Função de Transferência de Modelos Físicos

Análise de Sistemas Físicos

Prof. Tiago Quirino
tiago.quirino@eng.uerj.br

Função de Transferência de Sistemas Mecânicos

Considere novamente o modelo diferencial do sistema massa-mola-amortecedor:

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t)$$

Reescrevendo no domínio de Laplace:

$$Ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = R(s)$$

Então a função de transferência é:

$$\frac{\text{Saída}}{\text{Entrada}} = G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$

Deseja-se obter a resposta $y(t)$ usando a transformada de Laplace.

$$R(s) = M[s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] + b[sY(s) - y(0^-)] + kY(s)$$

Quando:

$r(t) = 0$

$y(0^-) = y_0$

$y'(0^-) = 0$

Tem-se: $Ms^2Y(s) - Msy_0 + bsY(s) - by_0 + kY(s) = 0$

Resolvendo para $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{(Ms+b)y_o}{Ms^2+bs+k} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Para um caso específico, considerando $\frac{k}{M} = 2$ e $\frac{b}{M} = 3$:

$$Y(s) = \frac{(s+3)y_o}{s^2+3s+2} = \frac{(s+3)y_o}{(s+1)(s+2)}$$

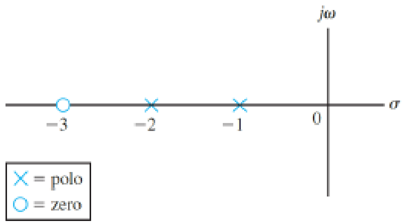


FIGURA 2.7 Um diagrama de polos e zeros no plano *s*.

Extraído de: DORF, R. C., BISHOP, R. H. Sistemas de Controle Modernos. São Paulo: Editora LTC, 2013.

Expandindo-se em frações parciais (**caso 1**):

$$Y(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

$$k_1 = (s+1).\left.\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s_1=-1} = 2;\ k_2 = (s+2).\left.\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s_1=-2} = -1$$

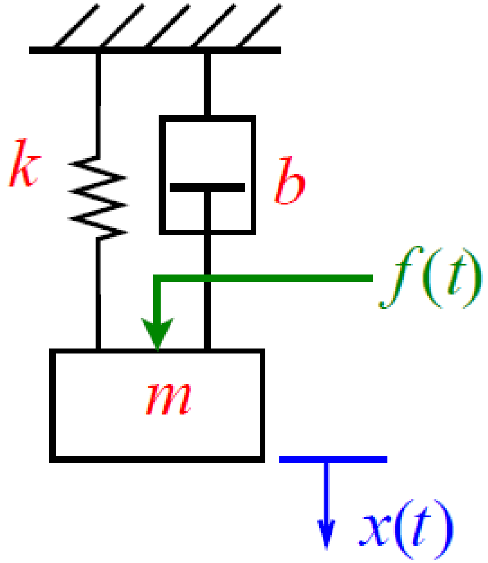
Aplicando a transforma inversa de Laplace:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right]$$

$$y(t) = 2e^{-t} - 1e^{-2t}$$

– **Exemplo:** O sistema abaixo consiste de um sistema massa-mola amortecedor, cuja dinâmica é regida pela equação diferencial ordinária:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$$



Considerando os valores de *m*, *b* e *k* de um determinado sistema, tem-se:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 85x = f(t)$$

Determine:

a) a função de transferência $X(s)/F(s)$

b) a saída do sistema quando aplicada uma força exercida pelo golpe que pode ser considerada um impulso, com condições iniciais nulas

Solução

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 85x = f(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2X(s) + 4sX(s) + 85X(s) = F(s)$$

$$X(s)(s^2 + 4s + 85) = F(s)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 85} = G(s)$$

Para $f(t) = \delta(t)$, resulta em $F(s) = 1$.

$$X(s) = G(s)F(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 85} \times 1$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 85} = \frac{1}{(s+2)^2 + 81} = \frac{1}{9}\frac{9}{(s+2)^2 + 9^2}$$

O deslocamento da massa no tempo é obtido aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{9}\frac{9}{(s+2)^2 + 9^2}\right\}$$

$$x(t) = \frac{1}{9} \cdot e^{-2t} sen(9t)$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Teorema: $\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$

Gráfico no tempo

```
close all % fecha as janelas de plot ativas
clear     % limpa as variáveis do workspace
clc       % limpa tela

% Cria um vetor de tempo de 0 a 3 segundos em
% incrementos de 0.01 s
t = [0:0.01:3];
% Resposta no tempo calculada utilizando a inversa
% de Laplace (conforme Slide) para uma entrada na
% forma de impulso
Gimpulso = (1/9)*sin(9*t).*exp(-2*t);

% Cria o gráfico Gimpulso em relação ao tempo
plot(t,Gimpulso)
```

Gráfico a partir da função de transferência

```
close all % fecha as janelas de plot ativas
clear     % limpa as variáveis do workspace
clc       % limpa tela

figure
G = tf(1,[1 4 85])  % Função de transferência da planta
impulse(G) % aplica a função delta de dirac na função de transferência G
```

b) a saída do sistema quando aplicada uma força constante de 1N em t=0, com condições iniciais nulas

Solução

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 85x = f(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace:

$$s^2X(s) + 4sX(s) + 85X(s) = F(s)$$
$$X(s)(s^2 + 4s + 85) = F(s)$$
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 85} = G(s)$$

Para $f(t) = u(t)$, resulta em $F(s) = \frac{1}{s}$.

$$X(s) = G(s)F(s)$$
$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 85} \cdot \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 85} \cdot \frac{1}{s}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, o deslocamento da massa no tempo é obtido :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4s + 85} \cdot \frac{1}{s}\right\}$$

$$x(t) = \frac{1}{85} - 2 \cdot \frac{sen(9t)e^{-2t}}{765} - \frac{cos(9t)e^{-2t}}{85}$$

Gráfico no tempo

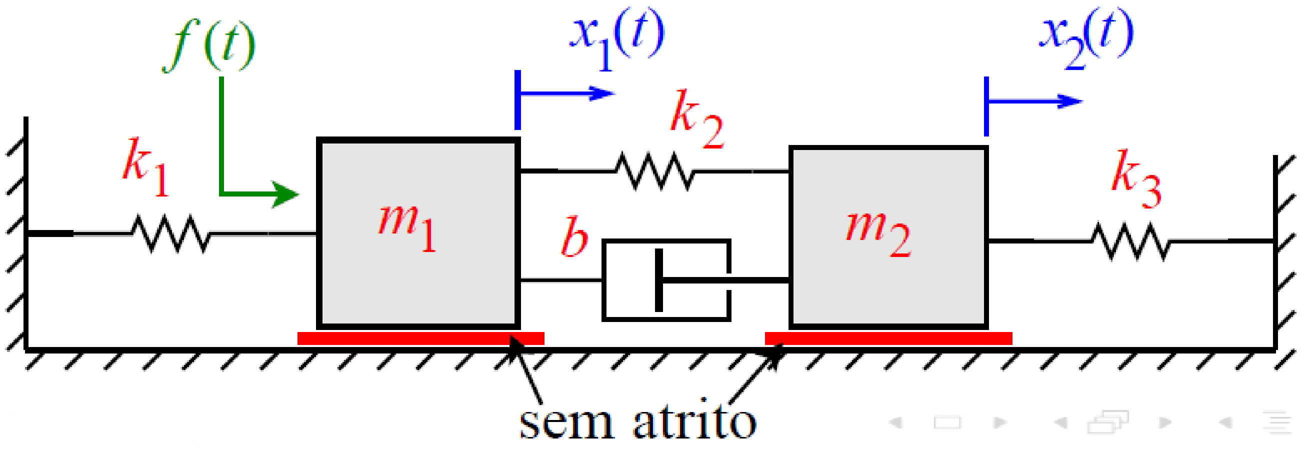
```
close all % fecha as janelas de plot ativas
clear     % limpa as variáveis do workspace
clc       % limpa tela

% Cria um vetor de tempo de 0 a 3 segundos em
% incrementos de 0.01 s
t = [0:0.01:3];
% Resposta no tempo calculada utilizando a inversa
% de Laplace (conforme Slide) para uma entrada na
% forma de degrau
Gdegrau = 1/85 - 2*sin(9.*t).*exp(-2.*t)/(765) - cos(9.*t).*exp(-2.*t)/(85);

% Cria o gráfico Gimpulso em relação ao tempo
plot(t, Gdegrau)
```

Gráfico a partir da função de transferência

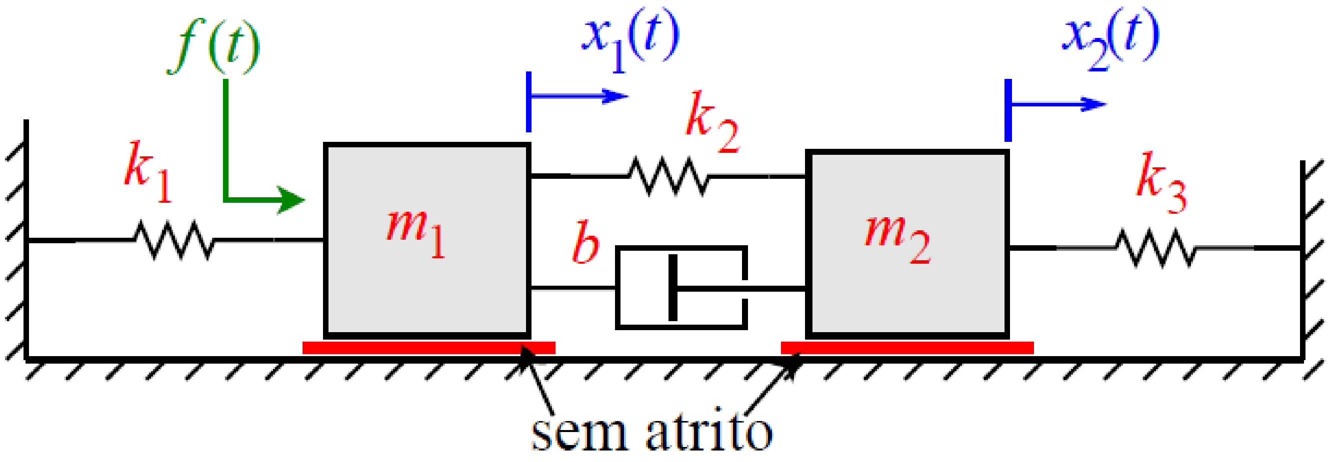
```
close all % fecha as janelas de plot ativas
clear     % limpa as variáveis do workspace
clc       % limpa tela

figure
G = tf(1,[1 4 85])  % Função de transferência da planta
step(G) % aplica a função degrau unitário na função de transferência G
```

- **Exemplo:**

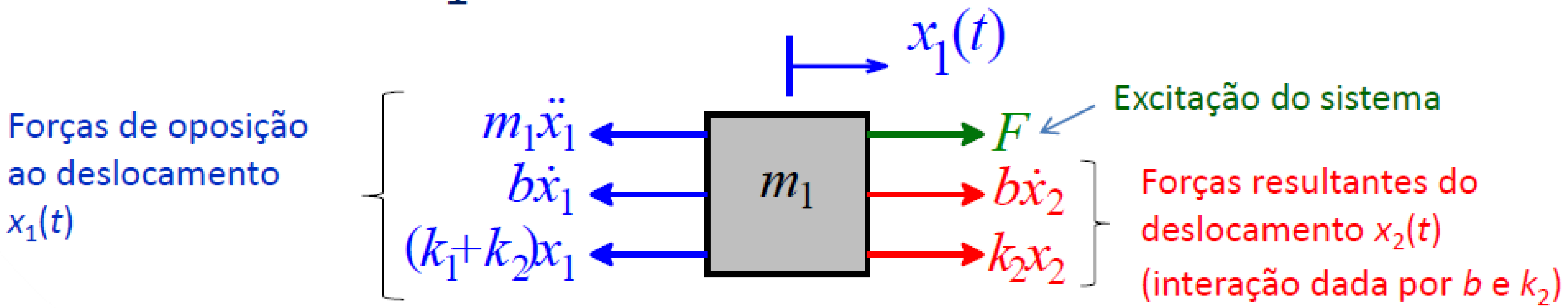
  Considerando o sistema mecânico com duas massas, determine o modelo em função de transferência considerando como entrada a força $f(t)$ aplicada à massa 1 e como saída o deslocamento da massa 2, $x_2(t)$.



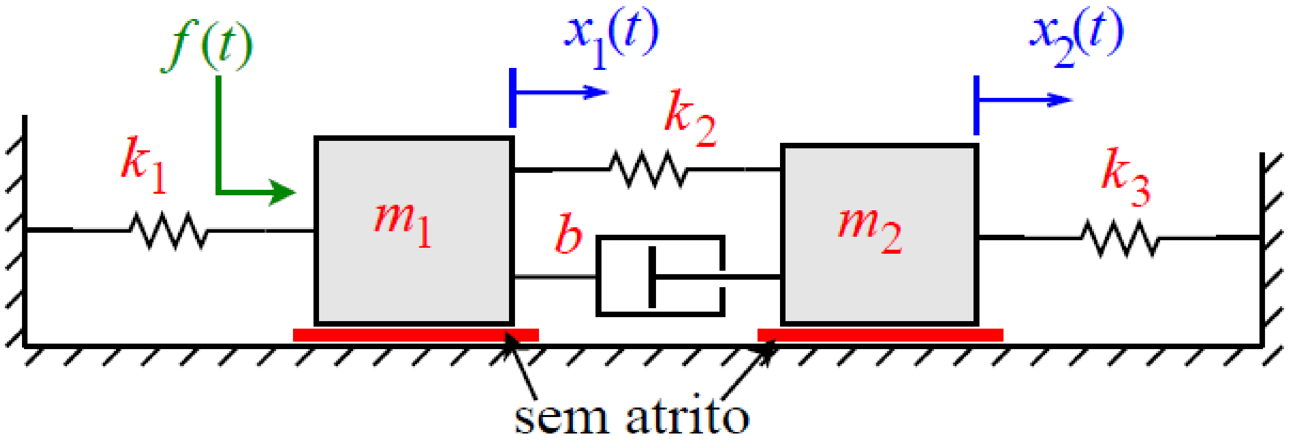
- **Exemplo:**



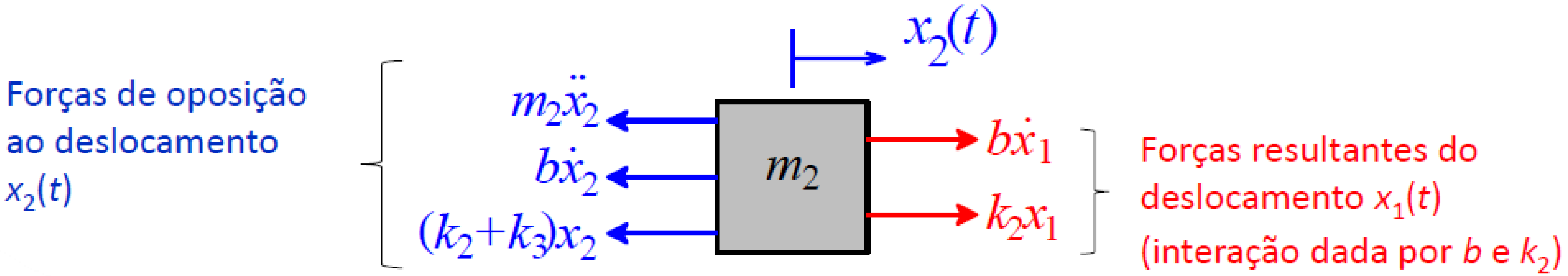
- Diagramas de Corpo livre:
  - Deslocamento $x_1(t)$



- **Exemplo:**

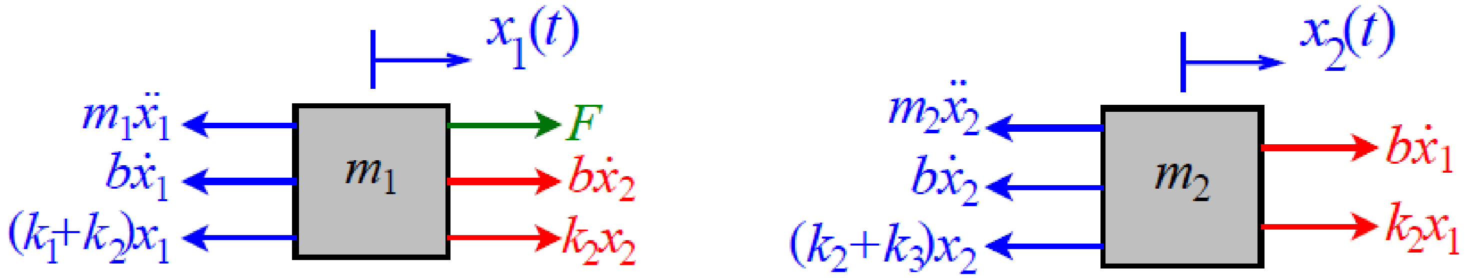


- Diagramas de Corpo livre:
  - Deslocamento $x_2(t)$



- **Exemplo:**

Diagramas de Corpo livre:



Aplicando-se a 2ª Lei de Newton, as equações de movimento são:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = F + b\dot{x}_2 + k_2x_2 \\ m_2\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 = b\dot{x}_1 + k_2x_1 \end{cases}$$

- **Exemplo:**

  Aplicando a Transformada de Laplace, com condições iniciais nulas,

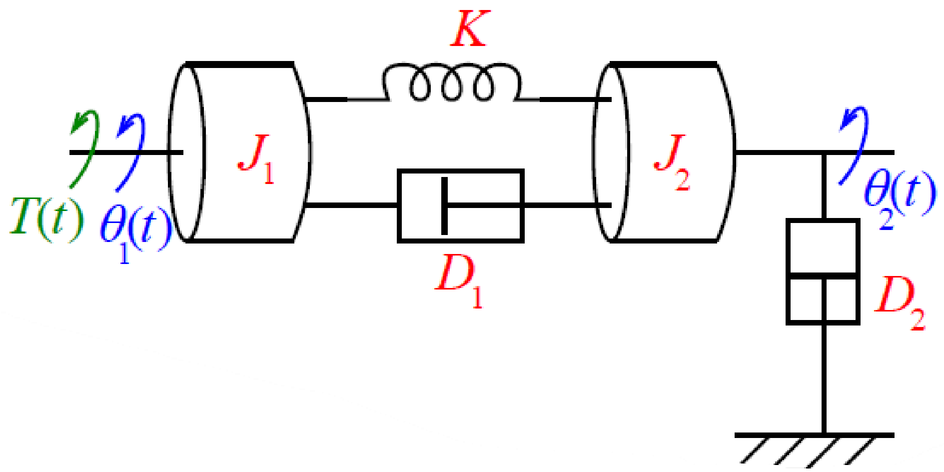
$$\begin{cases} \left[m_1 s^2 + bs + (k_1 + k_2)\right] X_1(s) = F(s) + (bs + k_2) X_2(s) \\ \left[m_2 s^2 + bs + (k_2 + k_3)\right] X_2(s) = (bs + k_2) X_1(s) \end{cases}$$

  Isolando $X_1(s)$ na segunda equação e substituindo na primeira, obtém-se:

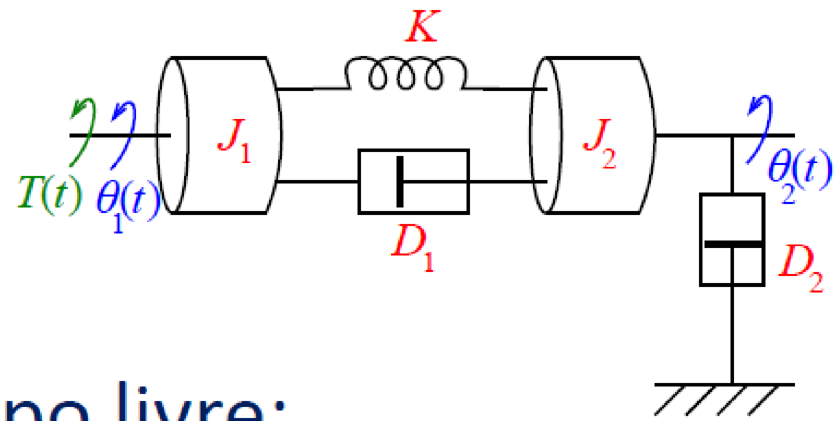
$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{bs + k_2}{m_1 m_2 s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 + \left[m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)\right]s^2 + b(k_1 + k_3)s + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)}$$

- **Exemplo:**

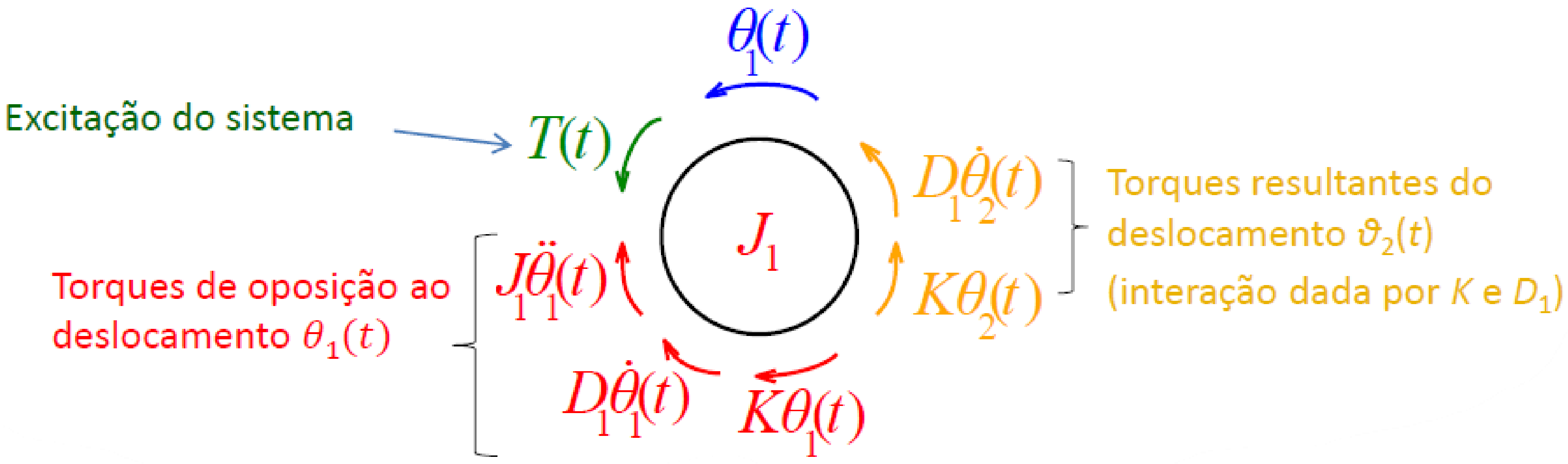
  Considerando o sistema mecânico com duas inércias, determine o modelo em função de transferência considerando como entrada o torque $T(t)$ aplicada ao eixo da inércia J_1 e como saída o deslocamento do eixo da inércia J_2, $\theta_2(t)$.



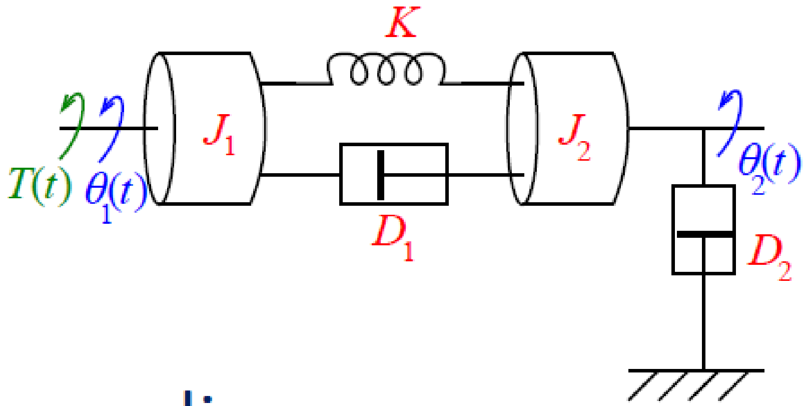
- **Exemplo:**



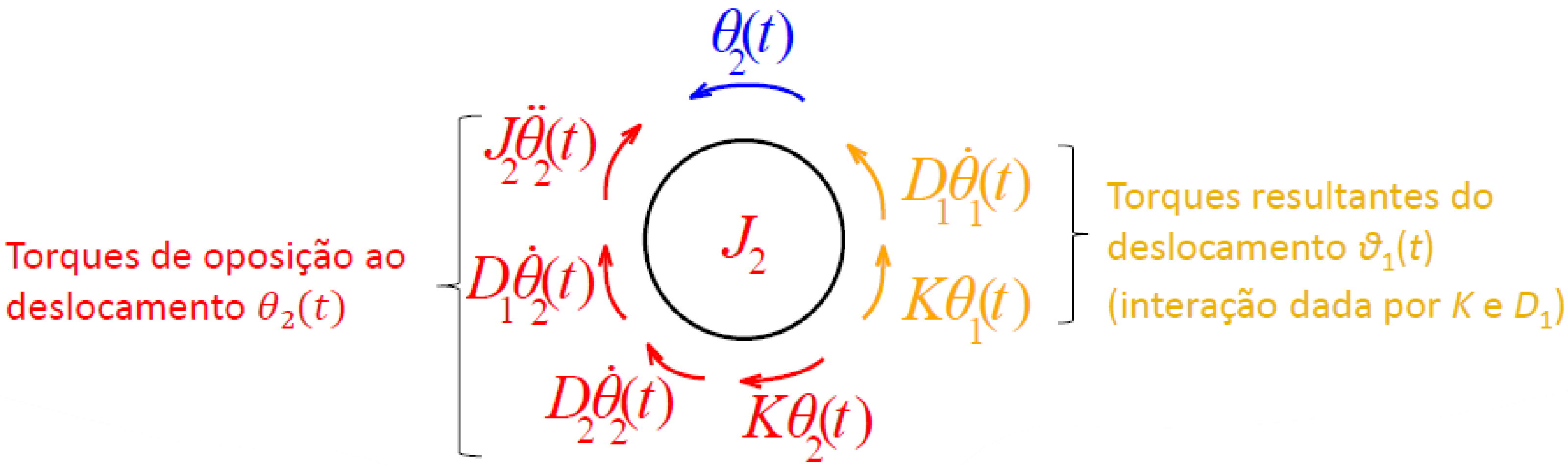
- Diagramas de Corpo livre:
  - Deslocamento $\theta_1(t)$



- **Exemplo:**

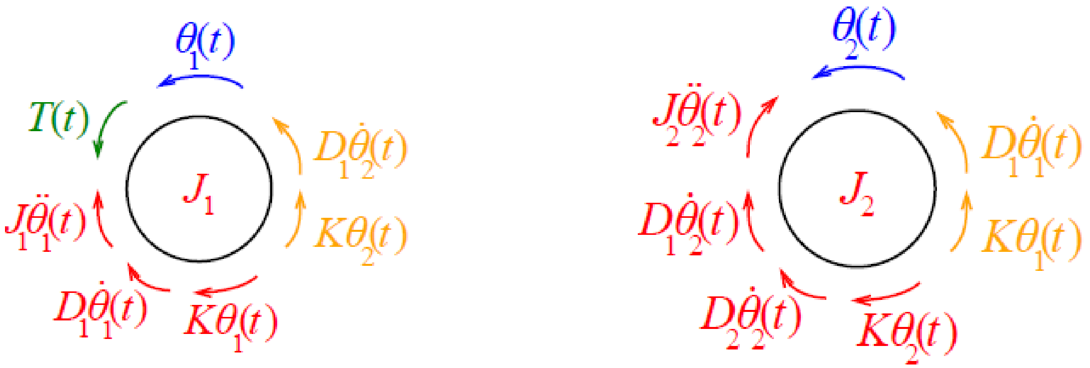


- Diagramas de Corpo livre:
  - Deslocamento $\theta_2(t)$



- **Exemplo:**

Diagramas de Corpo livre:



Aplicando-se a 2ª Lei de Newton para rotação, as equações de equilíbrios são:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1 + D_1\dot{\theta}_1 + K\theta_1 = T + D_1\dot{\theta}_2 + K\theta_2 \\ J_2\ddot{\theta}_2 + (D_1 + D_2)\dot{\theta}_2 + K\theta_2 = D_1\dot{\theta}_1 + K\theta_1 \end{cases}$$

- **Exemplo:**

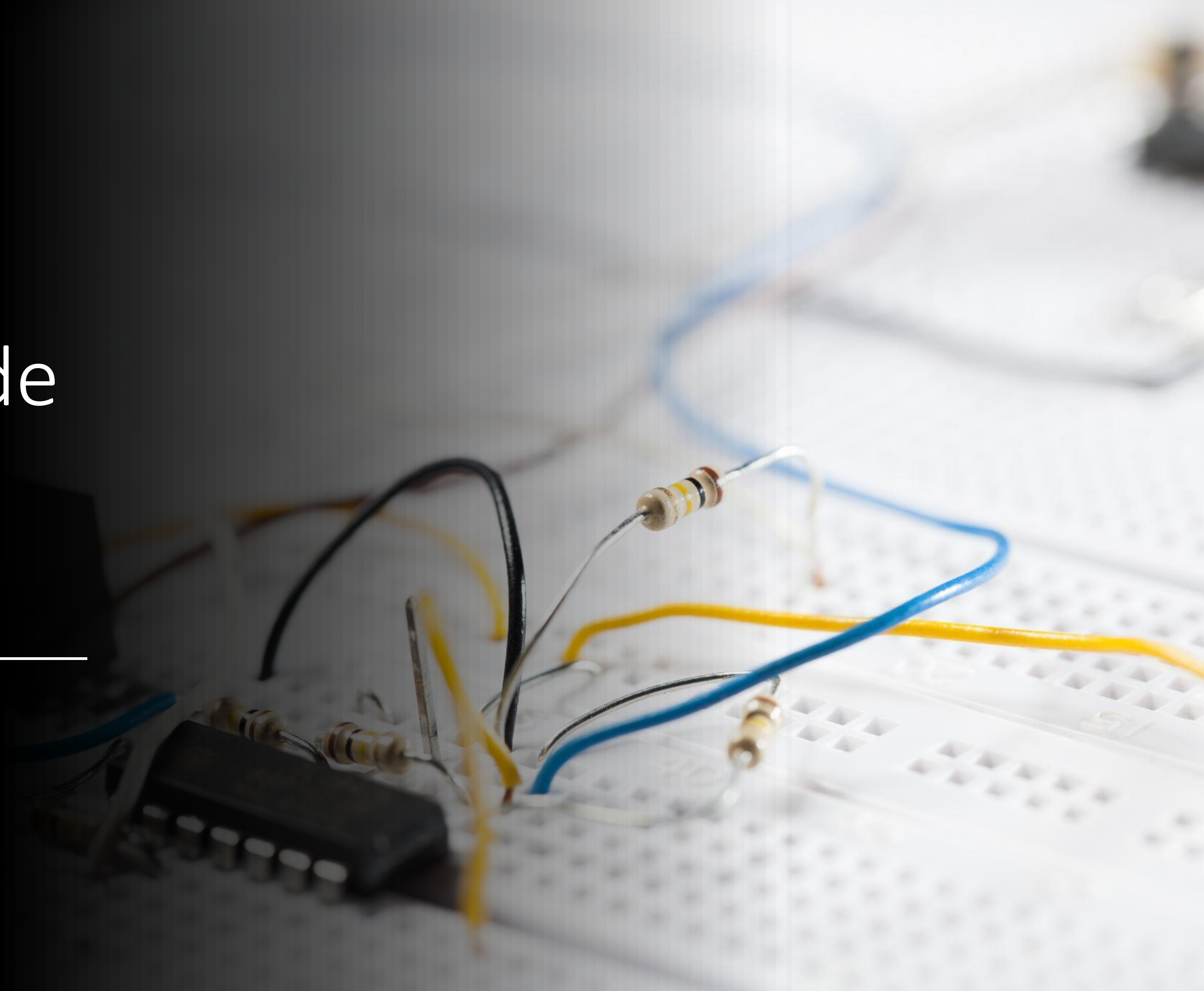
Aplicando a Transformada de Laplace, com condições iniciais nulas,

$$\begin{cases} \left[J_1 s^2 + D_1 s + K\right]\Theta_1(s) = T(s) + (D_1 s + K)\Theta_2(s) \\ \left[J_2 s^2 + (D_1 + D_2)s + K\right]\Theta_2(s) = (D_1 s + K)\Theta_1(s) \end{cases}$$

Isolando $\Theta_1(s)$ na segunda equação e substituindo na primeira, obtém-se:

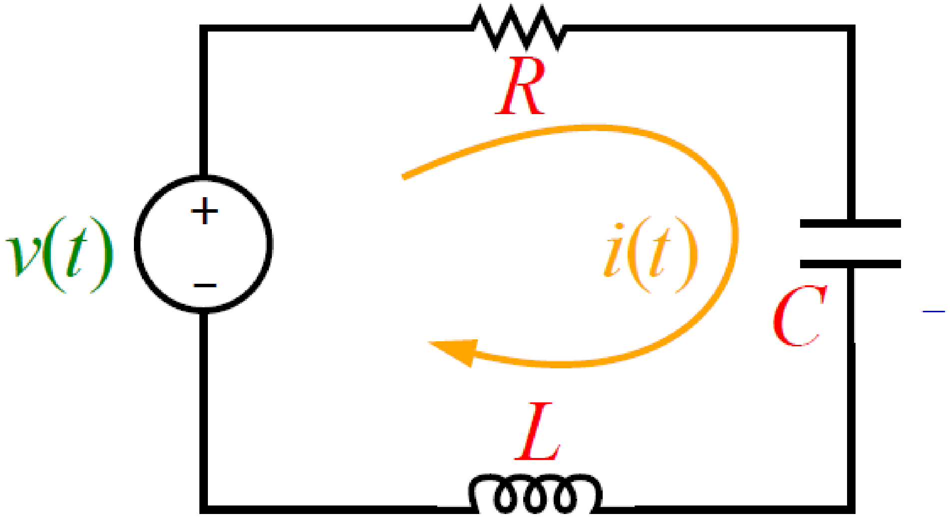
$$\frac{\Theta_2(s)}{T(s)} = \frac{D_1 s + K}{J_1 J_2 s^4 + \left[J_1(D_1 + D_2) + J_2 D_1\right]s^3 + \left[D_1 D_2 + K(J_1 + J_2)\right]s^2 + D_2 K s}$$

Modelagem de Sistemas Elétricos



– **Exemplo:** Aplicando a Lei de *Kirchhoff* para tensões em um circuito RLC série obtém-se a equação integro-diferencial:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_c(0) = v(t)$$



Considerando *L*=1H, *R*=2Ω e *C*=0,2F e <u>condições iniciais nulas</u>, determine a função de transferência $\frac{I(s)}{V(s)}$.

Solução

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v_c(0) = v(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = V(s)$$

Isolando $I(s)$:

$I(s)\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right) = V(s)$ ➔ $I(s)\left(\frac{LCs^2+RCs+1}{Cs}\right) = V(s)$

$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{Cs}{LCs^2+RCs+1}$ e substituindo os valores de R, L e C resulta em: $G(s) = \frac{0,2s}{0,2s^2+0,4s+1}$

$$G(s) = \frac{0,2s}{0,2s^2 + 0,4s + 1} \cdot \frac{5}{5}$$

Sugestão: aplique a transformada inversa de Laplace e obtenha a função no tempo. Utilize o Matlab e aplique um degrau nesta função de transferência e observe o comportamento.

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$$

Impedâncias complexas:

– Aplicando a Transformada de Laplace às relações tensão-corrente dos componentes elétricos passivos, pode-se determinar a *impedância complexa* de cada elemento:

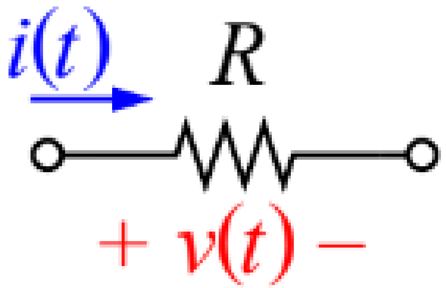
$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

– A solução do sistema elétrico é obtida através da análise do *circuito transformado* (*):

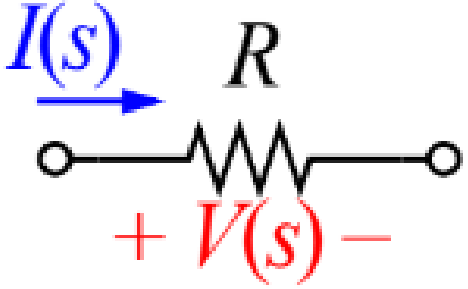
- Todas as variáveis de tensão, $v(t)$, e corrente, $i(t)$, são substituídas pelas funções equivalentes no domínio da Transformada de Laplace: $V(s)$ e $I(s)$
- Os elementos são substituídos por suas impedâncias $Z(s)$;
- O circuito é analisado com o emprego das Leis de *Kirchhoff* para tensão e corrente, regras de divisão de tensão e corrente, teorema de *Thévenin*, etc.

Componente: | **Relação tensão-corente:**

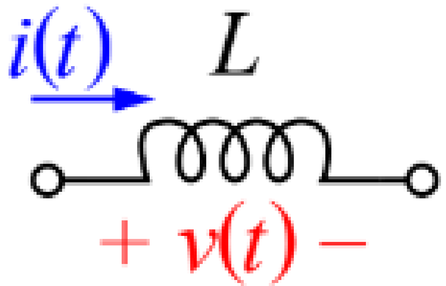
Resistor:



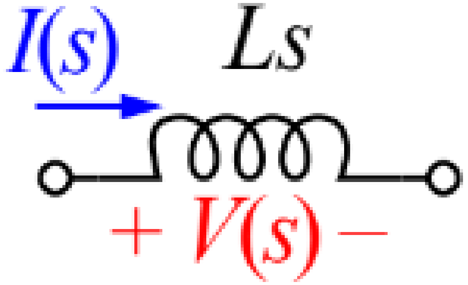
$$Z(s) = R$$



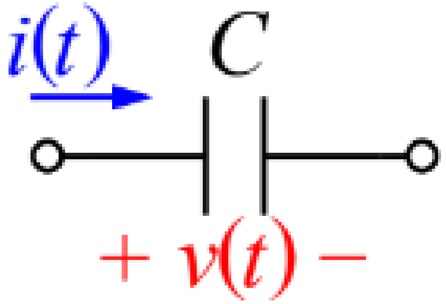
Indutor:



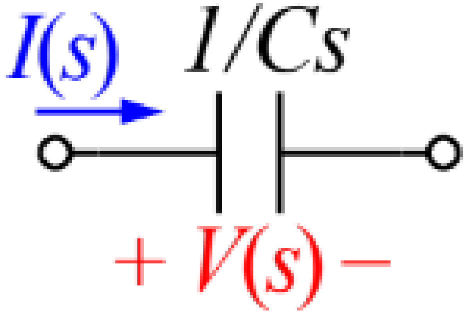
$$Z(s) = Ls$$



Capacitor:

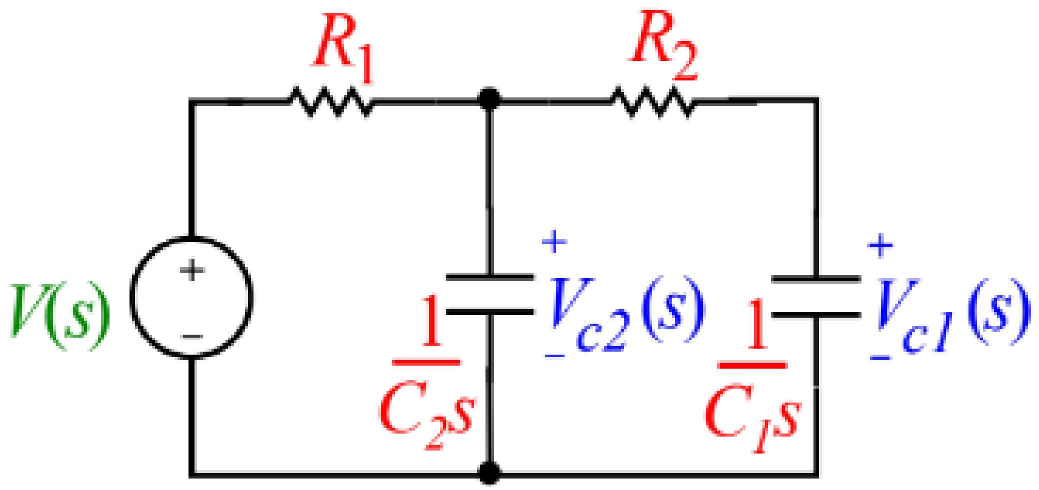


$$Z(s) = \frac{1}{Cs}$$



Exemplo:

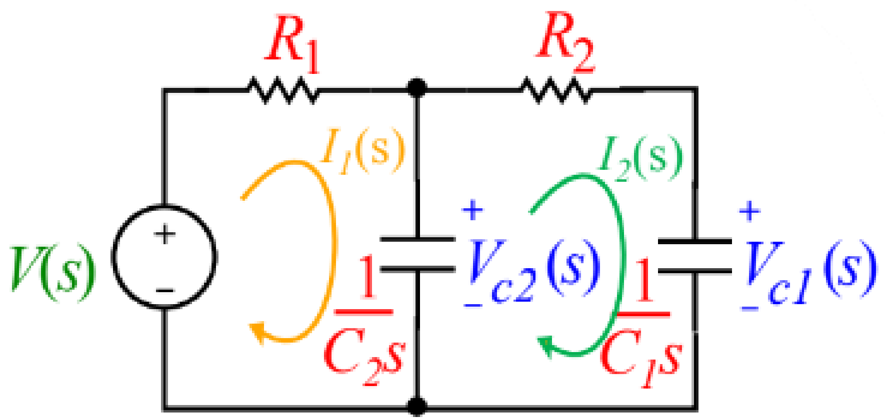
Considerando o circuito abaixo, calcule a função de transferência considerando como entrada a tensão $v(t)$ da fonte e como saída a tensão no capacitor C_1, $V_{C1}(s)$.



Solução:

Considerando o circuito transformado e o método de análise das malhas, obtém-se:

– Equações de malhas:



Malha 1:

$$R_1 I_1(s) + \frac{1}{C_2 s}\big(I_1(s) - I_2(s)\big) - V(s) = 0$$

Malha 2:

$$R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_1 s} I_2(s) + \frac{1}{C_2 s}\big(I_2(s) - I_1(s)\big) = 0$$

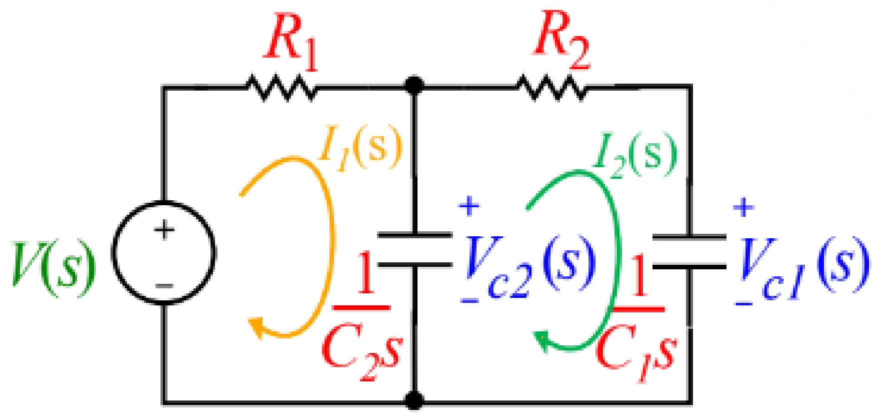
Lei da Tensão (LKT): a soma algébrica de todas as quedas de tensão ao longo de uma malha fechada é igual a zero.

A tensão $V_{c1}(s)$ pode ser obtida pelo produto da corrente no capacitor C_1 ($I_2(s)$) e da impedância complexa, ou seja: $V_{c1}(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{C_1 s}$

Solução:

Finalmente,

$$\begin{cases} R_1 I_1(s) + \frac{1}{C_2 s}\left(I_1(s) - I_2(s)\right) - V(s) = 0 \\ R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_1 s} I_2(s) + \frac{1}{C_2 s}\left(I_2(s) - I_1(s)\right) = 0 \end{cases}$$



Há formas de resolver esse sistema utilizando matrizes!

Isolando $I_1(s)$ na primeira expressão e substituindo o resultado na segunda expressão, e deste resultado isolando $I_2(s)$:

$$I_2(s) = \frac{C_1 s V(s)}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + (C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_1)s + 1}$$

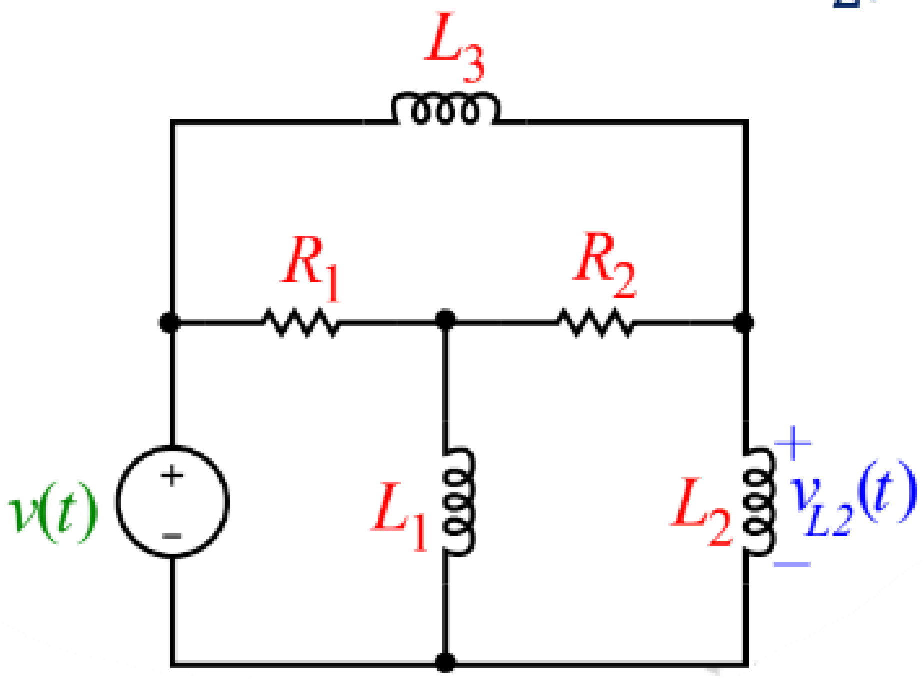
Lembrando que a tensão no capacitor C_1 é dada por:

$$V_{c1}(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{C_1 s}$$

$$V_{c1}(s) = \frac{V(s)}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + (C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_1)s + 1}$$

Exemplo:

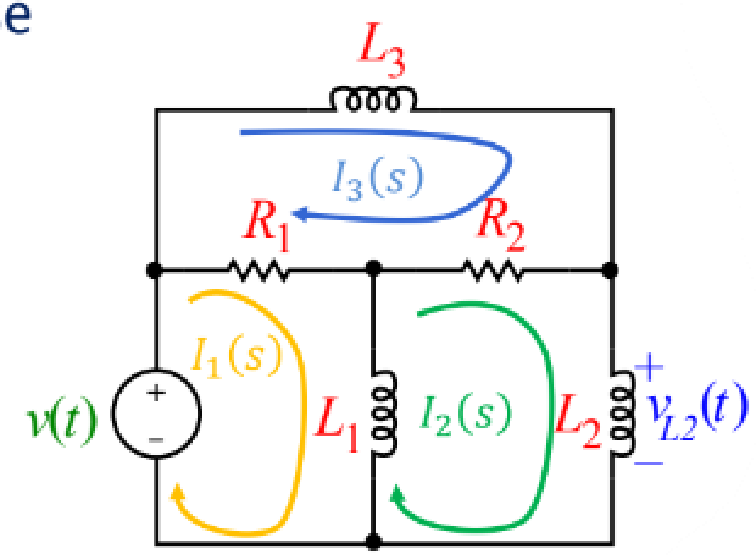
Considerando o circuito abaixo, calcule a função de transferência considerando como entrada a tensão $v(t)$ da fonte e como saída a tensão no indutor L_2, $v_{L2}(t)$.



Solução:

Considerando o circuito transformado e o método de análise das malhas, obtém-se:

– Equações de malhas:



Malha 1:

$$R_1\big(I_1(s) - I_3(s)\big) + L_1 s\big(I_1(s) - I_2(s)\big) - V_s = 0$$

Malha 2:

$$R_2\big(I_2(s) - I_3(s)\big) + L_2 s I_2(s) + L_1 s\big(I_2(s) - I_1(s)\big) = 0$$

Malha 3:

$$L_3 s I_3(s) + R_2\big(I_3(s) - I_2(s)\big) + R_1\big(I_3(s) - I_1(s)\big) = 0$$

Solução:

Finalmente,

$$\begin{cases} R_1\big(I_1(s) - I_3(s)\big) + L_1 s\big(I_1(s) - I_2(s)\big) = V_s \\ R_2\big(I_2(s) - I_3(s)\big) + L_2 s I_2(s) + L_1 s\big(I_2(s) - I_1(s)\big) = 0 \\ L_3 s I_3(s) + R_2\big(I_3(s) - I_2(s)\big) + R_1\big(I_3(s) - I_1(s)\big) = 0 \end{cases}$$

Isolando as correntes:

$$\begin{cases} (R_1 + sL_1)I_1(s) - L_1 s I_2(s) - R_1 I_3(s) = V_s \\ -sL_1 I_1(s) + (R_2 + L_2 s + L_1 s)I_2(s) - R_2 I_3(s) = 0 \\ -R_1 I_1(s) - R_2 I_2(s) + (L_3 s + R_2 + R_1)I_3(s) = 0 \end{cases}$$

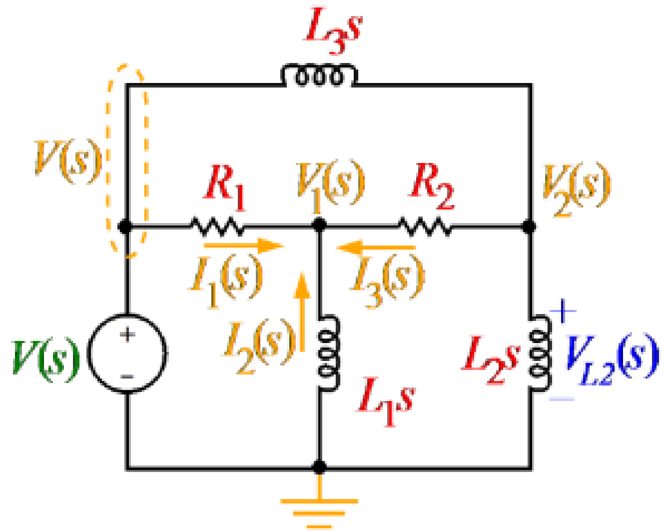
Lei da Corrente (LKC): a soma algébrica de todas as correntes que chegam em um nó é igual a zero.

Exemplo:

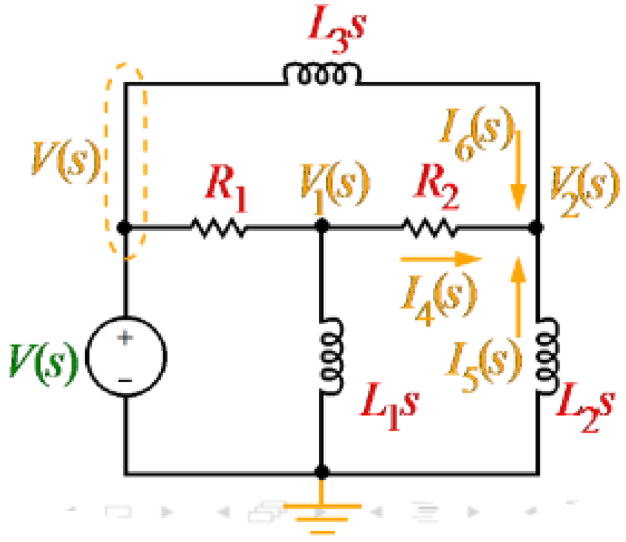
Considerando o circuito transformado e o método de análise nodal (todas as correntes adotadas entrando nos nós), obtém-se:

– Equações dos nós:

Nó 1: $I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) = 0$



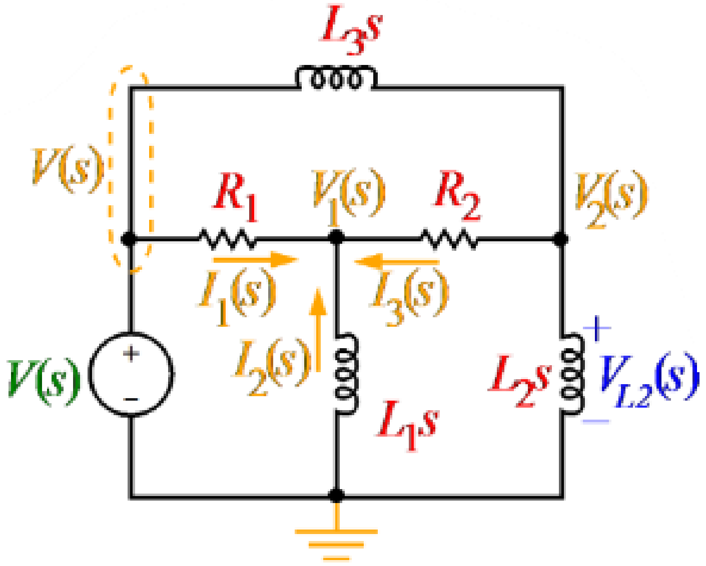
Nó 2: $I_4(s) + I_5(s) + I_6(s) = 0$



Solução:

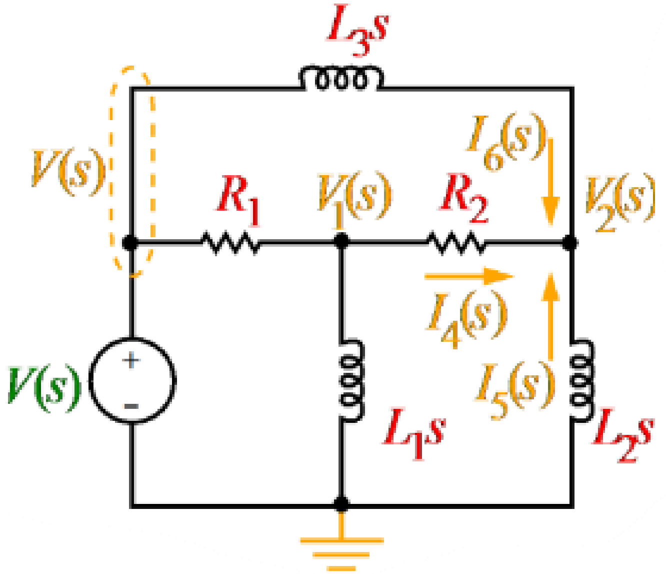
Nó 1: $I_1(s) + I_2(s) + I_3(s) = 0$

$$\underbrace{\frac{V(s) - V_1(s)}{R_1}}_{I_1(s)} + \underbrace{\frac{0 - V_1(s)}{L_1 s}}_{I_2(s)} + \underbrace{\frac{V_2(s) - V_1(s)}{R_2}}_{I_3(s)} = 0$$



Nó 2: $I_4(s) + I_5(s) + I_6(s) = 0$

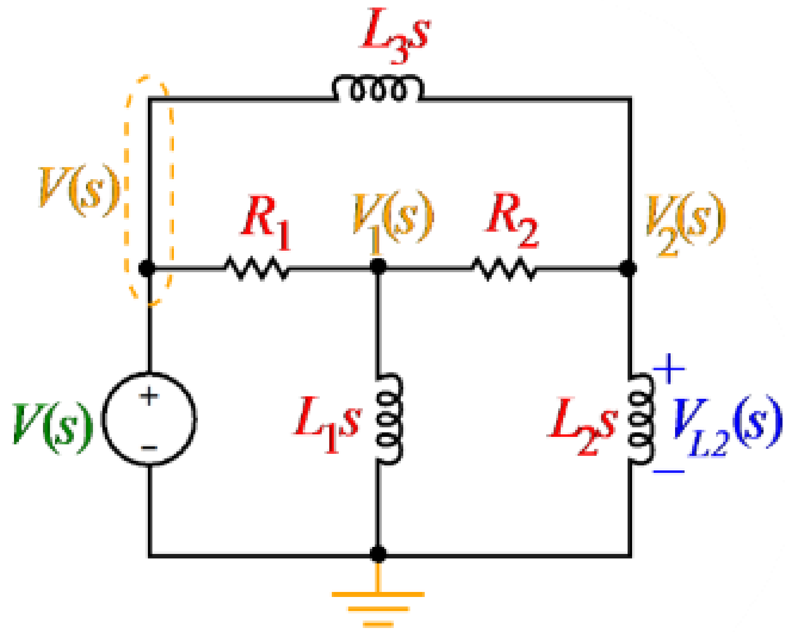
$$\underbrace{\frac{V_1(s) - V_2(s)}{R_2}}_{I_4(s)} + \underbrace{\frac{0 - V_2(s)}{L_2 s}}_{I_5(s)} + \underbrace{\frac{V(s) - V_2(s)}{L_3 s}}_{I_6(s)} = 0$$



Exemplo:

O conjunto de equações nodais é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{V(s)-V_1(s)}{R_1}+\dfrac{0-V_1(s)}{L_1s}+\dfrac{V_2(s)-V_1(s)}{R_2}=0 \\ \dfrac{V_1(s)-V_2(s)}{R_2}+\dfrac{0-V_2(s)}{L_2s}+\dfrac{V(s)-V_2(s)}{L_3s}=0 \end{cases}$$



Desenvolvendo:

$$\begin{cases} [L_1(R_1+R_2)s+R_1R_2]V_1(s)+(-L_1R_1s)V_2(s)=L_1R_2sV(s) \\ (-L_2L_3s)V_1(s)+[L_2L_3s+R_2(L_2+L_3)]V_2(s)=L_2R_2V(s) \end{cases}$$

Exemplo:

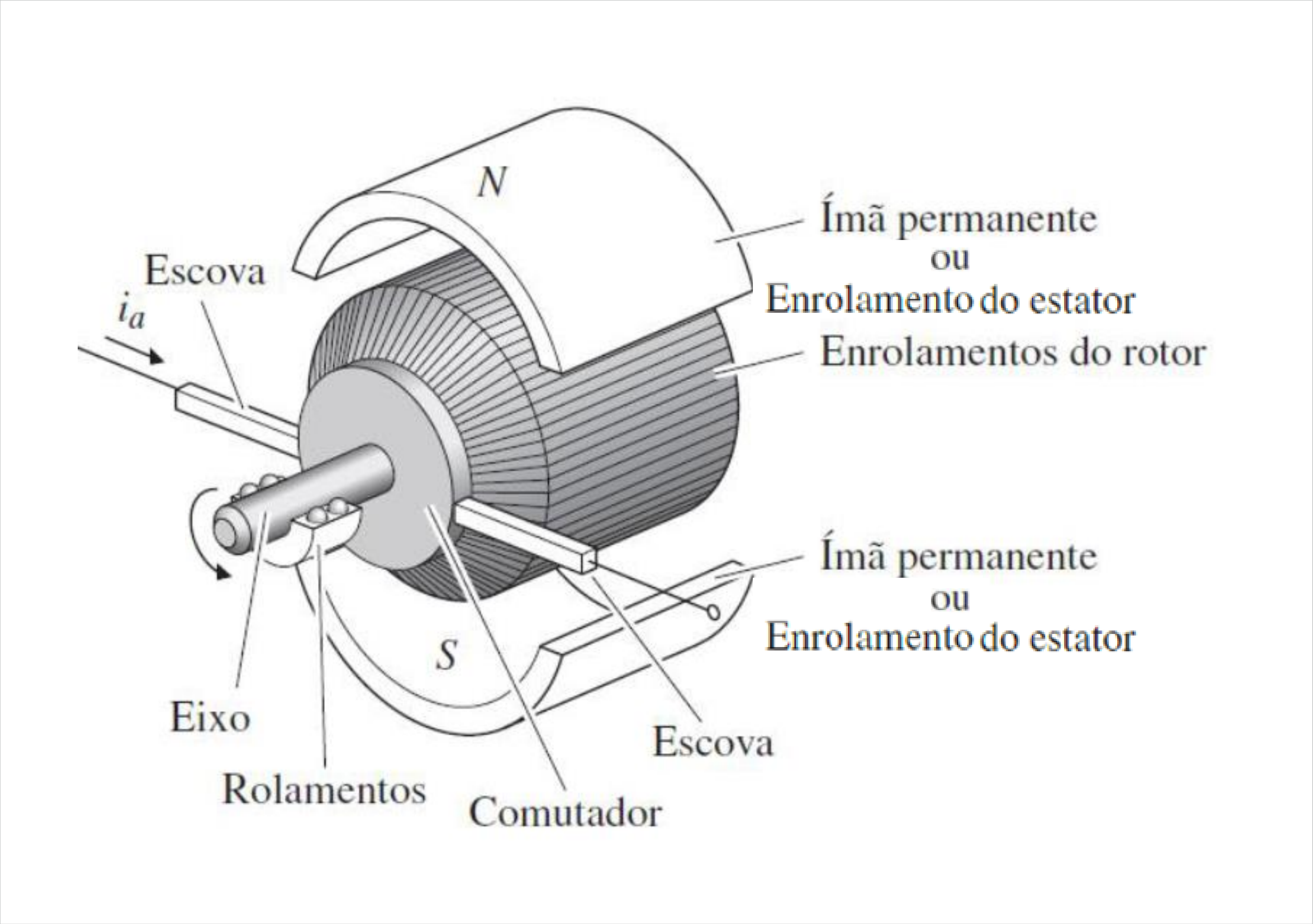
Matricialmente,

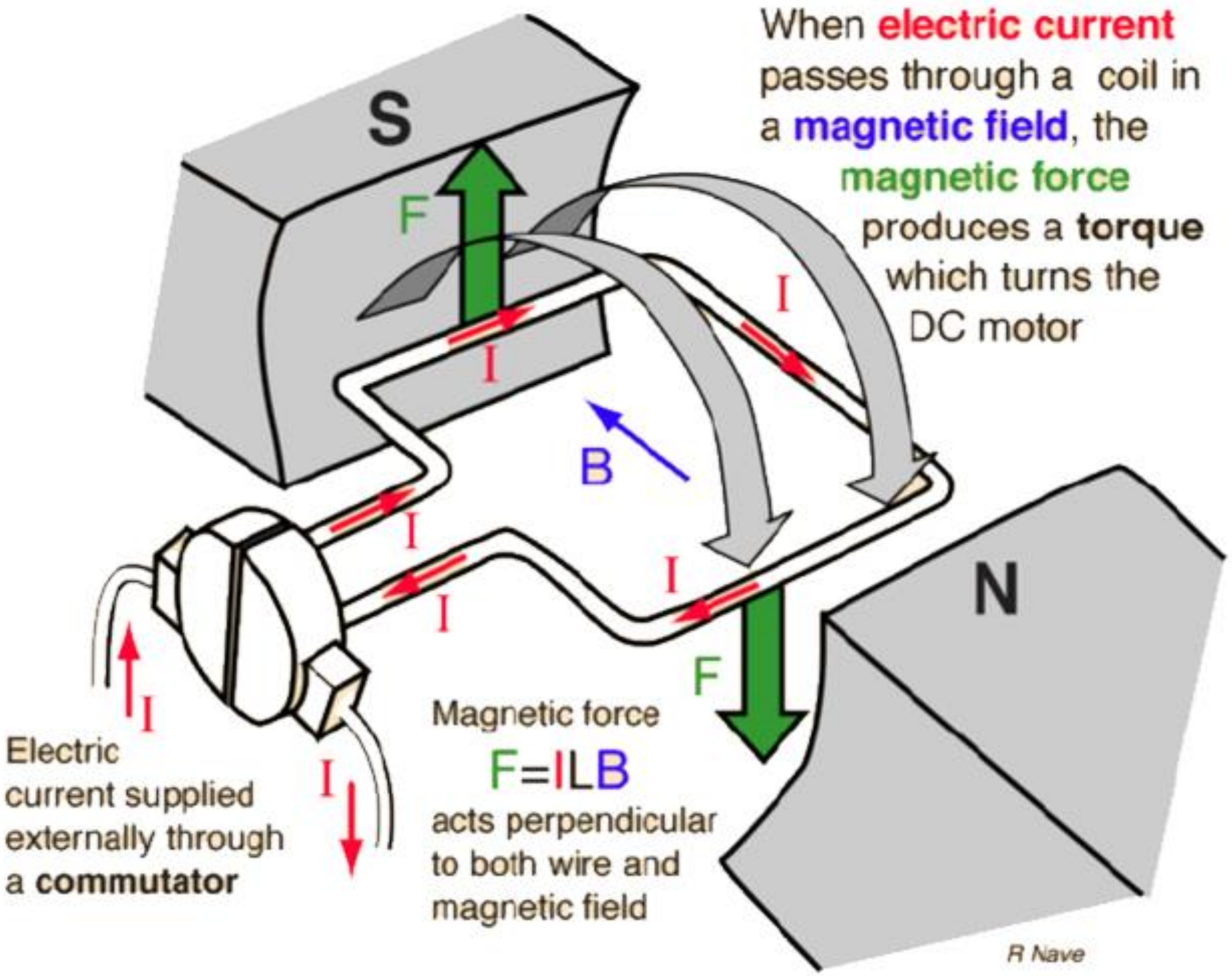
$$\begin{bmatrix} L_1(R_1+R_2)s+R_1R_2 & -L_1R_1s \\ -L_2L_3s & L_2L_3s+R_2(L_2+L_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1R_2sV(s) \\ L_2R_2V(s) \end{bmatrix}$$

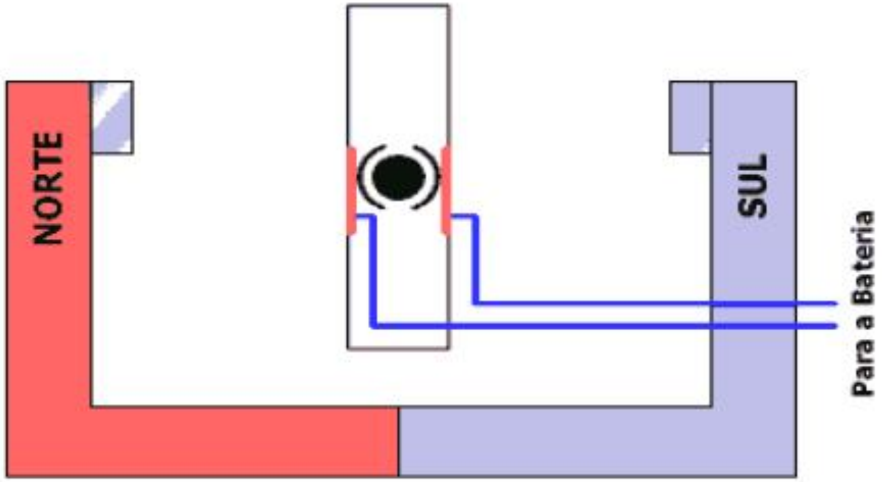
Desde que $V_{L2}(s) = V_2(s)$, resolvendo para esta variável obtém-se:

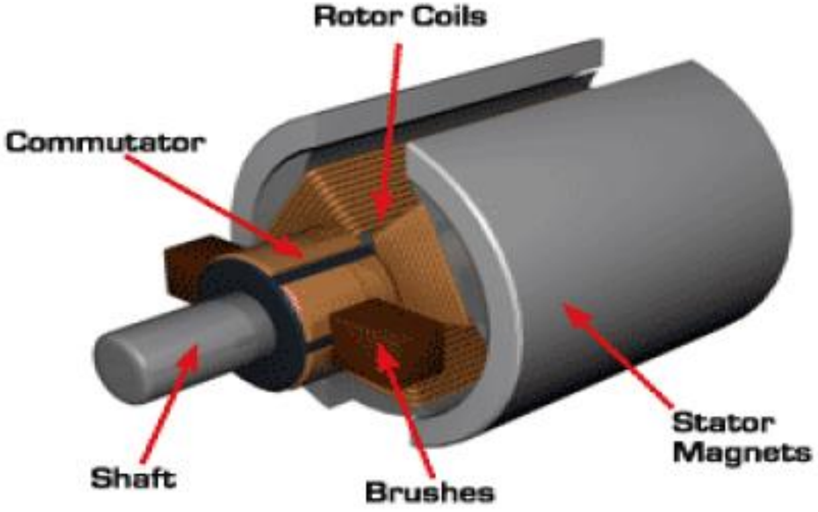
$$\frac{V_{L2}(s)}{V(s)} = \frac{L_1L_2L_3s^2 + L_1L_2(R_1+R_2)s + L_2R_1R_2}{L_1L_2L_3s^2 + [(L_1L_2+L_1L_3)(R_1+R_2)+L_2L_3R_1]s + R_1R_2(L_2+L_3)}$$

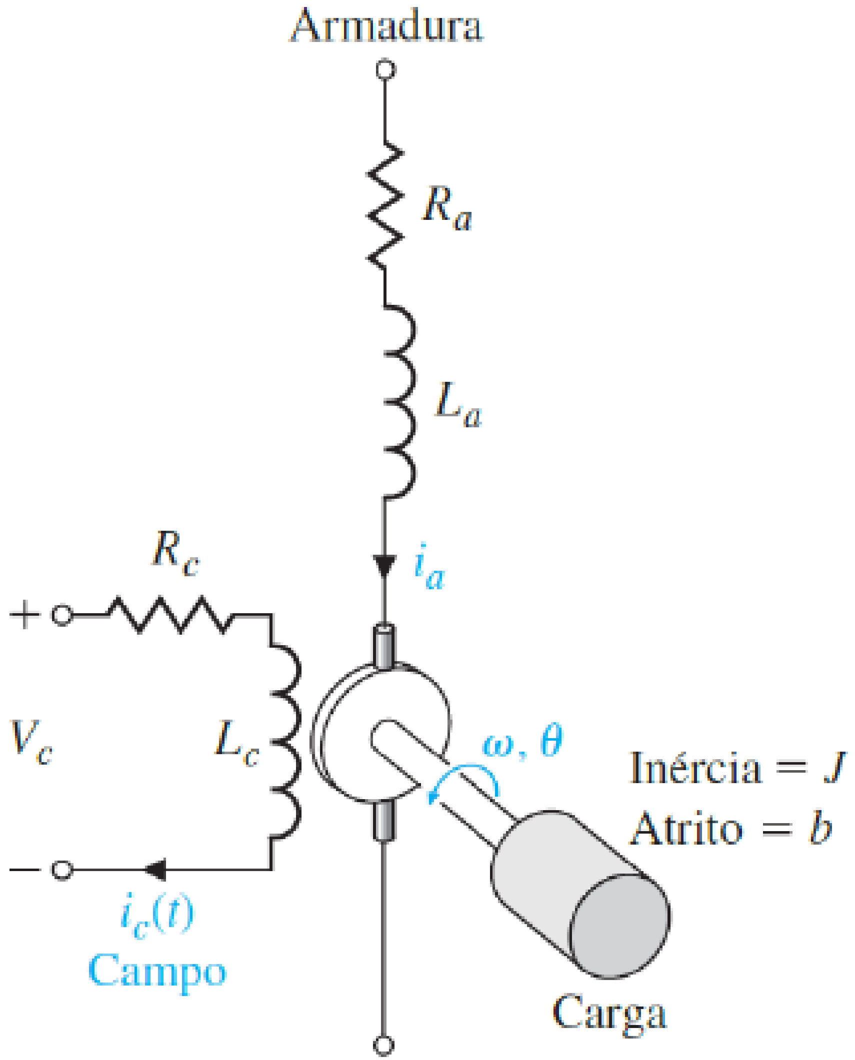
Modelagem de um Motor de Corrente Contínua

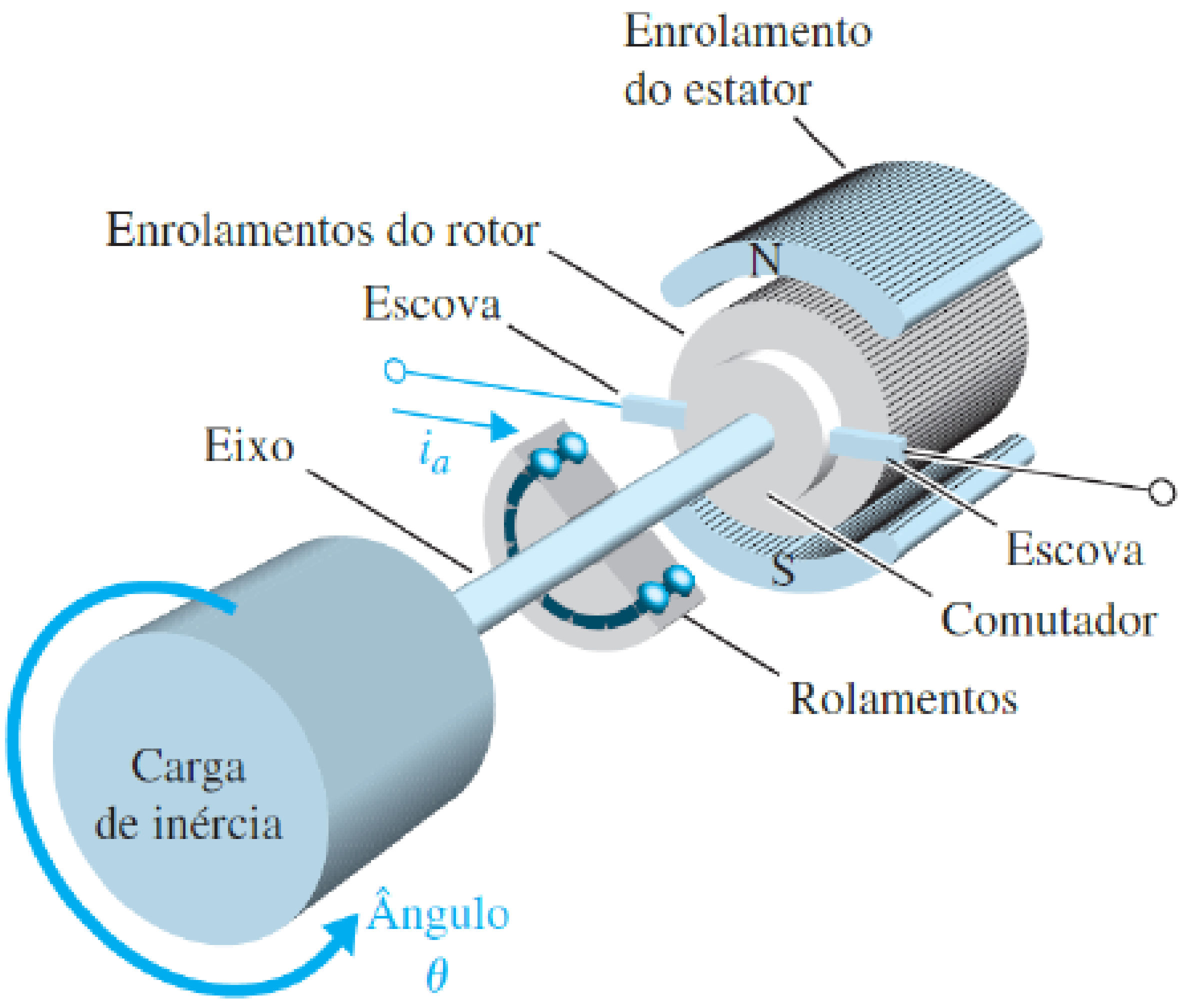



When electric current passes through a coil in a magnetic field, the magnetic force produces a torque which turns the DC motor
S
F
I
B
N
Electric current supplied externally through a commutator
Magnetic force
F=ILB
acts perpendicular to both wire and magnetic field
R Nave


NORTE
SUL
Para a Bateria


Rotor Coils
Commutator
Shaft
Brushes
Stator Magnets


Armadura
R_a
L_a
i_a
R_c
+
V_c
L_c
−
$i_c(t)$
Campo
ω, θ
Inércia = J
Atrito = b
Carga


Enrolamento
do estator
Enrolamentos do rotor
N
Escova
i_a
Eixo
Escova
S
Comutador
Rolamentos
Carga
de inércia
Ângulo
θ

1º caso: Servomotores de c.c. controlados por circuito de campo

- Neste caso a entrada é a tensão nos terminais de campo, $V_C(t)$, e a saída é a posição angular, $\theta(t)$, do eixo.
- O fluxo de campo no entreferro do motor é proporcional à corrente de campo:

$$\emptyset(t) = k_c i_c(t)$$

- Torque desenvolvido pelo motor:

$$T_m(t) = k_1 \emptyset(t) i_a(t) = k_1 k_c i_c(t) i_a(t)$$

Como o motor é controlado pelo campo $i_a(t)$ é uma constante, isto é, $i_a(t) = I_a$, logo:

$$T_m(t) = (k_1 k_c I_a) i_c(t) = k_m i_c(t)$$

$$\Rightarrow \quad T_m(s) = k_m I_c(s) \qquad (1)$$

onde k_m é a constante do motor

A corrente de campo se relaciona com a tensão de campo através de:

$$V_c(s) = (R_c + sL_c) I_c(s) \qquad (2)$$

Torque do motor é igual ao torque entregue à carga:

$$T_m(s) = T_c(s) + T_P(s) = T_c(s)$$

Torque de atrito nos rolamentos:

$$T_a(s) = b \cdot s\theta(s) \tag{3}$$

Considerando condições iniciais nulas, o torque da carga para a inércia rotativa é escrita como:

$$\sum torques = \begin{pmatrix} Momento \\ de\ Inércia \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Aceleração \\ Angular \end{pmatrix}$$

$$T_c(s) - T_a(s) = J \cdot s^2\theta(s) \tag{4}$$

Substituindo (1) e (3) em (4):

$$k_m I_c(s) - b \cdot s\theta(s) = J \cdot s^2\theta(s) \tag{5}$$

Isolando $I_c(s)$ em (2) e substituindo em (5):

$$k_m \frac{V_c(s)}{(R_c+sL_c)} - sb\theta(s) = s^2 J\,\theta(s)$$

$$\frac{k_m}{(R_c + L_c s)} V_c(s) = (Js^2 + bs)\theta(s)$$

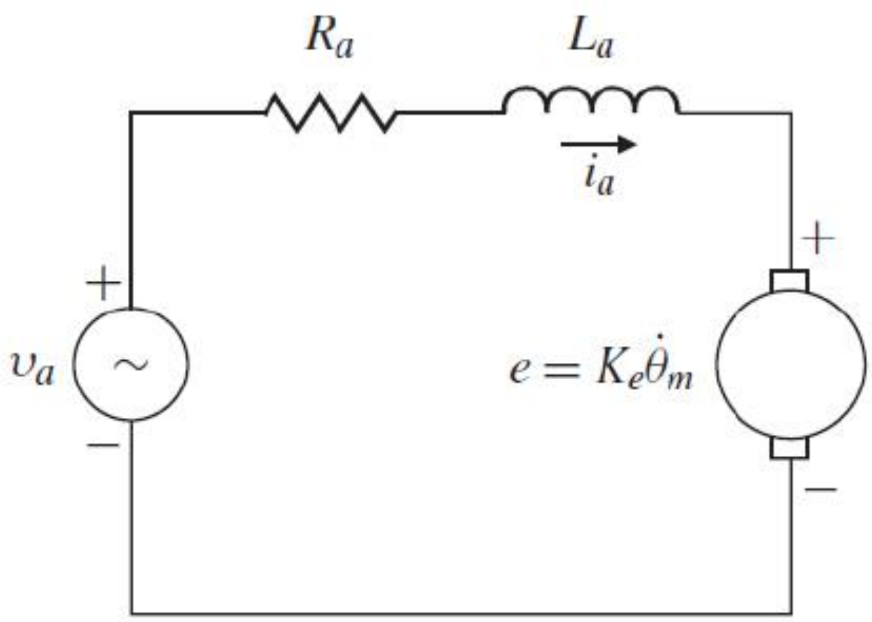
$$\frac{\theta(s)}{V_c(s)} = \frac{k_m}{(R_c + L_c s)(Js^2 + bs)}$$

Assim, a função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_c(s)} = \frac{k_m}{s(R_c+L_c s)(Js+b)} \qquad (6)$$

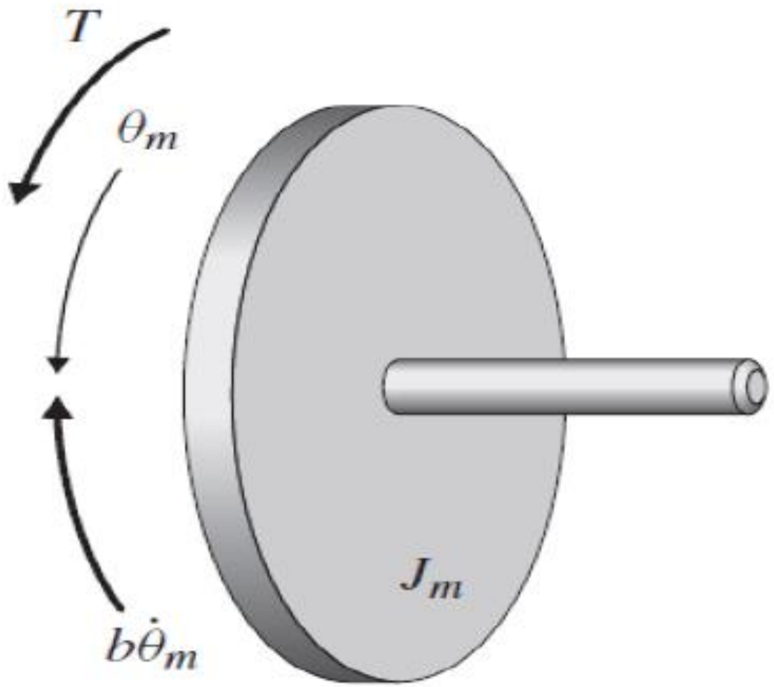
<u>2º caso</u>: Servomotores de c.c. controlados por circuito de armadura

- Neste caso a entrada é a tensão na armadura, $v_a(t)$, e a saída é a posição angular, $\theta(t)$, do eixo.
- Nestes motores, o campo magnético é produzido por ímãs permanentes estacionários. Assim, o fluxo magnético é constante.



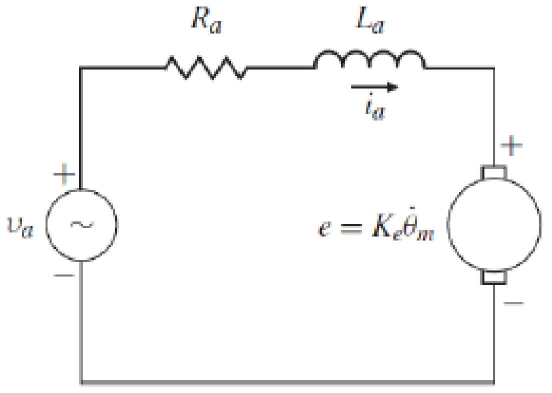
$$T = K_t\, i_a$$

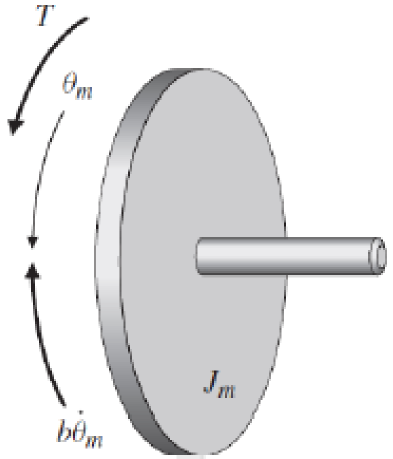
$$e = K_e\, \dot{\theta}_m$$



$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - K_e \dot{\theta}_m$$

$$J_m \ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_\mathrm{m} = K_t i_a$$





$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_t}{s[(J_m s + b)(L_a s + R_a) + K_t K_e]}$$

Se for desprezada a indutância L_a:

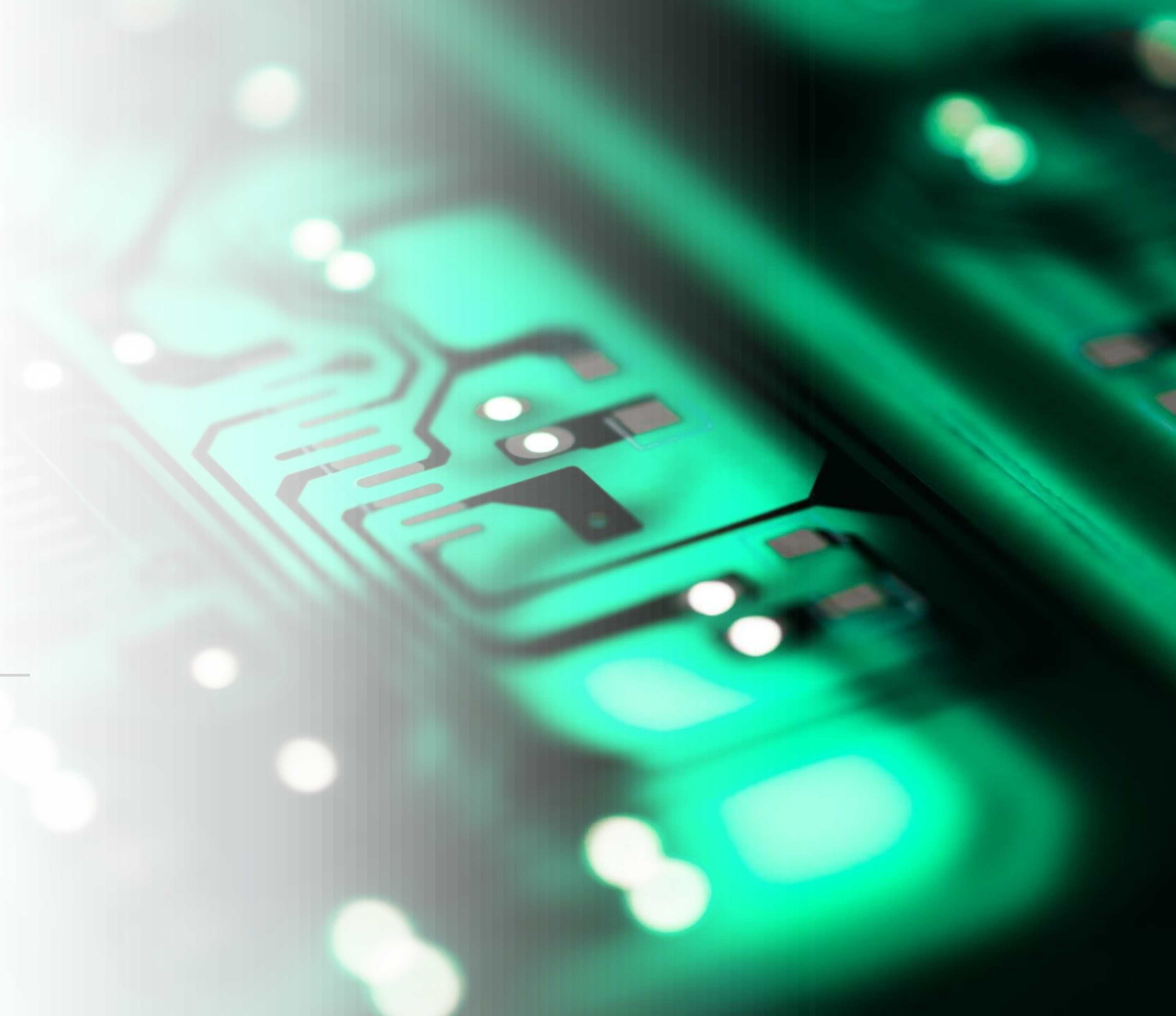
$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\dfrac{K_t}{R_a}}{J_m s^2 + \left(b + \dfrac{K_t K_e}{R_a}\right) s} = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

onde: $K = \dfrac{K_t}{bR_a + K_t K_e}$ $\quad \tau = \dfrac{R_a J_m}{bR_a + K_t K_e}$

Velocidade angular $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$:

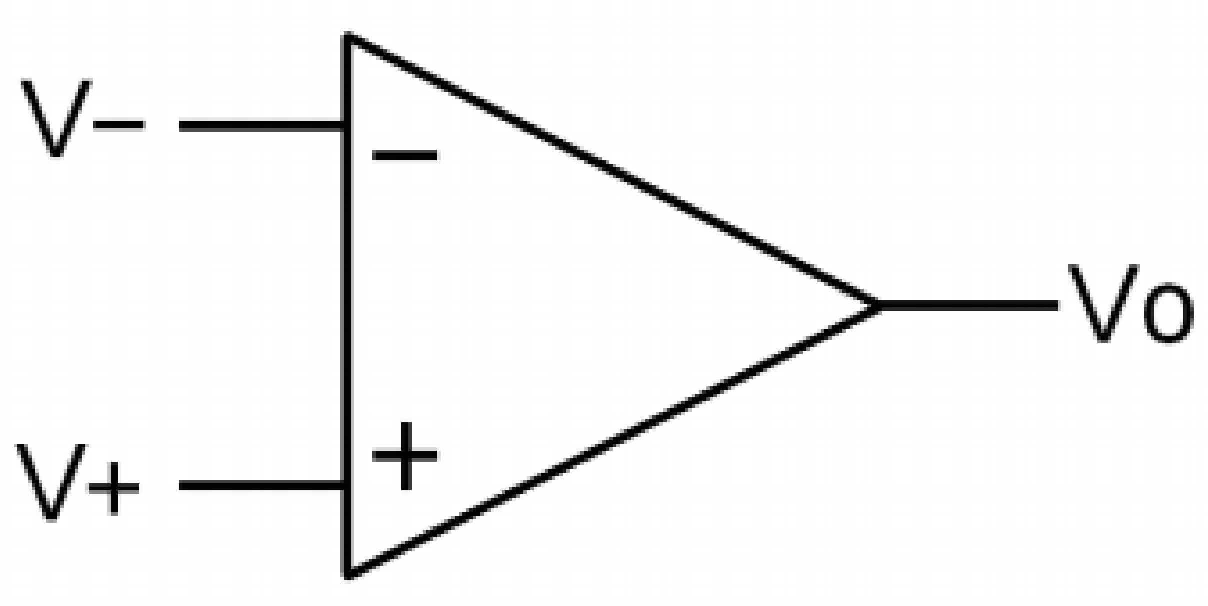
$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = s\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Modelagem de Sistemas Eletrônicos com AmpOp



Amplificadores Operacionais

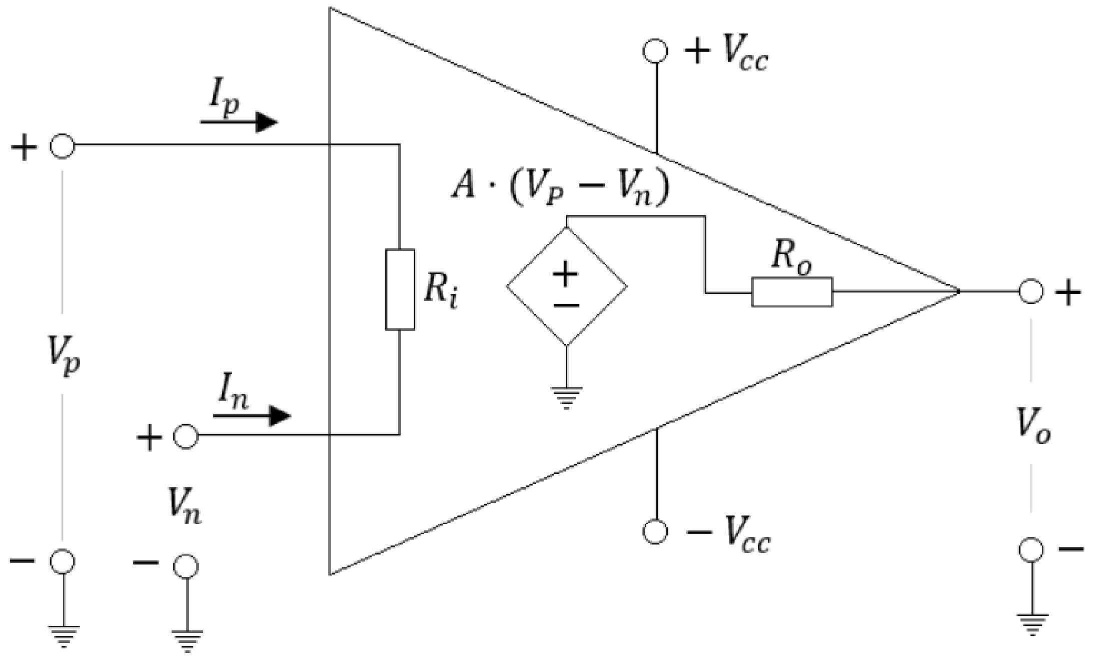
Dispositivos eletrônicos que possuem a capacidade de amplificar a diferença das tensões na entrada para valores muito elevados .



$$V_o = A(V_+ - V_-)$$

Modelo dos AmpOp

AmpOp Ideal
$R_i \to \infty$
$R_o \to 0$
$A \to \infty$



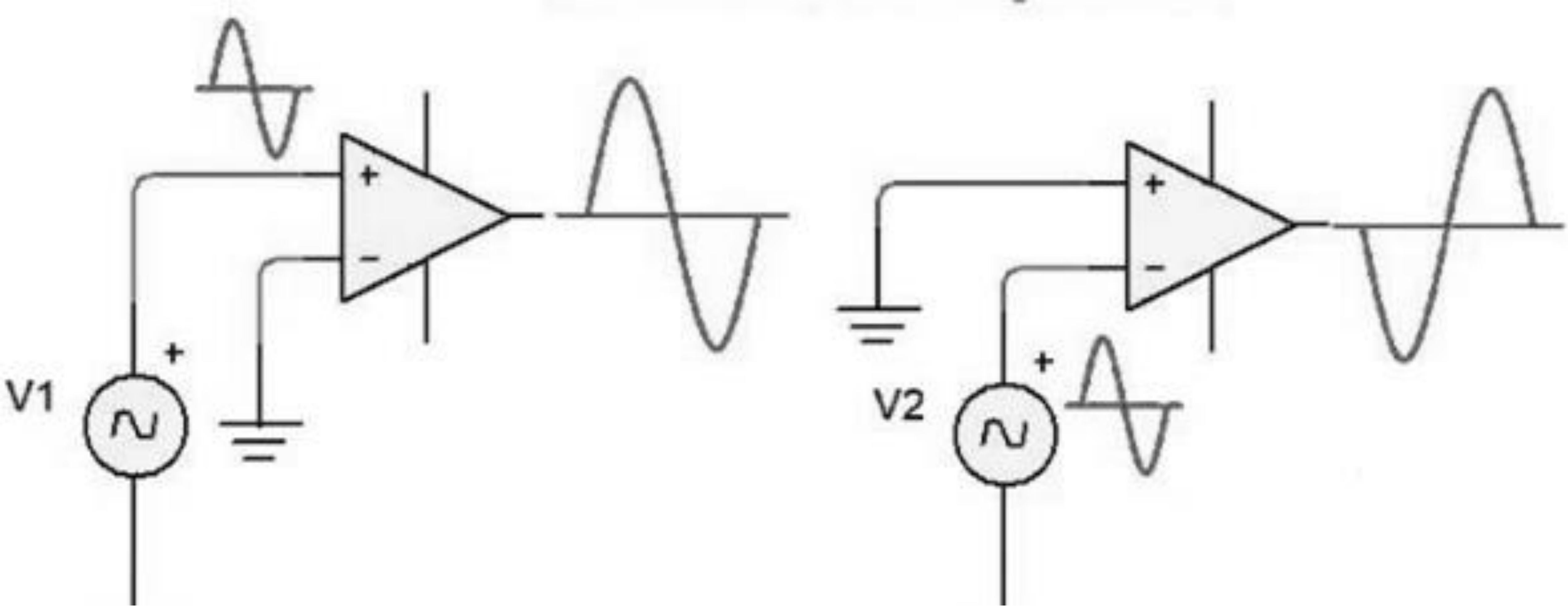
$$V_o = A(V_p - V_n)$$

$A \to \infty$

$$\frac{V_o}{\infty} = V_p - V_n$$

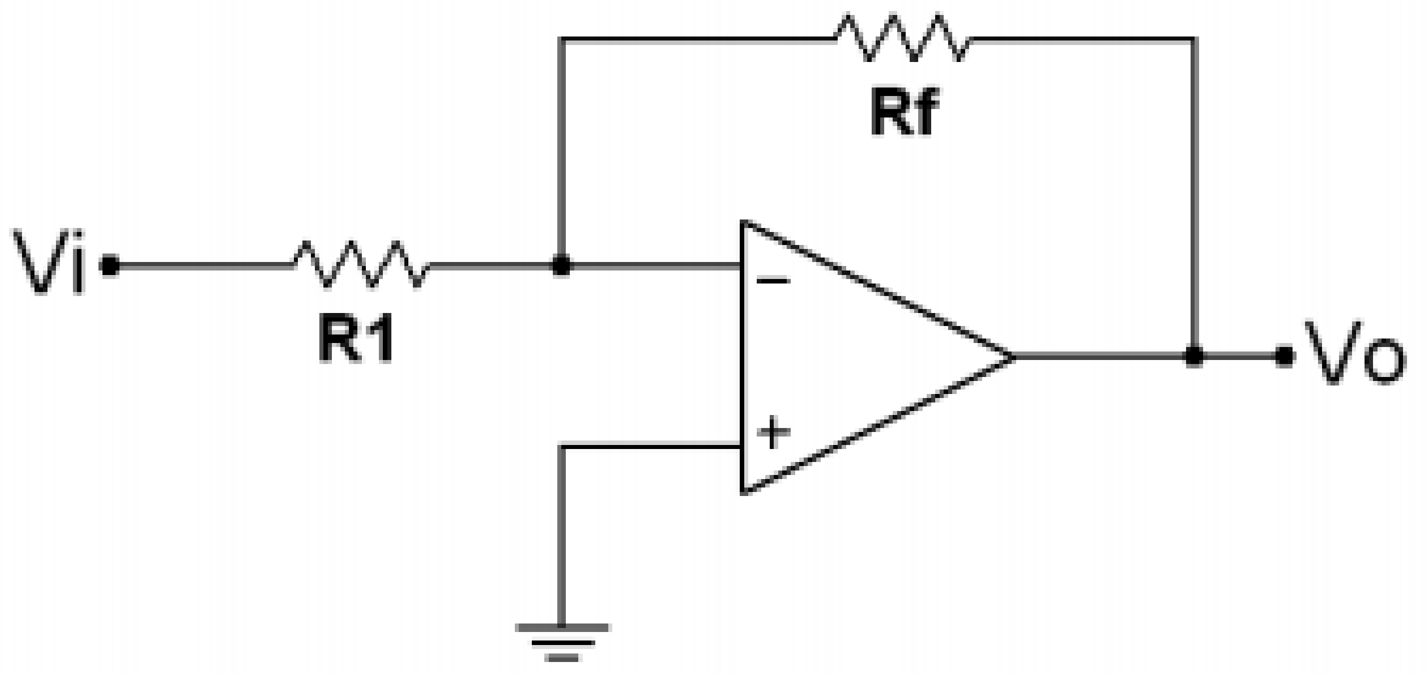
$R_i \to \infty$

$$i_p = 0 \; ; \; i_n = 0$$



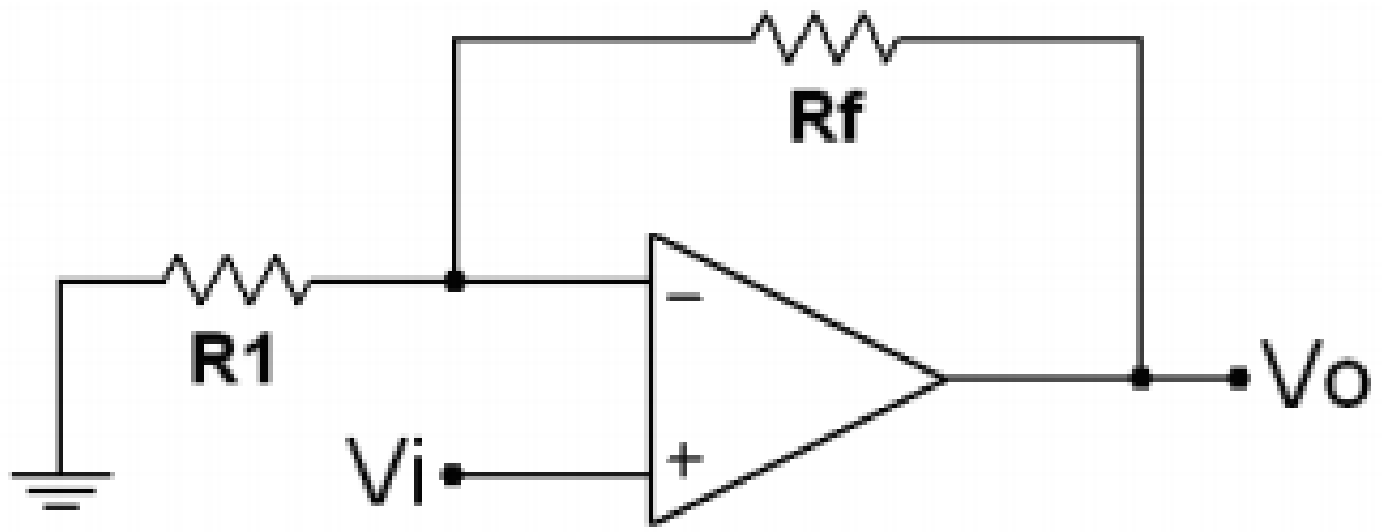
- A resistência na entrada (R_i) é muito grande;
- A resistência na saída (R_o) é muito pequena;
- O ganho de tensão (A) é muito alto.

Amplificador Inversor



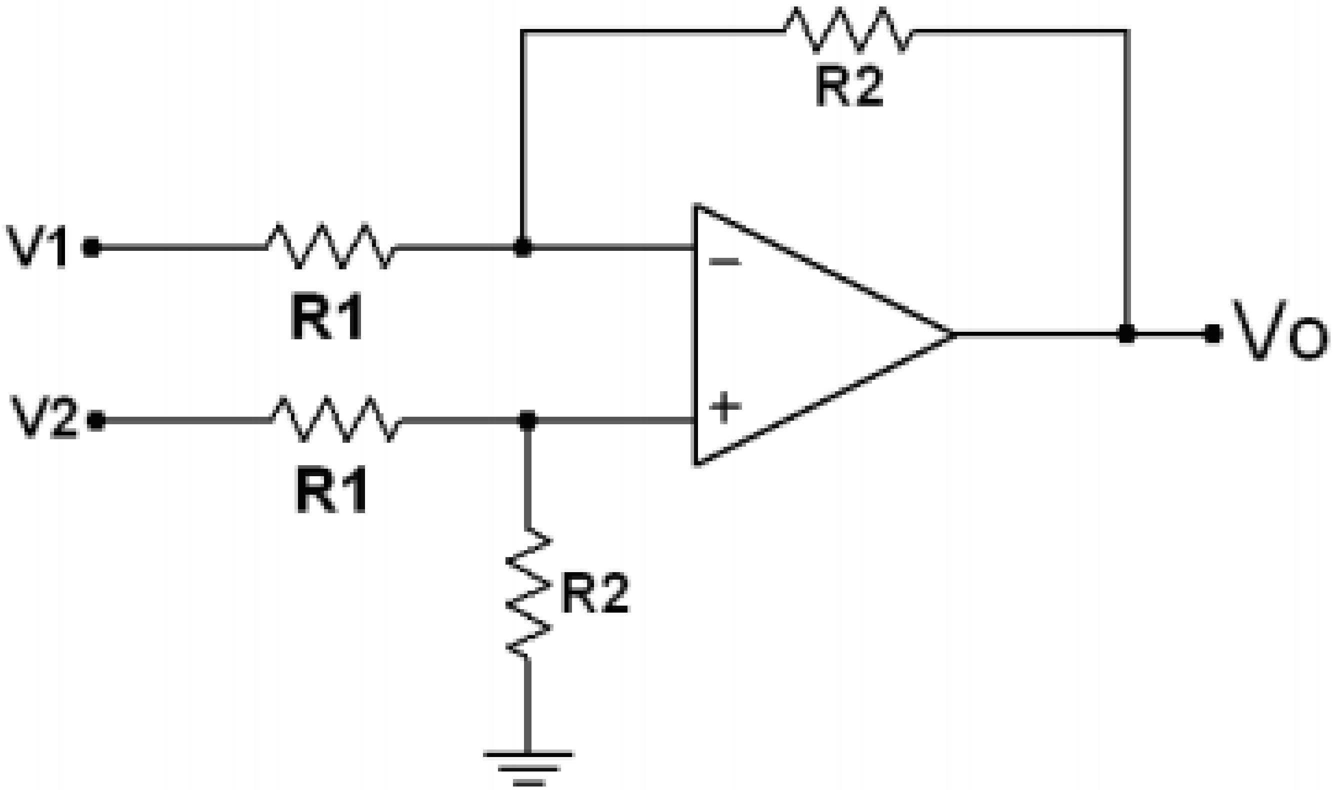
$$V_O = -\frac{R_f}{R_1} V_i$$

Amplificador Não Inversor



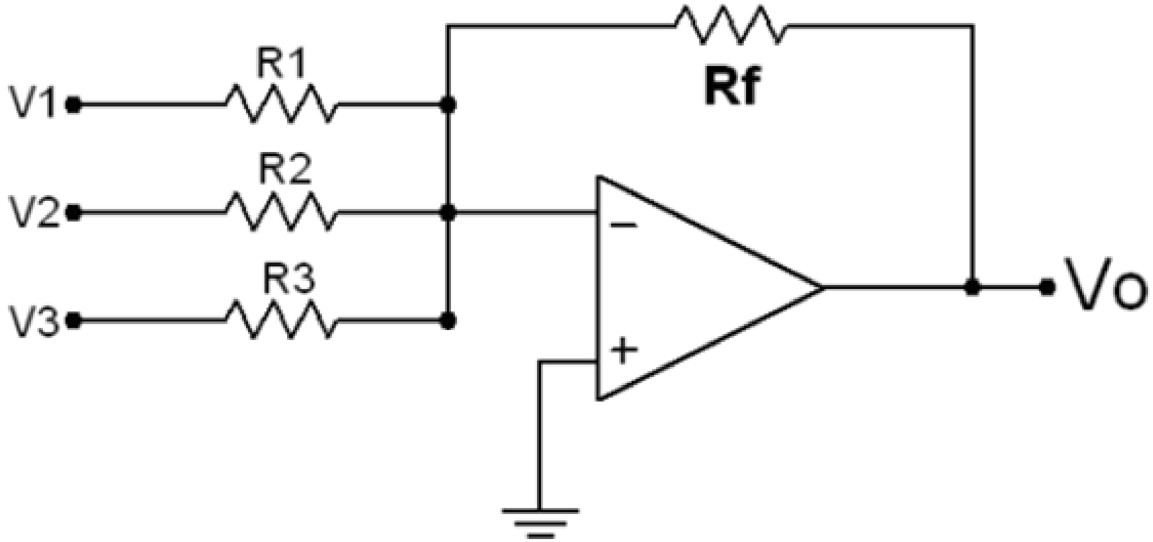
$$V_O = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) V_i$$

Amplificador Subtrator



$$V_O = \frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1)$$

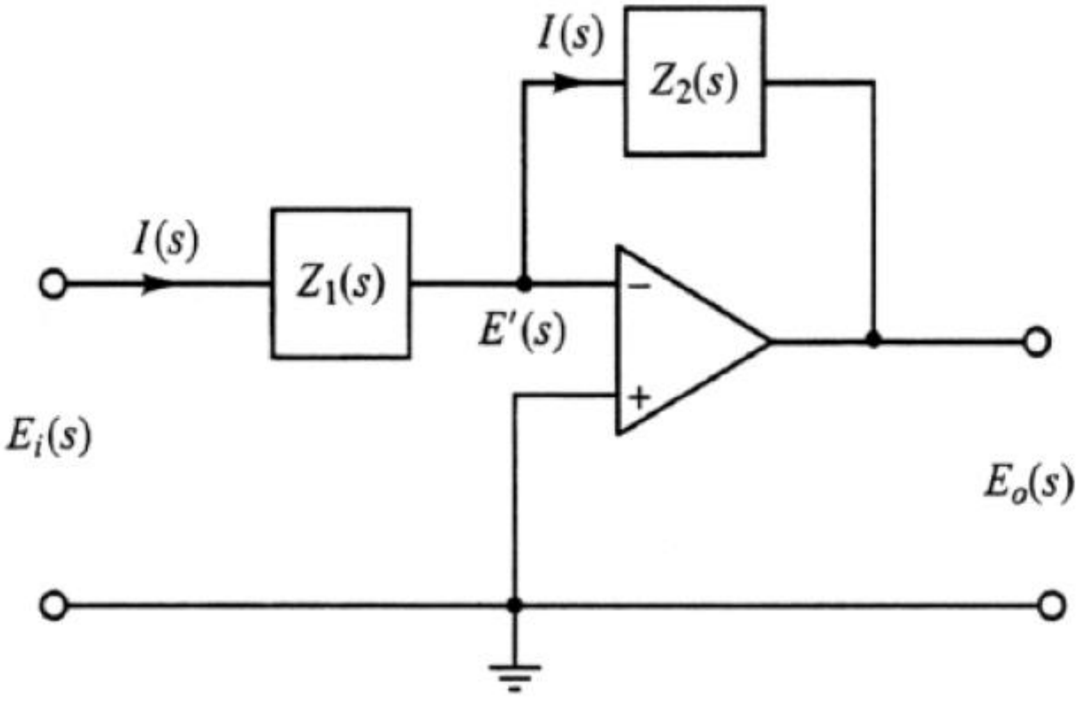
Amplificador Somador



$$V_O = -\left(\frac{R_f}{R_1}V_1 + \frac{R_f}{R_2}V_2 + \frac{R_f}{R_3}V_3\right)$$

- É possível alterar os resistores por impedâncias no domínio s, logo a relação entrada-saída dos AmpOp é interpretada como uma função de transferência.

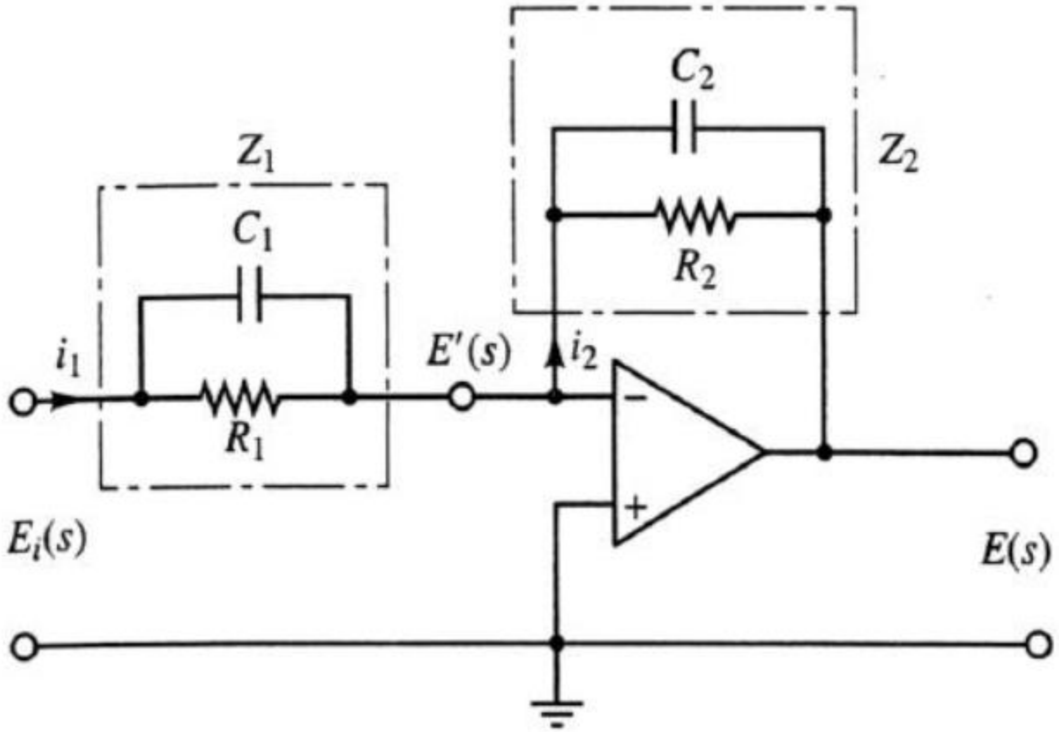
Exemplo:



$$\frac{E_i(s) - E'(s)}{Z_1} = \frac{E'(s) - E_o(s)}{Z_2}$$

Como $E'(s) \cong 0$, tem-se:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$



$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1C_1s + 1}$$

$$Z_2 = \frac{R_2}{R_2C_2s + 1}$$

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{R_1C_1s + 1}{R_2C_2s + 1} = -\frac{C_1}{C_2}\frac{s + \dfrac{1}{R_1C_1}}{s + \dfrac{1}{R_2C_2}}$$