

数値解析

第11回

2023年12月21日

Newton-Raphson法による代数方程式の近似解法

[復習]数学Cハ

以下を思い出すこと。

2022年5月2日第4回講義

関数の連続

- 極限值（教科書p.38, 右側極限值・左側極限值）を理解
- 連続, 微分可能か否かを理解
- 中間値の定理（教科書p.40）を理解
- 連続関数の最大／最小値（教科書p.41）を理解

（微分は一瞬の変化量）

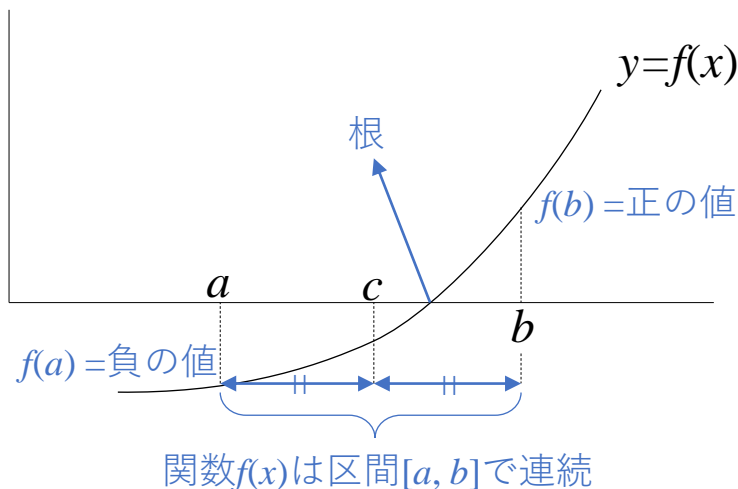
コラム記載の「2分法とニュートン法」を理解しておくこと
（後々の他授業などでも出てくる）

2分法

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続かつ根が1つだけ存在するような場合に利用できる方法。

このとき、以下のような関係が成立する必要がある。

$$f(a)f(b) < 0$$



2分法

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続かつ根が1つだけ存在するような場合に利用できる方法。

このとき、以下のような関係が成立する必要がある。

$$f(a)f(b) < 0$$

アルゴリズムは、以下のように徐々に解の存在区間を狭めることによって解を求める方法。

一般に収束は遅いが条件を満たせば必ず解に到達する。

1. 区間 $[a, b]$ の midpoint : $c = 0.5 \times (a+b)$ に対し, $f(c)$ の値を計算
2. $f(a)f(c) < 0$ であれば $b=c, f(b)=f(c)$, そうでなければ $a=c, f(a)=f(c)$
(前者は b に c を (後者は a に c を) 代入, $f(b)$ に $f(c)$ を (同 $f(a)$ に $f(c)$ を) 代入して更新)
3. $|b-a| < \epsilon$ ならば終了, そうでなければ 1. へ戻る

Newton法

まず，初期値 x_0 を与えて $f(x_0)$ を計算し， $(x_0, f(x_0))$ における接線が x 軸と交わる点を x_1 とする。

再び， x_1 から同様の手続きを繰り返し収束するまで続ける。

具体的には以下のとおり。

適切な初期値を設定すれば，（関数の形にもよるが）非常に速く解を求めることが可能。

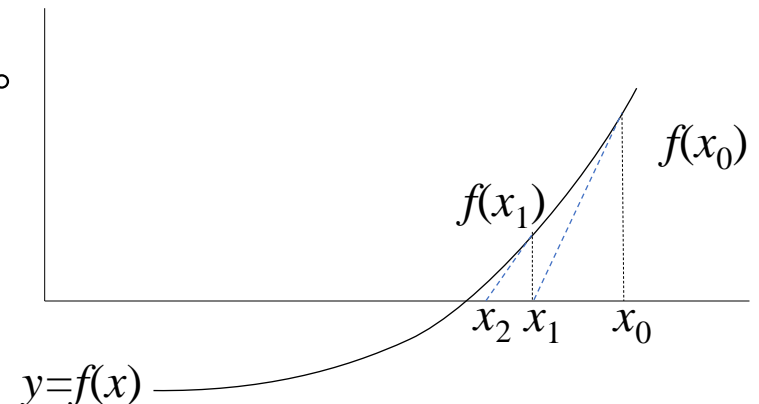
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

収束判定方法は，以下のような例がある。

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \varepsilon$$

$$|f(x_n)| < \varepsilon$$



2分法・Newton法のプログラミング

自分の学籍番号の下三桁をもとに、C言語による下記実数関数kansu(x)を記述しなさい。

学籍番号22T591なら、 $A=5$, $B=9$, $C=1$ となる。

$$\text{kansu}(x) = x^3 - Ax^2 - Bx + C \cdots \text{式(1)}$$

```
double kansu(double x) {  
    double kansu;  
  
    kansu = XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX;  
  
    return(kansu);  
}
```

2分法による解法

前述の収束条件における ϵ にあたる変数`epsi`を設けて、まずは

`epsi = 0.001`

を仮に代入しておく。

1. 変数`high`, `low`, `middle`を宣言し, `high=10`, `low = -10`を代入, 前スライドにおける式(1)の $x=\text{high}$ と $x=\text{low}$ の時の値を表示
2. `middle=(high+low)/2`の値とその時の関数値を計算
3. `kansu(high) × kansu(low)`の値を計算し, 値の符号がマイナスであることを確認, かつ値の絶対値が`epsi`以下であればそのように表示

2分法のプログラム

1. 変数`epsi`に0.001を代入
2. 変数`high, low, middle`で, `high`に10を, `low`に-10を代入
3. `kansu(high) × kansu(low)`の値の符号が負(-)で有ることを確認し, 値の符号が正, 又は値の絶対値が`epsi`以下であったらそのことを出力しプログラム終了
4. `middle = (high + low) / 2`の値を算出
5. `kansu(high) × kansu(middle)`の符号が負(-)なら`low = middle`とし, そうでなければ`high = middle`とする
6. `kansu(middle)`の値の絶対値が`epsi`以下であれば`middle`を解として処理終了, そうでなければ4. から繰り返す

2分法のプログラムにおける 値変更時の確認

- 前スライドの1.～6.に従い，各自C言語による2分法のプログラムを作成してみる。
- 変数`epsi`の値を，1, 0.1, 0.01, 0.001と変えながら解がどのように変わるか，前スライドの4. 以下の繰り返し数がどのようになるか確認。解を式に代入して，解の正確さも検証する。
- 解が1個以上あるかどうかを予想するため，Excelを用いてスライド6記載の式(1)を表現するグラフを作成し，自分の学籍番号に基づいた同グラフ上の解が1個又はそれ以上かを確認する。

課題

スライド6の式(1)を表すグラフをExcelを用いて作成し,
同ExcelファイルをMoodle上から提出せよ.