Введение в обработку сигналов (Scipy, Numpy, Torchaudio/Vision)

НИУ ВШЭ, Нижний Новгород

December 9, 2022

План

Подтемы

Часть 1: математический анализ (непрерывные функции!)

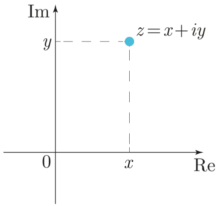
1. Комплексные числа
2. Преобразование Фурье от произвольной функции
3. Ортогональность Фурье-экспонент

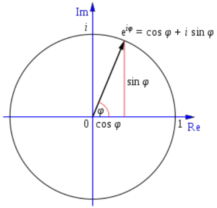
(a.k.a. "почему можно сделать обратное преобразование")

Часть 2: сигналы (дискретные!), фильтры

4. Сигналы (временные ряды): равномерность, частота дискретизации, теорема Котельникова
5. Сверточные фильтры (фильтры с конечной импульсной характеристикой)
6. Фильтры с бесконечной импульсной характеристикой

Комплексные числа





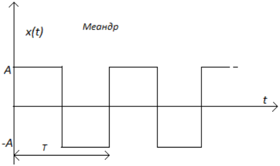
Надо знать

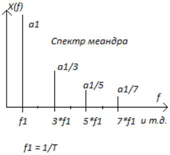
$i = \sqrt{-1}$ - комплексная единица
$e^{i\phi} = cos\phi + i \cdot sin\phi$ - формула Эйлера

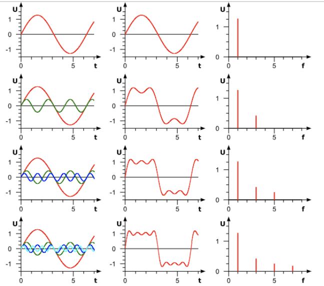
Вопрос на подумать

Как перейти от декартового представления к полярному?

Преобразование Фурье и как его интерпретировать







Надо знать

Пусть t - время, ω - частота.
Тогда спектр $f_\omega(\omega)$ функции $f(t)$ - результат свертки функции $f(t)$ с элементом Фурье-базиса: функцией $e^{-i\omega t}$.

Формула преобразования Фурье

Прямое преобразование Фурье

$f_\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ - результат преобразования Фурье.

Обратное преобразование Фурье

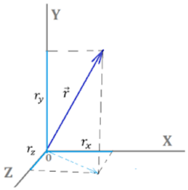
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ - результат обратного преобразования Фурье.

Takeaway

То, что результат обратного преобразования равен исходной функции - это **принципиальное** свойство системы экспонент $e^{-i\omega t}$. Оно называется *ортогональностью*.

Таким свойством не обладают произвольные вейвлеты.

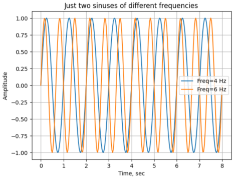
Ортогональность функций в пространстве L_2



Разложение произвольного вектора в пространстве

Мы можем представить произвольный вектор в n-мерном пространстве как сумму ортогональных составлящих, так? Какая операция для этого нужна?

Функция - это тоже вектор!
Только надо определить скалярное произведение.



Свертка одной Фурье-экспоненты с другой

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 t} e^{i\omega_2 t} dt = \delta(\omega_1, \omega_2)$$

Скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(t) dt$$

Подумать: чему это противоречит?

Функция - это тоже вектор!
Просто базис - это Фурье-экспоненты.

Представление функции по "координатам"

$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \sum \ldots$