数值计算方法

第二章 插值方法

刘春凤

2021 年 10 月 19 日

第十一章 插值方法

- 一、引言
- 二、拉格朗日插值
- 三、均差与牛顿插值多项式
- 四、埃尔米特插值
- 五、三次样条插值

一、引言

1、插值问题的提出

设函数$y = f(x)$在区间$[a, b]$上有定义，且已知在点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的值$y_0$，$y_1, \ldots, y_n$，若存在一简单函数$P(x)$，使

$$P(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,\cdots,n), \tag{1.1}$$

成立，就称$P(x)$为$f(x)$的**插值函数**，点$x_0, x_1, \ldots, x_n$称为**插值节点**，包含节点的区间$[a, b]$称为**插值区间**，求插值函数$P(x)$的方法称为**插值法**。

一、引言

若$P(x)$是次数不超过n的代数多项式，即

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad (1.2)$$

其中a_i为实数，就称$P(x)$为**插值多项式**，相应的插值法称为**多项式插值**.

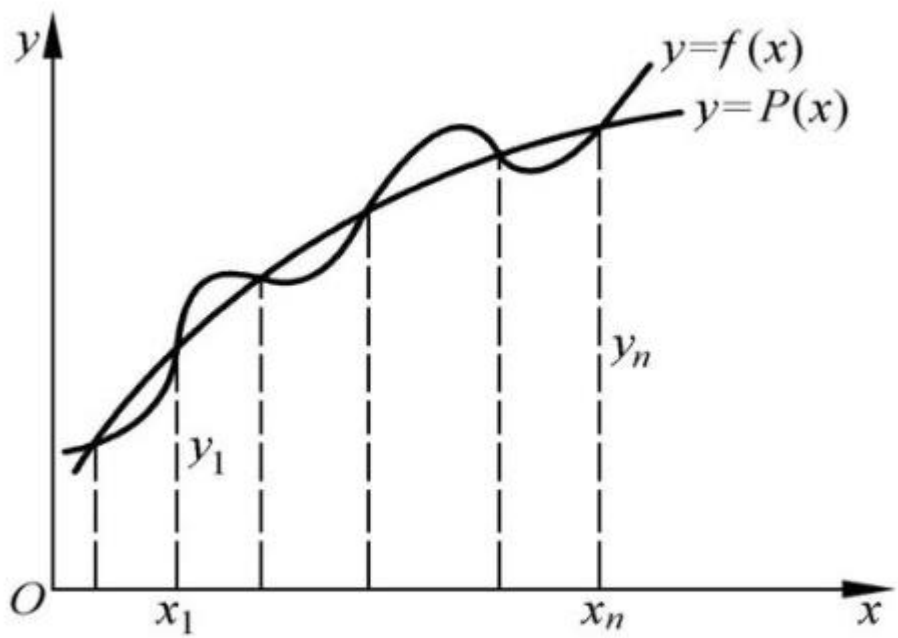
若$P(x)$为分段的多项式，就称为**分段插值**.

若$P(x)$为三角多项式，就称为**三角插值**.

本章只讨论多项式插值与分段插值.

一、引言

从几何上看，插值法就是确定曲线$y=P(x)$，使其通过给定的$n+1$个点$(x_i,y_i),i=0,1,\dots,n$，并用它近似已知曲线$y=f(x)$。见图。



一、引言

2、多项式插值

设在区间$[a,b]$上给定$n+1$个点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$上的函数值，$y_i = f(x_i)(i = 0,1,\dots,n)$，求次数不超过$n$的多项式$P(x)$，使

$$P(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,\cdots,n), \tag{1.3}$$

由此可以得到关于系数$a_0, a_1, \dots, a_n$的$n+1$元线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1, \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n, \end{cases} \tag{1.4}$$

一、引言

此方程组的系数矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

称为**范德蒙德（Vandermonde）矩阵**，由于$x_i(i=0,1,\dots,n)$互异，

故 $$\det(A)=\prod_{0\le j<i\le n}(x_i-x_j)\neq 0$$

因此线性方程组（1.4）的解$a_0,a_1,\dots,a_n$存在且唯一.

定理1 满足条件（1.3）的插值多项式$P(x)$是存在唯一的.

二、拉格朗日插值

▶1、线性插值与抛物插值

对给定的插值点，可以用多种不同的方法求得形如(1.2)的插值多项式.

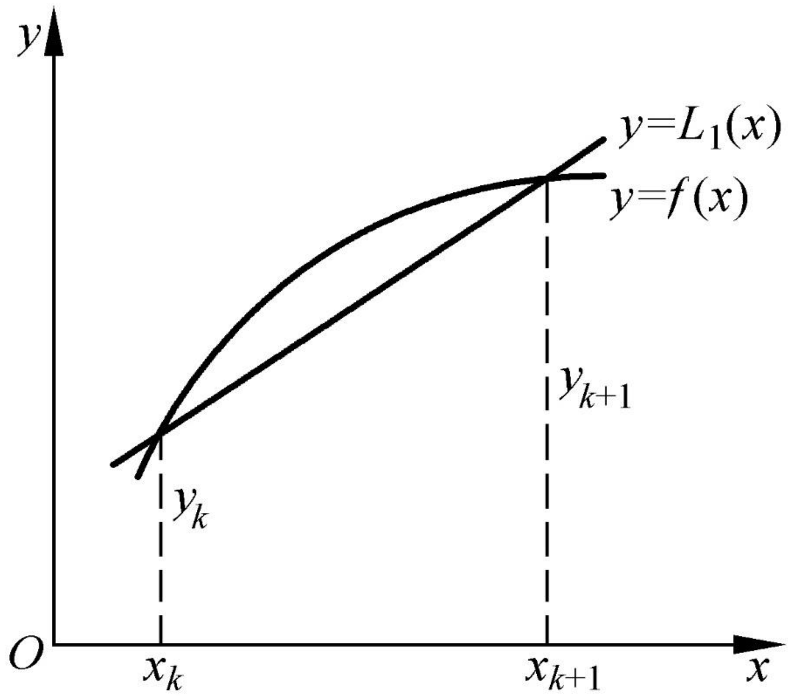
先讨论$n=1$的简单情形.

问题：给定区间$[x_k, x_{k+1}]$及端点函数值$\mathrm{y_k} = f(x_k)$，$\mathrm{y_{k+1}} = f(x_{k+1})$,要求线性插值多项式$L_1(x)$，使它满足

$$L_1(x_k) = y_k, \quad L_1(x_{k+1}) = y_{k+1}.$$

二、拉格朗日插值

其几何意义就是通过两点(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}),的直线，如下图。



二、拉格朗日插值

由$L_1(x)$的几何意义可得到表达式

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \qquad \text{（点斜式）}$$

（2.1）

$$L_1(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1} \qquad \text{（两点式）}$$

由两点式看出，$L_1(x)$是由两个线性函数

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \qquad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k},$$ （2.2）

的线性组合得到，其系数分别为y_k及y_{k+1}，即

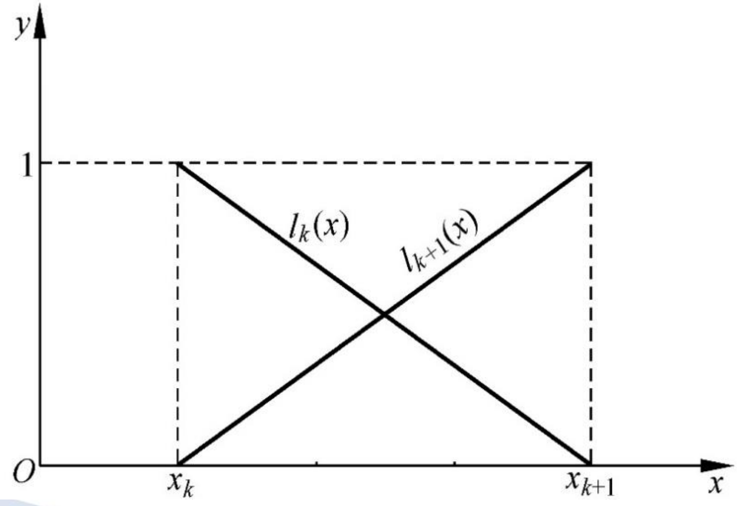
$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$ （2.3）

二、拉格朗日插值

显然，$l_k(x)$及$l_{k+1}(x)$也是线性插值多项式，在节点x_k及x_{k+1}上满足条件：

$$l_k(x_k)=1, \quad l_k(x_{k+1})=0;$$
$$l_{k+1}(x_k)=0, \quad l_{k+1}(x_{k+1})=1,$$

称$l_k(x)$及$l_{k+1}(x)$为**线性插值基函数**，图形如下。



二、拉格朗日插值

下面讨论$n=2$的情形.

假定插值节点为x_{k-1}，x_k，x_{k+1}，要求二次插值多项式$L_2(x)$使它满足

$$L_2(x_j)=y_j \qquad (j=k-1,k,k+1)$$

几何上$L_2(x)$是通过三点$(x_{k-1}，y_{k-1}),(x_k，y_k),(x_{k+1}，y_{k+1})$的抛物线。可以用基函数的方法求$L_2(x)$的表达式，此时基函数$l_{k-1}(x),l_k(x),l_{k+1}(x)$是二次函数，且在节点上满足条件

$$l_{k-1}(x_{k-1})=1, \quad l_{k-1}(x_j)=0, \quad (j=k,k+1);$$

$$l_k(x_k)=1, \quad l_k(x_j)=0, \qquad (j=k-1,k+1); \qquad (2.4)$$

$$l_{k+1}(x_{k+1})=1, \quad l_{k+1}(x_j)=0, \quad (j=k-1,k).$$

二、拉格朗日插值

接下来讨论满足（2.4）的插值基函数的求法，

以求 $l_{k-1}(x)$ 为例，由插值条件，它应有两个零点 x_k 及 x_{k+1}，可表示为

$$l_{k-1}(x) = A(x - x_k)(x - x_{k+1}),$$

其中A为待定系数，可由插值条件$l_{k-1}(x_{k-1}) = 1$定出

$$A = \frac{1}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}$$

于是

$$l_{k-1}(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}.$$

二、拉格朗日插值

同理
$$l_k(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}.$$

$$l_{k+1}(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}.$$

二次插值基函数$l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$在区间$[x_{k-1}, x_{k+1}]$上的图形见图2-4.

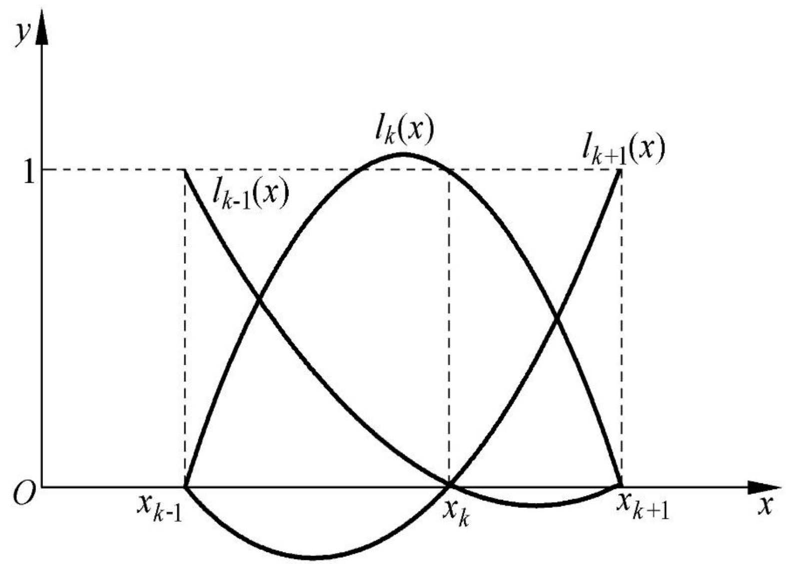


图2-4

二、拉格朗日插值

利用$l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$，立即得到二次插值多项式

$$L_2(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x) \qquad (2.5)$$

显然，它满足条件$L_2(x) = y_j, (j = k-1, k, k+1)$

将$l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$代入（2.5），得

$$L_2(x) = y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}$$

$$+ y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

$$+ y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}.$$

▶2、拉格朗日插值多项式

将前面的方法推广到一般情形，讨论如何构造通过$n+1$个节点$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$的n次插值多项式$L_n(x)$.

根据插值的定义$L_n(x)$应满足

$$L_n(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\cdots,n). \qquad (2.6)$$

为构造$L_n(x)$, 应先定义n次插值基函数.

二、拉格朗日插值

定义1 若n次多项式$l_j(x)(j=0,1,\dots,n)$在$n+1$个节点$x_0<x_1<\cdots<x_n$上满足条件

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j;\\ 0, & k\neq j.\end{cases}\quad (j,k=0,1,\cdots,n) \tag{2.7}$$

就称这$n+1$个n次多项式$l_0(x),l_1(x),\dots,l_n(x)$为节点$x_0,x_1,\dots,x_n$上的$n$**次插值基函数**。

二、拉格朗日插值

与前面的推导类似，n次插值基函数为

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$(k=0,1,\cdots,n). \qquad （2.8）$$

显然它满足条件（2.7）.

于是，满足条件（2.6）的插值多项式$L_n(x)$可表示为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x). \qquad （2.9）$$

二、拉格朗日插值

由$l_k(x)$的定义，知

$$L_n(x_j)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_j)=y_j \quad (j=0,1,\cdots,n).$$

形如（2.9）的插值多项式 $L_n(x)$ 称为**拉格朗日插值多项式**，而（2.3）与（2.5）是n=1和n=2的特殊情形。

若引入记号

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \qquad （2.10）$$

容易求得

$$\omega'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n),$$

二、拉格朗日插值

于是公式（2.9）可改写成

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}. \qquad （2.11）$$

注意： n次插值多项式$L_n(x)$通常是次数为n的多项式，特殊情况下次数可能小于n .

例如通过三点$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,的二次插值多项式$L_2(x)$，如果三点共线，则$y=L_2(x)$就是一条直线，而不是抛物线，这时$L_2(x)$是一次多项式.

二、拉格朗日插值

3、插值余项与误差估计

若在$[a,b]$上用$L_n(x)$近似$f(x)$，则其截断误差为$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$也称为插值多项式的**余项**。

定理2 设$f^n(x)$在$[a,b]$上连续，$f^{n+1}(x)$在(a,b)内存在，节点a $\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$, $L_n(x)$是满足条件(2.6)的插值多项式，则对任何$x\in[a,b]$，插值余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad （2.14）$$

这里$\xi\in(a,b)$且依赖于x，$\omega_{n+1}(x)$是（2.10）所定义的.

二、拉格朗日插值

证明 由给定条件知 $R_n(x)$ 在节点 $x_k(k=0,1,\ldots,n)$ 上为零，即 $R_n(x_k)=0(k=0,1,\ldots,n)$，于是

$$R_n(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=K(x)\omega_{n+1}(x) \qquad (2.13)$$

其中$K(x)$是与x有关的待定函数.

现把x看成$[a,b]$上的一个固定点，作函数

$$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n),$$

根据f的假设可知$\varphi^{(n)}(t)$在$[a,b]$上连续，$\varphi^{(n+1)}(t)$在(a,b)内存在.

二、拉格朗日插值

根据插值条件及余项定义，可知$\varphi(t)$在点x_0，$x_1, \dots, x_n$及x处均为零，故$\varphi(t)$在$[a,b]$上有$n+2$个零点，

根据罗尔定理，$\varphi'(t)$在$\varphi(t)$的两个零点间至少有一个零点，故$\varphi'(t)$在$[a,b]$内至少有$n+1$个零点.

对$\varphi'(t)$再应用罗尔定理，可知$\varphi''(t)$在$[a,b]$内至少有n个零点.

依此类推，$\varphi^{n+1}(t)$在(a,b)内至少有一个零点，记为$\xi \in (a,b)$，使

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!K(x) = 0,$$

二、拉格朗日插值

于是$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，$\xi\in(a,b)$，且依赖于$x$。

将它代入（2.13），就得到余项表达式（2.12）。

余项表达式只有在$f(x)$的高阶导数存在时才能应用.

但ξ在(a,b)内的具体位置通常不可能给出，如果可以求出$max_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|=M_{n+1}$，那么插值多项式$L_n(x)$逼近$f(x)$的截断误差限是

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|. \qquad (2.14)$$

二、拉格朗日插值

当n = 1时，线性插值余项为

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1),$$

$$\xi\in[x_0,x_1] \qquad （2.15）$$

当$n=2$时，抛物插值余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

$$\xi\in[x_0,x_2] \qquad （2.16）$$

二、拉格朗日插值

利用余项表达式（2.12），当$f(x)=x^k(k\le n)$时，

由于$f^{(n+1)}(x)=0$, 于是有

$$R_n(x)=x^k-\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=0,$$

由此得

$$\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=x^k,\quad k=0,1,\cdots,n. \qquad (2.17)$$

特别当$k=0$时，有

$$\sum_{i=0}^{n}l_i(x)=1. \qquad (2.18)$$

二、拉格朗日插值

利用余项表达式（2.12）还可知，若被插函数$f(x) \in H_n$，由于$f^{(n+1)}(x) = 0$，故$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = 0$，即它的插值多项式$L_n(x) = f(x)$.

二、拉格朗日插值

例2 已知$\sin 0.32 = 0.314567, \sin 0.34 = 0.333487,$ $\sin 0.36 = 0.352274$，用线性插值及抛物插值计算$\sin 0.3367$的值并估计截断误差.

解 由题意, 取

$$x_0 = 0.32, \quad y_0 = 0.314567,$$

$$x_1 = 0.34, \quad y_1 = 0.333487,$$

$$x_2 = 0.36, \quad y_2 = 0.352274.$$

用线性插值计算，取$x_0 = 0.32, x_1 = 0.34$ 由公式（2.1）

二、拉格朗日插值

$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367)$$

$$= y + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(0.3367 - x_0)$$

$$= 0.314567 + \frac{0.01892}{0.02} \times 0.0167$$

$$= 0.330365.$$

二、拉格朗日插值

由（2. 15）,其截断误差

$$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|,$$

其中

$$M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_1}|f''(x)| = \max_{x_0 \le x \le x_1}|-\sin x|$$

$$= \sin x_1 \le 0.3335,$$

于是

$$|R_1(0.3367)| = |\sin 0.3367 - L_1(0.3367)|$$

$$\le \frac{1}{2} \times 0.3335 \times 0.0167 \times 0.0033$$

$$\le 0.92 \times 10^{-5}.$$

二、拉格朗日插值

用抛物插值计算，由公式（2.5）得

$$\sin 0.3367 \approx y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= L_2(0.3367)$$

$$= 0.314567 \times \frac{0.7689\times 10^{-4}}{0.0008} + 0.333487$$

$$\times \frac{3.89\times 10^{-4}}{0.0004} + 0.352274 \times \frac{-0.5511\times 10^{-4}}{0.0008}$$

$$= 0.330374$$

二、拉格朗日插值

这个结果与6位有效数字的正弦函数表完全一样，

这说明查表时用二次插值精度已相当高了.

由（2. 14），截断误差限

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{6}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|,$$

其中 $M_3 = \max\limits_{x_0\le x\le x_2}|f'''(x)| = \cos x_0 < 0.9493,$

于是 $|R_2(0.3367)| = |\sin 0.3367 - L_2(0.3367)|$

$$\le \frac{1}{6}\times 0.9493\times 0.0167\times 0.033\times 0.0233$$

$$< 2.0132\times 10^{-6}.$$

二、拉格朗日插值

例2 设 $f \in C^2[a,b]$ 试证:

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 M_2,$$

其中 $M_2=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|.$

证明 通过两点$(a,f(a))$及$(b,f(b))$的线性插值为

$$L_1(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

于是

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]\right|$$

$$=\max_{a\le x\le b}|f(x)-L_1(x)|=\max_{a\le x\le b}\left|\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\right|$$

$$\le \frac{M_2}{2}\max_{a\le x\le b}|(x-a)(x-b)|=\frac{1}{8}(b-a)^2 M_2.$$

三、均差与牛顿插值多项式

1、插值多项式的逐次生成

利用插值基函数很容易得到拉格朗日插值多项式，公式结构紧凑，在理论分析中甚为方便，但当插值节点增减时全部插值基函数$l_k(x)(k=0,1,\dots,n)$均要随之变化，整个公式也将发生变化，甚为不便. 为了计算方便可重新设计一种逐次生成插值多项式的方法.

三、均差与牛顿插值多项式

当$n=1$时，记线性插值多项式为$P_1(x)$，插值条件为

$P_1(x_0)=f(x_0),P_1(x_1)=f(x_1)$，由点斜式

$$P_1(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-x_0),$$

将$P_1(x)$看成是零次插值$P_1(x)=f(x_0)$的修正，即

$$P_1(x)=P_0(x)+a_1(x-x_0),$$

其中$a_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$是函数$f(x)$的差商.

对于三个节点的二次插值$P_2(x)$,插值条件为

$$P_2(x_0)=f(x_0),P_2(x_1)=f(x_1),P_2(x_2)=f(x_2),$$

三、均差与牛顿插值多项式

插值多项式

$$P_2(x) = P_0(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

显然

$$P_2(x_0) = f(x_0), P_2(x_1) = f(x_1),$$

由$P_2(x_2) = f(x_2)$得

$$a_2 = \frac{P_2(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}.$$

系数a_2是函数f的"差商的差商".

三、均差与牛顿插值多项式

一般情况，已知f在插值点$x_i(i=0,1,\ldots,n)$上的值为$f(x_i)(i=0,1,\ldots,n)$，要求n次插值多项式$P_n(x)$满足条件

$$P_n(x_i)=f(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n, \tag{3.1}$$

则$P_n(x)$可表示为

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}), \tag{3.2}$$

其中a_0，$a_1,\ldots,a_n$为待定系数，可由插值条件确定.

这里的$P_n(x)$是由基函数$\{1,(x-x_0),\ldots,(x-x_{n-1})\}$逐次递推得到的，这一点与拉格朗日插值不同.

三、均差与牛顿插值多项式

▶2、均差及其性质

定义2

称$f[x_0\,,x_k]=\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$为函数$f(x)$关于点$x_0,x_k$的**一阶均差**.

$f[x_0\,,x_1,x_k]=\frac{f[x_0,x_k]-f[x_0,x_1]}{x_k-x_1}$称为$f(x)$的**二阶均差**.

一般地，称$f[x_0\,,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_0,\dots,x_{k-2},x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$

为$f(x)$的k **阶均差,** （均差也称为差商）.　　　　（3.3）

三、均差与牛顿插值多项式

均差有如下的基本性质：

（1）k阶均差可表为函数值$f(x_0), f(x_1), f(x_k)$的线性组合，即

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_k)}. \qquad (3.4)$$

这个性质可用归纳法证明.

这性质也表明均差与节点的排列次序无关，称为均差的对称性. 即

$$f[x_0, x_1, \cdots x_k] = f[x_1, x_0, x_2, \cdots, x_k] = \cdots = f[x_1, \cdots, x_k, x_0]$$

三、均差与牛顿插值多项式

（2） 由性质（1）及（3.3）可得

$$f[x_0,x_1,\cdots x_k]=\frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}. \qquad (3.3)$$

（3） 若$f(x)$在$[a,b]$上存在n阶导数,且节点$x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$，则$n$阶均差与导数关系如下：

$$f[x_0,x_1,\cdots x_k]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi\in[a,b]. \qquad (3.5)$$

这公式可直接用罗尔定理证明.

三、均差与牛顿插值多项式

证明：设$q(x)=f[x，x_0,\cdots，x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, $q(x)$在$x_0,\cdots，x_n$处均为零，所以$q(x)$在$[a,b]$上有$n+1$个零点，根据罗尔定理$q'(x)$在$q(x)$的两个零点间至少有一个零点，故$q'(x)$在$[a,b]$内至少有n个零点；反复应用罗尔定理，可知$q^{(n)}(x)$在$[a,b]$内至少有1个零点, 记为$\xi\in[a,b]$，使

$$q^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)-n!\,f[x_0,\cdots，x_n]=0,$$

所以 $$f[x_0,\cdots，x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

三、均差与牛顿插值多项式

3、牛顿插值公式

根据均差定义，一次插值多项式为

$$P_1(x) = P_0(x) + f[x_0, x_1](x - x_0) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0),$$

二次插值多项式为

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1). \end{aligned}$$

三、均差与牛顿插值多项式

根据均差定义，把x看成$[a,b]$上一点，可得

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0),$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_n).$$

三、均差与牛顿插值多项式

只要把后一式依次代入前一式，就得到

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\
&+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\
&+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \\
&+ f[x, x_0, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) \\
= P_n(x) &+ R_n(x),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\
&+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\
&+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}),
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

三、均差与牛顿插值多项式

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f[x, x_0, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x), \qquad (3.7)$$

$\omega_{n+1}(x)$是由（2.10）定义的.

显然，由（3.6）确定的多项式$P_n(x)$满足插值条件，且次数不超过n，它就是形如（3.1）的多项式，其系数为

$$a_k = f[x_0, \cdots, x_k], \qquad (k = 0,1,\cdots,n).$$

称$P_n(x)$为**牛顿（Newton）均差插值多项式**.

系数a_k就是均差表2-1中加横线的各阶均差，它比拉格朗日插值计算量省，且便于程序设计.

三、均差与牛顿插值多项式

（3.7）为插值余项，由插值多项式唯一性知，它与拉格朗日插值多项式的余项应该是等价的.

事实上，利用均差与导数关系式就可以证明这一点.

但（3.7）更有一般性，它在f是由离散点给出的情形或f导数不存在时也是适用的.

牛顿插值多项式的优点还在于它的递进性，当增加插值节点时，只要在原来插值多项式的基础上增加一项即可.

三、均差与牛顿插值多项式

例4　给出$f(x)$的函数表（见表2-2），求4次牛顿插值多项式，并由此计算$f(0.596)$的近似值.

首先根据给定函数表造出均差表.

表2-2

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差	五阶均差
0.40	0.41075					
0.55	0.57815	1.11600				
0.65	0.69675	1.18600	0.28000			
0.80	0.88811	1.27573	0.35893	0.19733		
0.90	1.02652	1.38410	0.43348	0.21300	0.03134	
1.05	1.25382	1.51533	0.52493	0.22863	0.03126	−0.00012

三、均差与牛顿插值多项式

从均差表看到4阶均差近似常数，5阶均差近似为0.

故取4次插值多项式$P_4(x)$ 做近似即可.

按牛顿插值公式，将数据代入

$$P_4(x)=0.41075+1.116(x-0.4)+0.28(x-0.4)(x-0.55)$$

$$+0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)$$

$$+0.03134(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8),$$

于是 $f(0.596)\approx P_4(0.596)=0.63192,$

截断误差 $|R_4(x)|\approx|f[x_0,\cdots,x_5]\omega_5(0.596)|\le 3.63\times10^{-9}.$

这说明截断误差很小，可忽略不计.

4、差分形式的牛顿插值公式

实际应用时经常遇到等距节点，即$x_k = x_0 + kh(k = 0,1,\dots,n)$的情形，这里$h$为常数，称为**步长**，这时插值公式可以进一步简化，计算也简单得多.

设x_k点的函数值为$f_k = f(x_k)(k = 0,1,\dots,n)$，称$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$为$x_k$处以$h$为步长的**一阶（向前）差分**.

类似地称$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k$为$x_k$处的**二阶差分**.

一般地称$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$ （3.8）

为x_k处的n**阶差分**.

三、均差与牛顿插值多项式

为了表示方便，再引入两个常用算子符号

$$If_k = f_k, \qquad Ef_k = f_{k+1}$$

I称为**不变算子**，E称为步长为h的**移位算子**，由此

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k = \mathrm{E}\, f_k - \mathrm{I}\, f_k = (\mathrm{E}-\mathrm{I})\, f_k,$$

$$\Delta^n f_k = (\mathrm{E}-\mathrm{I})^n f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \mathrm{E}^{n-j} f_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f_{n+k-j}, \qquad (3.9)$$

其中$\binom{n}{j} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!}$为二项式展开系数，（3.9）

说明各阶差分均可由函数值给出.

三、均差与牛顿插值多项式

反之，由

$$f_{n+k} = \mathrm{E}^n f_k = (\mathrm{I}+\Delta)^n f_k = [\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Delta^j] f_k,$$

可得

$$f_{n+k} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Delta^j f_k. \qquad (3.10)$$

从而有均差与差分的关系：

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h},$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f_k,$$

三、均差与牛顿插值多项式

一般地有

$$f[x_k,\cdots,x_{k+m}]=\frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k,\ (m=1,2,\cdots,n).\qquad（3.11）$$

由（3. 11）和（3. 5）又可得到差分与导数的关系：

$$\Delta^n f_k = h^n f^{(n)}(\xi),\qquad（3.12）$$

其中$\xi\epsilon(x_k,x_{k+n})$

三、均差与牛顿插值多项式

由给定函数表计算差分可由以下形式差分表给出.

f_k	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	$\cdots$
f_0					
	Δf_0				
f_1		$\Delta^2 f_0$			
	Δf_1		$\Delta^3 f_0$		
f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$	
	Δf_2		$\Delta^3 f_1$		$\vdots$
f_3		$\Delta^2 f_2$		$\vdots$	
	Δf_3		$\vdots$		
f_4		$\vdots$			
	$\vdots$				
$\vdots$					

三、均差与牛顿插值多项式

在牛顿插值公式（3.6）中，用（3.11）的差分代替均差，

并令$x = x_0 + th$，则得

$$P_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0, \qquad (3.13)$$

（3.13）称为**牛顿前插公式**，由（3.7）式得其余项为

$$R_n(x) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \qquad \xi \in (x_0, x_n). \qquad (3.14)$$

三、均差与牛顿插值多项式

例5 给出$f(x)=\cos x$在$x_k=kh, k=0,1,\dots,5, h=0.1$处的函数值，试用4次牛顿前插公式计算$f(0.048)$的近似值并估计误差.

解 为使用牛顿插值公式，先构造差分表.

表 2–3 差分表

x_k	$f(x_k)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0.00	1.00000					
		−0.00500				
0.10	0.99500		−0.00993			
		−0.01493		0.00013		
0.20	0.98007		−0.00980		0.00012	
		−0.02473		0.00025		−0.00002
0.30	0.95534		−0.00955		0.00010	
		−0.03428		0.00035		
0.40	0.92106		−0.00920			
		−0.4348				
0.50	0.87758					

三、均差与牛顿插值多项式

取$x = 0.048, h = 0.1$, 则$t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.048 - 0}{0.1} = 0.48$,得

$$f(0.048) = \cos 0.048 \approx P_4(0.048)$$

$$= 1.00000 + 0.48 \times (-0.00500)$$

$$+ \frac{(0.48)(0.48-1)}{2}(-0.00993)$$

$$+ \frac{1}{3!}(0.48)(0.48-1)(0.48-2)(0.00013)$$

$$+ \frac{1}{4!}(0.48)(0.48-1)(0.48-2)(0.48-3)(0.00012)$$

$$= 0.99885$$

三、均差与牛顿插值多项式

由（3.14）可得误差估计

$$|R_4(0.048)| \le \frac{M_5}{5!}|t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)|h^5$$

$$\le 1.5845 \times 10^{-7},$$

其中 $|M_5| \le |\sin 0.6| \le 0.565.$

四、埃尔米特插值

有些实际的插值问题不但要求在节点上函数值相等，

而且还要求对应的导数值也相等，甚至要求高阶导数也相等.

满足这种要求的插值多项式就是**埃尔米特插值多项式**.

埃尔米特插值

- 插值问题的一般要求

$$P(x_i) = f(x_i), i = 0, \cdots, n$$

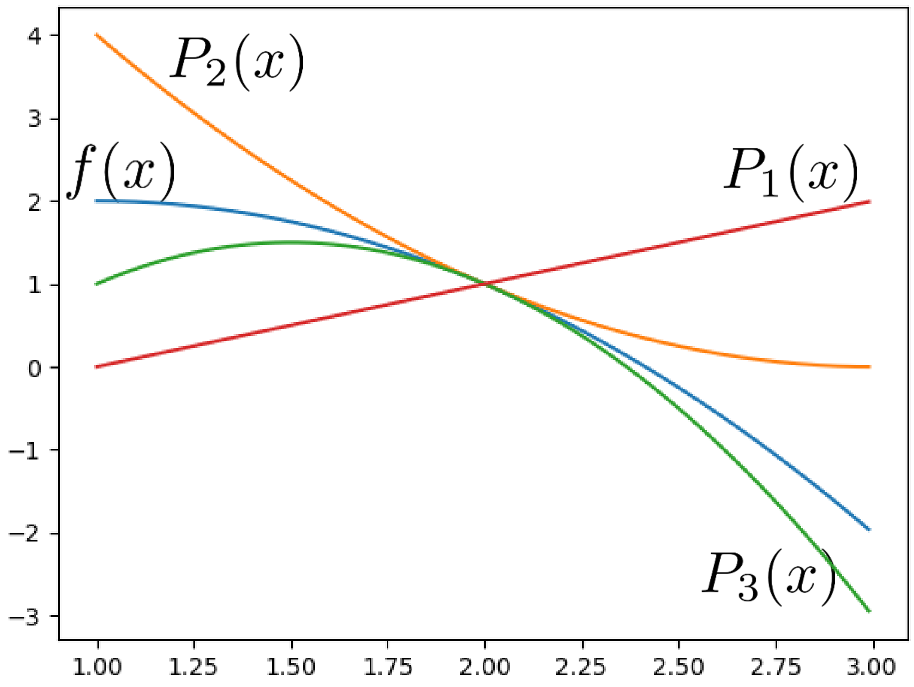
- 插值问题的较高要求

$$P(x_i) = f(x_i), i = 0 \cdots n$$

$$P'(x_i) = f'(x_i), i = 0 \cdots n$$

$$P^{(n)}(x_i) = f^{(n)}(x_i), i = 0 \cdots n$$

$P_1(x)$满足函数值相等
$P_2(x)$满足一阶导相等
$P_3(x)$满足二阶导相等



基函数构造法求解埃尔米特插值

- 一般地，给出m+1个插值条件（包含函数值和导数值），可构造出次数不超过m次的埃尔米特插值。
- 例：求满足$f(x_0), f(x_1), f'(x_1), f(x_2)$的多项式$H(x)$。
- 解：设$H(x)=f(x_0)h_0(x)+f(x_1)h_1(x)+f(x_2)h_2(x)+f'(x_1)h_3(x)$

由4个条件，可知H(x)为3次多项式。由插值条件，可整理$h_i(x)$应满足条件如下表所示:

	$h_0(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$
x_0	1	0	0	0
x_1	0	1	0	0
x_2	0	0	1	0
x_1'	0	0	0	1

▶1.求解 $h_0(x)$。由上表知$h_0(x_1)=h_0(x_2)=0, h_0'(x_1)=0$

所以$h_0(x)$有根x_1,x_2，且x_1为二重根，所以

$$h_0(x)=a(x-x_1)^2(x-x_2)$$

由 $h_0(x_0)=1$,即 $a(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)=1$

可得

$$a=\frac{1}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}$$

所以 $$h_0(x)=\frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}$$

同理 $$h_2(x)=\frac{(x-x_1)^2(x-x_0)}{(x_2-x_1)^2(x_2-x_0)}$$

	$h_0(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$
x_0	1	0	0	0
x_1	0	1	0	0
x_2	0	0	1	0
x_1'	0	0	0	1

2. 求解 $h_1(x)$.

显然$h_1(x)$有根 x_0, x_2

可设$h_1(x) = (a(x - x_1) + b)(x - x_0)(x - x_2)$

由条件$h_1(x_1) = 1, h_1'(x_1) = 0$，可得

$$\begin{cases} b(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) &= 1 \\ a(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) + b(2x_1 - x_0 - x_2) &= 0 \end{cases}$$

$$b = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$a = \frac{-(x_1 - x_0) - (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_0)^2 (x_1 - x_2)^2}$$

	$h_0(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$
x_0	1	0	0	0
x_1	0	1	0	0
x_2	0	0	1	0
x_1'	0	0	0	1

▶3. 求解 $h_3(x)$

$h_3(x)$有根 x_0, x_1, x_2,

设$h_3(x) = a(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

由$h_3'(x_1) = 1$得

$$a(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) = 1$$

所以

$$h_3 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

五、分段插值

▶函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2},x\in[-5,5]$ 做等距节点插值，给出最大误差。

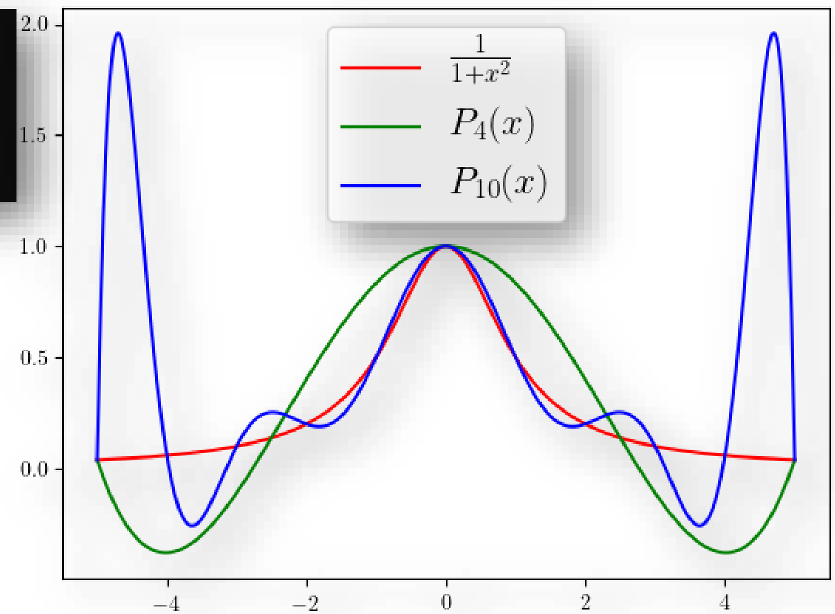
▶解：在节点

$$x_i=-5+\frac{i}{n}10, i=0\cdots n$$

上做插值计算，编程计算可

得以下结果：

```
n=4,      max error=0.4383526205418O285    at -3.97
n=10,     max error=1.9156430502192496     at -4.70
n=20,     max error=59.76832784760869     at 4.87
n=40,     max error=104404.79164299622    at 4.95
```



等距节点下，高次插值多项式在端点附近的抖动现象，称为龙格（Runge）现象

分段线性插值

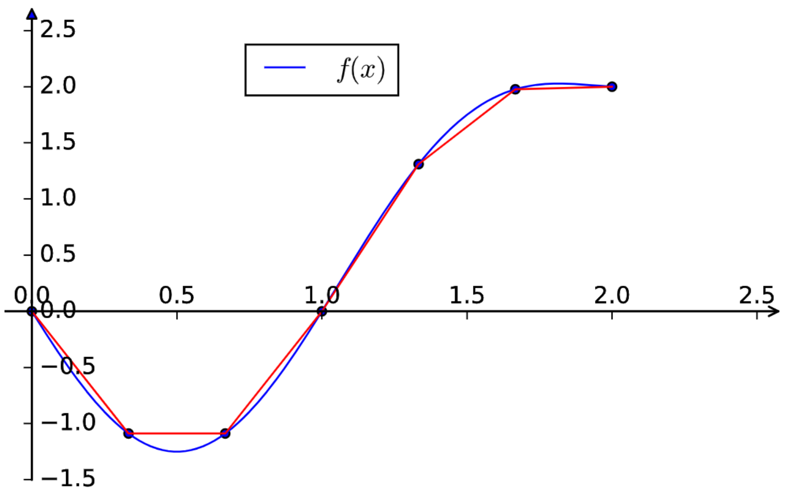
▶设已知节点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$上的函数值 $f_0,f_1,\cdots,f_n$，记$h_k=x_{k+1}-x_k, h=\max\limits_k h_k$求一折线函数满足：

(1) $I_h(x)\in C[a,b]$

(2) $I_h(x_k)=f_k(k=0\cdots n)$

(3) $I_h(x)$ 在每个区间$[x_k,x_{k+1}]$都为线性函数

则称 $I_h(x)$为分段线性插值函数。



▶误差估计：

$$|R(x)|=\max_{a\le x\le b}|f(x)-I_h(x)|\le\frac{M_2}{8}h^2, M_2=\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

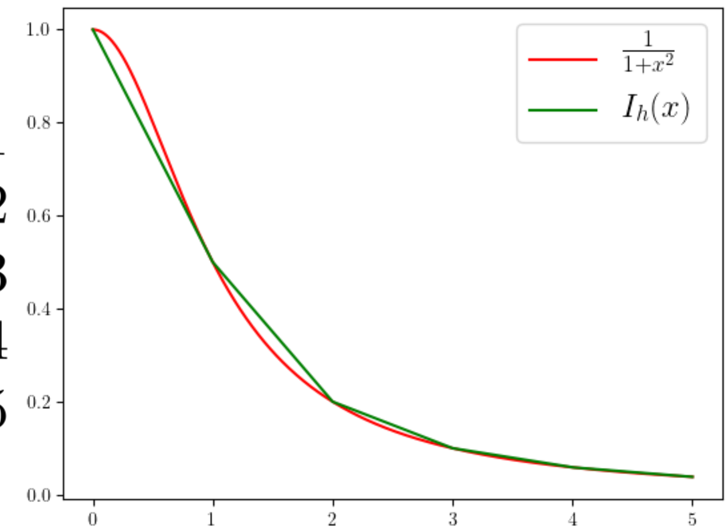
▶已知函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,在[0,5]上取等距节点 $x_i=0+i, i=0\cdots5$,求分段线性插值函数，并由此计算 $f(4.5)$的值。

解：节点处函数值如下表：

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$y=\dfrac{1}{1+x^2}$	1.00000	0.50000	0.20000	0.10000	0.05882	0.3846

每段使用拉格朗日插值得到：

$$I_h(x)=\begin{cases}-0.5x+1 & , \quad 0\le x<1\\ -0.3x+0.8 & , \quad 1\le x<2\\ -0.1x+0.4 & , \quad 2\le x<3\\ -0.04118x+0.22354 & , \quad 3\le x<4\\ -0.02036x+0.14026 & , \quad 4\le x\le 5\end{cases}$$



$$f(4.5)\approx I_h(4.5)=0.04864$$

小节

- 多项式插值
  - 待定系数法求解多项式系数
  - 拉格朗日插值
  - 牛顿插值
- 由插值多项式的存在唯一性，这三种方法得到的是同一个多项式。从线性空间的角度来看，三种方法只是取了次多项式空间的不同基函数
  - 待定系数法：$\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$
  - 拉格朗日：$\{l_0(x), \cdots, l_n(x)\}$
  - 牛顿插值：$\{1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \cdots, \prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)\}$
- 埃尔米特插值
- 分段插值