Q1

<u>סעיף א':</u>

התשובה היא כמספר התמורות, שהוא כמובן $n!$.

נניח שקיימים n אינדקסים ו-n איברים. לאינדקס במקום הראשון נוכל לבחור כל אחד מ-n האיברים שלפנינו. באינדקס במקום השני נוכל לבחור מכל אחד מ- n-1 האיברים שנותרו. וכך הלאה נמשיך לבחור עד שנגיע לאינדקס ה-n שבו נשארנו עם איבר אחד.

לפי עקרון הכפל מקומבינטוריקה, יהיו לנו $n*(n-1)*(n-2)*...*2*1=n!$ בחירות.

<u>סעיף ב':</u>

התשובה היא 2^{n-1} סידורים כנ"ל. הסיבה לכך היא שבכל בחירה נוכל לקחת או את האיבר הגדול ביותר או את האיבר הקטן ביותר, כך שבכל איטרציה תתקבל רשימה אחת של smaller או greater שבה כל האיברים נמצאים חוץ מאיבר הציר שנבחר. מכיוון שהבחירה היא דטרמיניסטית ולוקחת את האיבר הראשון ברשימה שהועברה מהקריאה הקודמת מובטח שתתקבל בכל קריאה רקורסיבית אחריה או רשימה של גדולים מן האיבר או רשימה של קטנים ממנו בלבד. מכיוון שעלינו לסדר n איברים וכיוון שבכל בחירה נוכל לבחור 2 איברים- או את המינימלי או את המקסימלי (עד לאחרון שבו בעצם אין בחירה) - נקבל שמספר הדרכים לבחור "רע" (לסיכוביות $O(n^2)$ ל-quicksort) הוא 2^{n-1}.

<u>סעיף ג':</u>

הגבול הוא 0.

סימון: $p(n)=n!$, $w(n)=2^{n-1}$

נסמן את הסדרה : $a_n=\frac{2^{n-1}}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{2^n}{(n+1)!}$

נסמן: $L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. לפי מבחן המנה לסדרות אם $L<1$ אזי $a_n\rightarrow 0$

ואכן: $lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{(n+1)!}}{\frac{2^{n-1}}{n!}}=\frac{2}{n+1}\to 0$

כלומר קיבלנו ש- $L<1$ ולכן $a_n\rightarrow 0$ כאשר $n\rightarrow\infty$ (וכאמור $a_n=\frac{w(n)}{p(n)}$)

המסקנה היא שהסיכוי לכך שזמן הריצה של האלגוריתם יהיה הגרוע ביותר נהיה קטן יותר ושואף לאפס ככל ש-n גדל. אפשר גם לנתח מנקודת מבט **הסתברותית**: ככל

שקיימים יותר איברים לבחור מהם הסיכוי שייבחר האיבר המקסימלי או המינימלי נעשה נמוך יותר.

Q2

סעיף א':

טענה 4 נכונה- סיבוכיות הזמן היא אקספוננציאלית.

ההסבר הפשוט לכך הוא שבפונקציה מחשבים את כל אופציות ההכפלה מתוך רשימה של *n* איברים ומתוך זה בוחרים את ערך ההכפלה המינימלי. חוזרים על פעולה זו רקורסיבית עם קלט באורך *n-1* . עבור קלט של *n+1* למשל, בכל קריאה רקורסיבית נבצע *n* אירטציות (כמספר ההכפלות) . כך נמשיך עד שהרשימה תתקצר לשתי מטריצות בלבד, כלומר נקרא *n* קריאות רקורסיביות. אם נסכום את כל הקריאות נקבל חסם תחתון של $O(2^n)$.

סעיף ב'+הבונוס:

סיבוכיות הזמן תהיה פולינומיאלית.

הסיבה לכך נעוצה במערך הנתונים שצריך להקים בשביל הממואיזציה: על כל הכפלה אפשרית של שתי מטריצות צריך ליצור תא. כלומר כל תא ייצג הכפלה אפשרית של שתי מטריצות זו בזו. לשם כך נצטרך לרוץ *O(n**2)* . אם התבצע כבר חישוב של הכפלת שתי מטריצות כנ"ל נשלוף את הערך מהטבלה. אז אם יש לנו קלט באורך של *n* יקח לנו *O(n)* (לכל היותר כמובן) ליצור כל אחד מ-*O(n**2)* הכניסות שחושבו כבר.

ולכן סיבוכיות הזמן ההדוקה ביותר תהיה O(n**3).

Q3

סעיף א':

עבור $n = 1$ המטריצה היא [[0,0],[0,1]] והשורה השנייה אכן מכילה כמות זהה של אפסים ואחדים . נניח כי מתקיים עבור had(n) .

מאחר שמתקיים [[had(n),had(n)] , [had(n),had(n)]]=had(n+1) נקבל כי n השורות הראשונות (ללא השורה הראשונה) ב-had(n+1) מתקבלות מחיבור (לא אלגברי) של n השורות הראשונות של had(n) , שהרי הן מכילות מספר זהה של אפסים ואחדים ולכן

שורות אלו מקיימות את התכונה. השורה ה-n נוצרת מחיבור של השורה הראשונה של had(n) והיפוכה, ולכן מכילה n אפסים ו- n אחדים.

לבסוף, השורות האחרונות מתקבלות מחיבור של שורות שמקיימות את התכונה (מאחר שהיפוך אפסים ואחדים אדיש לתכונה) ולכן גם אלו מקיימות את התכונה. בסך הכל קיבלנו כי כל השורות מלבד השורה הראשונה של had(n+1) מכילות מספר זהה של אפסים ואחדים כנדרש.

סעיף ג':

בכל קריאה לפונקציה מבוצעות פעולות במקסימום של O(n) כמו העלאה בחזקה, הכפלה , חיסור והשוואה. כלל העצירה הוא כאשר $n == 0$ והיות שבכל קריאה n יורד ב-1 ומתבצעת קריאה רקורסיבית אחת בכל פעם, התבצעו לכל היותר n קריאות ונקבל סיבוכיות של $O(n * n)$ =$O(n^2)$

Q5

סעיף ב':

ראשית אילו לא היינו משתמשים בממאויזציה סיבוכיות הזמן הייתה אקספוננציאלית: 2^n . (עץ הרקורסיה דומה לעץ בינארי, שבו על כל קריאה נקבל 2 קריאות, n פעמים.)

כאשר משתמשים בממואיזציה- חישוב אחד הבנים של עלה *n_to_k(n-1,k)* כבר בוצע בעלה *n_to_k(n-1,k-1)* ולכן נחסוך אותו. בפונקציה נבצע *n-1* קריאות רקורסיביות עד למקרה הבסיס. על כל אופציה של t_i כאשר $n \geq i \geq 0$ נבדוק חלוקה של בדיוק k קבוצות. כאמור סכום ה-t_i הוא n ועל כן הסיבוכיות תהיה *O(n*k)*.

Q6

סעיף ב':

לצורך הפשטות נניח שאורך שתי המחרוזות הוא n ובמקרה הכי גרוע יורדים לכל הפחות n עומקים כאשר בכל פעם מבצעים 3 קריאות. מכאן נקבל לפחות סיבוכיות של O(3**n) כלומר סיבוכיות אקספוננציאלית.

סעיף ד':

במילון, שמשמש כמבנה נתונים לממואיזיציה, נבחר את המפתחות להיות זוג סדור של המחרוזות (s1,s2) בכל קריאה. ניתן לבצע התאמה חח"ע ועל בין מצב של מחרוזות למספר בין 0 ל-n . כלומר נניח שמחרוזת בהתחלה הייתה "sitting" אז המחרוזת "tting" מתאימה למספר 2 כיוון שהתקדמנו מרחק של 2 אותיות. כמו כן לא ניתן לייצג את 2 באמצעות מחרוזת שונה כי ניתן להוריד אותיות רק אחת אחרי השניה. משום שההתאמה היא חח"ע ועל, וכן גודל קבוצת המפתחות הוא n**2 בסה"כ נקבל n**2 קריאות ולכן תתקבל סיבוכיות של O(n**2).