Vorlesung Computational Intelligence:

Teil 2: Fuzzy-Logik:

Von der scharfen Logik zur Fuzzy-Logik, Fuzzy-Mengen, Fuzzifizierung, Fuzzy-Operatoren

Ralf Mikut, Wilfried Jakob, Markus Reischl
Karlsruher Institut für Technologie, Institut für Automation und angewandte Informatik
E-Mail: ralf.mikut@kit.edu, wilfried.jakob@kit.edu

jeden Donnerstag 14:00-15:30 Uhr, Nusselt-Hörsaal

Gliederung

Idee und Historie

- Entwicklung seit 1965 durch den iranisch-amerikanischen Systemtheoretiker Lotfi Zadeh (geb. 1921)
- Ziele:
  - Modellierung komplexer Systeme mit Akzeptanz von Unschärfe ("fuzziness") in der Beschreibung
  - Modellierung der Unschärfe natürlichsprachlicher Aussagen und Schlussfolgerungen auf Basis solcher Aussagen (ZADEH : "Computing with words")
- Großer Hype um Fuzzy-Regelungen ab 1995 mit der These, dass konventionelle Regelungen dadurch komplett abgelöst werden ("Niemand muss mehr Systemtheorie lernen")
- Ernüchterung in den folgenden Jahren
- heute etablierte Technologie
- Begriffe in dieser Vorlesung orientieren sich an VDI/VDE-Richtlinie 3550 Blatt 2 Computational Intelligence - Fuzzy-Logic und Fuzzy-Control - Begriffe und Definitionen, kompatibles Entwurfspapier dazu im Literaturordner [Mikut99]

Arten von Unschärfe

- Zufälligkeit (engl. randomness), Analyse durch Wahrscheinlichkeitstheorie:
  - Ereignisse sind wahr oder falsch, Auftreten ist zufällig
  - Beispiele:
    - Würfel
    - Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von Messfehlern
    - Glas nur mit Pfälzer Weißwein oder nur mit Wasser?
- **Unschärfe (engl. fuzziness): Analyse durch Fuzzy-Logik**
  - Ereignisse sind nicht nur wahr oder falsch, Zwischengrößen sind zulässig
  - Beispiele:
    - "große Menschen", "heiße Temperatur"
    - Weinschorle (Mischung aus Wein und Wasser)
- Weitere Arten existieren, z.B.
  - Impräzision (engl. imprecision): Fehler eines gemessenen Wertes liegt irgendwo in einem Intervall zwischen -1% und +1% des Messbereichs
  - Mehrdeutigkeit (engl. ambiguity): verschiedene Definitionen für den gleichen Begriff (semantische Mehrdeutigkeit), z. B. Erde = Boden, Planet usw.

Gewöhnliche Mengen

Zuordnung von Elementen zu einer (gewöhnlichen, auch: scharfen) Menge A durch

- Aufzählung aller Elemente, z.B.
  - natürliche Zahlen zwischen 1 und 3: $A = \{1, 2, 3\}$
  - Grundfarben in RGB-Skale $A = \{\text{Rot}, \text{Grün}, \text{Blau}\}$
- Angeben charakteristischer Eigenschaften, z.B.
  - Menge angenehmer Raumtemperaturen $A = \{T \,|\, T \in \mathbb{R} \cap T > 20°C \cap T < 24°C\}$
  - Menge positiv reeller Zahlen $A = \{x \,|\, x \in \mathbb{R} \cap x > 0\}$
- Zugehörigkeitsfunktion (ZGF, auch: charakteristische Funktion)

Menge angenehmer Raumtemperaturen

$$A = \{T \,|\, f(T) = 1\}$$

$$f(T) = \begin{cases} 1 & \text{für } T > 20°C \cap T < 24°C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Positiv reelle Zahlen

$$A = \{x \,|\, f(x) = 1\}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Klassische Logik

- Tabellen mit Wahrheitswerten von 0 oder 1

- Beispiele:
  - UND
  - ODER

- Implikation immer wahr, wenn Prämisse A nicht wahr ist (da ist nichts ausgeschlossen!)

- Weitere Operatoren (Exklusives ODER bzw. EXOR usw. existieren)

KONJUNKTION,
UND: $A \cap B$

A B	0	1
0	0	0
1	0	1

DISJUNKTION,
ODER: $A \cup B$

A B	0	1
0	0	1
1	1	1

IMPLIKATION
WENN-DANN: $A \Rightarrow B$

A B	0	1
0	1	0
1	1	1

Inferenzverfahren: modus ponens

modus ponens (Vorwärtsschließen, wichtig z.B. für Regelungsaufgaben)

auf Basis der Implikation:

- Es existiert eine Regel
  WENN Bedingung A (Prämisse) DANN Schlussfolgerung B (Konklusion)
- Die Bedingung A ist erfüllt.
- Die Schlussfolgerung B ist erfüllt

Beispiel:

- Wenn es im Zimmer zu kalt ist, dann drehe Heizung auf.
- Im Zimmer ist es zu kalt.
- Heizung aufdrehen !

Inferenzverfahren: modus tollens

modus tollens (Rückwärtsschließen, wichtig z.B. für Diagnoseaufgaben)

auf Basis der Implikation

- Es existiert eine Regel
  WENN Bedingung A DANN Schlussfolgerung B
- Die Schlussfolgerung B ist nicht erfüllt.
- Die Bedingung A ist nicht erfüllt

Beispiel:

- Wenn es im Zimmer zu kalt ist, dann drehe Heizung auf.
- Die Heizung wurde nicht aufgedreht.
- Es war nicht zu kalt.

Verbotene Fehlschlüsse
(können eventuell zu fehlerhaften Ergebnissen führen):

- WENN Bedingung nicht erfüllt DANN Schlussfolgerung nicht erfüllt
- WENN Schlussfolgerung erfüllt DANN Bedingung erfüllt

Weg Fuzzy-Logik

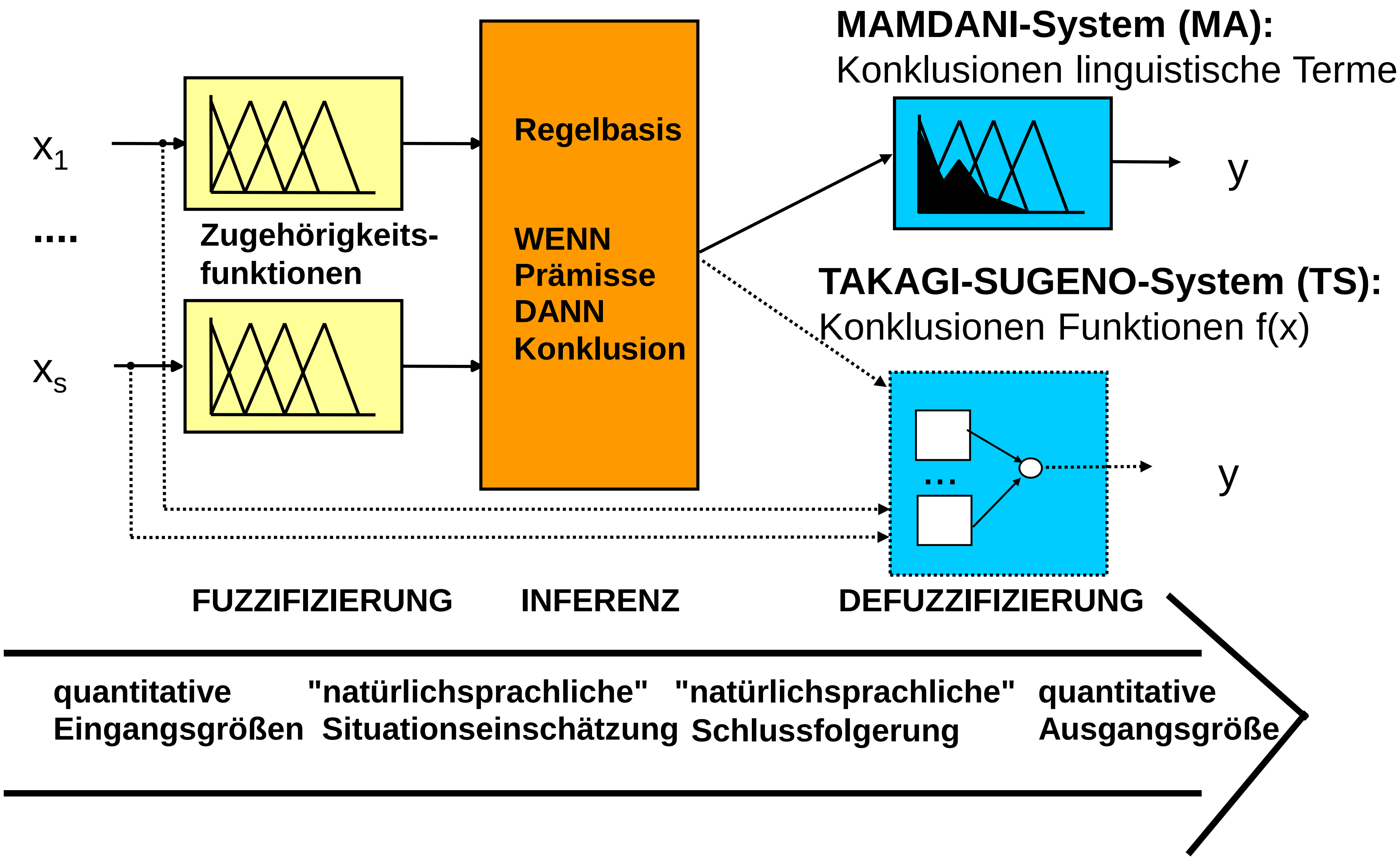
Verallgemeinerung der klassischen Mengenlehre und Aussagenlogik:

- Mengenlehre:
  Zulassen von Zugehörigkeitswerten zwischen Null und Eins
  $\Rightarrow$ **Fuzzifizierung**

- Aussagenlogik:
  Verallgemeinerung der Operatoren (Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Negation) für Wahrheitswerte zwischen Null und Eins
  $\Rightarrow$ **Inferenz**

- "Rücktransformation" einer Mengenbeschreibung in
  einen repräsentativen Wert der Grundmenge
  $\Rightarrow$ **Defuzzifizierung**

Fuzzy-Modelle (Struktur)



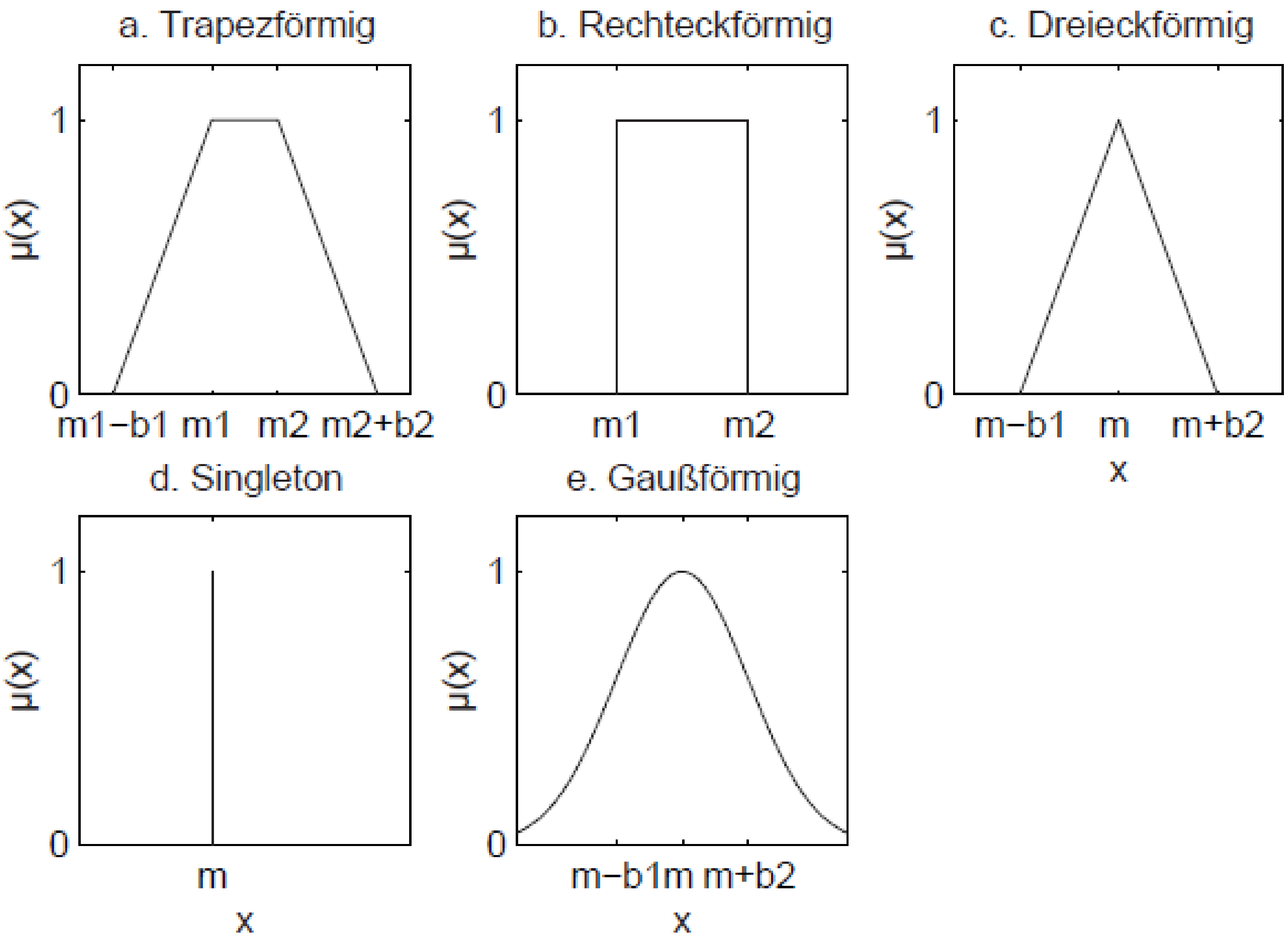
Gliederung

Fuzzy-Mengen

Begriffe:

- Linguistischer Term (auch: Linguistischer Wert):
  - qualitative Beschreibung einer Eigenschaft
  - Beispiele: WARM, KALT, HEISS
  - erhält Bedeutung durch Zuordnung einer Fuzzy-Menge
- Fuzzy-Menge besteht aus geordneten Zahlenpaaren $(x,\mu_A(x))$:
  - x: Element des im allgemeinen numerischen Grundbereiches
  - $\mu_A(x)$: Zugehörigkeitsfunktion (ZGF) mit Werten aus dem Intervall [0,1]
- Linguistische Variable
  - Größe, deren Werte linguistische Terme sind
  - Beispiel: TEMPERATUR= { KALT, WARM, HEISS }
    (im Gegensatz zur "normalen" reellwertigen Variablen "Temperatur"
    mit Werten in Grad Celsius !)
- Indizierung für mehrere linguistische Variable und Terme:
  Menge $A_{l,i}$ für den i-ten linguistischen Term der l-ten linguistischen Variablen

Arten von Zugehörigkeitsfunktionen (ZGF)



Parametrische Formen

- Trapezförmige Zugehörigkeitsfunktionen

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le m_1 - b_1 \\ 1 + \frac{1}{b_1}(x - m_1) & \text{für } m_1 - b_1 < x \le m_1 \\ 1 & \text{für } m_1 < x \le m_2 \\ 1 - \frac{1}{b_2}(x - m_2) & \text{für } m_2 < x \le m_2 + b_2 \\ 0 & \text{für } x > m_2 + b_2 \end{cases}$$

- Spezialfälle
  - Rechteckförmige ZGF: $b_1 = b_2 = 0$
  - Dreieckförmige ZGF: $m_1 = m_2 = m$
  - Singletons: $m_1 = m_2 = m$, $b_1 = b_2 = 0$

- Gaußförmige ZGF (hier für $m=m_1=m_2$):

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2b^2}}$$

α-cuts

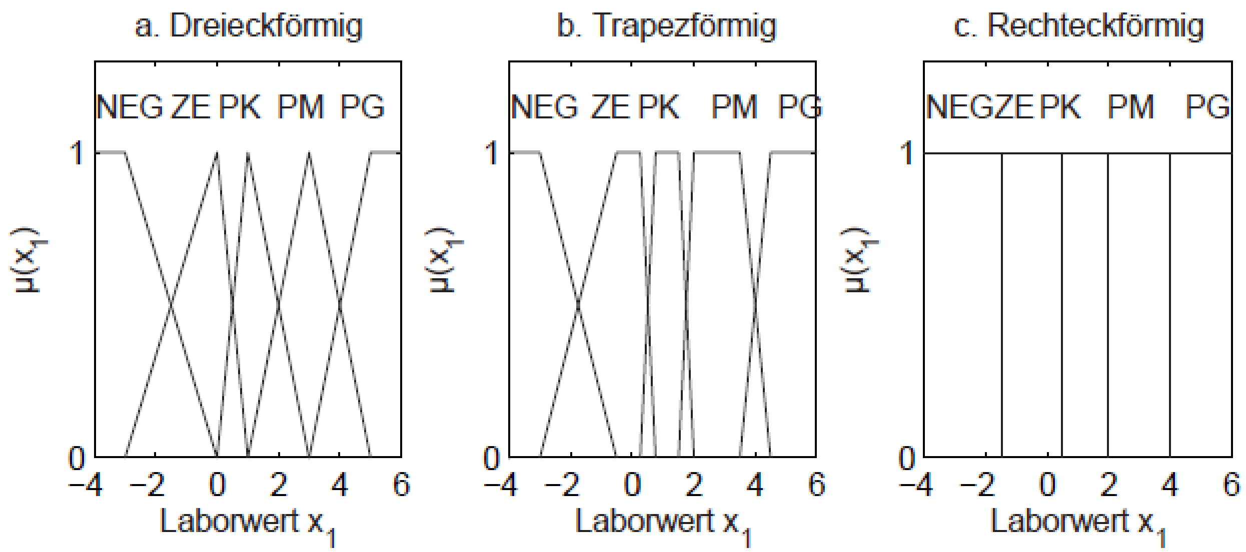
Karlsruher Institut für Technologie

Umwandlung in scharfe Zugehörigkeitsfunktionen durch α-cuts, oft mit α=0.5

$$\mu_{A,\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit } 0 < \alpha \leq 1$$

Standardpartitionen

- Summe aller ZGFs immer Eins
- immer nur maximal zwei benachbarte ZGFs mit Werten größer Null
- Randzugehörigkeits-funktionen bei dreieckförmigen ZGF meist trapezförmige ZGF
- Vorteile:
  - eindeutig durch wenige Parameter beschreibbar WELCHE?
  - gute Interpretierbarkeit
  - Rechenvorteile



IAI

Namen von Zugehörigkeitsfunktionen

- Häufig Standardnamen und Abkürzungen für linguistische Terme:
  - NEG - Negativ, ZE - Zero (Null), POS - Positiv
  - SK - Sehr klein, K - Klein, M - Mittel, G - Groß, SG - Sehr groß
  - Zusammensetzungen wie PK - Positiv Klein usw.
- Namensvergabe in Abhängigkeit vom Stützpunkt einer dreieckförmigen bzw. trapezförmigen (am Rand befindlichen) Zugehörigkeitsfunktionen
- Linguistische Terme können durchnummeriert werden, also $A_{l,i}$ für i-ten Term der l-ten Eingangsgröße und $a_{l,i}$ für den zugehörigen Parameter

Anzahl Terme	$a_{l,i} > 0$	$a_{l,i} < 0$	$a_{l,i} = 0$
1	POS	NEG	ZE
2	PK, PG	NK, NG	-
3	PK, PM, PG	NK, NM, NG	-
4	PK, PM, PG, PSG	NK, NM, NG, NSG	-
5	PSK, PK, PM, PG, PSG	NSK, NK, NM, NG, NSG	-

Wahl der ZGF-Parameter

- Expertenwissen:
  - Befragung einer oder mehrerer Personen, was unter den linguistischen Termen (wie WARM, KALT usw.) zu verstehen ist
  - u.U. geeignet zusammenfassen und in Standardpartition überführen
- Einfache Heuristiken
  - Kleinste und größte mögliche Werte bestimmen
  - andere Stützpunkte so verteilen, dass entweder
    - die Abstände zwischen den Stützpunkten gleich sind ("äquidistant")
    - ungefähr gleich viele Messwerte ("Datentupel") pro Term zu erwarten sind ("äquifrequent")
- Kompliziertere datenbasierte Entwurfsverfahren
  (siehe Vorlesung "Datenanalyse für Ingenieure" im Sommersemester)

Empfehlungen

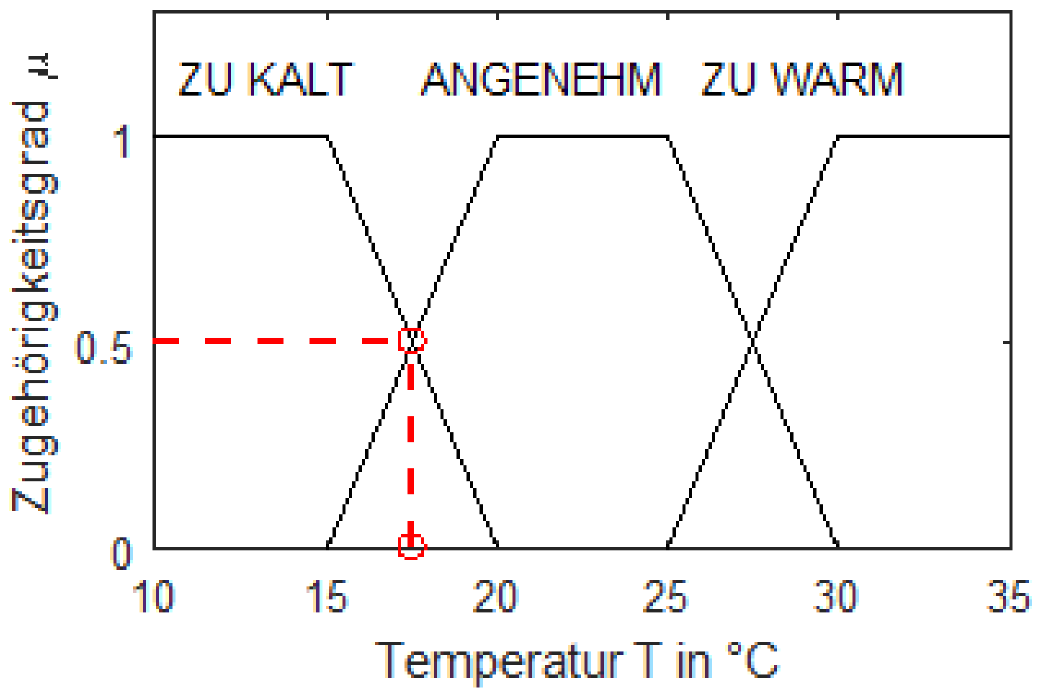
Karlsruher Institut für Technologie

- Standardpartitionen aus dreieck- und trapezförmigen Zugehörigkeitsfunktionen (ZGF) - (geringe Parameteranzahl, geringer Rechenaufwand)
- Konsequenz: Randzugehörigkeitsfunktionen trapezförmig mit ($m_1 = -\infty$ für ZGF am linken Rand und $m_2 = +\infty$ für ZGF am rechten Rand)
- je nach Komplexität 2 bis 7 linguistische Terme
- Verwendung parametrischer Darstellungen
  (geringer Rechenaufwand, vereinfachte Optimierung)
- Eindeutige Namen für linguistische Variable wählen, um Verwirrungen zu vermeiden, also z.B. nicht so:
  - Temperatur T = {Warm, Kalt} - normale Temperatur
  - Temperatur T = {Zu Warm, Zu Kalt} - Vergleich mit Referenztemperatur
  - Temperatur T = {Steigt, Fällt} - Eigentlich eine Temperaturänderung
- Bei besonders korrekten Schreibweisen sollte eigentlich noch zwischen Bezeichnern für reellwertige und linguistische Variablen unterschieden werden, wird aber zur Vereinfachung der Bezeichner oft nicht gemacht (auch nicht hier in der Vorlesung!), muss dann aus dem Kontext verstanden werden

Gliederung

Fuzzifizierung

- Gegeben:
  Messwert für erste Eingangsgröße Temperatur
- Gesucht:
  Zugehörigkeitswerte für alle linguistischen Terme
- Lösung:
  Werte für alle Zugehörigkeitsfunktionen für den Messwert ermitteln



Beispiel:

$$x_1 = T = 17.5°C$$

$$\mu_{A_{1,1}}(17.5°C) = \mu_{A_{T,\text{ Zu Kalt}}}(17.5°C) = 0.5$$

$$\mu_{A_{1,2}}(17.5°C) = \mu_{A_{T,\text{ Angenehm}}}(17.5°C) = 0.5$$

$$\mu_{A_{1,3}}(17.5°C) = \mu_{A_{T,\text{ Zu Warm}}}(17.5°C) = 0.0$$

Gliederung

Fuzzy-Operatoren

Weg:

Verallgemeinerung der Aussagenlogik:

- notwendig: Verallgemeinerung der Operatoren
    - Negation
    - Konjunktion
    - Disjunktion
    - Implikation
- Prinzip:
    - Einhaltung *aller* Rechengesetze für Wahrheitswerte 0 und 1
    - Einhaltung *möglichst vieler* Rechengesetze für Wahrheitswerte zwischen 0 und 1
    - Erhalt der Semantik der Aussage

Negation: $\overline{\mu_1} = 1 - \mu_1$

Doppelte Negation: $\overline{\overline{\mu_1}} = \mu_1$

t-Norm und t-Konorm

t-Norm als Verallgemeinerung der Konjunktion (UND-Verknüpfung):

Zugehörigkeitswerte μ_1, μ_2, μ_3 :

$\cap(\mu_1, 0) = 0$ (Verknüpfung mit Null)

$\cap(\mu_1, 1) = \mu_1$ (Verknüpfung mit Eins)

$\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow \cap(\mu_1, \mu_3) \leq \cap(\mu_2, \mu_3)$ (Monotonie)

$\cap(\mu_1, \mu_2) = \cap(\mu_2, \mu_1)$ (Kommutativität)

$\cap(\mu_1, \cap(\mu_2, \mu_3)) = \cap(\cap(\mu_1, \mu_2), \mu_3)$ (Assoziativität)

t-Konorm (s-Norm) als Verallgemeinerung der Disjunktion (ODER-Verknüpfung):

$\cup(\mu_1, 0) = \mu_1$ (Verknüpfung mit Null)

$\cup(\mu_1, 1) = 1$ (Verknüpfung mit Eins)

$\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow \cup(\mu_1, \mu_3) \leq \cup(\mu_2, \mu_3)$ (Monotonie)

$\cup(\mu_1, \mu_2) = \cup(\mu_2, \mu_1)$ (Kommutativität)

$\cup(\mu_1, \cup(\mu_2, \mu_3)) = \cup(\cup(\mu_1, \mu_2), \mu_3)$ (Assoziativität)

t-Norm und t-Konorm: Beispiele

- Aufbau passender Paare für UND/ODER-Operatoren, die gemeinsam mit dem Negationsoperator die de' Morganschen Gesetze einhalten

$$\overline{\mu_1 \cup \mu_2} = \overline{\mu_1} \cap \overline{\mu_2} \quad \text{sowie} \quad \overline{\mu_1 \cap \mu_2} = \overline{\mu_1} \cup \overline{\mu_2}$$

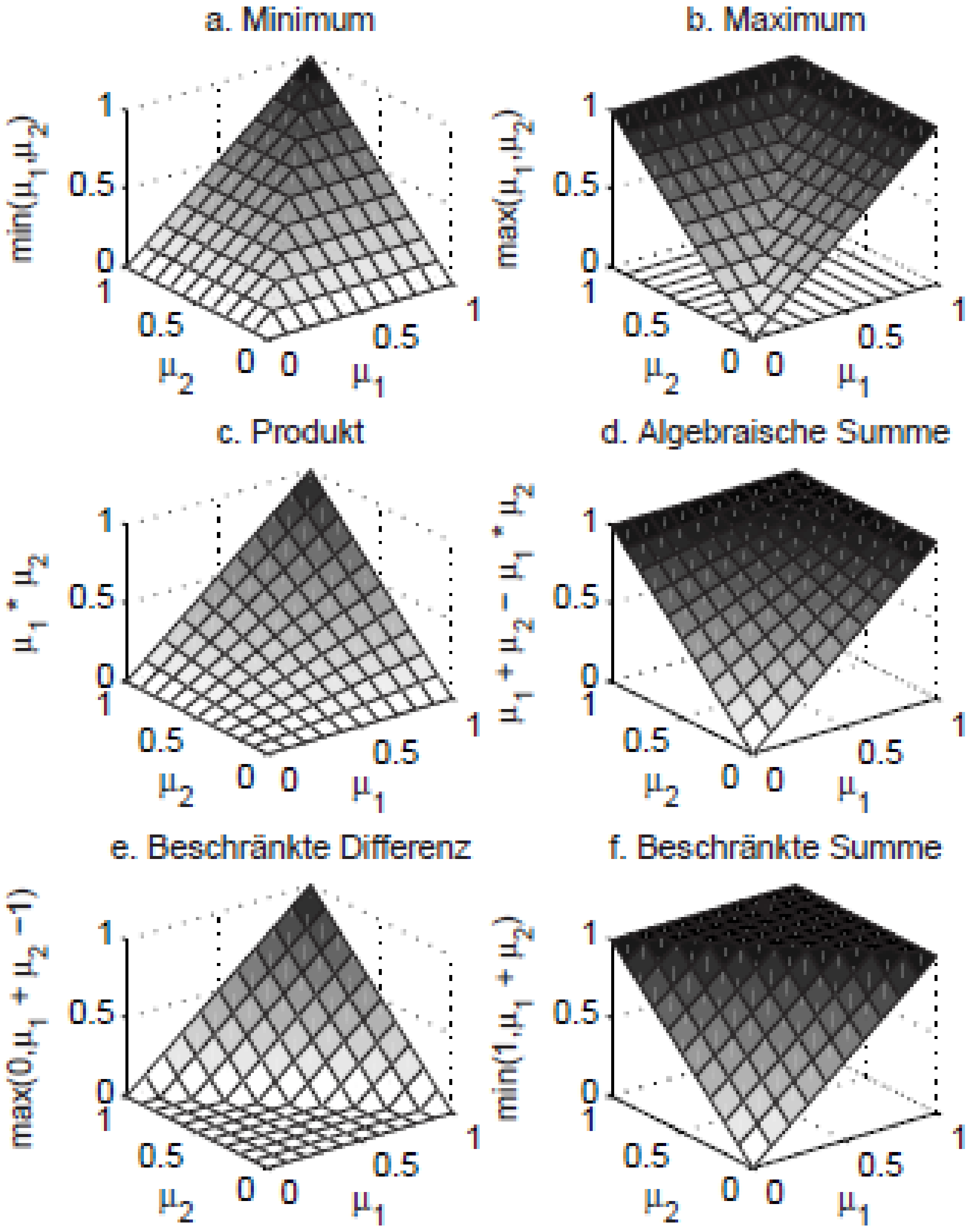
- Beispiele für Operator-Paare:

Bezeichnung	UND: $\mu_3 = \cap(\mu_1, \mu_2)$	ODER: $\mu_3 = \cup(\mu_1, \mu_2)$
Minimum-Maximum	$\mu_3 = \min(\mu_1, \mu_2)$	$\mu_3 = \max(\mu_1, \mu_2)$
Produkt-Algebraische Summe	$\mu_3 = \mu_1 \cdot \mu_2$	$\mu_3 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \cdot \mu_2$
Beschränkte Differenz-Beschränkte Summe	$\mu_3 = \max(\mu_1 + \mu_2 - 1, 0)$	$\mu_3 = \min(\mu_1 + \mu_2, 1)$

- Weitere Paare existieren, werden aber in der Vorlesung nicht behandelt, z.B.
  - Kompensatorische Operatoren (Gamma-Operator)
  - Einstein-Produkt/Einstein-Summe
  - Hamacher-Produkt/Hamacher-Summe

T-Norm und T-Konorm: Beispiele

Karlsruher Institut für Technologie



Erweiterungsprinzip nach Zadeh

Karlsruher Institut für Technologie

- Berechnen einer Fuzzy-Menge der Ausgangsgröße y aus den Fuzzy-Mengen einer s-dimensionalen Eingangsgröße **x** und einer Funktion y = f(**x**)
- Weg:
  - alle möglichen Funktionswerte der Konklusion y berechnen
  - Zugehörigkeitswert aus der Erfülltheit der Bedingungen für **x** ermitteln (Verknüpfung der Zugehörigkeitswerte der s Eingangsgrößen mit t-Norm)
  - t-Konorm zur Verknüpfung aller y mit dem gleichen Wert
- Beispiel: "Ungefähr 1" + "Ungefähr 2" (s=2, t-Norm: MIN, t-Konorm: MAX)
- dreieckförmige ZGFs:
  - "Ungefähr 1": $m_1=m_2=1$, $b_1=b_2=1$
  - "Ungefähr 2": $m_1=m_2=2$, $b_1=b_2=1$
  - Ergebnis: "Ungefähr 3": $m_1=m_2=3$, $b_1=b_2=2$
  - Unschärfe nimmt zu!
- Frage: Was ist "Ungefähr 2" / " Ungefähr 1"?