

数値解析

第2回

2023年10月12日

計算機による数値の扱い（計算誤差について）

絶対誤差と相対誤差

真の値 x の近似値を a とするとき,

$$e = a - x$$

を a の誤差といい, e の絶対値,

$$|e| = |a - x|$$

を a の絶対誤差という.

更に, 真の値と誤差との相対的な関係(比),

$$eR = \frac{e}{x} = \frac{a - x}{x}$$

を近似値 a の相対誤差という.

計算機(コンピュータ)で扱う数は無限桁の数ではなく有限桁の数であるため, どうしても誤差は避けられない. プログラムにおいて, 変数の型や計算式など, 誤差を考慮して作成する必要がある.

丸め誤差

計算機で扱う数は有限桁の数である。そのため、有効桁数の範囲で四捨五入や切捨て（又は切上げ）などにより打ち切ってしまう。このような処理によって生じる誤差を丸め誤差という。

打ち切り誤差

計算機では無限桁の値を計算することはできない。これをきちんと計算するためには、無限の計算回数が必要で、無限の時間がかかる。更に精度が有限であるため、ある程度以下の計算は無意味である。そのため、精度内に計算が収まったら計算を止める（打ち切る）ので、この誤差を打ち切り誤差という。

桁落ちと情報落ち

浮動小数点演算で、計算結果が0に極端に近くなる加減算を行ったときに、有効数字の桁数が極端に少なくなる現象を**桁落ち**という。

例えば、

$$1.23456789 \times 10^2 - 1.23456780 \times 10^2 = 9 \times 10^{-6}$$

では、有効数字の桁数は9桁から一気に1桁に減少する。浮動小数点形式の値は内部的には常に有効数字の桁数を一定として扱っているため、桁落ちが発生すると不足した桁数が自動的に0で埋められてしまい、真の値との間に誤差が発生する。更に、桁落ちした数値に大きな数を掛けるなどの計算を行なうと、発生した誤差が上の桁に上がってくることによって、計算結果を無意味にするほどの大きな誤差を含んだ値が返されることになる。

また、倍精度実数型の精度は、およそ $(2^{-54}) = 5.5 \times 10^{-17}$ である。絶対値の差が大きな2数の加減算では、小さな値の方の数が事実上無視されることがある。この現象を**情報落ち**という。

課題

- 倍精度実数型(double型)の変数aに0.3を代入し, 変数aの値を小数点以下75桁まで表示するC言語によるプログラムを作成し, **丸め誤差**を確認せよ.
- 倍精度実数型(double型)の変数x, y, zを用意し, 変数xに1.0を代入, 同じく変数yに0.**00000000000000001**を代入, 変数xとyの値を小数点以下75桁まで表示させた後,

$$z = x + 1000000y$$

の変数zの値を小数点以下75桁まで表示するプログラムを作成し, **情報落ち**を確認せよ.

更に変数xに1.0を代入, 変数yに0.**00000000000000001**を代入し, 1,000,000回の繰り返し処理によってyの値をxへ加えた結果のzを表示し, 前述の結果と異なることを確認し, Moodle上のオンラインテキストとして回答せよ.