תרגיל בית מספר 3 - להגשה עד 24 באפריל בשעה 23:55

קיראו בעיון את הנחיות העבודה וההגשה המופיעות באתר הקורס, תחת התיקייה assignments. חריגה מההנחיות תגרור ירידת ציון / פסילת התרגיל.

: הגשה

- תשובותיכם יוגשו בקובץ pdf ובקובץ pt בהתאם להנחיות בכל שאלה.
- השתמשו בקובץ השלד skeleton3.py כבסיס לקובץ ה py אותו אתם מגישים. לא לשכוח לשנות את שם הקובץ למספר ת"ז שלכם לפני ההגשה, עם סיומת py.
- שיש להגיש שני קבצים שני קבצים בלבד. עבור סטודנטית שמספר תייז שלה הוא 012345678 הקבצים שיש להגיש בסהייכ מגישים שני קבצים בלבד. עבור סטודנטית שמספר תייז שלה הוא 102345678.pdf הם 102345678.pdf
- מכיוון שניתן להגיש את התרגיל בזוגות, עליכם בנוסף למלא את המשתנה SUBMISSION_IDS שבתחילת קובץ השלד. רק אחת הסטודנטיות בזוג צריכה להגיש את התרגיל במודל.
 - הקפידו לענות על כל מה שנשאלתם.
 - תשובות מילוליות והסברים צריכים להיות תמציתיים, קולעים וברורים. להנחיה זו מטרה כפולה:
 - 1. על מנת שנוכל לבדוק את התרגילים שלכם בזמן סביר.
 - 2. כדי להרגיל אתכם להבעת טיעונים באופן מתומצת ויעיל, ללא פרטים חסרים מצד אחד אך ללא עודף בלתי הכרחי מצד שני. זוהי פרקטיקה חשובה במדעי המחשב.

שאלה 1

א. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. ציינו תחילה בברור האם הטענה נכונה או לא, ואחייכ הוכיחו / הפריכו באופן פורמלי תוך שימוש בהגדרת $O(\cdot)$.

הנחיה: יש להוכיח / להפריך כל סעיף בלא יותר מ- 4 שורות.

הפתרונות הם קצרים, ואינם דורשים מתמטיקה מתוחכמת. אם נקלעתם לתשובה מסורבלת וארוכה, כנראה ($f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) שאתם לא בכיוון. לאורך השאלה n הוא משתנה ואינו קבוע, כל הפונקציות הן מהטבעיים לעצמם ($if: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) הוא לפי בסיס 2.

- $8^{\log n} = O(n^2) . 1$
- $n\log n = O(\log(n!)) .2$
- : מתקיים $a_0,\dots,a_{k-1}\in\mathbb{R}$ וקבועים $a_k\in\mathbb{R}^+$ מתקיים מספר חיובי קבוע מספר חיובי קבוע חיובי $a_0,\dots,a_{k-1}\in\mathbb{R}$

$$n^k = O\left(\sum_{i=0}^k a_i n^i\right)$$

$$f_1(n) \cdot f_2(n) = Oig(g_1(n) \cdot g_2(n)ig)$$
 אז $f_2(n) = Oig(g_2(n)ig)$ וגם $f_1(n) = Oig(g_1(n)ig)$.4

$$f_1\circ f_2(n)=Oig(g_1\circ g_2(n)ig)$$
 אז $f_2(n)=Oig(g_2(n)ig)$ ו $f_1(n)=Oig(g_1(n)ig)$.5

$$f \circ h(n) = f(h(n))$$
 : תזכורת

: סימטריה 6.

$$g(n) = Oig(f(n)ig)$$
אז $f(n) = Oig(g(n)ig)$.a

$$g(n) \neq O(f(n))$$
 אז $f(n) = O(g(n))$.b

ורמז : השתמשו בהגדרת הגבול שראינו ($\log n$) ($\log n$) : מתקיים א 1-1 ($\epsilon < 1$) ו-1 ($\epsilon < 1$) (רמז : השתמשו בהגדרת הגבול שראינו בתרגול).

ב. לכל אחת משתי הפונקציות הבאות, נתחו את סיבוכיות זמן ריצתה במקרה הגרוע כתלות ב- n (אורך הרשימה L).
 הניחו כי פעולות אריתמטיות ופעולות append רצות בזמן (0 (1). ציינו את התשובה הסופית, ונמקו. על הנימוק להיות קולע, קצר וברור, ולהכיל טיעונים מתמטיים או הסברים מילוליים, בהתאם לצורך.
 על התשובה להינתן במונחי (...)O, ועל החסם להיות הדוק ככל שניתן. למשל, אם הסיבוכיות של פונקציה היא (O(nlogn), התשובה לא תקבל ניקוד (על אף שפורמלית O הוא חסם עליון בלבד).

n imes nג. להלן פונקציה המייצרת מטריצה ריבועית בגודל

```
def make_mat(n):
    return [[0] * n] * n
```

להלן פונקציה שמקבלת מטריצה ומבצעת השמה לתא במטריצה:

```
def set(mat, i, j, value):
    mat[i][j] = value
```

: אסף הריץ את הקוד הבא

```
m = make_mat(3)
set(m, 1, 1, 2)
print(m)
```

להפתעתו, הקוד הדפיס את הפלט הבא:

```
[[0, 2, 0], [0, 2, 0], [0, 2, 0]]
```

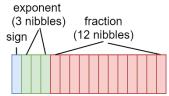
מה אסף ציפה שהקוד ידפיס? הסבירו <u>בקצרה</u> מדוע הקוד מתנהג בצורה לא רצויה, כלומר מה גורם לבאג. היעזרו במה שלמדנו על מודל הזיכרון של פייתון. הציעו שינוי לשורה אחת בקוד שתתקן את הבאג.

.1

.2

שאלה 2

ראינו בכיתה את הפונקציות bin_to_float, float_to_bin שממירות בין מספר ממשי למחרוזת המתארת את ייצוגו הבינארי. בשאלה זו נממש פונקציות דומות הממירות בין מספר ממשי למחרוזת המתארת את ייצוגו בבסיס 16 הבינארי. בשאלה זו נממש פונקציות דומות הממירות בבסיס 16 (ספרה בבסיס 16 נקראת ניבל nibble). ע״פ התרשים הבא:



 $num = (-1)^{sign} \cdot 16^{exp-2047} \cdot fraction \cdot 16^{-11}$, כאשר:

- . ערכים שונים, sign $\in \{0,1\}$ סלומר הוא יכול לקבל רק אחד משני ערכים במקום 16 ערכים שונים.
 - $0 \le exp \le 16^3 1$ מתאר מספר טבעי המקיים exp •
- הניבל בנוסף, הניבל פראיתם בדומה לפגא, מתאר מספר טבעי ולא כפי שראיתם בייצוג float בדומה פארי מספר מתאר מספר טבעי ולא כפי שראיתם בייצוג fraction (אלא בין 1 ל $fraction \cdot 16^{-11} < fraction$). במילים אחרות, fraction לא יכול להיות אפס (אלא בין 1 ל $fraction \cdot 16^{-11}$).
 - . לבסוף, המספר אפס מיוצג עייי 16 אפסים

 $-29.1875 = -\left(29 + \frac{3}{16}\right)$ נייצג באופן הבא לדוגמה, את המספר

- כי המספר שלילי. sign=1 ●
- exp-2047=1 קיים $16^{-11}<16$ יקיים fraction יקיים fraction יקיים exp=2048, כלומר $exp=(2048)_{10}=(800)_{16}$ ולכן
 - כלומר ($29 + \frac{3}{16}$) $\cdot 16^{-1} = 1 + \frac{13}{16} + \frac{3}{16^2}$ כלומר המספר לתאר את המספר fraction ($1d3000000000_{16}$) ולכן $fraction \cdot 16^{-11} = (1.d3)_{16}$
 - .'18001d300000000' הוא -29.1875 שהייצוג של שהייצוג של -29.1875
 - א. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (hex_to_float(s), אשר מקבלת מחרוזת המתארת ייצוג הקסדצימלי של מספר ממשי ומחזירה את המספר float).

: דוגמאות הרצה

```
>>> hex_to_float('17ff20000000000')
-2.0
>>> hex_to_float('07ff61000000000')
6.0625
```

ב. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (float_to_hex(num), אשר מקבלת מספר ממשי (float) ומחזירה מחרוזת השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (float). המתארת ייצוג הקסדצימלי שלו.

: דוגמאות הרצה

```
>>> float_to_hex(10 * 16**2 + 7 * 16 + 11/16 + 3/16**2) '0801a70b3000000' 
>>> float_to_hex ( - (11/16**2 + 3/16**3 + 12/16**5) ) '17fdb30c0000000'
```

- ג. מהו המספר הגדול ביותר הניתן לייצוג בקידוד זה! מהו המספר החיובי הקטן ביותר הניתן לייצוג בקידוד זה! הסרירו
- ד. כמה מספרים שונים ניתן לייצג בקידוד זה! האם קידוד אחר של 16 ניבלים יכול לייצג יותר מספרים! הסבירו.

שאלה 3

: נגדיר רשימה משולבת להיות רשימה לא ריקה באורך n זוגי שמכילה מספרים שלמים ובה

- האיברים באינדקסים הזוגיים מסודרים מקטן לגדול ושונים זה מזה, כלומר מהווים רשימה עולה ממש.
- האיברים באינדקסים האי-זוגיים מסודרים מגדול לקטן ושונים זה מזה, כלומר מהווים רשימה יורדת ממש.
 - יתכן שערך יופיע בשתי הרשימות.

: דוגמאות

```
combined_lst1 = [1, 30, 10, 4, 15, 0, 100, -1]
combined_lst2 = [-100, 100, -80, 80]
```

.None אחרת הפונקציה, lst[i] == key

על הפונקציה להיות מסיבוכיות זמן $O(\log n)$, כאשר n הינו אורך הרשימה.

: דוגמאות הרצה

```
>>> combined_lst1 = [1,30,10,4,15,0,100,-1]
>>> search_combined(combined_lst1, 10)
2
>>> search_combined(combined_lst1, 0)
5
>>> search_combined(combined_lst1, 200)
None
```

- ב. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (lst שמקבלת כקלט רשימה משולבת sort_combined(lst) ומחזירה רשימה חדשה באורך זהה שמכילה את איברי lst מסודרים מקטן לגדול. על הפונקציה להיות בסיבוכיות זמן קטנה ככל lst האפשר, במונחי (.)O. מותר להשתמש בפונקציות שראינו בכיתה. ציינו (בעמוד הבא) מהי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שתיארתם במקרה הגרוע (חסם הדוק ככל האפשר,
- ג. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (i לא ריקה (כלומר באורך find_duplicate(lst) אבהינתן בקובץ השלד את הפונקציה (כלומר באורך וחזר הערך ג' i מחזירה אינדקס i זוגי עבורו מתקיים שi באר i מחזירה אינדקס i זוגי עבורו מתקיים שi כאשר i הינו אורך הרשימה. None

: דוגמאות הרצה

במונחי (.) (ונמקו מדוע זה החסם.

```
>>> combined_lstA = [100, 100]
>>>find_duplicate(combined_lstA)
0
>>> combined_lstB = [80, 120, 100, 100]
>>>find_duplicate(combined_lstB)
2
>>>combined_lstC = [100, 250, 200, 210, 210, -300, 400, -400, 500, -500]
>>>find_duplicate(combined_lstC) == None
True

. יאינדקס אי-זוגיה האחרונה ישנם שני איברים רצופים זהים אך הראשון מביניהם נמצא באינדקס אי-זוגי
```

שאלה 4

בשאלה זו הניחו כי פעולות אריתמטיות והשוואת מספרים מתבצעות בזמן קבוע, וכי הקלט תקין. כמו כן, על זמן הריצה של המימוש שלכם בכל אחד מהסעיפים להיות נמוך ככל הניתן במונחים אסימפטוטיים.

א. רשימה L היא כמעט ממוינת אם כל איבר בה נמצא לכל היותר במרחק אינדקס אחד מהמיקום שלו ברשימה ממוינת. כלומר, אם $rg_sort(i)$ האינדקס של L[i] ברשימה הממוינת. כלומר, אם

$$arg_sort(i) \in \{i - 1, i, i + 1\}$$

לדוגמא, הרשימה [2, 1, 3, 5, 4, 7, 6, 8, 9] היא כמעט ממוינת.

- .b השלימו את הפונקציה find בשלד, שמקבלת את רשימה כמעט ממוינת L ומספר שלם s ומחזירה את find השלימו את הפונקציה t ומספר t ומספר t אורת ברשימה t אור האינדקס t כך שt אור t אור איבר ברשימה t אור איבר ברשימה t ומספר t ברשימה t ומספר t ומטפר t ומספר t ומטפר t ומספר t ומטפר t ומטפר
 - .c מה היא סיבוכיות זמן הריצה! הסבירו בקצרה.
 - ב. נרצה למיין רשימה כמעט ממוינת ללא שימוש ברשימת עזר.
- מוינת וממיינת השלימו את השלימו בשלד, שמקבלת הסרt_from_almost(lst) .a .a השלימו את הפונקציה (O(1)).
 - b. הסבירו בקצרה את הפתרון שלכם ואת סיבוכיות זמן הריצה שלו.
 - i שקטן או שווה לשכניו המידיים. כלומר, כל אינדקס ושקטן אינדקס i שקטן או שווה לשכניו המידיים. כלומר, כל אינדקס המקיים

$$(i == 0 \text{ or } L[i] \le L[i-1]) \text{ and } (i == n-1 \text{ or } L[i] \le L[i+1])$$

לדוגמא, ברשימה [5, 6, 7, 5, 1, 1, 99, 100] האינדקסים 5, 4, 5 הן מינימום מקומי.

- .a האם בכל רשימה של מספרים יש מינימום מקומי! נמקו את תשובתכם.
- השלימו את הפונקציה find_local_min בשלד, שמקבלת רשימה של מספרים (לא ממוינים וייתכנו find_local_min הזרות) ומחזירה אינדקס i של מינימום מקומי (אם יש יותר מאחד אז ניתן לבחור שרירותית). למשל, עבור הרשימה מהדוגמה תשובה של i0, i0 או i0 תהיה תקינה.
 - .c מהי סיבוכיות זמן הריצה! הסבירו בקצרה.

שאלה 5

בכיתה ראינו את האלגוריתם מיון-בחירה (selection sort) למיון רשימה נתונה. האלגוריתם כזכור רץ בסיבוכיות זמן בכיתה ראינו את האלגוריתם מיון-בחירה (selection sort), שרץ בסיבוכיות זמן $O(n^2)$ עבור רשימה בגודל a. בקרוב נראה גם אלגוריתם מיון-מהיר יעיל יותר (quicksort), שרץ בסיבוכיות זמן טובה מזו. למשל, ממוצעת ($n \log n$) לפעמים, כאשר יש לנו מידע נוסף על הקלט, אפשר למיין בסיבוכיות זמן טובה מזו. למשל, בשאלה זו, נעסוק במיון של רשימה שכל איבריה מוגבלים לתחום מצומצם יחסית: מחרוזות באורך n, עבור n, עבור n, מעל האלפבית n, n, מעל האלפבית n, n, שמכיל n

ההשוואה בין זוג מחרוזות תהיה לקסיקוגרפית, כלומר השוואה מילונית רגילה.

הערות

- 1. בשאלה זו אסור להשתמש בפונקציות מיון מובנות של פייתון.
- 2. בניתוח הסיבוכיות בשאלה זו נניח שהשוואה של זוג מחרוזות באורך k מבצעת בפועל השוואה של התווים של המחרוזות משמאל לימין, ובמקרה הגרוע תהיה מסיבוכיות זמן O(k)
 - לשם פשטות ניתוח הסיבוכיות נתייחס הן לפעולות אריתמטיות והן לפעולות העתקה של מספרים ממקום למקום בזכרון כפעולות שרצות בזמן קבוע.
 - א. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (string_to_int(s) שמקבלת כקלט מחרוזת s באורך k בדיוק שמורכבת השלימו בקובץ השלד את הפונקציה מספר שלם בין s ל s כולל, המייצג את הערך הלקסיקוגרפי היחסי של מהתווים a,b,c,d,e ומחזירה מספר שלם בין s ל s כולל, המייצג את הערך הלקסיקוגרפי היחסי של מהתרוזת. על הפונקציה להיות חד-חד-ערכית. סיבוכיות הזמן שלה צריכה להיות

string to int(int to string(k, i)) == i

: דוגמת הרצה

```
>>> for i in range(5**3):
    if string_to_int(int_to_string(3, i)) != i:
        print("Problem with ", i)
>>> alphabet = ["a","b","c","d","e"]
>>> lst = [x+y+z for x in alphabet for y in alphabet for z in alphabet]
>>> for item in lst:
    if int_to_string(3, string_to_int(item)) != item:
        print("Problem with ", item)
>>> #Nothing was printed
```

- ג. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (n מחרוזות כמתואר שמקבלת כקלט רשימה n של n מחרוזות כמתואר ומספר חיובי n כך שכל מחרוזת ברשימה הינה באורך n בדיוק. (הניחו כי הקלט תקין ואין צורך לבדוק את ומספר חיובי n כך שכל מחרוזת ברשימה חדשה ממויינת בסדר עולה (ולא לשנות את n עצמה). בנוסף לרשימת הפלט שהיא בגודל n כמובן, על הפונקציה להשתמש ברשימת עזר (n בעלת n איברים. עליכם להשתמש בפונקציות מסעיפים אי, בי.
 - $O(kn + 5^k)$ על הפונקציה sort strings1 על הפונקציה
 - . בקובץ ה $\mathrm{d}f$ הסבירו מדוע הפונקציה מסעיף גי עומדת בדרישות הסיבוכיות.
 - ה. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (lst, k) שמקבלת קלטים כמו הפונקציה מסעיף ג', ובדומה sort_strings2 (lst, k) עצמה). לפונקציה הקודמת עליה להחזיר רשימה חדשה ממויינת בסדר עולה (ולא לשנות את lst עצמה).
 - הפעם מותר להשתמש בזכרון עזר מגודל , O(k) , לא כולל רשימת הפלט שעליכם לייצר שגודלה הוא n. על הפעם מותר להשתמש בזכרון עזר מגודל , $O(5^k \cdot kn)$ הפונקציה להיות מסיבוכיות זמן
 - ו. בקובץ ה pdf הסבירו מדוע הפונקציה מסעיף הי עומדת בדרישות סיבוכיות הזמן והזיכרון.

: דוגמת הרצה

```
>>> import random
>>> k = 4
>>> lst = ["".join([random.choice(["a", "b", "c", "d", "e"]) for i in
range(k)]) for j in range(10)]
>>> lst
['aede', 'adae', 'dded', 'deea', 'cccc', 'aacc', 'edea', 'becb', 'daea',
'ccea']
>>> sort strings1(lst, k)
['aacc', 'adae', 'aede', 'becb', 'cccc', 'ccea', 'daea', 'dded', 'deea',
'edea'l
>>> sort strings2(lst, k)
['aacc', 'adae', 'aede', 'becb', 'cccc', 'ccea', 'daea', 'dded', 'deea',
'edea']
>>> sorted(lst) == sort strings1(lst, k)
>>> sorted(lst) == sort strings2(lst, k)
True
```

שאלה 6

כפי שנלמד בהרצאה, קידוד ASCII לטקסט מאפשר לקודד 128 תווים שונים. בשאלה זו, נתעסק בקידודים עבור (a-z) טקסט שמכיל 36 תווים שונים בלבד – ספרות ((a-z)) ואותיות קטנות באנגלית ((a-z)).

אנחנו רוצים ליצור תחליף לקידוד ASCII כך שמחרוזת תתפוס פחות מקום בזיכרון. מיכל הציעה את הקידוד הבא לביטים. להבדיל מASCII, הקידוד של מיכל משתמש בקידודים באורכים שונים – 5 ביטים לספרות וASCII לאותיות – בצורה הבאה:

- כל ספרה (0-9) תקודד באופן הבא: הביט 0 ואחריו ארבעה ביטים שמתארים את ערך הספרה בבינארי. כלומר יסי תקודד ל00000, י1י תקודד ל10000, י9י תקודד ל10000 וכוי.
- כל אות (a-z) תקודד באופן הבא: הביט 1 ואחריו חמישה ביטים שמתארים את האינדקס של האות בבינארי, כל אות (a-z) תקודד באופן הבא: a הוא 1 וכן הלאה באינדקס של a הוא 0, של a הוא 1 וכן הלאה בלומר יaי תקודד ל100001, יaי תקודד ל100001, יaי תקודד ל100001, יaי תקודד לביטים שמתארים את האינדקס של האינדקס של האות בבינארי,
- א. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה (code(string) המקבלת מחרוזת מעל האייב המתואר לעיל (ספרות ואותיות קטנות בלבד) ומחזירה מחרוזת המתארת את הקידוד הבינארי (כלומר מחרוזת המכילה את התווים '0' ו'1' בלבד) המוצע.

: דוגמאות הרצה

```
>>> code('7b')
>>> '00111100001'
>>> code('cs1001')
>>> '1000101100100000100000000000001'
```

ב. השלימו בקובץ השלד את הפונקציה ההופכית (decode(bin_str המקבלת מחרוזת המתארת הקידוד הבינארי הנייל ומחזירה את המחרוזת המקורית.

: דוגמאות הרצה

```
>>> decode('00111100001')
>>> '7b'
>>> decode('10000010001010000100001')
>>> 'acab'
```

- נניח כי אנו מייצרים מחרוזת s באורך n = len(s) = n כך שכל תו במחרוזת נבחר רנדומלית מ- 36 התווים s האפשריים (ספרות ואותיות קטנות) בהסתברות שווה. נסמן ב- code(s) את הקידוד של מיכל למחרוזת s באשר s וב- r את קידוד ה- ASCII של המחרוזת s כאשר s גדול מאוד, מהו הערך הצפוי של r את קידוד של מיכל חוסך מקום יחסית ל- ASCII s הסבירו.
- ד. נעם חשב על הקידוד של מיכל והחליט שזה בזבוז מקום להוסיף את הביט 0 לפני כל ספרה כאשר בטקסטים לרוב יש מספרים ארוכים, כלומר הרבה ספרות ברצף בלי אותיות ביניהן. לכן הציע לשנות את הקידוד כך:
 - פרות שכל ארבעה (רצף ארבעה באורך n ספרות הפרות יקודד באופן הבא הביט 1 ואחריו $4\cdot n$ ביטים כך שכל ארבעה ביטים מתארים ספרה במספר.
 - האותיות יקודדו ללא שינוי.

איזו בעיה אתם יכולים למצוא ברעיון של נעם! תנו דוגמה הממחישה את הבעיה והסבירו.

- ה. אסף לא אהב את הקידוד של מיכל והציע קידוד אלטרנטיבי למחרוזות מעל האייב המתואר:
- כל תו (ספרה או אות) יקודד למספר בינארי שמייצג את האינדקס של התו באייב, כאשר הספרות לפני מידיקס של י2י הוא 10, האינדקס של י2י הוא 10, האינדקס של י2י הוא 10, האינדקס של י2י הוא 31, האינדקס של י2י הוא 35 וכוי.

כמה ביטים נדרשים בשביל לייצג כל תו בקידוד של אסף, בהנחה שכל התווים מקודדים למספר זהה של ביטים (fixed-length code): הסבירו.