1. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Графоаналитический способ отыскания экстремумов функции

Для отыскания глобальных экстремумов функции необходимо помнить следующие основные определения и теоремы.

Функция $z = f\left(\overline{X}\right)$ в точке $\overline{X}_0$ имеет локальный максимум или минимум, если найдется такая окрестность этой точки, что для всех $\overline{X}$ из этой окрестности будет выполняться неравенство

$$f\left(\overline{X}\right) \le f\left(\overline{X}_0\right) \text{ (соответственно для минимума } f\left(\overline{X}\right) \ge f\left(\overline{X}_0\right)\text{).} \quad (1)$$

Если неравенство (1) выполняется как строгое, то экстремум называется сильным, а если как нестрогое, то слабым.

Из определения вытекает, что точки локального экстремума обязательно должны быть внутренними точками заданной области.

Функция $z = f\left(\overline{X}\right)$ в заданной области Q имеет глобальный максимум $z_{\max} = f\left(\overline{X}_0\right)$ или минимум $z_{\min} = f\left(\overline{X}_0\right)$, если неравенства (1) выполняются для любой точки $\overline{X} \in Q$ области Q. Глобальный экстремум может достигаться как во внутренней точке (совпадая в этом случае с одним из локальных), так и на границе области.

Теорема 1. Функция $z = f\left(\overline{X}\right)$, заданная в замкнутой ограниченной области, достигает в ней глобального максимума и глобального минимума.

Теорема 2. Любой локальный максимум выпуклой или локальный минимум вогнутой функции является одновременно глобальным.

Теорема 3. Сильный глобальный минимум выпуклой или локальный минимум вогнутой функции, заданных в выпуклой области, может достигаться (а в замкнутой ограниченной области – достигается) только на границе области.

Теорема 4. Необходимым условием локального экстремума дифференцируемой функции $z = f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ в точке $\overline{X}_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_n^0\right)$ является равенство нулю всех частных производных первого порядка в этой точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \ (k = 1, \ldots, n). \quad (2)$$

Точки, в которых выполняются равенства (2), называются *стационарными точками*. Стационарные точки следует дополнительно исследовать с помощью достаточных условий, чтобы установить, действительно ли в них достигается локальный экстремум и какой именно (максимум или минимум).

Еще сложнее обстоит дело с нахождением глобального экстремума, который может достигаться на границе области и в этом случае не совпадать с локальным экстремумом. В некоторых случаях могут помочь косвенные приемы, опирающиеся на теоремы 1–3.

1. Если заранее известно существование глобального экстремума данной функции (например, на основании теоремы 1), то достаточно найти все стационарные точки и сравнить значения функции в этих точках с экстремальными значениями на границе

области. Наибольшее значение соответствует глобальному максимуму, а наименьшее – глобальному минимуму. Определение экстремумов на границе области сводится к решению задачи, аналогично исходной, по размерности на единицу меньше.

2. Если функция выпуклая (вогнутая) и из уравнения (2) получена стационарная точка, то в ней достигается глобальный максимум (минимум).
3. Для отыскания глобального минимума выпуклой или глобального максимума вогнутой функции достаточно исследования экстремумов функции только на границе области.

Пример 1. Найти точки экстремума функции

$$u(x_1, x_2) = x_1^2/2 + 2x_1 + x_2^3/3 + x_2^2 - 3x_2 + 5.$$

Ответ. $M(-2,1)$ – точка минимума.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 - x_2$$

в замкнутой области $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \leq 1, \\ x_2 \leq 1. \end{cases}$

Ответ. $u_{наиб} = 4, u_{наим} = 1.$

Пример 3. Найти глобальные экстремумы функции

$z = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 11x_1 - 8x_2$ в области $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

Решение. Функция Z – квадратичная, заданная в замкнутой ограниченной области (рис.1) поэтому, на основании теоремы 1 она достигает в этой области глобальных экстремумов (случай 1).

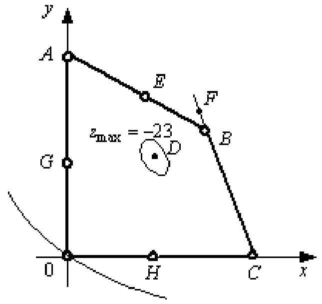

Рис. 1. Область допустимых решений

Находим стационарные точки путем решения системы уравнений (2):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= 4x_1 + x_2 - 11 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= 2x_2 + x_1 - 8 = 0. \end{aligned}\right\}$$ Получим $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

Таким образом, получена единственная стационарная точка D (2, 3), в которой z_D = –23. Теперь исследуем эту функцию вдоль границ области. Граница AB задается уравнением $3x_1 + 4x_2 = 24$, откуда $x_2 = 6 - \frac{3}{4}x_1$. Подставляя найденное значение x_2 в функцию z, получим $z_{AB} = \frac{29}{16}x_1^2 - 8x_1 - 12$. Ее стационарная точка Е найдется, как для функции одной переменной из уравнения $\frac{\partial z_{AB}}{\partial x_1} = \frac{29}{8}x_1 - 8 = 0$, откуда $x_1 = \frac{64}{29}$, $x_2 = 6 - \frac{3 \cdot 64}{29 \cdot 4} = \frac{126}{29}$ и $z_E \approx$ –20,8. Но граница AB, в свою очередь, имеет «границы» – точки A (0; 6) и B (4; 3), значения функции в которых будут z_A = –12 и z_B = –15.

Граница BC задается уравнением $3x_1 + x_2 = 15$, откуда $x_2 = 3x_1 - 15$. Подставляя значение x_2 в заданную функцию, получим $z_{BC} = 8x_1^2 - 62x_1 + 105$. Аналогично предыдущему из $\frac{\partial z_{BC}}{\partial x_1} = 16x_1 - 62 = 0$ найдем значения $x_1 = \frac{31}{8}$ и $x_2 = \frac{27}{8}$, которые не удовлетворяют первому неравенству. Следовательно, данная стационарная точка F лежит вне области $OABC$ (рис.1). Значения z_{BC} на «границах», т.е. в точках C (5; 0), B (4; 3), равны z_C = – 5 и z_B = –15.

Вдоль границы OA имеем x_1 = 0, откуда $z_{OA} = x_2^2 - 8x_2$. Из уравнения $\frac{\partial z_{OA}}{\partial x_2} = 2x_2 - 8 = 0$ находим x_2 = 4. Таким образом получаем еще одну стационарную точку G(0; 4) и z_G = –16. Значение в точке O(0; 0) будет z_0 = 0.

Вдоль границы OC имеем x_2 = 0, откуда $z_{OC} = 2x_1^2 - 11x_1$. Из уравнения $\frac{\partial z_{OC}}{\partial x_1} = 4x_1 - 11 = 0$ получаем $x_1 = \frac{11}{4}$. Итак, найдена последняя стационарная точка $H\left(\frac{11}{4}; 0\right)$ и $z_H = -\frac{121}{8}$.

Для сравнения сведем данные об исследованных точках в табл.1.

Таблица 1

Точки	*D*	*E*	*A*	*B*	*C*	*G*	*O*	*H*
Значения функции	–23	–20,8	–12	–15	–5	–16	0	–121/8

Следовательно, глобальный максимум достигается в точке O (0; 0) и равен z_{max} = 0, а глобальный минимум z_{min} = –23 в точке D(2, 3) (см. рис. 1).

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ в замкнутой области $x_1^2 + x_2^2 \le 1$.

Ответ. $u_{наиб} = 1/2, u_{наим} = -1/2$.

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$u(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 - 8x_2 + 5;$

в замкнутой области $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 \ge -1 \\ x_2 \ge -2 \end{array}\right\}$.

Ответ. $u_{наиб}\big|_C = u(6,-2) = 177, u_{наим}\big|_M = u(1,2) = -1.$

Индивидуальное задание 1.

Найдите точки экстремума функции $u(x;\ y)$.

1) $u(x;\ y) = x^2 - 2x - y^3 + y^2 + y - 5$;

2) $u(x;\ y) = -x^3 + 4x^2 + 3x + y^2 + 4y - 9$;

3) $u(x;\ y) = -x^2 - 6x - 3y^3 + 3y^2 + 3y - 4$;

4) $u(x;\ y) = x^3 + x^2 - x + y^2 + y + 7$;

5) $u(x;\ y) = x^2 + 6x + y^3 + 4y^2 - 3y + 5$;

6) $u(x;\ y) = 3x^3 - 3x^2 - 3x + 5y^2 - 10y + 2$;

7) $u(x;\ y) = x^2 - 3x + 2y^3 - 4y^2 + 2y - 4$;

8) $u(x;\ y) = -2x^3 - 2x^2 + 2x + 3y^2 - 6y - 1$;

9) $u(x;\ y) = 2x^2 + 4x + 9y^3 - 3y^2 - y + 1$;

10) $u(x;\ y) = x^3 + 4x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1$;

11) $u(x;\ y) = x^2 - 8x + 2y^3 + 2y^2 - 2y + 7$;

12) $u(x;\ y) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 3y^2 - y - 4$;

13) $u(x;\ y) = x^2 - x - y^3 - 4y^2 - 4y + 3$;

14) $u(x;\ y) = x^2 - x - y^3 - 4y^2 - 4y + 3$;

15) $u(x;\ y) = x^2 - x + 15y^3 - 2y^2 - y - 6$;

16) $u(x;\ y) = -2x^3 + 4x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1$;

17) $u(x;\ y) = 3x^2 - 6x - y^3 + 2y^2 + 4y + 10$;

18) $u(x;\ y) = -x^3 - 2x^2 + 15x + y^2 + 3y - 1$;

19) $u(x;\ y) = 2x^2 + 4x + 4y^3 + 4y^2 + y - 1$;

20) $u(x;\ y) = -5x^3 + 2x^2 + 3x - 2y^2 + y - 11$;

21) $u(x;\ y) = x^2 - x - y^3 + 5y^2 + 8y - 5$;

22) $u(x;\ y) = 3x^3 - 5x^2 + x + y^2 - 3y + 8$;

23) $u(x;\ y) = -x^2 + 4x + 5y^3 + 2y^2 - 3y + 9$;

24) $u(x;\ y) = 8x^3 - 5x^2 - x + y^2 - 4y + 1$;

25) $u(x;\ y) = x^2 + 3x + y^3 + 5y^2 + 3y - 10$;

26) $u(x;\ y) = -3x^3 - 2x^2 + 5x + 2y^2 + 8y + 4$;

27) $u(x;\ y) = x^2 + x + 4y^3 + 5y^2 - 2y + 3$;

28) $u(x;\ y) = -x^3 + 5x^2 - 3x + y^2 - 6y + 4$;

29) $u(x;\ y) = 4x^2 - 8x - 3y^3 + 2y^2 + 5y - 12$;

30) $u(x;\ y) = -4x^3 - 5x^2 + 2x + 2y^2 - 4y - 1$.

Индивидуальное задание 2

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $u(x;\ y)$ в области (D), заданной указанными неравенствами.

1) $u(x;y) = -4x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 4, (D): x \ge -3, y \ge -2, x + y \le 1$;

2) $u(x;y) = 3x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 2y + 2, (D): x \le 2, y \le 3, x + y \ge 1$;

3) $u(x;y) = 2x^2 - xy + 2y^2 + 2x + 3y + 1, (D): x \le 2, y \ge -1, x - y \ge 1$;

4) $u(x;y) = 4x^2 + 2xy - y^2 + 2x + y - 1, (D): x \ge -2, y \ge -1, x + y \le 2$;

5) $u(x;y) = -3x^2 - 2xy + y^2 + 4x + y - 2, (D): x \ge -1, y \ge -2, x + y \le 1$;

6) $u(x;y) = -2x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + y - 1, (D): x \le 1, y \le 2, x + y \ge -1$;

7) $u(x;y) = -4x^2 - 2xy - y^2 + 2x - y + 2, (D): x \ge -2, y \ge -2, x + y \le -1$;

8) $u(x;y) = 3x^2 - xy - 2y^2 + 2x - 2y - 1, (D): x \le 1, y \ge -1, x - y \ge -2$;

9) $u(x;y) = -x^2 + xy + 2y^2 + 4x + y - 2, (D): x \le 2, y \le 2, x + y \ge 1$;

10) $u(x;y) = 4x^2 + 2xy + 4y^2 + x + 6y - 1, (D): x \ge -1, y \le 3, -x + y \ge -1$;

11) $u(x;y) = -3x^2 - xy + y^2 + 2x + 4y + 1, (D): x \ge -2, y \le 1, x - y \le 2$;

12) $u(x;y) = x^2 + xy - 2y^2 + 4x + y - 1,\ (D):\ x \ge 0, y \ge 2, x + y \le 4$;

13) $u(x;y) = -4x^2 + xy + 3y^2 - x - 2y + 3,\ (D):\ x \ge 1, y \ge -1, x + y \le 2$;

14) $u(x;y) = -3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1,\ (D):\ x \ge -2, y \le 2, x - y \le 1$;

15) $u(x;y) = -x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 3,\ (D):\ x \le 3, y \ge -1, x - y \ge 1$;

16) $u(x;y) = 4x^2 + xy + 3y^2 + 2x - 2y + 3,\ (D):\ x \le 1, y \le 3, x + y \ge 1$;

17) $u(x;y) = -2x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 2y + 1,\ (D):\ x \le 3, y \ge -1, x - y \ge 2$;

18) $u(x;y) = x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 6y + 1,\ (D):\ x \ge -3, y \le 1, x - y \le 2$;

19) $u(x;y) = -4x^2 + 2xy - 2y^2 + 3x + y + 4,\ (D):\ x \le 2, y \le 1, x + y \ge -1$;

20) $u(x;y) = 3x^2 - xy - 4y^2 + 2x + 2y + 1,\ (D):\ x \ge 1, y \ge 1, x + y \le 3$;

21) $u(x;y) = 2x^2 + xy + 2y^2 + 4x + 2y - 1,\ (D):\ x \ge -2, y \le 3, x - y \le 1$;

22) $u(x;y) = 3x^2 + 2xy - y^2 + x + 2y + 4,\ (D):\ x \le 3, y \le 1, x + y \ge 2$;

23) $u(x;y) = 2x^2 - 2xy + 4y^2 + x + 6y + 2,\ (D):\ x \ge -1, y \ge -2, x - y \ge -1$;

24) $u(x;y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + x + 3y - 2,\ (D):\ x \le 2, y \ge -1, x - y \ge 5$;

25) $u(x;y) = 3x^2 + xy + 2y^2 + 2x + 4y - 1,\ (D):\ x \ge -1, y \le 2, x - y \le 2$;

26) $u(x;y) = 2x^2 + xy + 2y^2 + 4x + y - 1,\ (D):\ x \le 2, y \le 3, x + y \ge 1$;

27) $u(x;y) = 2x^2 + 4xy - 2y^2 + x + 2y - 3,\ (D):\ x \ge -3, y \ge -1, x - y \ge -4$;

28) $u(x;y) = 4x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x - 2y + 1,\ (D):\ x \le 2, y \ge -2, x - y \ge 1$;

29) $u(x;y) = x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x - 2y + 1,\ (D):\ x \ge 1, y \le 3, x - y \le 2$;

30) $u(x;y) = -x^2 - xy + 4y^2 + 2x - 2y + 1,\ (D):\ x \le 1, y \le 3, x + y \ge -1$.

1.2. Решение задач методом неопределенных множителей Лагранжа

Метод неопределенных множителей Лагранжа – один из немногих аналитических методов, применяемый при решении задач нелинейного программирования, в которых фигурируют только ограничения – равенства. Метод множителей Лагранжа позволяет задачу поиска условного экстремума (с ограничениями) сводить к задаче поиска безусловного экстремума (без ограничений). При решении задач с ограничениями-неравенствами этот метод также используется, но ход решения многократно усложняется из-за необходимости проверки удовлетворения полученных решений исходным неравенствам.

Для решения задачи составляется функция Лагранжа:

$$F(X,\Lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [g_j(X) - b_j],$$

где $f(X)$ – целевая функция исходной задачи; λ_j – неопределенные множители Лагранжа; $[g_j(X) - b_j]$ – ограничения-равенства исходной задачи; m – количество ограничений-равенств.

Алгоритм метода неопределенных множителей Лагранжа следующий:

1) составить функцию Лагранжа;
2) определить производные этой функции по каждой переменной;
3) составить систему уравнений, приравняв полученные производные нулю;
4) решить систему уравнений.

Пример 6. Исследовать на безусловный и условный экстремумы функцию
$Z = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - x_1 - x_2$, если $x_1 + x_2 = 4$.

Ответ: $Z_{\min} = -1$; $Z_{\min} = 0$ – условный минимум.

Пример 7. $u(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 + 3x_1 - 6x_2 + 2$ при уравнении связи: $x_1 + x_2 - 3 = 0$.

Ответ. M(1, 2) – точка условного максимума.

Индивидуальное задание 3

Найдите условный экстремум функции $u(x;\ y)$ при заданном уравнении связи.

1) $u(x;y) = 4x^2 + 2xy + y^2 + 3x - y + 1$ *при* $2x + 3y + 1 = 0$;

2) $u(x;y) = -3x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x + 3y + 6$ *при* $4x - y + 2 = 0$;

3) $u(x;y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 3y + 7$ *при* $-2x + y - 2 = 0$;

4) $u(x;y) = -4x^2 + xy - 4y^2 + 3x - 2y + 6$ *при* $-2x + 2y + 1 = 0$;

5) $u(x;y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 3y + 8$ *при* $2x - y + 3 = 0$;

6) $u(x;y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 3x - 2y + 5$ *при* $x - y + 5 = 0$;

7) $u(x;y) = 4x^2 + xy + 2y^2 + 2x + y + 3$ *при* $x - y + 2 = 0$;

8) $u(x;y) = 3x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y + 3$ *при* $x - 2y + 3 = 0$;

9) $u(x;y) = -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 6x + 2y + 5$ *при* $-2x + y - 3 = 0$;

10) $u(x;y) = -4x^2 - xy + y^2 + x + 2y - 1$ *при* $x + 3y - 1 = 0$;

11) $u(x;y) = 2x^2 + xy + 2y^2 - x + 2y + 4$ *при* $x + 3y + 5 = 0$;

12) $u(x;y) = x^2 - 2xy + 4y^2 - 4x + 2y + 9$ *при* $2x + y + 1 = 0$;

13) $u(x;y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - y + 6$ *при* $2x + y + 4 = 0$;

14) $u(x;y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 2y + 6$ *при* $-2x + y - 1 = 0$;

15) $u(x;y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 4x + y + 3$ *при* $-x + y + 2 = 0$;

16) $u(x;y) = 4x^2 + 4xy + 2y^2 + x + 2y - 1$ *при* $-x + 2y + 4 = 0$;

17) $u(x;y) = 3x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y - 3$ *при* $-2x - y + 6 = 0$;

18) $u(x;y) = -x^2 + 2xy - 4y^2 + 6x + 4y + 1$ *при* $-x + 3y + 2 = 0$;

19) $u(x;y) = -4x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + 8y + 5$ *при* $2x - y + 6 = 0$;

20) $u(x;y) = 3x^2 + 2xy - 2y^2 + 4x + y + 5$ *при* $2x + 3y - 1 = 0$;

21) $u(x;y) = -2x^2 + 8xy - 4y^2 + 3x + 2y + 4$ *при* $2x - y - 2 = 0$;

22) $u(x;y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 + x - 2y - 4$ *при* $-3x + y + 5 = 0$;

23) $u(x;y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x + 4y + 1$ *при* $2x - y + 3 = 0$;

24) $u(x;y) = -x^2 + 4xy - 6y^2 + 3x - 2y - 7$ *при* $x - y + 4 = 0$;

25) $u(x;y) = 4x^2 + 2xy + 4y^2 - 2x - 4y + 2$ *при* $3x + y - 1 = 0$;

26) $u(x;y) = -3x^2 + 2xy - y^2 + x - 5y + 2$ *при* $-2x - y + 3 = 0$;

27) $u(x;y) = 2x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + y - 2$ *при* $x - 3y + 1 = 0$;

28) $u(x;y) = 3x^2 + 4xy - 3y^2 + 2x - 2y + 4$ *при* $5x + y - 2 = 0$;

29) $u(x;y) = -2x^2 + 4xy - 6y^2 + 2x - 2y + 4$ *при* $x + 3y + 2 = 0$;

30) $u(x;y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 3x - 2y + 8$ *при* $x - y + 3 = 0$.