Forma controlável → garante a análise de controlabilidade e analisa o controle, ou seja, permite calcular uma entrada de controle $u(t)$ que transfere o sistema de um estado inicial $x(t_0)$ para um estado de interesse $x(t)$.

$$x(t) \leftarrow (x(t_0), u(t))$$

Seja o sistema:

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

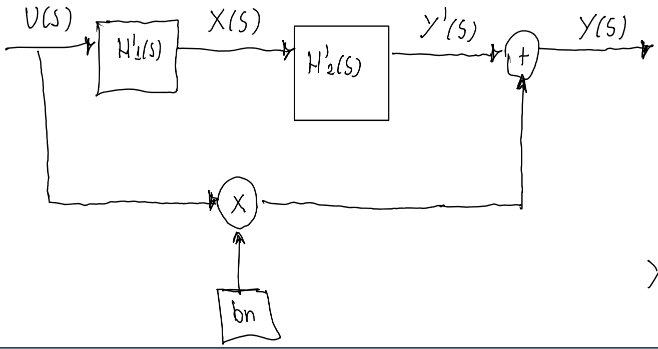
quarta-feira, 10 de dezembro de 2025 16:06

Dividindo o numerador por denominador

$$H(s) = b_n + \frac{(b_{n-1} - b_n a_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (b_1 - b_n a_1)s + b_0 - b_n a_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Resolvemos $H'(s)$ do jeito acima, sabendo que $n > n-1$

Representação por diagrama de blocos



$$H(s) = b_n + H'(s)$$

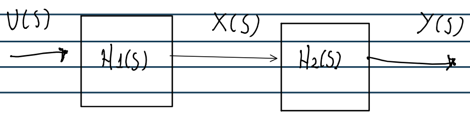
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_n + H'(s)$$

$$Y(s) = b_n U(s) + U(s) H'(s)$$

$$Y(s) = b_n U(s) + Y'(s)$$

1. $m > n$

Podemos separar a função de transferência em dois blocos



$$H_1(s) = \frac{1}{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\frac{X(s)}{} = \frac{1}{}$$

$$x_3 = \dot{x}_2 = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\vdots$$

$$x_m = \dot{x}_{m-1} = \frac{d^{m-1}x}{dx^{m-1}}$$

$$\dot{x}_m = \frac{d^m x}{dt^m}$$

$$\frac{d^m x}{dt^m} = u(t) - a_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} - \dots - a_1\frac{dx}{dt} - a_0 x$$

$$\dot{x}_m = u(t) - a_{m-1}x_m - \dots - a_1 x_2 - a_0 x_1$$

Coluna de zeros

↓ Passando para forma matricial

matriz identidade

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

↳ termos isolados e associados a x_K

Agora precisamos analisar $H_2(s)$

$$H_2(s) = (b_{n-1} - b_n a_{n-1})s^{n-1} + \dots + (b_1 - b_n a_1)s + b_0 - b_n a_0$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = (b_{n-1} - b_n a_{n-1})s^{n-1} + \dots + (b_1 - b_n a_1)s + b_0 - b_n a_0$$

$$Y(s) = X(s)\left[(b_{n-1} - b_n a_{n-1})s^{n-1} + \dots + (b_1 - b_n a_1)s + b_0 - b_n a_0\right]$$

↓ Voltando ao domínio do tempo

$$y(t) = (b_{n-1} - b_n a_{n-1})\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + (b_1 - b_n a_1)\frac{dx}{dt} + (b_0 - b_n a_0)x$$

Assumindo a mesma coisa acima e lembrando que $n < m$. Ou seja todos esses x's estão contidas dentro dos x's acima.

$$y(t) = (b_{n-1} - b_n a_{n-1})x_m + \dots + (b_1 - b_n a_1)x_2 + (b_0 - b_n a_0)x_1$$

↓ De forma matricial

Sendo uma matriz de concatenação das matrizes da E.E.E

$$M_c = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \rightarrow \text{Na forma controlável}$$

$$M_o = M_c^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix} \rightarrow \text{Na forma observável}$$

Forma diagonal → representação que explicitamente exibe os polos do sistema também é chamado de forma modal

Dada a F.T.

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

↓ Expansão em frações parciais

$$H(s) = b_n + \frac{a}{s+p_1} + \frac{b}{s+p_2} + \frac{c}{s+p_3} + \cdots + \frac{z}{s+p_n}$$

Após alguns procedimentos algébricos, se representa:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} a & b & c & \cdots & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} u(t)$$

Forma de Jordan → É capaz de representar sistemas com polos repetidos

$$y(t) = \begin{bmatrix} e_{12} & e_{11} & 5 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix} u(t)$$