אוניברסיטת אריאל בשומרון
אלגוריתמים 1
תשפ"ב סמסטר א'

מטלה 1

1. יהי $A = (A[1], \dots, A[n])$ מערך באורך n. ***הפיכת סדר*** ב-A הוא זוג אינדקסים (i, j) כך ש- $i < j$ אבל $A[i] > A[j]$. למשל, במערך $A = (10, 30, 50, 40, 20)$ יש 4 הפיכות סדר: $(2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)$.
תארו אלגוריתם שמקבל מערך A ומחזיר את מספר הפיכות הסדר ב-A, ורץ בזמן $O(n \log n)$.
[רמז: בנו אלגוריתם שגם מחזיר את מספר הפיכות הסדר ב-A וגם ממיין את A. השתמשו בשיטת הפרד ומשול.**]**

2. תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, ותהי $C = AB$ המכפלה שלהן.
   א. מהו זמן הריצה של האלגוריתם הפשוט לחישוב C (המפעיל בצורה פשוטה את ההגדרה של כפל מטריצות)?
   ב. נבנה אלגוריתם יותר יעיל לכפל מטריצות, בעזרת שיטת הפרד ומשול. לשם כך, נחלק את כל אחת מ- A, B, C לארבע מטריצות מסדר $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$:
$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} J & K \\ L & M \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} N & P \\ Q & R \end{bmatrix}$$
   - בטא כל אחת מ- N, P, Q, R באמצעות E, F, G, H, J, K, L, M.
   - כמה קריאות רקורסיביות של כפל מטריצות $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ נצטרך לעשות אם נפעל לפי הביטויים מהסעיף הקודם? מה יהיה זמן ריצה של האלגוריתם הפועל בצורה רקורסיבית בדרך הזאת?
   - נגדיר:
$$\begin{aligned} X_1 &= H(L - J) \\ X_2 &= (H - F)(L + M) \\ X_3 &= E(M - K) \\ X_4 &= (E + F)M \\ X_5 &= (E + H)(J + M) \\ X_6 &= (G + H)J \\ X_7 &= (G - E)(J + K) \end{aligned}$$

   בטא כל אחת מ- N, P, Q, R בעזרת חיבור וחיסור מטריצות מתוך $X_1, \dots, X_7$. מה יהיה זמן ריצה של האלגוריתם לכפל מטריצות הפועל בעזרת $X_1, \dots, X_7$?