Tendo uma E.E.E. genérica:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$\Longrightarrow$ Domínio de LaPlace

$$Xs - x(0)$$
$$Y = CX$$

Podemos manipular essas equações

$$Xs - Ax = x(0) + BU$$
$$(sI - A)X = x(0) + BU$$
$$(sI-A)(sI-A)^{-1}X = (sI-A)^{-1}(x(0) + BU)$$
$$X = (sI-A)^{-1}(x(0) + BU)$$

$\downarrow$ substituindo em Y

$$Y = C(sI-A)^{-1}(x(0) + BU) + DU$$
$$Y = C(sI-A)^{-1}x(0) + C(sI-A)^{-1}BU + D$$

Caso 1: $X(0) = \vec{0}$

$$Y = C(sI-A)^{-1}BU + DU$$
$$Y = (C(sI-A^{-1})B + D)U$$
$$\frac{Y}{U} = C(sI-A^{-1})B + D$$

Caso 2: $X(0) = X_0$

Voltando para $\dot{x}$, temos alguns casos a anal

Caso escalar: $\dot{x} = ax \Rightarrow$ Domínio de Laplace

$$Xs - X_0 = aX(s)$$

$x(t) = x_0 e$

Série de Taylor em torno de 0

$$e^{at} = f(0) + \frac{(t-t_0)}{1!}\frac{de^{at}}{dt} + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\frac{d^2e^{at}}{dt^2} + \cdots +$$

$$e^{at} = 1 + t \cdot a + t^2 \cdot a^2 + \cdots + \frac{t^n a^n}{n!}$$

Caso matricial:

$\dot{x} = Ax \Rightarrow$ Domínio de Laplace

$$Xs - x_0 = AX$$

$$(sI - A)X = x_0$$

$$X = (sI-A)^{-1}x_0$$

$$x = x_0 e^{At}$$

$e^{At} = \phi(t) \rightarrow$ matriz de transição d

Obs: $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

Propriedades de $\phi(t)$:

$\phi(t)^{-1} = e^{-At} = e^{A(-t)}$ $\quad$ $\phi(t_1+t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} \cdot$

$\phi(0) = I$

Caso 3:

$$\dot{x} = ax + bu$$

$$(\dot{x} - ax = bu) \times e^{-at}$$

$$e^{-at}\dot{x} - ae^{-at}x = e^{-at}bu$$

$$\frac{d}{dt}(xe^{-at}) = e^{-at}bu$$

$$xe^{-at} = \int_0^t e^{-at}bu\,dt + x(0)$$

$$Xs - X_0 = AX + BU$$

$$(sI - A)X = X_0 + BU$$

$$X = (sI-A)^{-1}(X_0 + BU)$$

Inversa de Laplace

$$X(t) = x_0\,\phi(t) + \int_0^t \phi(t-\tau)BU(\tau)\,d\tau$$

substituindo em $y(t)$

$$y(t) = C\,x(t) + Du(t)$$

$$y(t) = C\left(x_0\phi(t) + \int_0^t \phi(t-\tau)BU(\tau)\,d\tau\right)$$

$$y(t) = Cx_0\phi(t) + \int_0^t \phi(t-\tau)BU(\tau)\,d\tau$$