数値解析

第5回

2023年11月2日

Gauss-Jordan法による連立方程式の解法

Gaussの消去法を用いた連立方程式の解法

【原理】

与えられた連立方程式の係数マトリクスの

対角要素を正規化し，非対角要素の消去を行う.

数学的な解法

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \cdots (1a) \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \cdots (1b) \\ -3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & = & 28 \cdots (1c) \end{cases}$$

上記連立方程式の解を求める場合を考える

数学的な解法(1)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \cdots (1a) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \cdots (1b) \\ -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 28 \cdots (1c) \end{cases}$$

式$(1a)$の両辺をx_1の係数で割り，**正規化**すると式$(2a)$を得る.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 - x_3 = -\frac{2}{3} \cdots (2a) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \cdots (2b) \\ -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 28 \cdots (2c) \end{cases}$$

数学的な解法(2)

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{2}{3}x_2 - x_3 = -\dfrac{2}{3} \cdots (2a) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \cdots (2b) \\ -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 28 \cdots (2c) \end{cases}$$

式$(2b)$からx_1を消去するため，式$(2a)$に式(2b)のx_1の係数をかけて，式$(2b)$から引く．同様に，式$(2c)$からx_1を消去するため，式$(2a)$に式$(2c)$のx_1の係数をかけて，式$(2c)$から引くと，以下が得られる．

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{2}{3}x_2 - x_3 = -\dfrac{2}{3} \cdots (3a) \\ \quad -\dfrac{10}{3}x_2 + 3x_3 = \dfrac{25}{3} \cdots (3b) \\ \quad 8x_2 + 2x_3 = 26 \cdots (3c) \end{cases}$$

数学的な解法(3)

$$\begin{cases} x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & x_3 & = & -\frac{2}{3} \cdots (3a) \\ & - & \frac{10}{3}x_2 & + & 3x_3 & = & \frac{25}{3} \cdots (3b) \\ & & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 26 \cdots (3c) \end{cases}$$

式$(3b)$の両辺を－10／3で割り，正規化すると以下が得られる．

$$\begin{cases} x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & - & x_3 & = & -\frac{2}{3} \cdots (4a) \\ & & x_2 & - & \frac{9}{10}x_3 & = & -\frac{5}{2} \cdots (4b) \\ & & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 26 \cdots (4c) \end{cases}$$

数学的な解法(4)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 - x_3 = -\frac{2}{3} \cdots (4a) \\ x_2 - \frac{9}{10}x_3 = -\frac{5}{2} \cdots (4b) \\ 8x_2 + 2x_3 = 26 \cdots (4c) \end{cases}$$

先の(2)と同様の方法で式$(4b)$および式$(4c)$からx_2を消去すると以下が得られる.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{5}x_3 = 1 \cdots (5a) \\ x_2 - \frac{9}{10}x_3 = -\frac{5}{2} \cdots (5b) \\ \frac{92}{10}x_3 = 46 \cdots (5c) \end{cases}$$

数学的な解法(5)

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - \dfrac{2}{5}x_3 = 1 \cdots (5a) \\ \qquad x_2 - \dfrac{9}{10}x_3 = -\dfrac{5}{2} \cdots (5b) \\ \qquad\qquad \dfrac{92}{10}x_3 = 46 \cdots (5c) \end{cases}$$

式$(5c)$を92／10で割り，正規化すると以下が得られる．

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - \dfrac{2}{5}x_3 = 1 \cdots (6a) \\ \qquad x_2 - \dfrac{9}{10}x_3 = -\dfrac{5}{2} \cdots (6b) \\ \qquad\qquad x_3 = 5 \cdots (6c) \end{cases}$$

数学的な解法(6)

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - \dfrac{2}{5}x_3 = 1 \cdots (6a) \\ \qquad x_2 - \dfrac{9}{10}x_3 = -\dfrac{5}{2} \cdots (6b) \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 5 \cdots (6c) \end{cases}$$

先の**(2)**と同様の方法で式$(6a)$および$(6b)$からx_3を消去すると，以下の解が得られる．

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 3 \\ \qquad x_2 \qquad = 2 \\ \qquad\qquad x_3 = 5 \end{cases}$$

以上のように正規化は対角要素に対して行われ，正規化が行われる際のその対角要素をピボットと呼ぶ．

連立方程式のマトリクス表現

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \cdots (1a) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \cdots (1b) \\ -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 28 \cdots (1c) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 28 \end{bmatrix} \cdots (8)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & 5 & 28 \end{bmatrix} \cdots (9)$$

3行4列の
二次元配列

連立一次方程式はマトリクスを用いて表すことができ，式(1)は式(8)のように表され，更に変数を除いて式(9)のように表される．

マトリクスを対象とした解法

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & 5 & 28 \end{bmatrix} \cdots (9)$$

式(9)のマトリクスに対して，以下のとおり正規化・消去を繰り返すことにより解を得る．↑をピボットという．

(a)正規化 $\begin{bmatrix} \underset{\uparrow}{1} & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & 5 & 28 \end{bmatrix}$

(b)消　去 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & 3 & \frac{25}{3} \\ 0 & 8 & 2 & 26 \end{bmatrix}$

マトリクスを対象とした解法

(c)正規化 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 8 & 2 & 26 \end{bmatrix}$

(d)消　去 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{92}{10} & 46 \end{bmatrix}$

(e)正規化 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{10} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(f)消　去 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

対角成分の1がx_1~x_3であるから,
解は, $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=5$.

プログラム作成のヒント

【1】本日の提出課題

式(9)の3行4列のデータをグローバル宣言した二次元配列に初期値として入れる宣言文を書きなさい（値は実数）.

【2】

上記3行4列の配列内容を小数点以下第5位まで，かつ整数部は2桁以上表示として以下のように表示する関数void PrintArr(void)を作成し，同関数をmain関数から関数呼び出しにて実行するプログラムを書きなさい.

```
 3.00000  2.00000 -3.00000 -2.00000
 2.00000 -2.00000  1.00000  7.00000
-3.00000  6.00000  5.00000 28.00000
```

【3】

Gauss-Jordan法による連立方程式の解法を実現するプログラムを書きなさい（係数に0が含まれた場合を除く）.

これが出来たら<u>係数に0が含まれている場合に対応したプログラム</u>を書きなさい.

（下線部は次回利用）

課題

前スライドに示したプログラム作成のヒント【1】の提出課題を，<u>Moodle上から回答</u>せよ．