (z.B. Standardpartition, ODER mit beschränkter Summe) der Term komplett weggelassen werden!

Sonderfälle

- Kaskadierte Fuzzy-Systeme
  - Fuzzy-(Teil)Systeme, wo schon die Eingangsgrößen nicht reellwertig, sondern Fuzzy-Mengen sind (hier nicht betrachtet)
  - Fuzzy-(Teil)Systeme, wo nur Zugehörigkeitswerte der Ausgangsgrößen gesucht werden (Systeme ohne Defuzzifizierung)
- Kompliziertere UND/ODER-Verknüpfungen in der Regelprämisse, z.B. so
  WENN (T=ZU KALT UND DT=NULL) ODER (T=ANGENEHM UND DT=NEG)
  DANN DU=AUF
- Regeln können mit Regelplausibilitäten (Synonym: Wichtungsfaktoren) versehen werden, die eine graduelles Maß für die Glaubwürdigkeit der Regel
  (z.B. 0.5 für 50%) angeben (ohne Angabe: Regelplausibilität 1)
  ... DANN DU=WEIT ZU ($\mu_r = 0.5$)
- Regeln mit negativen Empfehlungen (erfordern Hyperinferenz, hier nicht behandelt)
  ... DANN DU= NICHT WEIT ZU

Inferenz

- *Prämissenauswertung* (Synonym: Aggregation)
  Bestimmung des Zugehörigkeitsgrades der Prämisse einer linguistischen Regel durch Verknüpfung der Zugehörigkeitsgrade aller linguistischer Teilprämissen mittels Fuzzy-Operatoren
- *Aktivierung (*Synonym Komposition*)*
  Bestimmung des Zugehörigkeitsgrades der Konklusion einer linguistischen Regel aus dem Zugehörigkeitsgrad der Prämisse und einer eventuell vorhandenen Regelplausibilität
- *Akkumulation (nur bei Mamdani-Fuzzy-Systemen)*
  Zusammenfassen der Zugehörigkeitsgrade der Konklusionen aller (linguistischen) Regeln zu einer Fuzzy-Menge der Ausgangsgröße

Anmerkungen:

- in der Literatur z.T. abweichende Bezeichnungen
  (Aggregation für Akkumulation usw.)

Prämissenauswertung

$$R_r: \text{WENN } \underbrace{\underbrace{x_1 = A_{1,Rr}}_{\text{Teilprämisse } V_{r1}} \text{ UND } \cdots \text{ UND } \underbrace{x_s = A_{s,Rr}}_{\text{Teilprämisse } V_{rs}}}_{\text{Prämisse } V_r} \text{ DANN } y = C_r$$

- Operation:
  UND - Verknüpfung der Zugehörigkeitsgrade aller s Teilprämissen einer Regel R_r
  (evtl. unterlagertes ODER innerhalb der Teilprämissen)

$$\mu_{V_r}(\mathbf{x}) = \bigcap_{l=1}^{s} \mu_{V_{r,l}}(x_l) \text{ mit } \mu_{V_{r,l}}(x_l) = \bigcup_{i \text{ mit } A_{l,i} \in V_{r,l}} \mu_{A_{l,i}}(x_l)$$

- Ausgangsgröße:
  ein Zugehörigkeitsgrad der Prämisse pro Regel
- Bemerkung:
  Zugehörigkeitsgrad der Prämisse als s-dimensionale Zugehörigkeitsfunktion interpretierbar

Prämissenauswertung (Beispiel)

- **Beispiel (Regel 5,** Produkt-Operator)**:**

  WENN T=ANGENEHM UND DT=NULL DANN ...

- $\mu_{V5} = (\mu_{ANGENEHM}(x_1)=0.5) \quad * \quad (\mu_{NULL}(x_2)=0.7) = 0.35$

Aktivierung

- **Aufgabe**:
  Bestimmung des Zugehörigkeitsgrades der Konklusion einer linguistischen Regel aus dem Zugehörigkeitsgrad der Prämisse und einer eventuell vorhandenen Regelplausibilität

$$R_r : \text{WENN } \underbrace{\underbrace{x_1 = A_{1,Rr}}_{\text{Teilprämisse } V_{r1}} \text{ UND } \cdots \text{ UND } \underbrace{x_s = A_{s,Rr}}_{\text{Teilprämisse } V_{rs}}}_{\text{Prämisse } V_r} \text{ DANN } \boxed{y = C_r}$$

- **Operation**:
  Implikation: Zuweisung des Zugehörigkeitsgrad der Prämisse und einer eventuell vorhandenen Regelplausibilität zum Zugehörigkeitsgrad der Konklusion

$$\mu_{C_r}(\mathbf{x}) = \mu_{V_r}(\mathbf{x}) \cap \mu_r$$

- **Ergebnis**:
  ein Zugehörigkeitsgrad der Konklusion pro Regel

Aktivierung: Beispiel

- Beispiel (Regel 5) ohne Regelplausibilitäten:

WENN T = ANGENEHM UND DT = NULL DANN DU = GLEICH

---- (μ_{V5} = 0.35) --------------------- (μ_{C5} = 0.35)

- Beispiel (Regel 5) mit Regelplausibilität μ_5=0.5:

WENN T = ANGENEHM UND DT = NULL DANN DU = GLEICH

---- (μ_{V5} = 0.35) --------------------- (μ_{C5} = 0.35 * 0.5 = 0.175)

Umsetzung der Akkumulation

Zwei Rechenwege für Aktivierung und Akkumulation:

- **1. Variante:**
  Überlagerung der Zugehörigkeitsfunktionen der Regelkonklusionen
  - steht fast immer so in der Literatur
  - hoher Rechenaufwand (Rechnen mit r Funktionen)
- **2. Variante:**
  Zergliederung in Teilschritte mit Akkumulation I-III
  - *Akkumulation I*
    (Zusammenfassung der Zugehörigkeitsgrade der Konklusionen aller Regeln mit gleichen Konklusionen)
  - *Akkumulation II*
    (Berechnung der Fuzzy-Mengen der linguistischen Terme der Ausgangsgröße)
  - *Akkumulation III*
    (empfohlener Zugehörigkeitsgrad für alle Werte der Ausgangsgröße)
  - niedriger Rechenaufwand (Rechnen mit $m_y < r$ Funktionen, sinnvoll bei vielen Regeln mit gleichen Konklusionen)

1. Variante: Akkumulation

- **Aufgabe:**
  Zusammenfassen der Zugehörigkeitsgrade der Konklusionen aller (linguistischen) Regeln zu einer Fuzzy-Menge der Ausgangsgröße
- **Operation:**

  1. UND-Verknüpfung der Zugehörigkeitsgrade der Regelkonklusion mit der Zugehörigkeitsfunktion des linguistischen Terms der Ausgangsgröße $C_r = B_c$

  2. ODER-Verknüpfung der Ergebnisse von 1. (Verknüpfung von Funktionen!)

$$\mu_y(y, \mathbf{x}) = \bigcup_{r=1}^{r_{max}} \mu_{B_c}(y) \cap \mu_{C_r}(\mathbf{x})$$

- **Ergebnis:**

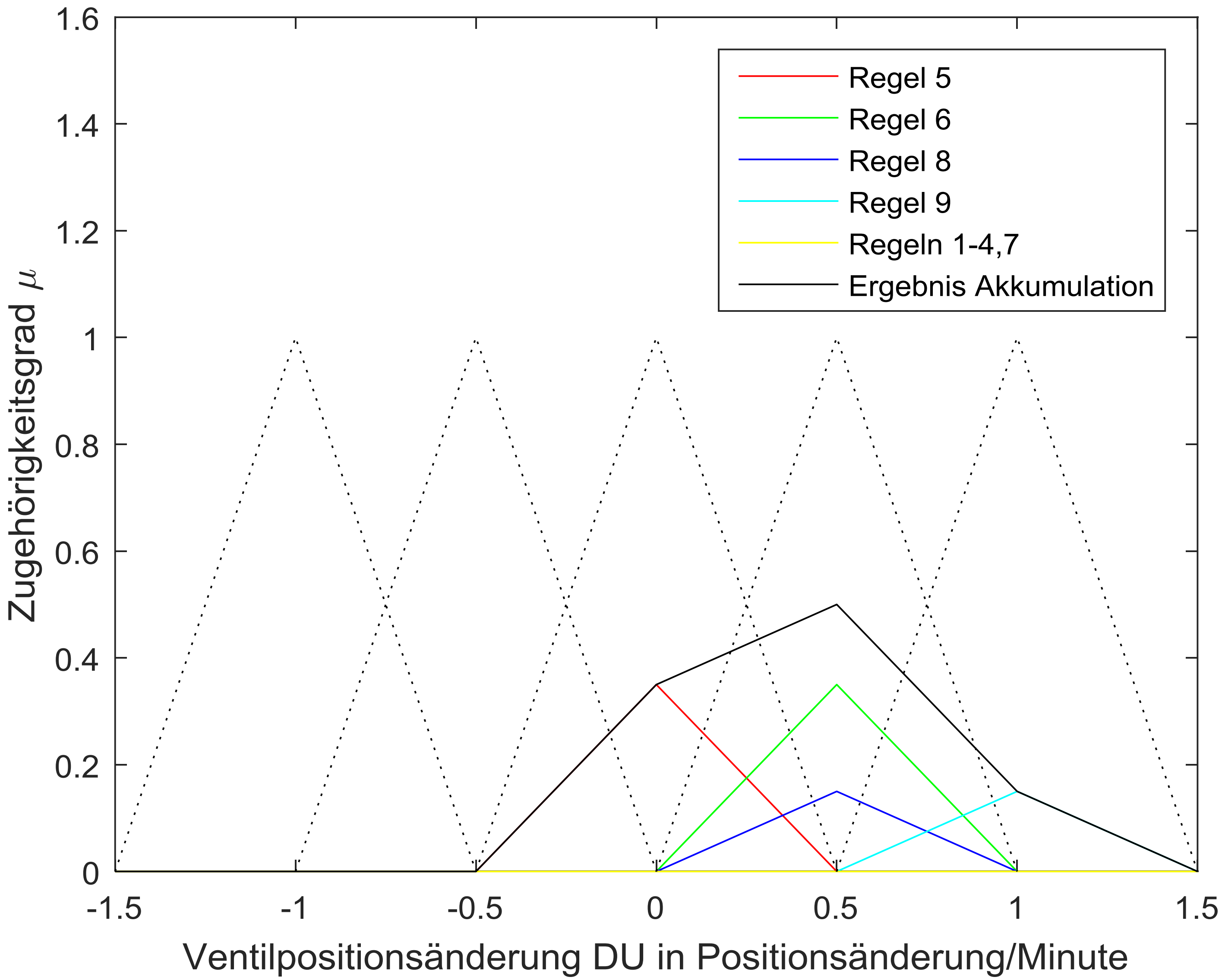
  empfohlener Zugehörigkeitsgrad für alle Werte der Ausgangsgröße
- **Bemerkung:**
  nur für Mamdani-Systeme notwendig, wird für Takagi-Sugeno-Systeme und für Singleton-Systeme mit der Defuzzifizierung kombiniert

1. Variante: Akkumulation (Beispiel)

Ergebnis Aktivierung

- Regeln r=1-4, 7: $\mu_{Cr} = 0$
- Regel 5: $\mu_{C5} = 0.35$
  ... DANN DU = GLEICH
- Regel 6: $\mu_{C6} = 0.35$
  ... DANN DU = AUF
- Regel 8: $\mu_{C8} = 0.15$
  ... DANN DU = AUF
- Regel 9: $\mu_{C9} = 0.15$
  ... DANN DU = WEIT AUF

Akkumulation mit Produkt/Beschränkter Summe



2. Variante: Idee zum Umformen der Regeln

Interpretation als ODER-Verknüpfung:

- Regel 1:

  WENN T=ZU WARM UND DT=POS DANN DU=WEIT ZU
- Regel 2,4

  WENN (T=ANGENEHM UND DT=POS) ODER (T=ZU WARM UND DT=NULL) DANN DU=ZU
- Regel 3,5,7:
  WENN (T=ZU KALT UND DT=POS) ODER (T=ANGENEHM UND DT=NULL) ODER (T=ZU WARM UND DT=NEG) DANN DU=GLEICH
- Regel 6,8:
  WENN (T=ZU KALT UND DT=NULL) ODER (T=ANGENEHM UND DT=NEG) DANN DU=AUF
- Regel 9:
  WENN T=ZU KALT UND DT=NEG DANN DU=WEIT AUF

Kommentare:

- Interpretation ist Grundidee für Akkumulation I

2. Variante: Akkumulation I

- **Aufgabe:**
  Zusammenfassung der Zugehörigkeitsgrade der Konklusionen aller Regeln mit gleichen Konklusionen
- **Operation:**
  ODER-Verknüpfung der Zugehörigkeitsgrade derjenigen Konklusionen mit Term B_c

$$\mu_{B_c,AkI}(\mathbf{x}) = \bigcup_{r \text{ mit } C_r = B_c} \mu_{C_r}(\mathbf{x})$$

- **Ergebnis:**
  empfohlener Zugehörigkeitsgrad für alle linguistischen Terme der Ausgangsgröße

2. Variante: Akkumulation I: Beispiel

- Ergebnis Aktivierung (Regeln 1-4, 7: $\mu_{Cr} = 0$)

Regel 5: ... DANN Öffnung Heizventil = GLEICH

--------- ($\mu_{C5} = 0.35$) ---------------------

Regel 6: ... DANN Öffnung Heizventil = AUF

-------- ($\mu_{C6} = 0.35$) ------------------------

Regel 8: ... DANN Öffnung Heizventil = AUF

-------- ($\mu_{C8} = 0.15$) ------------------------

Regel 9: ... DANN Öffnung Heizventil = WEIT AUF

--------- ($\mu_{C9} = 0.15$) ------------------------

- bei Verwendung der Beschränkten Summe:

$\mu_{AUF} = \mu_{C6} + \mu_{C8} = 0.50$

$\mu_{GLEICH} = \mu_{C5} = 0.35$

$\mu_{WEIT\ AUF} = \mu_{C9} = 0.15$

2. Variante: Akkumulation II

- **Aufgabe:**
  Berechnung der Fuzzy-Mengen der linguistischen Terme der Ausgangsgröße
- **Operation:**

  UND-Verknüpfung der Wahrheitswerte der linguistischen Terme (aus Akkumulation I) mit den Zugehörigkeitsfunktionen der jeweiligen Terme der Ausgangsgröße (punktweise Anwendung des UND-Operators)

$$\mu_{B_c,AkII}(y,\mathbf{x}) = \mu_{B_c}(y) \cap \mu_{B_c,AkI}(\mathbf{x})$$

- **Eingangsgrößen:**
  - Zugehörigkeitsfunktion (unabhängig von den Eingangsgrößen) - eine *Funktion*
  - Wahrheitswert des linguistischen Terms der Ausgangsgröße aus den Regeln (abhängig von Eingangsgröße des Fuzzy-Systems u) - ein *Wert*
- **Ausgangsgröße:**
  Fuzzy-Menge des linguistischen Terms der Ausgangsgröße (modifizierte Zugehörigkeitsfunktion) - eine *Funktion*

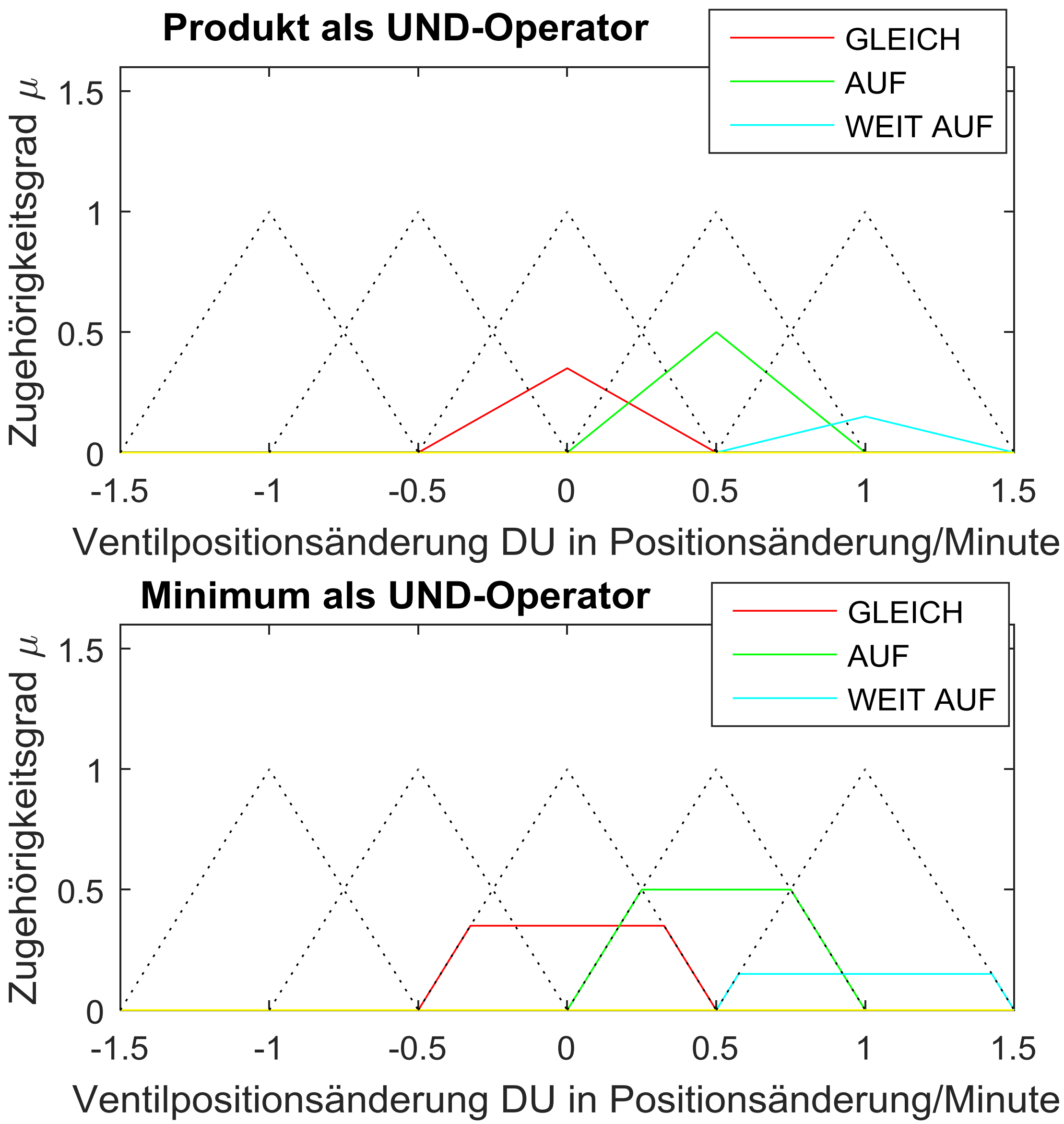
2. Variante: Akkumulation II: Beispiel

Ergebnisse aus Akkumulation I:

$\mu_{GLEICH} = 0.35$

$\mu_{AUF} = 0.50$

$\mu_{WEIT\ AUF} = 0.15$



2. Variante: Akkumulation III

- **Aufgabe:**

  Berechnung der vereinigten Fuzzy-Mengen der Ausgangsgröße
- **Operation:**
  ODER-Verknüpfung der Fuzzy-Mengen (modifizierte Zugehörigkeitsfunktionen) aller linguistischen Terme

$$\mu_y(y, \mathbf{x}) = \bigcup_{c=1}^{m_y} \mu_{B_c, AkII}(y, \mathbf{x})$$

- **Eingangsgrößen:**

  Fuzzy-Mengen der linguistischen Terme der Ausgangsgröße (modifizierte Zugehörigkeitsfunktion) - m_y (Anzahl der linguistischen Terme) *Funktionen*

- **Ausgangsgröße:**

  Fuzzy-Menge der Ausgangsgröße - eine *Funktion*
  Interpretation als "Grad der Empfehlung" für einen bestimmten Wert von y

2. Variante: Akkumulation III: Beispiel