Контрольная работа по алгебре, ВШО 11.
1к. 2с, 1блок

Вариант №14. Оганесяну К.Г.

Задание #1

Показать, что вектора образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе:

$a_1 = \{1, 2, -1\}$, $a_2 = \{1, -2, 1\}$, $a_3 = \{2, 1, 7\}$, $x = \{5, 5, -10\}$.

$$x_1\overline{a_1} + x_2\overline{a_2} + x_3\overline{a_3} = x;$$

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 = -10 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 7\end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$$

$$\Delta(A) = (-1)^2 1\times(-15) + (-1)^3 2\times 5 + (-1)^4(-1)\times 5 = \underline{-30}$$

Т.к. $\Delta(A) \neq 0$, то векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис.

$$A^T = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix},$$ Найдем алгебраические дополнения:

$$A^T_{1,1} = (-1)^2\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix} = -15; \quad A^T_{1,2} = (-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 7\end{vmatrix} = -5; \quad A^T_{1,3} = (-1)^4\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 5; \quad A^T_{2,1} = (-1)^3\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 7\end{vmatrix} = -15;$$

$$A^T_{2,2} = (-1)^4\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 7\end{vmatrix} = 9; \quad A^T_{2,3} = (-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 3; \quad A^T_{3,1} = (-1)^4\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix} = 0; \quad A^T_{3,2} = (-1)^5\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2;$$

$$A^T_{3,3} = (-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} = -4$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-15 & -5 & 5\\ -15 & 9 & 3\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}; \quad X = A^{-1}\times B = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-15 & -5 & 5\\ -15 & 9 & 3\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix}(-15)5 + (-5)5 + 5(-10)\\ (-15)5 + 9\cdot 5 + 3(-10)\\ 0\cdot 5 + (-2)5 + (-4)(-10)\end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{30}\begin{pmatrix}-150\\-60\\30\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}}$$

Задание #2:

Найти размерность и базис пространства, натянутого на систему векторов:

$a_1 = \{1, 0, 1, 0\}$, $a_2 = \{1, 3, 0, 1\}$, $a_3 = \{1, 2, 0, 1\}$, $a_4 = \{1, 1, 1, 0\}$, $a_5 = \{2, 4, 0, 2\}$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&3&2&1&4\\1&0&0&1&0\\0&1&1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&2&1&4\\0&1&1&0&2\\1&1&1&1&2\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}=4ст+3ст(-1)=\begin{pmatrix}0&1&1&0&2\\0&-1&-1&0&-2\\0&3&2&1&4\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1&0&-2\\0&3&2&2&1&4\\1&0&0&0&1&0\end{pmatrix}=2ст+1ст(3)=\begin{pmatrix}0&0&-1&1&-2\\0&3&2&1&4\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1&1&-2\\0&3&2&1&4\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Полученная матрица приведена к верхнеугольному виду $\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{rang}(A)=3 \Rightarrow \dim[3]$

$\{a_1, a_2, a_3\}$ - базис.

<u>Задание #3</u>

Найти решение системы методом Гаусса:

$$\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=0\\3x_1+x_2+7x_3+x_4=0\\3x_1-4x_2-x_3+2x_4=0\\x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\end{cases}$$

Запишем систему в виде расширенной матрицы:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&4&-3&0\\3&1&7&1&0\\3&-4&-1&2&0\\1&2&3&4&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&7&1&0\\3&-4&-1&2&0\\2&-1&4&-3&0\\1&2&3&4&0\end{array}\right)=3ст(-1/2)+4ст=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&7&1&0\\3&-4&-1&2&0\\2&-1&4&-3&0\\0&5/2&1&11/2&0\end{array}\right)=2ст(-2/3)+3ст=\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&7&1&0\\3&-4&-1&2&0\\0&5/3&14/3&-13/3&0\\0&5/2&1&11/2&0\end{array}\right)=1ст(-1)+2ст=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&7&1&0\\0&-5&-8&1&0\\0&5/3&14/3&-13/3&0\\0&5/2&1&11/2&0\end{array}\right)=\cancel{Ст}\ 3ст(-2/3)+4ст=\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&7&1&0\\0&-5&-8&1&0\\0&5/2&1&11/2&0\\0&0&4&-8&0\end{array}\right)=2ст(1/2)+3ст=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&7&1&0\\0&-5&-8&1&0\\0&0&-3&6&0\\0&0&4&-8&0\end{array}\right)=3ст(4/3)+4ст=\left(\begin{array}{cccc|c}3&1&7&1&0\\0&-5&-8&1&0\\0&0&-3&6&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1/3&7/3&1/3&0\\0&1&8/5&-1/5&0\\0&0&1&-2&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$x_1=0-(1/3x_2+7/3x_3+1/3x_4)$

$x_2=0-(8/5x_3-1/5x_4)$

$x_3=0+2x_4$

4-я строка - линейная комбинация остальных. Пусть <u>$x_4=0$</u>

$x_3=0$

$x_2=0$

$x_1=0$

Задание #4:

Записать матрицу линейного оператора в данном базисе и найти матрицу оператора в новом базисе:

$A(e_1)=3e_1-e_2-3e_3$ | $\tilde{e}_1=e_1+e_2$

$A(e_2)=e_1+5e_2+7e_3$ | $\tilde{e}_2=e_1+e_2+2e_3$

$A(e_3)=e_1+2e_3$ | $\tilde{e}_3=e_1+2e_2+e_3$

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\-1&5&0\\-3&7&2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&2&1\end{pmatrix};\ C|E=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)=[2ст-1ст]=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)=[2ст.\leftrightarrow 3ст]=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&1&0&0&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)=[2ст.:2]=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0,5&0&0&0,5\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)=[1ст-2ст]=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0,5&1&0&-0,5\\0&1&0,5&0&0&0,5\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)=[1ст-3ст(0,5);2ст.-3ст(0,5)]=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1,5&-0,5&-0,5\\0&1&0&0,5&-0,5&0,5\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right);\ C^{-1}=\begin{pmatrix}1,5&-0,5&-0,5\\0,5&-0,5&0,5\\-1&1&0\end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1,5&-0,5&0,5\\0,5&-0,5&0,5\\-1&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3&1&1\\-1&5&0\\-3&7&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,5&2,5&2,5\\-0,5&1,5&1,5\\-4&4&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6&11&11\\2&5&5\\0&-2&3\end{pmatrix}$$