小波变换

小波变换能够提供一个随着频率改变而改变的“时间-频率窗口”，它继承和发展了短时傅立叶变换局部化的思想.它的主要特点是通过变换能够充分突出问题某些方面的特征，能对时间（空间）频率的局部化分析，通过伸缩平移运算对信号（函数)逐步进行多尺度细化，最终达到高频处时间细分，低频处频率细分，能自动适应时频信号分析的要求，从而可聚焦到信号的任意细节。

傅里叶变换只提供频率域相关信息而不提供时域相关信息。

小波变换基于一些具有变化频率以及有限持续时间的小型波。

当我们观察图像时候，如果物体的尺寸较小或者对比度比较低，那么我们通常以较高的分辨率来研究它们，如果物体的尺寸比较大或者对比度比较高，那么对分辨率的要求就不太高。这时候就需要以不同的分辨率对它们尽心研究。如果这些特征在同一张图像，那么就需要对同一张图像进行分辨率不同的分析。这时候，小波变换就很重要。

离散二维小波变换

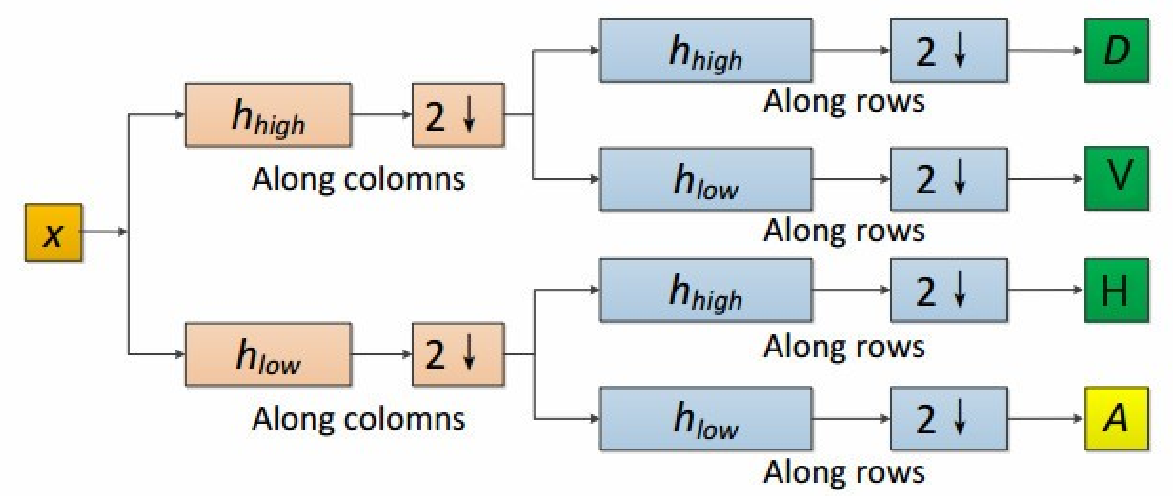
离散小波变换

$W_\psi(j_0,k)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_n f(n)\psi_{j_0,k}(n)$

$W_\varphi(j,k)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_n f(n)\varphi_{j,k}(n)$

通常，M取2的幂次，是衡量灰度级的量，$M=2^J$,而$k=0,1,2,...,2^j-1$。

离散二维小波变换



用两个对称的高通/低通滤波器对图像进行处理。

二维尺度变换函数

- 可分离的尺度函数

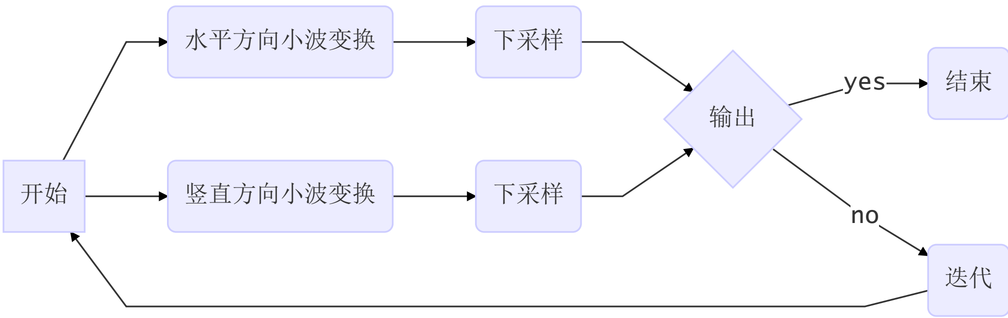
$\varphi(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$

- 方向敏感的小波函数：水平，竖直，对角

$\Psi^{H}(x, y)=\Psi(x) \varphi(y)$

$\Psi^{V}(x, y)=\varphi(x) \Psi(y)$

$\Psi^{D}(x, y)=\Psi(x) \Psi(y)$

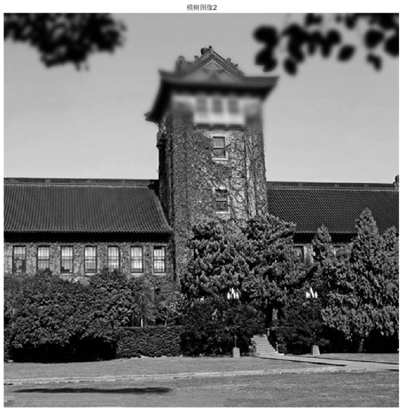


实践

现在我们有两张图象，它们的不同部分分别有一些模糊，现在我们希望综合这两张图象得到一张清晰的图像。

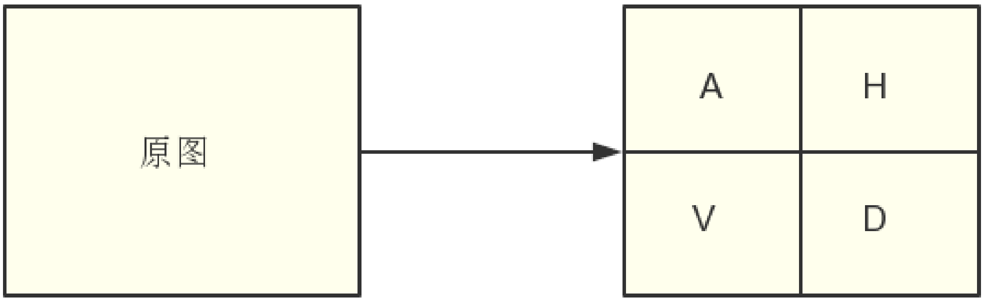
模糊图像1

模糊图像2



我们先进行小波变换，进行小波变换后，图像分成了四个部分。分别是

- a低频部分矩阵
- h 是水平方向
- v 是垂直方向
- d 是对角方向



图像中模糊部分是低频率部分，所以如果要还原细节需要将高频部分还原，也就是取灰度绝对值较大的部分。

考虑将低频部分平均，其余部分进行取max值。

```
%比较大小
function out=max(a,b) %%shape of a should equal shape of b
    [i,j]=size(a);
    out=zeros(i,j);
    for x=1:i
        for y=1:j
            if abs(a(x,y))>abs(b(x,y))
                out(x,y)=a(x,y);
            else
                out(x,y)=b(x,y);
            end
        end
    end
end

```

结果与反思

将图像进行2阶的二维小波变换，按照上述逻辑进行复原后可得结果：

图像模糊部分良好地复原了。

但这种方法也有一定的局限性，必须要求两张图是同一位置拍摄出来的。对图片的来源要求很高。