Лабораторная работа #4.

Метод логарифмических барьеров.

Рассмотрите по вариантам следующие задачи оптимизации с ограничениями-раенствами **и неравенствами**: Рассмотрите по вариантам следующие задачи оптимизации:

- Log-optimal investment strategy;

  (ex. 4.60, p. 209 $https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf$)

- Equality constrained analytic centering with *additional constraints* $\mathbf{x} \geq \mathbf{1}$;

  (p. 548, $https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf$)

- Minimum length piecewise-linear curve subject to equality constraints with *additional constraints* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$;

  (ex. 10.4, p. 547 $https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf$)

- Equality constrained entropy maximization with *additional constraints* $\mathbf{x} \geq \mathbf{1}$;

  (10.9, p. 558, $https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf$)

- Minimizing a separable function subject to an equality constraint and *additional constraints* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $f_i(x_i) = x_i^4$, $i \in \{1, \dots, n\}$;

  (ex. 5.4, p. 248, $https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf$)

- Optimal allocation with resource constraint and *additional constraints* $\mathbf{x} \geq \frac{\mathbf{b}}{2n}$, $f_i(x_i) = a_i e^{x_i}$, $a_i > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

  (ex. 10.1, p. 523, $https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf$)

1. Введите логарифмический барьер

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{m}\ln(-f_i(\mathbf{x})),$$

где $f_i(\mathbf{x})$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, - ограничения-неравенства исходной задачи и исследуйте полученную задачу на выпуклость при фикисрванном $t > 0$.

2. Для каждого значения размерности $n \in \{10, 20, \ldots, 100\}$ сгенерируйте $N = 100$ тестовых примеров. В каждом случае найдите глобальный минимум, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$, с помощью CVX.

3. Для каждого значения $n \in \{10, 20, \ldots, 100\}$ и для каждого тестового примера сгенерируйте 100 начальных точек. Для заданной точности **по значению функции** $\varepsilon = 0.01$ решите задачу с помощью метода логарифмических барьеров (Algorithm 11.1, p. 569) для различных значений параметра $\mu \in \{2, 10, 50, 100\}$ и $t_0 = 1$. Приведите необходимые аналитические вычисления.

4. В качестве результата работы метода подсчитайте:

    - Для каждого метода и значений $n \in \{10, 20, \ldots, 100\}$ среднее время работы метода и среднее число итераций (усреднение проводится по всем начальным точкам и по всем тестовым примерам) для разных значений параметра μ. Объясните зависимость результатов от параметра μ;

- Для отдельного тестового примера и $n = 10$ постройте зависимость средней точности **по значению функции** от числа итераций. Точность на k-ой итерации вычисляется по формуле $f_0(\mathbf{x}^{(k)}) - f_0(\mathbf{x}^*)$. Сравните результаты с имеющейся теоретической верхней оценкой (p. 566, the last equation before Ex. 11.2).

5. Оформите отчет с последовательным изложением пунктов 1-4 и выводами.