Задание 3.

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Учитывая положительность норм, если $\|x\|_1^2 \geq \|x\|_2^2$, то и $\|x\|_1 \geq \|x_2\|$:

$\|x\|_1^2 = \left(\sum |x_i|\right)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 + 2|x_1||x_2| + 2|x_1||x_3| + \ldots + 2|x_{n-1}||x_n|$

$\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \Rightarrow \|x\|_1^2 \geq \|x\|_2^2$, причём равенство выполнено только в случае $\vec{x} = \vec{0}$. Т.о. $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$

Из н-ва о средних:

$$\frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 \Rightarrow \|x_1\| \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

Следовательно: $\boxed{1 \cdot \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2}$

Задание 4

$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

Из н-ва о средних:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}{m}} \leq \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|) \Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{m} \|x\|_\infty$$

Равенство выполнено для нулевого вектора и для матричной единицы

Докажем $\|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$:

$\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2$

$\|x\|_\infty^2 = \max^2(x_1, \ldots, x_m) = x_i^2$

$\Rightarrow \|x\|_2^2 \geq \|x\|_\infty^2 \Rightarrow \|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$

Равенство выполнено на матричных единицах $(0\ 0 \ldots 0\ 1\ 0 \ldots 0)^T$

Тогда используем определение матричной нормы:

$$\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad \|Ax\|_\infty \le \|Ax\|_2 \ ; \ \frac{1}{\|x\|_\infty} \le \frac{\sqrt{n}}{\|x\|_2}$$

$$\|A\|_\infty = \sup \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \sup\left(\|Ax\|_2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{\|x\|_2}\right) = \sqrt{n} \sup \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{n}\|A\|_2$$

Равенство выполняется для матричной единицы-столбца $\vec{x}$

Задание 5.

Умножение на унитарную матрицу сохраняет скалярное произведение

Геом. смысл нормы Фробениуса – длина вектора, который есть сумма вектор-столбцов матрицы

Таким образом, при домножении на U матрицы A мы „поворачиваем этот вектор, не меняя его длины, т.е. сохраняя норму Фробениуса: $\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F$