Teknik bir konu olduğu için el ile kağıt üzerine yazılarak doküman oluşturulmuştur.

Sayı Tabanları

Kısa bir hatırlatma

Oğuzhan Karagüzel 15.11.2024

SAYI SİSTEMLERİ

İnsan neden sayılara ihtiyaç duyar?

İnsanlık tarihi boyunca insanlar çevrelerini anlamak ve organize etmek için sayılara ihtiyaç duymuştur. Günlük yaşamda hayvan sayısından ticarete, zaman ölçümünden uzaklık hesaplamaya kadar bir çok alanda sayılar hayati bir rol oynar. İlk toplumlar yiyecek, su, barınak ve ticari ihtiyaçları karşılamak için nesneleri sayarak envanter tutmak zorundaydılar. İşte bu nedenle, sayma ve ~~geliştirme~~ hesaplama yöntemleri geliştirme ihtiyacı doğdu.

Neden Onluk Taban?

Peki, sayılarla çalışırken neden 10'u temel alan bir sistem geliştirdik? Tarih boyunca pek çok sayı sistemi denenmiş olsa da, onluk sistem insan doğasına en uygun olanıydı. Bunun en basit ve en doğal nedeni, insanların ellerinde on parmağı olmasıdır. Parmaklar, saymayı ve sayıları öğrenmeyi kolaylaştırdığı için, zamanla bu sistem toplumlar arasında yaygın hale geldi. Başka sayı sistemleri kullanılmış olsada, onluk taban, hem kavramsal hem de uygulama açısından en pratik sistem olarak tercih edildi

Başka bilindik sayı sistemi.

En meşhurlarından biri 5'lik sayı sistemidir.
Bu sistemdeki en meşhur gösterim şu şekildedir;
~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ Bildiğimiz çentik.

Bunun dışında 2'lik, 10'luk, 16'lık sayı sistemi üzerine duracağız.

10'luk sistem ya da taban

Normalde bir sayıyı yazarken, normalin dışında bir durum yoksa, bunları göstermeyiz. 17 sayısını örnek alalım.

$\underbrace{(+1)}_{\text{İşaret}} \times 17^{(1) \Rightarrow \text{Üs}}_{(10) \Rightarrow \text{Taban}}$ gibi gösterimde bulunmuyoruz.

Bunun sebebi; zaten bu değerler kullandığımız sistemde en uygun olan değerler olduğundan daha doğrusu beklenen bu olduğu için göstermeyiz.

Şimdi ise taban gösterimini kullanacağız. farklı tabanları ayırt etmek için;

$$\left.\begin{array}{l} 17_{(10)} \\ 11_{(16)} \\ 10001_{(2)} \end{array}\right\}$$ Bu üç sayıda aynı değere sahiptir.

10'luk sistemde 10 adet rakam bulunmaktadır.
Bunlar;

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

her bir rakam bir haneye yazılır. Saymaya başladığınızda elinizdeki rakamlar bittiğinde bir sonraki hageye geçerek saymaya devam ederiz. Örnek olarak;

11,12,13,--- Bu diğer tabanlarda da aynı şekildedir.

2'lik taban.

2'lik tabanda rakamlarımız. 0-1
Saymaya başlarsak; 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111---
şeklinde ilerler.

16'lık taban

Bizim dikkat etmemiz gereken hane kavramıdır.

rakamlarımıza bakalım;

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15

sorunu görmüş olmalısınız. buradaki bazı rakamlar çift haneli. Bu rakamların bir hageye denk gelmesi gerekiyor. Bundan dolayı bu rakamların yeniden gösterime ihtiyacı var.

yeni gösterim ise şu şekildedir;

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

A ⇓ 10, B ⇓ 11, C ⇓ 12, D ⇓ 13, E ⇓ 14, F ⇓ 15

Bu sayede 16'lık tabanda sayı yazabiliriz.
Eğer harfleri kullanmazsak sayı yazamazdık. örnek;

$113_{(16)}$ tabanında ki sayının haneleri 1, 13 mü?
yoksa 1, 1, 3 mü? bilemezdik.

hafler sayesinde artık $113_{(16)}$ sayısının $1D_{(16)}$ olmadığını biliyoruz.

☆ Eğer bir sayı için taban belirtilmemişse 10'luk tabanda olduğunu kabul ederiz.

$10_{(2)}$ ⇒ 2'lik taban

$10_{(16)}$ ⇒ 16'lık taban

$10_{(10)}$ ⇒ 10'luk taban

10 ⇒ 10'luk taban

1A ⇒ hatalı. 10'luk tabanda A rakamı yok

$1A_{(2)}$ ⇒ hatalı. 2'lik tabanda A rakamı yok

$1A_{(16)}$ ⇒ doğru.

Şimdi ise dönüşümlere bakalım. Ancak önce kısaca Üslü sayılara bakmamız gerekmektedir.

Üslü Sayılar (Tersinden bakalım)

Taban gösterimi sırasında üs'sü göstermiştik;

$17^{(1) \Rightarrow \text{üs}}_{(10) \Rightarrow \text{taban}}$ eğer üs gösterilmemişse pozitif 1 olarak kabul edilir. Eğer üs (+1) değilse (+1)'e dönüşüm yapmanız gerekir. Bunun için şu işlem yapılır.

Örnek olarak; 2^3 ile benim üssü 1 olan ve 2^3'e eşit olan bir sayı bulmam gerekecek. Nasıl bulurum;

$\underbrace{2^1 \times 2^1 \times 2^1}_{2^{(1+1+1)}}$ ise üsler toplanır ve 2^3 elde edilir.

Üsler toplanması yerine sayıları birbiri ile çarparız.

$2^1 \times 2^1 \times 2^1 = 8^1$ elde edilir. Yani $2^3 = 8^1$'dir.

Üs kadar sayıyı kendisi ile çarparak üssü (+1) olan sayı elde edilir. Bu sayede beklentiye uygun sayı elde edilir. $(+1) \times 8^{(1)}_{(10)}$

Aynı durum köklü sayı içinde geçerlidir. Köklü sayılarda üs tam sayı değildir. $\sqrt{4} \Rightarrow {}_{(+1) \times} 4^{(1/2)}_{(10)} \Rightarrow {}_{(+1) \times} 2^{1}_{(10)}$

Konumuz olmadığı için köklü sayılara girmiyoruz.

Üslü sayılarada kısaca bakış attığımıza göre, dönüşümlere bakabiliriz.

Taban dönüşümleri

Daha da temel bir konudan başlamak istiyorum. Not almak istiyorsunuz. Bundan dolayı size kalem gerekiyor. İlk olarak kaleminizin olup olmadığını kontrol etmeniz gerekiyor. Kaleminiz var ise "Kaleminiz vardır", yok ise "Kaleminiz yoktur". Peki Kaç kaleminiz var sorusunun cevabı "var" ya da "yok" mudur? Hayır! Sizden kalemlerinizin sayısı istenmektedir. Eğer bir tane kaleminiz var ise sayabilirsiniz. "1". Yoksa da sayabilirsiniz "0". Eğer Kaleminiz yoksa "0 kalemim var" diyebilirsiniz. Yani Kaleminiz yok demektir. Eğer bir tane kaleminiz var ise "1 Kalemim var" diyebilirsiniz. Bu ise tam olarak "Kalemim var ve 1 adet" demektir. Bu durumda 0 yok 1 ise var demek oluyor.

Bu durumu anladığınıza göre şimdi "1'den" fazla kaleminizin olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda kaleminiz var demektir. Ancak adedini nasıl belirteceğiz. "4" kaleminiz olsun. 4 kere "1 kalemim var" 'mı diyeceğiz. (Bilgisayar için buna benzer bir durum kullanmaktayız). Hayır! daha basit bir gösterim kullanmatayız "1+1+1+1 kalemim var". Bu sayede "toplamda kaç kalemim var?" sorusuna kısaca cevap vermiş oluruz. Buradaki "1+1+1+1" ifadesini, dört parmağınız olarak düşünebilirsiniz.

10'luk tabanda rakamları icad ettiğimiz için "toplam" gösterimini kısaltabiliriz. "1+1+1+1=4"

Rakamları anladık. Peki ya haneler? Saymamız gereken sayılar, elimizdeki rakamlardan fazla olursa ne yapacağız? Örnek olarak "11 kalemim var" dediğimiz de ne yapacağız. Bir önceki gibi "9+2 kalemim var" 'mı diyeceğiz? Hayır! Bunu da kısaltmamız gerekiyor. Sayorsak elimizde 10'a gelene kadar rakamlar var. rakamlar bittiğinde duvara bir çentik atıp devam edebiliriz. Örnek

||||||||| $\Rightarrow$ 9 ~~||||||||||~~ $\Rightarrow$ 10 (1 kere) ~~||||||||||~~ || $\Rightarrow$ 10 + 2 (1 kere 10 + 2)

~~||||||||||~~ ~~||||||||||~~ ||| $\Rightarrow$ 23 (2 kere 10 + 3)

Bu sefer toplamanın kısaltmasını yapmamız gerekli. Buna çarpma diyoruz.

Rakamlar bittiğinde hemen sol tarafına geçip kaçıncı 10'dan gittiğimizide yazıyoruz. Neden 10? 10'luk sistemde olduğumuz için.

Örnek; 20 $\Rightarrow$ (2 kere 10) 32 $\Rightarrow$ (3 kere 10+2)

Peki ya 3 haneli 326 $\Rightarrow$ (3 kere 10 kere 10+2 kere 10+6)

Oldukça pratik bir sistem. 326 tane biri yan yana yazamayız. 1+1+1+ - - - - +1+1. gibi.

3 kere 10 kere 10 size bir şeyi anımsattımı? 10 kere 10
$10\times10 \Rightarrow 10^1\times10^1 \Rightarrow 10^2$.

Rakamlar ile toplama işlemini kısalttık; $1+1+1 \Rightarrow 3$

Çarpma ile Rakamları toplama işini kısattık; $9+3 \Rightarrow 1\times10+2$

haneler ile çarpma işlemini kısalttık; $1\times10+2 \Rightarrow 12$

Üsller ile aynı sayıları çarpma işlemini kısalttık $\Rightarrow 10\times10=10^2$

Bu sayede 326 sayısını daha iyi analiz edebiliriz.

$$326$$

$$3\times10^2 + 2\times10^1 + 6$$

$$3\times10\times10 + 2\times10 + 6$$

$$|||||||||| \; |||||||||| \; |||||||||| \; \cdots \; ||||||$$

$$1+1+1+1+ \cdots +1+1$$

Bu kısaltmalar sayesinde devasa sayıları kısalta biliyoruz.

Örnek; $400000000 \Rightarrow 4\times10^8$

Burada hane gösteriminden çıkmış olduk! Ancak sayıyı çok daha az karakter ile yazabildik.

Şimdi 10'luk tabanı anladıysak 2'lik tabana dönüştürmeye çalışalım.

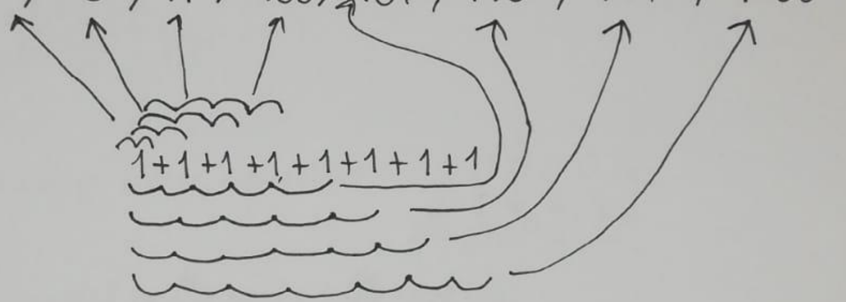
10'luk tabandan 2'lik tabana

Hadi biraz kafa karıştıralım!

8 sayısını ele alalım. Normalde 8 sayısı; 1+1+1+1+1+1+1+1 demek olduğunu biliyoruz.

10'luk tabanda saydığımızda 8 sayısını elde ederiz. Peki ikilik tabanda. İkilik tabanda saymaya çalışalım. iki rakamımız var. 0,1. haneleride kullanalım.

	Bir	iki	üç	dört	beş	altı	yedi	sekiz
10'luk	1	2	3	4	5	6	7	8
2'lik	1	10	11	100	101	110	111	1000



Sanırım bu şemadan neden 1'lik taban olmadığı anlaşılıyor. Burada 2'lik tabanın rakamlarını kullanmış olduk. hane sistemini de kullandık.

Peki bu hanelerin 10'luk tabandaki karşılığına bakalım.

1 0 0 0 haneleri olduğunu biliyoruz. Onluk tabanda bu şekilde yapmıştık. Burada da aynı şekilde geçerli. Yine aynı işlemleri yaparsak

~~2^3~~ ~~2^2~~ ~~2^1~~ ~~2~~ 2^0

2^{11} 2^{10} 2^1 2

(1 kere 2 kere 2 kere 2)+(0 kere --- [gerisi anlamsız)+(0 kere ---)+(0 ---)

~~(1×2^{11})~~ $+(0)+(0)+(0) =$ ~~(1×2^{11})~~ $\Rightarrow 11_{(2)}$ iki tabanında 3 kere

(1×2^{11}) $\qquad (1\times2^{11}) \Rightarrow$ Sayarsam $11_{(2)}$ elde ederim.

(1×2^{11}) sayısının aslında bir kısa gösterim olduğunu biliyoruz.

Onluk tabanda sayının yanına 0 eklemek anlamına gelmekteydi.

Buradada aynı şekilde;

$(11 \Rightarrow 3$ kere $1+1+1 \Rightarrow 11_{(2)})$

$$(3 \times 10^4) = 30000 \Rightarrow (1 \times 2^{11})_{(2)} = 1000_{(2)}$$

Pekala. Biz o zaman doğrudan onluk tabandaymış gibi davranalım.

Yani;

$$\underset{2^3}{1}\ \underset{2^2}{0}\ \underset{2^1}{0}\ \underset{2^0}{0} \Rightarrow (1 \times 2^3) \Rightarrow (1 \times 8) \Rightarrow 8 \text{ elde edilir.}$$

Görüldüğü üzere dönüşüm oldukça basittir. Ancak şunu diyebilirsiniz.

Bu küçük sayılar için dönüşüm kolay. Peki ya büyük sayılar?

Örnek olarak 63 sayısı için 63'e kadar teker ~~teker~~ teker sayacakmıyız?

Hayır!

Kısa yol

63'te kaç kere iki olduğunu sürekli olarak hane bazında bulmaya çalışalım.

$$\begin{array}{l}
63 \div 2 = 31, \quad 63 - 62 = 1 \Rightarrow 2^0 \\
31 \div 2 = 15, \quad 31 - 30 = 1 \Rightarrow 2^1 \\
15 \div 2 = 7, \quad 15 - 14 = 1 \Rightarrow 2^2 \\
7 \div 2 = 3, \quad 7 - 6 = 1 \Rightarrow 2^3 \\
3 \div 2 = 1, \quad 3 - 2 = 1 \Rightarrow 2^4 \\
1 \div 2 = 0, \quad 1 - 0 = 1 \Rightarrow 2^5
\end{array}$$

$$\Rightarrow 111111_{(2)} = 63_{(10)}$$

Sayı sürekli bölünür.
İlk adımda sayı bölünür. Bölüm tabandan büyükse Bölüm tekrar tabana bölünür. Bölüm 0 olana kadar işlem tekrarlanır.
En son elde edilen kalan en büyük hanedir. İlk elde edilen kalan en küçük hanedir. Bu sıra ile sayı yazılarak sonuç elde edilir. Örnek olarak 16 sayısını inceleyelim.

$$
\begin{array}{l}
16 \mid 2 \\
-16 \mid 8 \mid 2 \\
\quad 0 \quad -8 \mid 4 \mid 2 \\
\qquad 0 \quad -4 \mid 2 \mid 2 \\
\qquad\quad 0 \quad -2 \mid 1 \mid 2 \\
\qquad\qquad 0 \quad -0 \mid 0 \\
\qquad\qquad\quad 1
\end{array}
$$

$\Rightarrow 10000_{(2)} = 16_{(10)}$

Hadi bu sayıyı terse çevirelim;

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0_{(2)} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
2^{100} & 2^{11} & 2^{10} & 2^{1} & 2^{0}
\end{array}
$$

$(1 \times 2^{100})_{(2)} \Rightarrow (1 \times 2^{4})_{(10)} \Rightarrow (1 \times 16) \Rightarrow 1 \cdot 16.$

dahada kısaltırsak;

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
2^{4} & 2^{3} & 2^{2} & 2^{1} & 2^{0}
\end{array}
\Rightarrow 1 \times 2^4 \Rightarrow 1 \times 16 \Rightarrow 16 /\!/
$$

$111111_{(2)} = 63_{(10)}$ olduğunu bulmuştuk. Bakalım doğrumu?

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
2^{5} & 2^{4} & 2^{3} & 2^{2} & 2^{1} & 2^{0}
\end{array}
\Rightarrow (1 \times 2^5) + (1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0) \Downarrow
$$

$$(1 \times 32) + (1 \times 16) + (1 \times 8) + (1 \times 4) + (1 \times 2) + (1 \times 1) \Downarrow$$

$$32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$$ doğru!

Buraya kadar anladık. Şimdi ise 16'lık tabanı inceleyelim.

10'luk taban 16'lık taban dönüşümü

Rakamları tekrar hatırlayalım.

10 ⇒ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

16 ⇒ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

10, 11 --- nerede? Onlar rakam değil. Sayı! Ancak 16'lık tabanda rakam olarak karşılıkları var.

10 → A, 11 → B, 12 → C, 13 → D, 14 − E, 15 − F.

Aynı kısayol buradada uygulanır. Hadi 19 sayısını inceleyim:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 16 \\ -16 & 1 \;|\; 16 \\ 3 & -0 \;|\; 0 \\ & 1 \end{array} \Rightarrow 13_{(16)} = 19_{(10)}$$

30 sayısına bakalım.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 16 \\ -16 & 1 \;|\; 16 \\ \underbrace{14}_{\text{bir hane}} & -0 \;|\; 0 \\ & 1 \end{array}$$

$\underbrace{1,14}_{}{}_{(16)} = 30_{(10)}$

bir hane

⇓

$1E_{(16)} = 30_{(10)}$

Tersine dönüştürelim;

$13_{(16)} \Rightarrow \underset{16^1}{1}\ \underset{16^0}{3} \Rightarrow (1 \times 16^1) + (3 \times 16^0) \Rightarrow 16 + 3 = 19$ ✓

$1E_{(16)} \Rightarrow \underset{16^1}{1}\ \underset{16^0}{E} \Rightarrow (1 \times 16^1) + (E \times 16^0) \Rightarrow (16) + (14 \times 1) \Rightarrow 30$ ✓

Sadece rakamlara dikkat ederseniz. dönüşüm oldukça kolaydır. diger tabanlar ile aynıdır.

Doğrudan dönüşüm.

Tabandar arasında birbirine doğrudan dönüştümek zordur. Bundan dolayı 10'luk tabanı referans olarak kullanırız. İlk olarak 10'luk tabana dönüştürürüz. ardından asıl istediğimiz tabana döndürürüz. kısa bir örnek;

$1111_{(2)} \Rightarrow$ işlemler $\Rightarrow 15 \Rightarrow$ işlemler $\Rightarrow A_{(16)}$

Birde şuna bakalım;

$$10110101_{(2)}$$

$(1\times2^7)+(0\times2^6)+(1\times2^5)+(1\times2^4)+(0\times2^3)+(1\times2^2)+(0\times2^1)+(1\times2^0)$

$128 + 0 + 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1$

$\boxed{181}$

Şimdi on altılık tabana geçelim.

$$\begin{array}{r|l}
181 & 16 \\
-176 & 11 \;|\; 16 \\
5 & -0 \;|\; 0 \\
 & \underbrace{11}_{B}
\end{array} \Rightarrow B5_{(16)}$$

Şunu unutmayalım ki; $2^4=16$

Peki birde şuna bakalım

$\underbrace{1011}\underbrace{0101}$

$\underbrace{1011}_{B0} \Longrightarrow$ $\underbrace{0101}$ kendi içerisinde 16'lık tabana çevirirsek $5_{(16)}$

$B0_{(16)} + 5_{(16)} = B5$

Her bir 4 hane 16'lık tabanda 1 haneye denk gelmektedir. Tam terside geçerlidir. Bundan dolayı şunu ezberlemek gerekir.

2) 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001

10) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

16) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

2) 1010 , 1011 , 1100 , 1101 , 1110 , 1111
10) 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15
16) A , B , C , D , E , F

Eğer bu sayıları ezberlerseniz. oldukça hızlı dönüşüm yapabilirsiniz.

ÖDEV

Taban dönüşümlerini öğrendiğinizi var sayarak! Bit kavramını araştırınız. Neden 2'lik taban kullanılır.

TEST

Eger 60 altı Not alırsanız Lütfen konuyu Tekrarlayınız.

Kopya çekmek serbest! Cevap anahtarı hariç. Yapay zekayı kullanabilirsiniz. Eğer kullanırsanız İşlemleri adım adım anlatmasını isteyiniz.

1-) 37 sayısını 2'lik tabana çeviriniz (12.5P)

A-) $110011_{(2)}$

B-) $100111_{(2)}$

C-) $100101_{(2)}$

D-) $101001_{(2)}$

2-) 83 sayısını 16'lık tabana çeviriniz. (12.5P)

A-) $53_{(16)}$ B-) $50_{(16)}$

C-) $54_{(16)}$ D-) $43_{(16)}$

3-) $10110101_{(2)}$ sayısını 10'luk tabana çeviriniz. (12.5 P)

A-) 181 B-) 179

C-) 190 D-) 167

4-) $111001101_{(2)}$ sayısını 16'lık tabana çeviriniz. (12.5 P)

A-) $1F0_{(16)}$ B-) $1CE_{(16)}$

C-) 1DC(16 D-) $1CD_{(16)}$

5-) $A1E_{(16)}$ sayısını 10'luk tabana çeviriniz. (12.5 P)

A-) 2410 B-) 2590

C-) 2690 D-) 2530

6-) $2F_{(16)}$ sayısını 2'lik tabana çeviriniz (12.5 P)

A-) $111110_{(2)}$ B-) $101111_{(2)}$

C-) $110111_{(2)}$ D-) $101000_{(2)}$

7-) $37_{(16)}$ sayısını 2'lik tabane çeviriniz. (12.5 P)

Kısayol kullanınız.

A-) $101111_{(2)}$ B-) $111101_{(2)}$

C-) $110111_{(2)}$ D-) $101010_{(2)}$

8-) $1110011_{(2)}$ sayısını 16'lık tabana çeviriniz. (12.5 P)

Kısayol kullanınız

A-) $F7_{(16)}$ B-) $EA_{(16)}$

C-) $7E_{(16)}$ D-) $E7_{(16)}$

Cevap Anahtarı

1-C , 2-A , 3-A , 4-D , 5-B , 6-B , 7-C , 8-D