בקרה במרחב המצב

- תכנון הבקרה נעשה עד כה במישור התדר.
- כפי שראינו בקורס הקודם ניתן להציג המערכת במרחב המצב ונשאלת השאלה כיצד ניתן לתכנן חוג סגור במרחב זה שיקיים דרישות ליציבות וביצועים.
- נתונה המערכת הב"ת בזמן המתוארת ע"י:

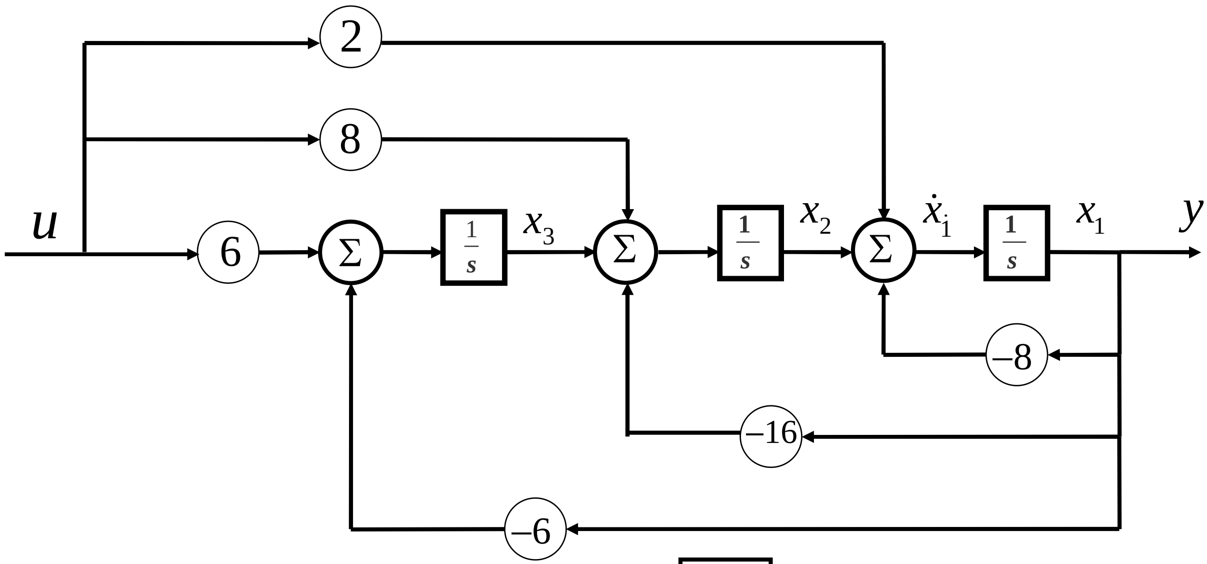
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t)$$

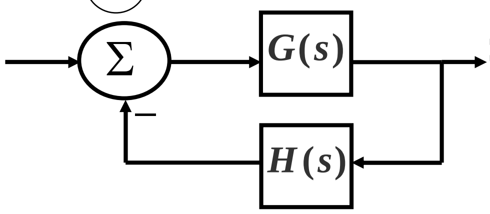
- פונקצית התמסורת היא: $G(s) = C(sI - A)^{-1} B$
- ניתן כמובן להמשיך בטיפול בתחום התדר.

- ניתן גם לתאר המערכת הנתונה במרחב המצב ע"י דיאגרמת מלבנים ואותה לשלב בתכנון בתחום התדר.
- למשל, עבור:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

נקבל את הדיאגרמה הבאה:





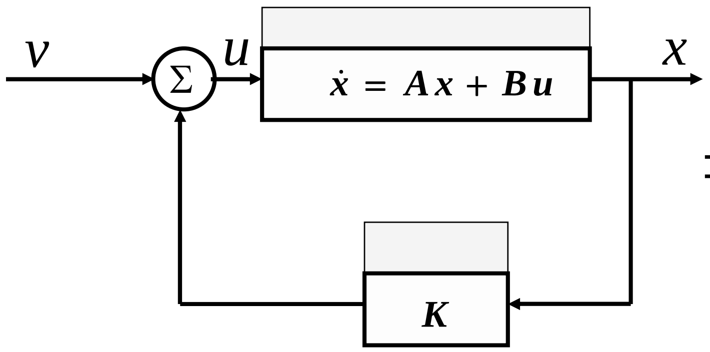
(התמסורת של :

היא: $T(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$).

- ניתן להמשיך התכנון במרחב המצב מבלי לעבור לפונקציות תמסורת.
- היתרונות:

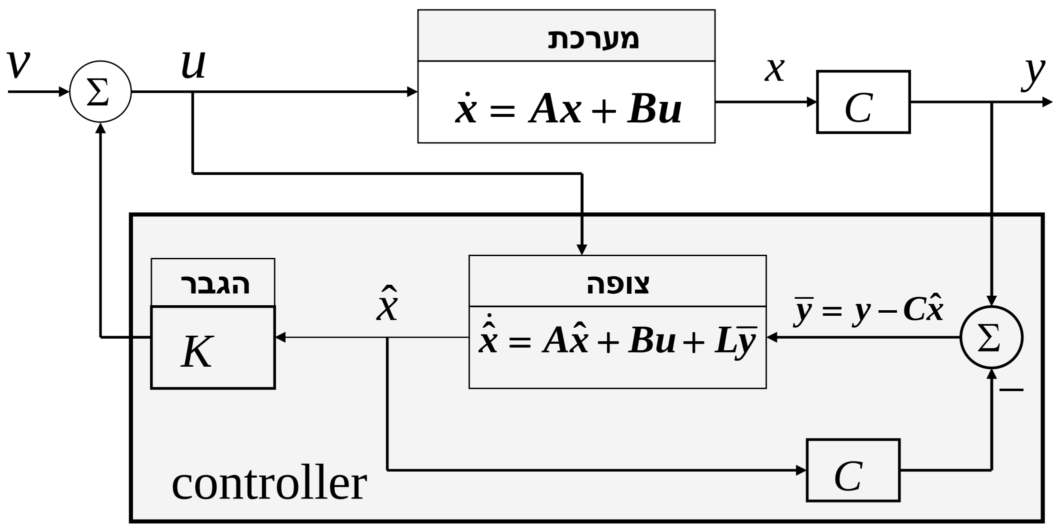
1. ניתן לקבל תכנון מדויק ועקבי יותר מזה שבתחום התדר
2. בהצגת משתני מצב יש פעמים רבות משמעות פיזיקלית למשתני המצב ולכן מושגת תובנה רבה.
3. ניתן לקבל תכנון ע"י נוסחה במקום שיטות חצי נסיוניות בתכנון בתדר.
4. הטיפול זהה למערכות SISO ו MIMO.
5. ניתן לפתור בעיות אופטימיזציה בהן ממזערים פונקצית מטרה (למשל מידת החטאה, השפעת הפרעה, אנרגיה וכו)
6. בהצגת משתני מצב מבחינים גם בחלקים הלא אובסרבילים ולא קונטרולביליים.

- תכנון הבקר במרחב המצב יעשה באחד מ 2 האופנים הבאים:
- במקרה של גישה ישירה לכל המצבים יהיה המבנה:



$$\Longrightarrow \quad \dot{x} = (A + BK)x + Bv$$

במקרה בו יש גישה ליציאה y בלבד, נקבל המבנה:



- לפני שנעסוק במציאת 2 סוגי הבקרים (מצב ויציאה) נגדיר 2 מושגים:
- קונטרולביליות:

מערכת היא קונטרולבילית או"א קיימת כניסה u(t) שיכולה להעביר כל מצב התחלתי x(0) ל x(t) שרירותי נתון בזמן סופי.

התנאי לקונטרולביליות של

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

הוא:

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

- אובסרוביליות
- מערכת היא אובסרובילית או"א ניתן למצוא את $x(0)$ מתוך $y(t)$ בזמן סופי (כאשר ידוע (u(t)).

המערכת: $\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$

היא אובסרובילית או"א :

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

הערה: נפגשנו בתנאי זה כשדנו במשתני פאזה כשהיה עלינו למצוא את ת"ה מתוך $y(0), \dot{y}(0)...$

.

דוגמאות

• נתונה מערכת עם:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

נבדוק:

$$P_c=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & -a_2^2-a_1 \end{bmatrix}$$

המסקנה: המערכת קונטרולבילית.

• 2. נתונים:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

קונטרולביליות רק עבור $d \neq 0$

3.נתון :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

אי קונטר. ואי אובסר. הסיבה: $\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_1 + x_2$

תכנון משוב מצב

- נפתור בעיית הרגולטור.
- נתונה המערכת $\dot{x} = Ax + Bu$. מחפשים בקר $u(t) = Kx(t)$
  כך שקטבי החוג הסגור יהיו כולם ב LHP
  ואז x(t) של החוג הסגור ידעך אסימפטוטית לראשית.
- מדובר לכן בחוג הסגור: $\dot{x} = (A + BK)x$
- השאלה היא מתי הע"ע של A+BK יהיו ב LHP.
- תנאי הכרחי ומספיק להשמת קטבים כרצוננו הוא הקונטרולביליות של (A,B) .
- ראינו בקורס הקודם כי מציאת K קלה במקרה בו המערכת ניתנת בהצגת משתני פאזה.

- דוגמא:
- מערכת מתוארת ע"י המד"ר $\dddot{y}+5\ddot{y}+3\dot{y}+2y=u$
- הצגת משתני הפאזה היא:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -3 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u, \quad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

- נרצה לקבל קטבים שהם האפסים של הפולינום האופיני הבא (משיקולי OS ו ST):

$$(\lambda+4.8)(\lambda^2+1.6*6\lambda+36)=\lambda^3+14.4\lambda^2+82.1\lambda+172.8$$

- זאת ע"י הפעלת u=Kx היכן ש: $K=[k_1\, k_2\, k_3]$

• נקבל:

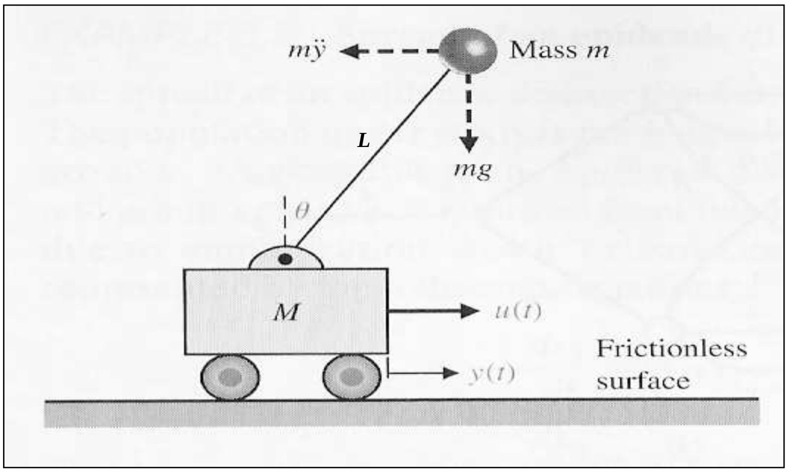
$$A+BK=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2+k_1 & -3+k_2 & -5+k_3 \end{bmatrix}$$

כלומר, נקבל פולינום אופיני:

$$\lambda^3+(5-k_3)\lambda^2+(3-k_2)+(2-k_1)$$
$$\Rightarrow K=-[170.8\ \ 79.1\ \ 9.4]$$

דוגמא להשמת קטבים-מטוטלת הפוכה

• המטוטלת מחוברת לעגלה בעלת מסה M בציר נטול חיכוך. בקצה המטוטלת מסה m<<M. אורך המטוטלת הוא L.



• מצבי המערכת הם זווית הסיבוב $\theta(t)$ ומיקום $y(t)$ של העגלה הנעה ללא חיכוך על מישור.

- המד"ר מתקבלת מכתיבת סכום הכוחות במישור והמומנטים בציר.
- כוחות: (מניחים θ קטנה ו $m << M$)

$$M\ddot{y}(t) + mL\ddot{\theta}(t) - u(t) = 0$$

- מומנטים: $mL\ddot{y}(t) + mL^2\ddot{\theta}(t) - mLg\theta(t) = 0$
- נבחר: $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = [y \ \dot{y} \ \theta \ \dot{\theta}]$
- נקבל:

$$(1) \quad M\dot{x}_2 + mL\dot{x}_4 = u \qquad (m << M)$$

$$(2) \quad \dot{x}_2 + L\dot{x}_4 - gx_3 = 0$$

- נציב מ (2) ל (1) עבור $L\dot{x}_4$: $M\dot{x}_2 + mgx_3 = u$
- ומ (1) ל (2) עבור $\dot{x}_2$: $ML\dot{x}_4 - Mgx_3 = -u$

• נקבל לכן את ההצגה הבאה:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{g}{L} & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\\ 0\\ -\frac{1}{LM}\end{bmatrix}u, \quad y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

• מהמשואה ברור כי ל $M >> m$ יש כמעט התרת צימוד. בכל מקרה, תת המערכת ל x_3 ו x_4 ב"ת ב x_1 ו x_2 .

• נסתכל לכן בתת המערכת הבאה:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{g}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{LM}\end{bmatrix}u$$

- שורשי הפולינום האופיני של A $(\lambda^2-\frac{g}{L})$ הם אחד ב LHP ואחד ב RHP. המערכת היא לכן לא יציבה.
- נבחר המשוב:

$$u=Kx+v=[k_1\ k_2]\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix}+v$$

נקבל החוג הסגור:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{L}(g-\frac{k_1}{M}) & -\frac{k_2}{LM}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{LM}\end{bmatrix}v$$

כלומר הפולינום האופיני יהיה עתה: $\lambda^2+\frac{k_2}{LM}\lambda-\frac{1}{L}(g-\frac{k_1}{M})$

- כדי שהמטוטלת תהיה יציבה נדרוש: $k_2 > 0, \ \frac{k_1}{M} > g$
- ע"י מדידת x_3 ו x_4 והפעלת המשוב נייצב המערכת.
- את הזווית ומהירותה מודדים ע"י פוטנציומטר וטכומטר בהתאמה.
- אם נרצה להשיג תגובה מהירה עם OS מתון ניקח קוטב כפול עם: $\omega_n = 10\, rad/\sec, \ \zeta = 0.8$ ונקבל פולינום אופיני רצוי: $\lambda^2 + 16\lambda + 100$.
- מכאן: $\frac{k_2}{LM} = 16, \ \ \frac{1}{L}(\frac{k_1}{M} - g) = 100$
- לקוטב הכפול שקבלנו יהיו: OS=1.5 % ו ST=0.5sec.

נוסחאת אקרמן

- ב 2 הדוגמאות האחרונות המטריצה A הייתה בצורת משתני פאזה. מה קורה במקרה הכללי?
- נתונים המערכת $\dot{x} = Ax + Bu$ והמשוב $u = Kx$
- נתון הפולינום האופיני הרצוי: $q(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$
- אם למערכת כניסה אחת (כלומר B הוא וקטור עמוד) משוב המצב שיביא לפולינום הנ"ל הוא:

$$K = -[0\,0\,...\,0\,1]P_c^{-1}q(A)$$

היכן ש: $q(A) = A^n + a_1A^{n-1} + ... + a_nI$

ו P_c היא מטריצת הקונטרולביליות.

דוגמא

- נקח מערכת של אינטגרטור כפול (החוק השני של ניוטון) $G(s) = \frac{1}{s^2}$
- הפולינום האופיני הרצוי הוא, נאמר, $q(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$
- הצגת משתני המצב היא: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$
- מטריצת הקונטרולביליות: $P_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- המשוב

$$K = -[0\ 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} q(A) = -[0\ 1]\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= -[1\ 0]\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -[2\ \ 2]$$

תכונות היציבות (שוליים)

- נתונים המערכת $\dot{x} = Ax + Bu$ והמשוב $u = Kx + v$.
- החוג הסגור הוא:

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv$$

$$y = Cx$$

- פונקציות התמסורת:

חוג פתוח: $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

חוג סגור: $T(s) = C(sI - A - BK)^{-1}B$

- מכאן:

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}(I - BK(sI - A)^{-1})^{-1}B$$

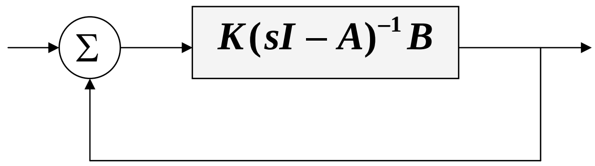
$$= G(s)(1 - K(sI - A)^{-1}B)^{-1}$$

- השתמשנו בעובדות:

$$(\alpha + \beta)^{-1} = \alpha^{-1}(I + \beta\alpha^{-1})^{-1}$$

$$(I + \alpha\beta)^{-1}\alpha = \alpha(I + \beta\alpha)^{-1}$$

- **מתוך התוצאה ל $T(s)$ תיקבע היציבות על פי:**



- **כלומר, מתוך ה Bode או ה Nyquist של התמסורת $K(sI-A)^{-1}B$ נמצא מהם שולי היציבות.**

צופה (אובסרוור)

- במשוב מצב הנחנו כי כל המצבים ניתנים למדידה. כשזה אינו המצב ונתן למדוד רק את $y = Cx$ נרצה למצוא צופה (משערך) שמתוך מדידת y יתן לנו $\hat{x}$, שערוך מספיק טוב של x .
- נשתמש אז ב $\hat{x}$ במשוב המצב, במקום x , ונפעיל $u = K\hat{x} + v$.
- הצופה שנשתמש בו יהיה צופה לוונברגר בעל הדינמיקה

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}), \quad \hat{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{0}$$

- צופה זה נדחף ע"י u (כמו המערכת המקורית) אבל גם ע"י $Cx - C\hat{x}$.

- **נסמן שגיאת השערוך ע"י $e(t)=x(t)-\hat{x}(t)$ ונרצה לבחור את L כך ש$e(t)$ תדעך מהר לאפס.**
- **ההפרש בין המשוואות ל $\dot{x}$ ול $\dot{\hat{x}}$ הוא:**

$$\dot{e}(t)=Ax(t)+Bu(t)-A\hat{x}(t)-Bu(t)-L(y(t)-C\hat{x}(t))$$

$$\Rightarrow \dot{e}(t)=(A-LC)e(t), \quad e(0)=x(0)$$

- **לכן $e(t)\to 0$ אם המטריצה $A-LC$ תהיה עם ע"ע ב LHP.**
- **מהירות הדעיכה תקבע אז ע"י גודל הערך המוחלט של הקטבים האלה.**
- **צופה טוב יהיה לכן בעל מטריצה $A-LC$ עם ע"ע שליליים בעלי חלק ממשי גדול בערך מוחלט.**

- הדרישה לקיום L שישים את קטבי A-LC במקום כרצוננו היא האובסרווביליות של (A,C) או ש:
- $P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ תהיה בעלת דרגה n .
- <u>הוכחה</u>: הע"ע של $A - LC$ זהים לאלה של $A^T - C^T L^T$
- השמת קטבים של $A^T + C^T(-L^T)$ אפשרית ע"י $K = -L^T$
- לפי משוב מצב למערכת המאופינת ע"י (A^T, C^T) .
- מטריצת הקונטרולביליות של האחרונה היא:

$$[C^T \; A^T C^T \; A^{2T} C^T \; \cdots A^{(n-1)T} C^T] = P_o^T$$

דוגמא למערכת מסדר 2

- נדון במערכת: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = [1 \;\; 0]$
- נרצה שערוך של x_2 .
- נבדוק: $P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. מכאן המערכת אובסרוובילית.
- נרצה צופה עם פולינום אופייני $\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2$
- עם $\omega_n = 10\, rad/\sec$ ו $\xi = 0.8$ (מתאים ל $ST = 0.5\sec$).

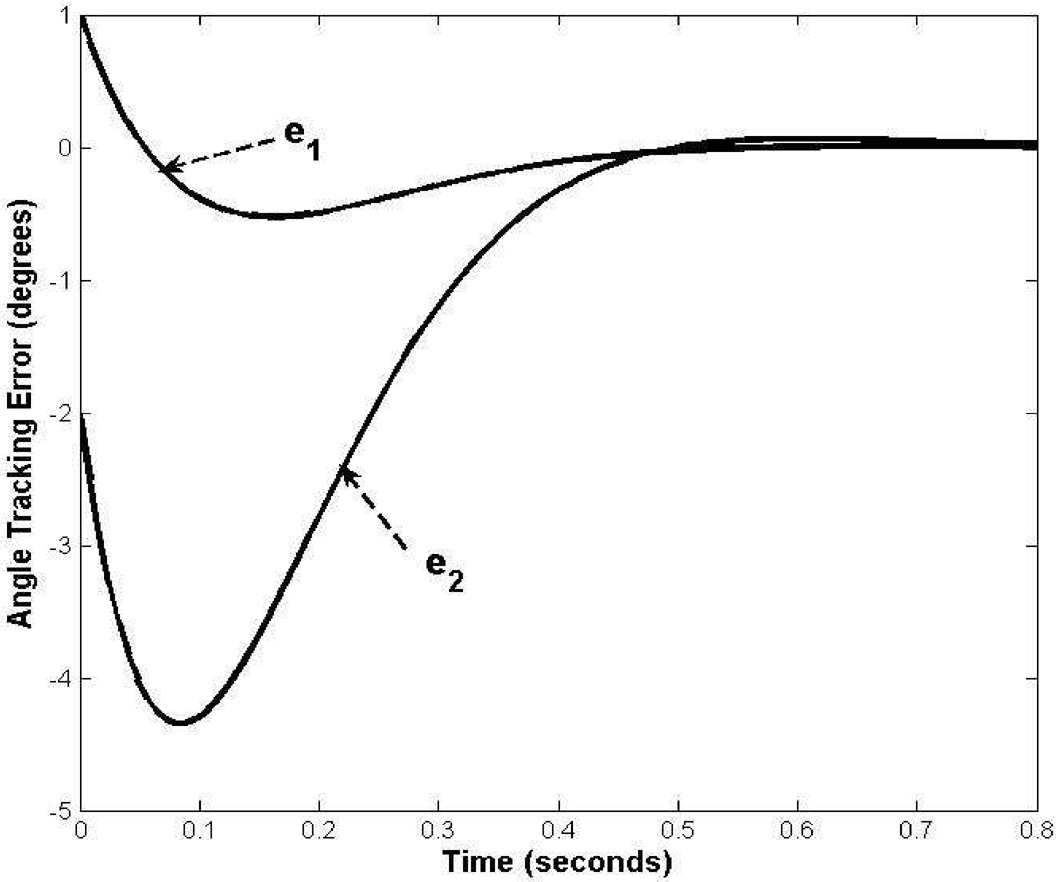
ע"י נוסחת אקרמן ל (A^T, C^T) נמצא כי $L = \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix}$.

באופן ישיר: $L = q(A) P_o^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

- מצאנו כי הצופה הוא:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 22 \\ 59 \end{bmatrix} (y - \hat{x}_1)$$

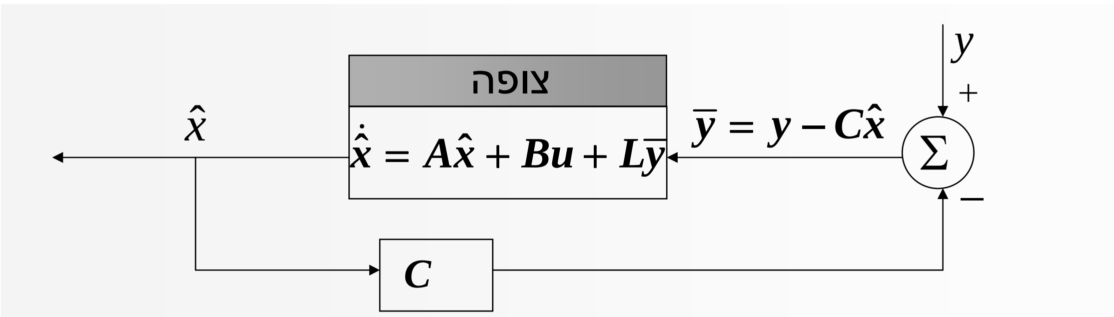
- נניח כי $e(0) = x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. לצופה זה נקבל השערוך:



Angle Tracking Error (degrees)
Time (seconds)
e1
e2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8

צופה ובקרה

- המטרה בשימוש בצופה בחוגי בקרה היא להחליף את x הלא מדיד ב $\hat{x}$.
- הצופה יראה כך:



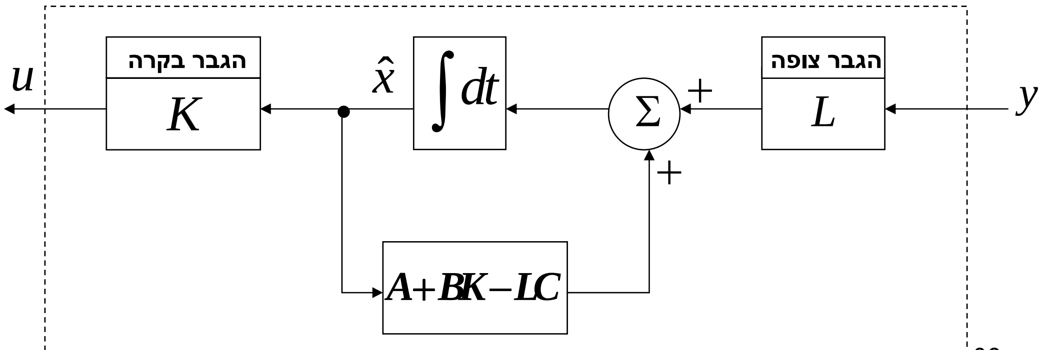
וכאמור נרצה להשתמש ב $\hat{x}$ למשוב לפי הדיאגרמה הבאה.

- בהינתן K שתוכנן כאילו יש גישה ל x נרצה להפעיל $u = K\hat{x}$.
- נבדוק האם זהו רעיון טוב והאם מה שרצינו להשיג ע"י משוב מצב יושג גם כאן.
- קיים: ($u = K\hat{x}$)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

$$\dot{\hat{x}} = (A + BK - LC)\hat{x} + Ly$$

- מכאן שמבנה הצופה בחוג הבקרה יהיה:



- נחסר $\dot{\hat{x}}$ מ $\dot{x}$ ונקבל: $\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - LC)e, \quad e(0) = x(0)$
- כמו כן:

$$\dot{x} = Ax + BK\hat{x} = Ax + BK(x - e)$$
$$= (A + BK)x - BKe$$

- ולכן: $$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$
- עם ת"ה $\begin{bmatrix} x(0) \\ x(0) \end{bmatrix}$. המערכת המורחבת היא מסדר $2n$.
- נרצה לבדוק האם $u = K\hat{x}$ גורם ל $x(t) \to 0$ כפי שתוכנן משוב המצב.

- המטריצה $\begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}$ היא בלוק משולשית.
- הע"ע שלה הם לכן הע"ע של A-LC ושל A+BK .
- הע"ע של A +BK נקבעו להיות הקטבים היציבים במשוב המצב.
- הע"ע של A-LC נקבעו להיות הקטבים היציבים של הצופה.
- <u>מסקנה</u>: נקבל יציבות כנדרש.

- העובדה שמשוב המצב והצופה מתוכננים באופן ב"ת נקראת: $\boxed{\text{עקרון ההפרדה}}$.

סיכום שיטת התכנון

- מצא את K כך של A+BK יהיו ע"ע רצויים כדי לקבל תגובה רצויה. ניתן לעשות כן אם המערכת קונטרולבילית.
- קבע את L כך של A-LC יהיו ע"ע ב LHP שיתנו ביצועי שערוך רצויים. ניתן לעשות כן אם המערכת אובסרוובילית.
- חבר את הצופה לבקר משוב 'המצב' ע"י

$$u(t) = K\hat{x}(t)$$

- מהי פונקצית התמסורת של הבקר?
- ראינו כי:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A + BK - LC)\hat{x}(t) + Ly(t)$$

$$u(t) = K\hat{x}(t)$$

- ולכן נקבל את פונקצית התמסורת:

$$H(s) = K(sI - (A + BK - LC))^{-1} L$$

- שים לב ש$H(s)$ לא חייבת להיות יציבה אולם החוג הסגור כולו יהיה תמיד יציב אם הצופה וחוג משוב המצב יציבים.

דוגמא: המטוטלת ההפוכה

- ראינו כי:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{LM} \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

- כש: x_1 הוא המיקום, x_2 המהירות, x_3 זווית המטוטלת ו x_4 היא המהירות הזוויתית.
- נאמר שניתן למדוד ע"י חיישן את מיקום העגלה בלבד. האם אפשר להביא את המטוטלת מ $x_3 = \theta \neq 0$ ל $\theta = 0$?

- נתון ש:

$$L = 0.098m$$
$$g = 9.8\, m/\sec^2$$
$$m = 0.825Kg$$
$$M = 8.085Kg$$

- נקבל:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1237 \\ 0 \\ -1.2621 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- מתקבלים:

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 0.124 & 0 & 1.262 \\ 0.124 & 0 & 1.262 & 0 \\ 0 & -1.262 & 0 & -126.2 \\ -1.262 & 0 & -126.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- ברור ש P_o לא סינגולרית. כזו היא גם P_c כי עמודים 1 ו- 3 וגם 2 ו - 4 ב"ת.

- ברור לכן שניתן לייצב המטוטלת ההפוכה.
- נמצא את הבקר המייצב.
- הקטבים של החוג הפתוח הם קוטב כפול בראשית קוטב ב 10 וקוטב ב 10-.
- נרצה להזיז הקטבים לקוטב כפול עם $(\xi,\omega_n)=(0.8,0.5)$ וקוטב כפול מרוחק. כך נקבל $ST<10\sec$ ו OS קטן.

נבחר:

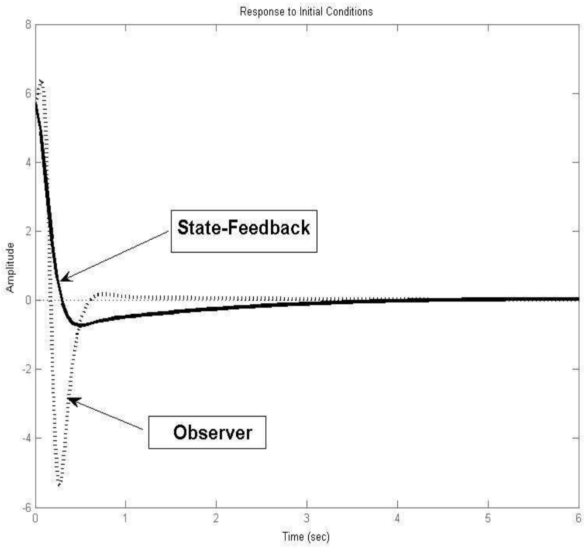
$$q(\lambda)=(\lambda^2+0.8\lambda+0.25)(\lambda^2+16\lambda+100)$$

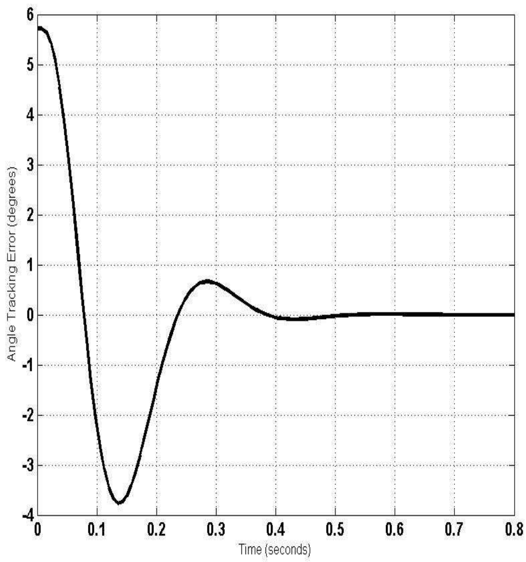
ע"י נוסחת אקרמן נקבל:

$$K=\begin{bmatrix}2.2509 & 7.5631 & 169.03 & 14.052\end{bmatrix}$$

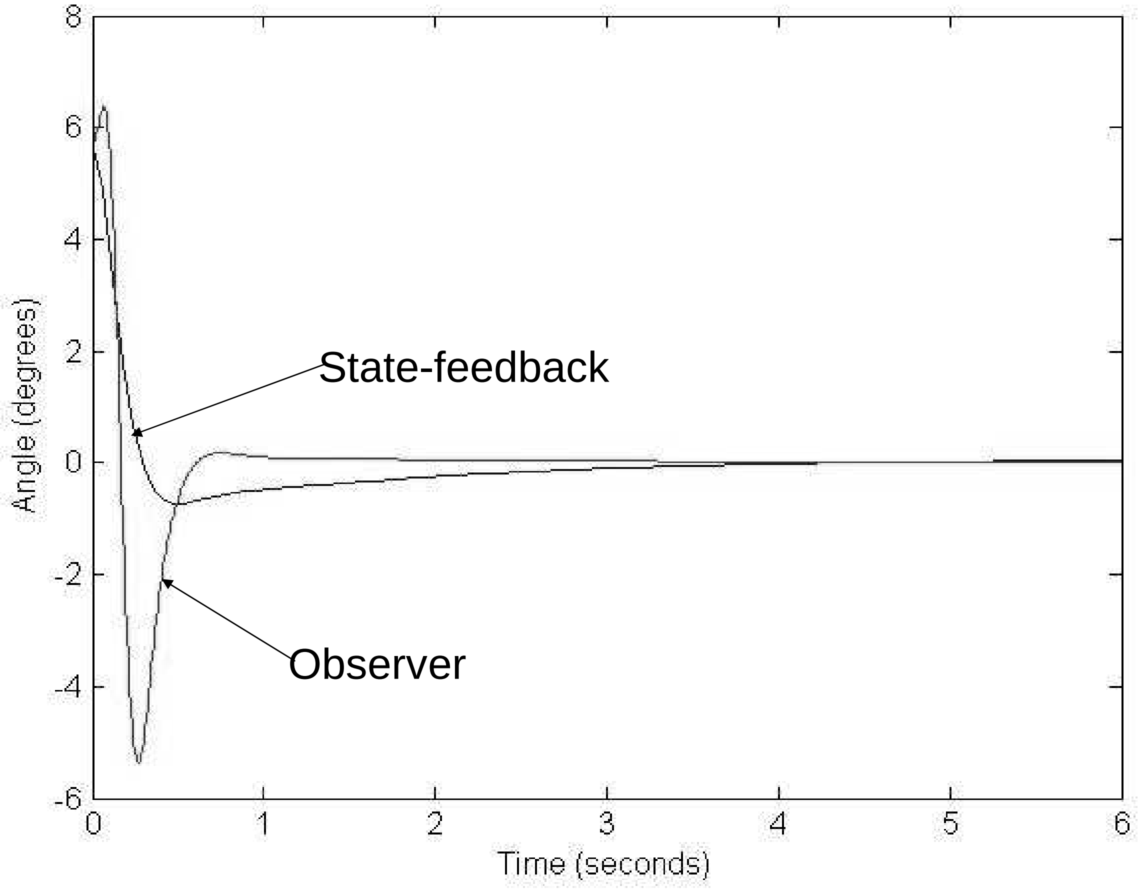
- תכנון הצופה:
- נרצה שערוך מהיר (L גבוה).
- אנו מוגבלים אבל ע"י רעש מדידה.
- בד"כ בוחרים את קטבי הצופה להיות פי 2-10 מקטבי החוג הסגור הרצויים.
- נבחר: $q(\lambda) = (\lambda^2 + 32\lambda + 711.11)^2$
- בחירה זו מתאימה ל $\xi = 0.6, \quad \omega_n = 26.66$
- כלומר ל $ST < 0.5\,\mathrm{sec}$
- לפי נוסחת אקרמן נקבל: $L = \begin{bmatrix} 64 \\ 2546 \\ -51911 \\ -760300 \end{bmatrix}$
- ההגברים גבוהים בגלל רחוק קטבי הצופה מהראשית.

- הבקר הכללי יתקבל ע"י הפעלת $u = K\hat{x}$.
- עבור ת"ה $\theta = 5.72^o , \dot{\theta} = 0$ נקבל:

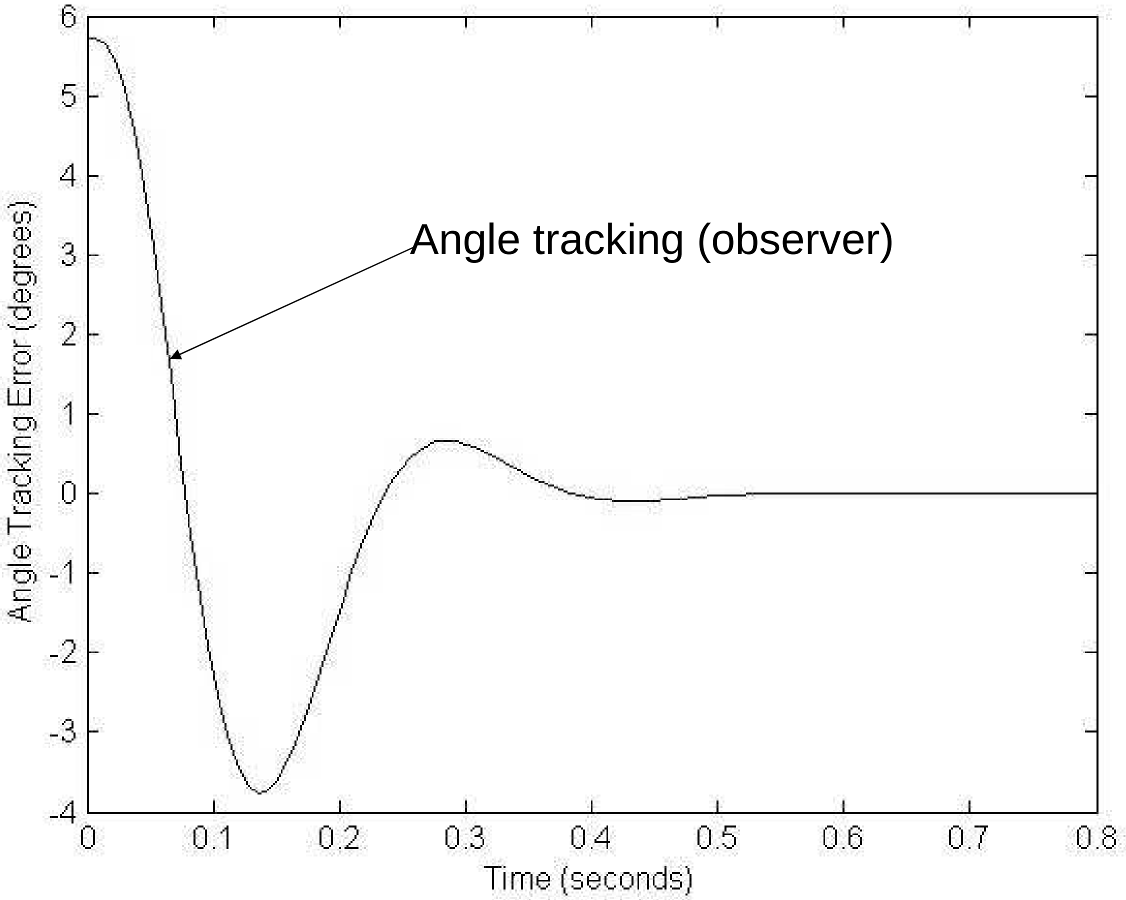




- המטוטלת מתייצבת תוך 4 שניות.
- התגובה עם הצופה יותר תנודתית משום שלצופה דרושים 0.4 שניות להתכנס לשגיאה מינימלית.

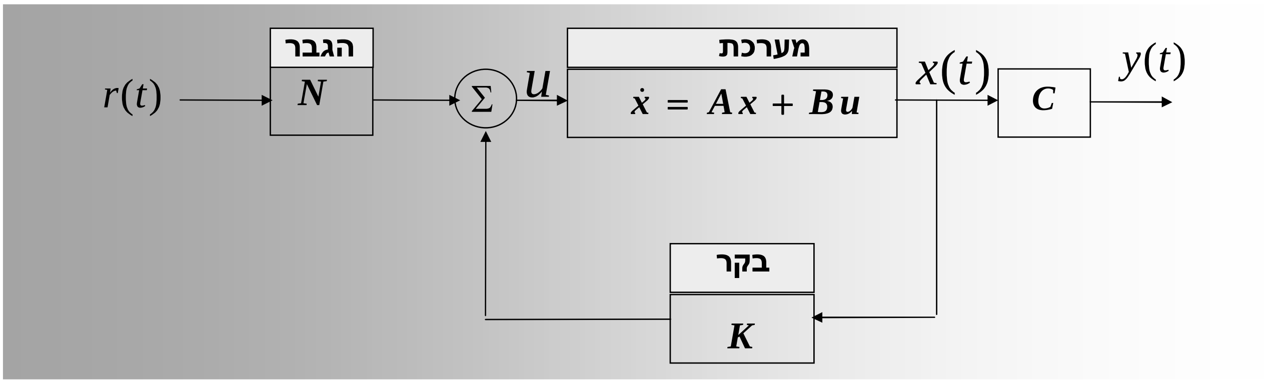


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
Angle (degrees)
State-feedback
Observer
0
1
2
3
4
5
6
Time (seconds)


Angle tracking (observer)
Angle Tracking Error (degrees)
Time (seconds)
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8

עקיבה

- עד כה עסקנו בבעית רגולציה (ויסות). כלומר, בחרנו $u=Kx$ או $u=K\hat{x}$ ודרשנו שעבור $x(0)\neq 0$ נקבל דעיכה ל $x(0)=0$ (בזמן $t\to\infty$).
- בהרבה בעיות מעוניינים בעקיבה אחרי אות חיצוני (REFERENCE) $r(t)$.
- במקרה של משוב מצב נתונה המערכת:



- אנחנו מחפשים K ו N (סקלרי) כך שתהיה עקיבה טובה של $y(t)$ את $r(t)$.
- אם $y(t)$ ו $r(t)$ הם סקלרים בוחרים את K להשיג רגולציה מהירה ואת N בוחרים כך שבמצב המתמיד תהיה עקיבה מושלמת.
- פרוש הדבר שמחפשים N שיתן הגבר DC של 1.
- כלומר $C(sI-(A+BK))^{-1}BN|_{s=0}=1$

או: $N=-[C(A+BK)^{-1}B]^{-1}$

• במקרה בו אין גישה למצבים, נחליף את $u = Kx + Nr$

ב $u = K\hat{x} + Nr$

הצופה יהיה: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}) + B(K\hat{x} + Nr)$

לפיכך שגיאת השערוך תהיה שוב:

$$\dot{e} = (A - LC)e, \quad e(0) = x(0)$$

הבקר יהיה לכן:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC + BK)\hat{x} + Ly + BNr$$

והמערכת המורחבת תינתן ע"י:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BN \\ 0 \end{bmatrix} r$$

- פונקצית התמסורת מ r ל y תהיה:

$$T(s)=\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI-(A+BK) & -BK \\ 0 & sI-(A+LC) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} BN \\ 0 \end{bmatrix}=C(sI-A-BK)^{-1}BN$$

- כלומר, כדי להשיג שגיאת עקיבה אפס במצב מתמיד נבחר:

$N=-[C(A+BK)^{-1}B]^{-1}$ (כמקודם).

דוגמא

- במקרה של המטוטלת ההפוכה קבלנו בקר יציאה:

$$H(s) = K(sI - A - BK + LC)^{-1}L$$

- התמסורת מ r ל $y = \theta$ תהיה 1 במצב מתמיד אם:

$$N = -[C(A+BK)^{-1}B]^{-1}$$

$$= -\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.124 \\ 0 \\ -1.262 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.251 & 7.563 & 169 & 14.052 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.124 \\ 0 \\ -1.262 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

ע"י שמוש פשוט ב MATLAB: $N = -2.2509$

ניתן להתחיל באיזשהו $\theta(0)$ ולדרוש, למשל, התיצבות על:

$$\theta(t) = r(t) = -3\frac{\pi}{180}\delta_{-1}(t)$$

מערכות בקרה אופטימליות

- עד כה תוכננה הבקרה להשגת קטבים נתונים, רגולציה שאת מהירותה בססנו על קטבים דומיננטים ועקיבה שכל שהבטחנו היה עקיבה טובה במצב המתמיד.
- נרצה למצוא שיטה שבה תוגדר פונ' מטרה חיובית המתארת סטיה מהבצוע הרצוי ונחפש בקר שיביא פונ' זו למינימום.
- שיטה זו תמנע הצורך בשימוש בשיטות 'חפש ונסה'.
- השיטה המבוקשת תפותח במרחב המצב.

• בבעית הרגולציה אנו רוצים להגיע לראשית $(x=0)$ ולפיכך נדון בקריטריון המבוסס על 'שגיאת' הרגולציה $x(t)-0$.

הקריטריון יהיה אינטגרל של ריבוע השגיאה:

$$J=\int_0^{\infty} x^T(t)Qx(t)dt$$

כאשר Q היא מטריצת משקלות (לרוב אלכסונית) הנותנת דגש שונה ל 'שגיאת' הרגולציה ב x_i השונים.

נרצה גם להעניש שמוש בכניסה $u(t)$ גבוהה ולכן תהיה פונ' המטרה:

$$J=\int_0^{\infty}[x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt$$

- נתונה לכן $\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) \neq 0, \;\; x \in R^n$
- נרצה למצוא משוב מצב $u = Kx$ כך ש:

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \rightarrow \min$$

- $R > 0$ היא משקולת על u ו $Q \geq 0$ היא מטריצת משקלות על x.
- נחפש מטריצה $0 < P \in R^{n x n}$ כך שהפונקציה הסקלרית $V(t) = x^T(t)Px(t)$ תקיים:

$$\frac{d}{dt}V(t) = -[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]$$

- אם מצאנו P כזו ברור שאז

$$J = \int_0^\infty \{-\frac{d}{dt}[x^T(t)Px(t)]\}dt = -x^T(t)Px(t)\Big|_0^\infty = x^T(0)Px(0) - \lim_{t\to\infty} x^T(t)Px(t)$$

- השאלה היא האם $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

- ניתן לדרוש מראש ש $u = Kx$ ייצב את המערכת ואז לבדוק ש K שיתקבל כפתרון אופטימלי אכן מייצב.
- לחילופין, יש להבין שמאחר ו $V(t) \geq 0$ לכל t ואילו $\frac{d}{dt}V(t) < 0$ אז הפונקציה V היא פונ' חיובית (החסומה מלמטה ע"י 0) ומונוטונית יורדת ולכן היא שואפת לגבול

מהגדרת גבול: $\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}V = 0$ ולכן $x(t) \to 0$.

מסקנה: אם נמצא $P > 0$ כך ש

$$\frac{dV}{dt} = -[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]$$

נבטיח אוטומטית יציבות ואז $J = x^T(0)Px(0)$

- אנו מחפשים $P > 0$ מינימלי כך ש:

$$-\frac{d}{dt}(x^T Px) = -\dot{x}^T Px - x^T P\dot{x} = -2x^T P\dot{x} = -2x^T P\underbrace{(A+BK)x}_{\dot{x}}$$

$$= x^T Qx + x^T K^T R\underbrace{Kx}_{u} \qquad \forall t$$

- או

$$x^T(t)(PA + PBK + A^T P + K^T B^T P + Q + K^T RK)x(t) = 0$$

- נדרוש לכן:

$$PA + A^T P + Q + \underbrace{(K^T + PBR^{-1})R(K + R^{-1}B^T P)}_{\Gamma(K)} - PBR^{-1}B^T P = 0$$

- מאחר ו $\Gamma(K)$ הוא החלק היחיד התלוי בK, נבחר K כך ש $\Gamma(K) = 0$.
- כלומר: $K = -R^{-1}B^T P$
- ואז $PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$

- **למשואה** $PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$

  קוראים משואת ריקטי (RICATTI) .
- **ניתן להראות שאם (A,B) קונטרולבילי אז תמיד יהיה פתרון $P > 0$ למשואה.**
- **פתרון זה יביא למחיר** $J = x^T(0)Px(0)$
- **בחרנו את** $K = -R^{-1}B^T P$ **כדי להביא את P למינימום.**
- **ב MATLAB יש תוכנית הנקראת LQR הפותרת את משואת ריקטי ונותנת את P וגם את K .**

דוגמא

- נתונים: $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
- ופונקצית המחיר $J=\int_0^\infty \left(x^T\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x+\frac{1}{4}u^2\right)dt$
- משוואת ריקטי:

$$\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_2 & p_3\end{bmatrix}A+A^T\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_2 & p_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}4\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix}=0$$

- נקבל:

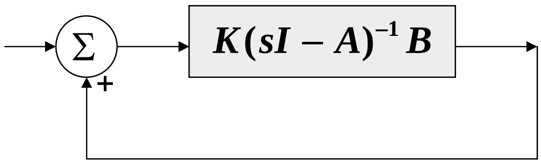
$$(1,1)\rightarrow -2p_1+2-4p_1^2=0 \qquad \rightarrow p_1=\frac{1}{2}$$

$$(1,2)\rightarrow \quad p_1-3p_2+0-4p_1p_2=0 \qquad \rightarrow p_2=0.1$$

$$(2,2)\rightarrow \ 2p_2-4p_3+1-4p_2^2=0 \qquad \rightarrow p_3=0.29$$

ברור ש $P>0$ ואז $K=-R^{-1}B^TP=-4\begin{bmatrix}0.5 & 0.1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}2 & 0.4\end{bmatrix}$

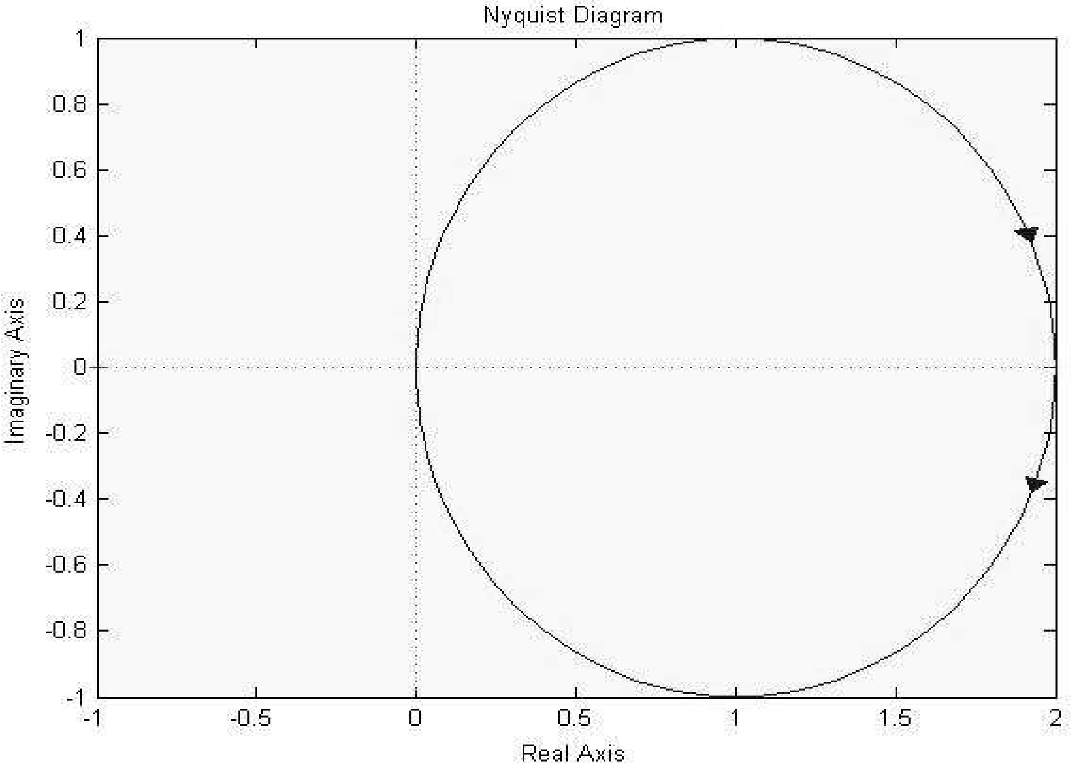
- נרצה לחשב את שולי היציבות של הבקר האופטימלי.
- קיבלנו בבקר של משוב מצב כי ניתן לתאר החוג הסגור ע"י:



- כלומר את שולי היציבות של:

$$G(s) = -K(sI-A)^{-1}B = [2 \;\; 0.4]\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{s+1}$$

דיאגרמת נייקויסט היא:



שולי היציבות כאן הם $GM = \infty, \quad PM = 135^o$

• ניתן להראות כי שולי היציבות של הבקר האופטימלי יקיימו תמיד:

$$GM = \infty, \quad PM \geq 60^o$$

• התיאור הקוטבי (POLAR PLOT) של $-K(sI - A)^{-1}B$ אף פעם לא יחדור למעגל שמרכזו בנקודה הקריטית (0, 1-) ורדיוסו 1.

דוגמא: סרוו של מיקום

- נדון בבעיה של מיקום אנטנת תקשורת לווינים המסובבת ע"י מנוע חשמלי.
- משימת חוג הבקרה היא לדאוג לכך ש

$$\theta(t) \simeq \theta_r(t), \qquad t \geq t_0$$

היכן ש $\theta(t)$ היא זווית הסבוב של האנטנה ו $\theta_r(t)$ היא הזווית אליה יש להתכוון כדי להתקשר ללווין.

- על המערכת (מנוע+אנטנה) פועלת הפרעה (מומנט על ציר המנוע הנוצר ע"י מכת רוח).
- המדידה היא יציאה של פוטנציומטר המרכב על ציר המנוע.

$$y(t) = \theta(t) + n(t)$$

- $n(t)$ הוא רעש המדידה; אנו מניחים שהוא קטן מאד.
- תנועת האנטנה מתוארת ע"י המד"ר הבאה:

$$J\ddot{\theta}(t)+B\dot{\theta}(t)=\tau(t)+\tau_d(t)$$

- J הוא האינרציה של החלקים המסתובבים,
  B הוא מקדם חיכוך הצמיגות,
  τ הוא המומנט המופעל ע"י המנוע,
  τ_d הוא המומנט המופעל ע"י הרוח.
  כמו כן נתון כי $\tau(t)=kv(t)$
  היכן ש $v(t)$ הוא מתח הכניסה למנוע.
- נגדיר: $\bar{x}_1=\theta,\quad \bar{x}_2=\dot{\theta}$

• נקבל התיאור הבא:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \tau_d$$

• היכן ש:

$$\alpha = \frac{B}{J}, \quad \kappa = \frac{k}{J}, \quad \gamma = \frac{1}{J}$$

• ערכי הפרמטרים:

$$\alpha = 4.6 \sec^{-1}$$

$$\kappa = 0.787 rad/(V \sec^2)$$

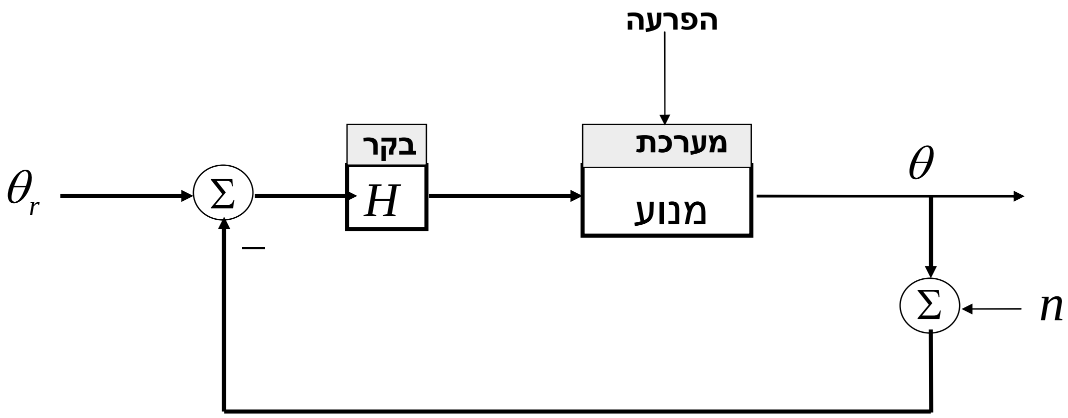
$$J = 10 kgm^2$$

- נדון בשני מקרים:

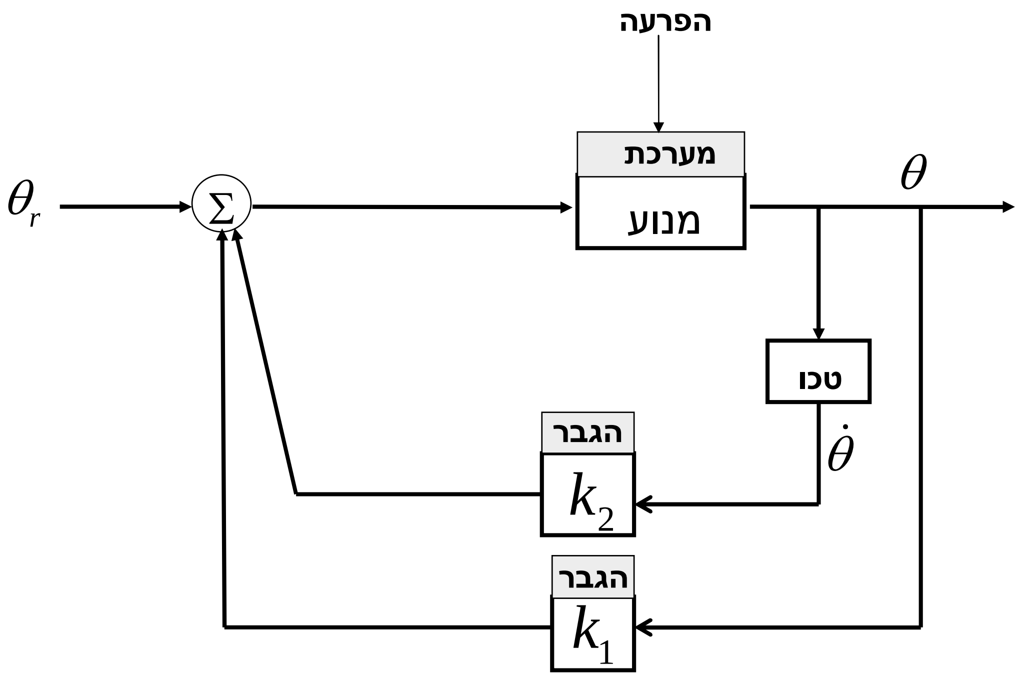
1. המדידה היחידה היא $y=\theta$.

2 . ניתן למדוד גם את $\dot{\theta}(t)$ ע"י טכומטר.

- המקרה הראשון מתואר ע"י:



- **המקרה השני מתואר ע"י:**



- נניח כי רוצים להשיג θ_r קבוע. נגדיר לכן:

$$x_1(t) = \theta(t) - \theta_r\,, \quad x_2(t) = \dot{\theta}(t)$$

- נקבל שוב:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \tau_d$$

- בהינתן $x_1(0) = \theta(0) - \theta_r$ נרצה להביא את $x(t)$ במהירות לראשית בהנחה שאין הפרעת רוח.
- נרצה ST<10sec ו OS קטן. נבחר $(\xi, \omega_n) = (0.8, 0.5)$
- הפולינום האופייני הדרוש: $q(\lambda) = \lambda^2 + 0.8\lambda + 0.25$
- P_c הוא $\begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ -\alpha\kappa & \kappa \end{bmatrix}$ ולכן ניתן להפעיל משוב מצב
- (במקרה מס. 2).

• לפי נוסחת אקרמן נקבל:

$$[k_1 \;\; k_2] = -[0 \; 1]\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\kappa} & 0 \\ -\dfrac{\alpha}{\kappa} & \dfrac{1}{\kappa} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.25 & -\alpha + 0.8 \\ 0 & \alpha^2 - 0.8\alpha + 0.25 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{0.25}{\kappa}[\alpha \quad 1] = [1.46 \quad 0.3177]$$

• תרגיל: חשב הבקר במקרה מס.1. השתמש בבקר משוב המצב שלמעלה, וחשב הצופה עבור $(\xi, 10\omega_n)$ צרף הצופה וקבל בקר היציאה הפועל על θ.

• נרצה למצוא בקר אופטימלי שימזער את:

$$J = \int_0^\infty [(\theta(t) - \theta_r)^2 + \rho v(t)^2]dt$$

- ρ הוא סקלר הקובע את החשיבות היחסית של 2 המחוברים בפונקצית המחיר.
- משוואת ריקטי:

$$P\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -\alpha\end{bmatrix}P-P\begin{bmatrix}0\\ \kappa\end{bmatrix}\rho^{-1}\begin{bmatrix}0 & \kappa\end{bmatrix}P+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}=0$$

- מכאן:

$$1-\frac{\kappa^2}{\rho}P_{12}{}^2=0$$

$$-\frac{\kappa^2}{\rho}P_{12}P_{22}+P_{11}-\alpha P_{12}=0$$

$$-\frac{\kappa^2}{\rho}P_{22}{}^2+2P_{12}-2\alpha P_{22}=0$$

$$P_{11}=\frac{\sqrt{\rho}}{\kappa}\sqrt{\alpha^2+\frac{2\kappa}{\sqrt{\rho}}},\quad P_{12}=\frac{\sqrt{\rho}}{\kappa},\quad P_{22}=\frac{\rho}{\kappa^2}\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\frac{2\kappa}{\sqrt{\rho}}}\right)$$

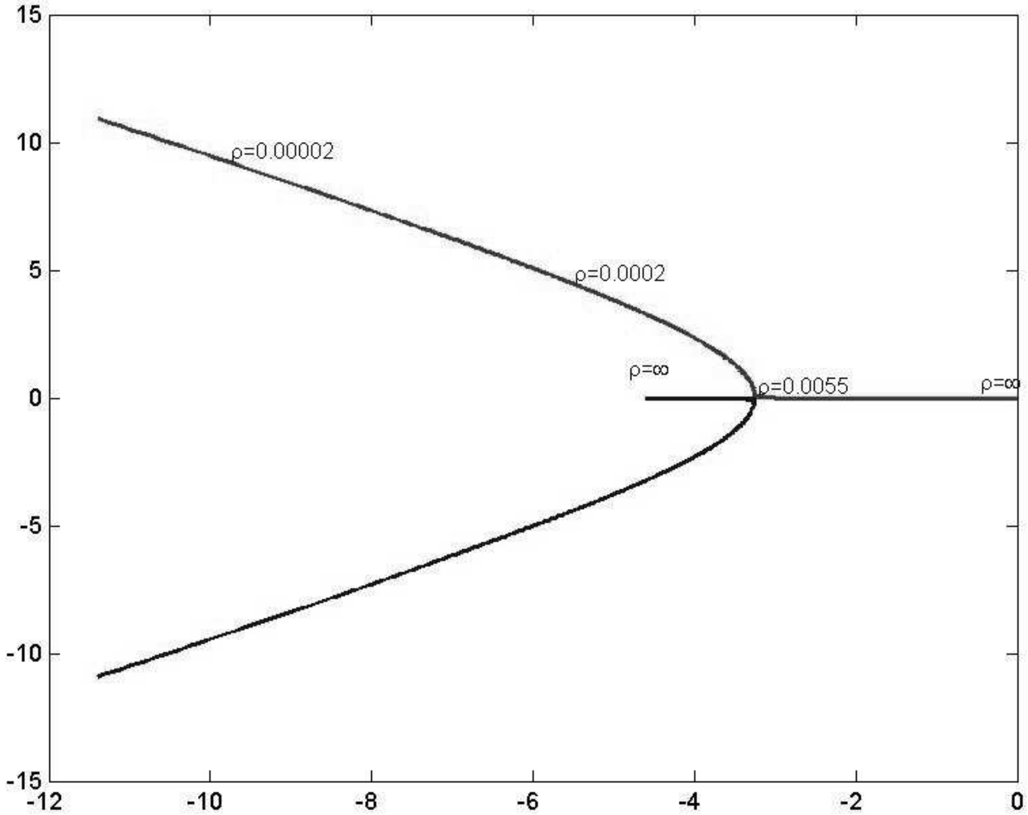
- הבקר האופטימלי הוא לכן:

$$K = -\begin{bmatrix} \rho^{-\frac{1}{2}} & \kappa^{-1}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\kappa\rho^{-\frac{1}{2}}}) \end{bmatrix}$$

והחוג הסגור הוא:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa\rho^{-\frac{1}{2}} & -\sqrt{\alpha^2 + 2\kappa\rho^{-\frac{1}{2}}} \end{bmatrix} x$$

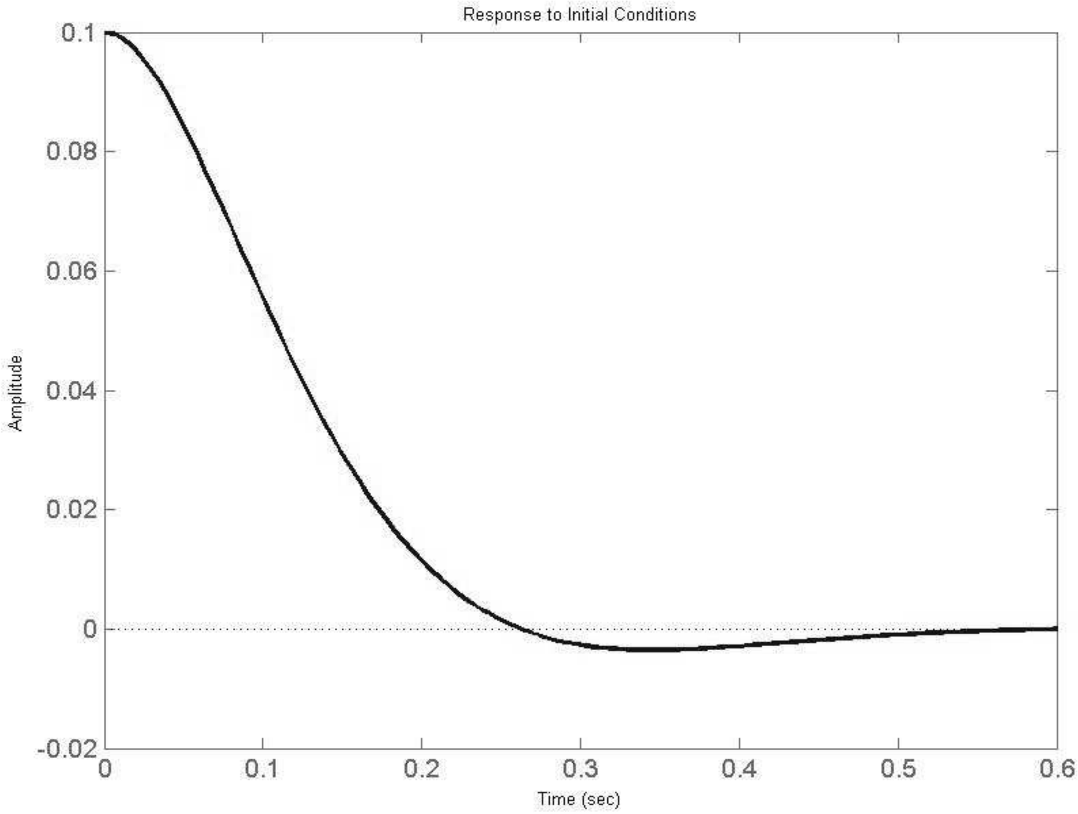
עקומת השורשים של החוג הסגור כפונקציה של הפרמטר ρ מתארת בשקף הבא.



ρ=0.00002
ρ=0.0002
ρ=∞
ρ=0.0055
ρ=∞

- עבור $\rho = 0.00002 rad^2 / V^2$ (ו $\kappa = 0.787 rad/(V\sec^2)$ $\alpha = 4.6\sec^{-1},$)
נקבל
$$K = -\begin{bmatrix} 223.6 & 18.69 \end{bmatrix}$$

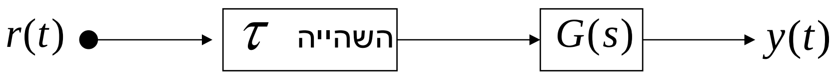
- הע"ע של החוג הסגור: $-9.66 \pm 9.09j$
התגובה $\theta(t) - \theta_r$ של החוג הסגור לתנאי ההתחלה
$$x(0) = \theta(0) - \theta_r = 0.1 rad, \quad \dot{\theta}(0) = 0 rad/\sec$$
- מתוארת בציור בשקף הבא.
- הערה: נזכיר כי חוק הבקרה הוא
$$v = -223.6(\theta - \theta_r) - 18.69\dot{\theta}$$



Response to Initial Conditions
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
Amplitude
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
Time (sec)

מערכות עם השהיה

- נתונה המערכת הבאה:



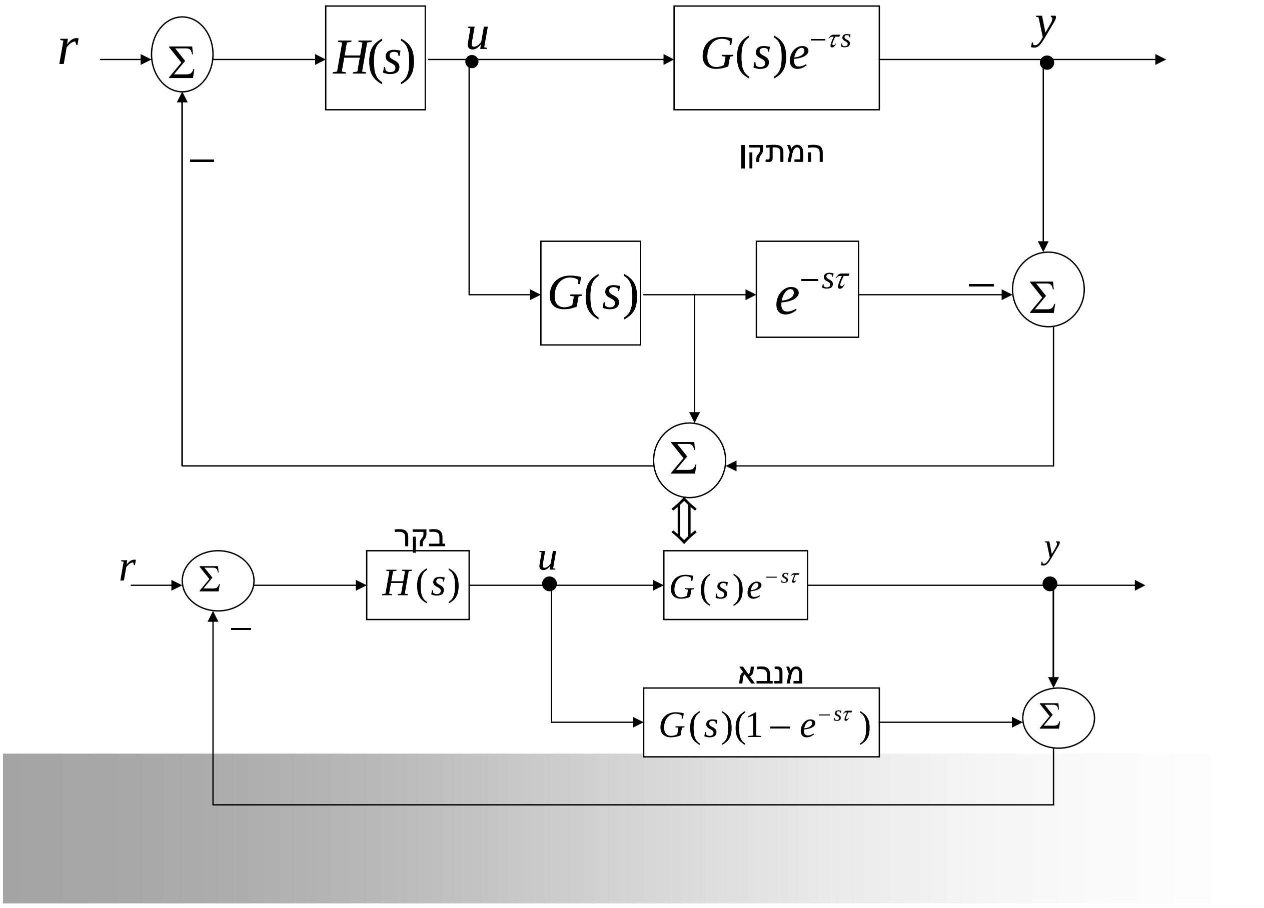
- פונקצית התמסורת של המערכת: $G_P(s) = G(s)e^{-s\tau}$
- מערכות כאלה עם השהיה נפוצות מאוד.
- ההשהיה מהווה גורם מעכב בתכנון החוג הסגור.
- הסיבה: $\left|G(j\omega)\right| \equiv 0db, \quad \measuredangle G(j\omega) = -w\tau$, כלומר גורם ההשהיה אינו תורם לירידת ההגבר מחד, אך מוסיף מופע שלילי לחוג הפתוח, מאידך.

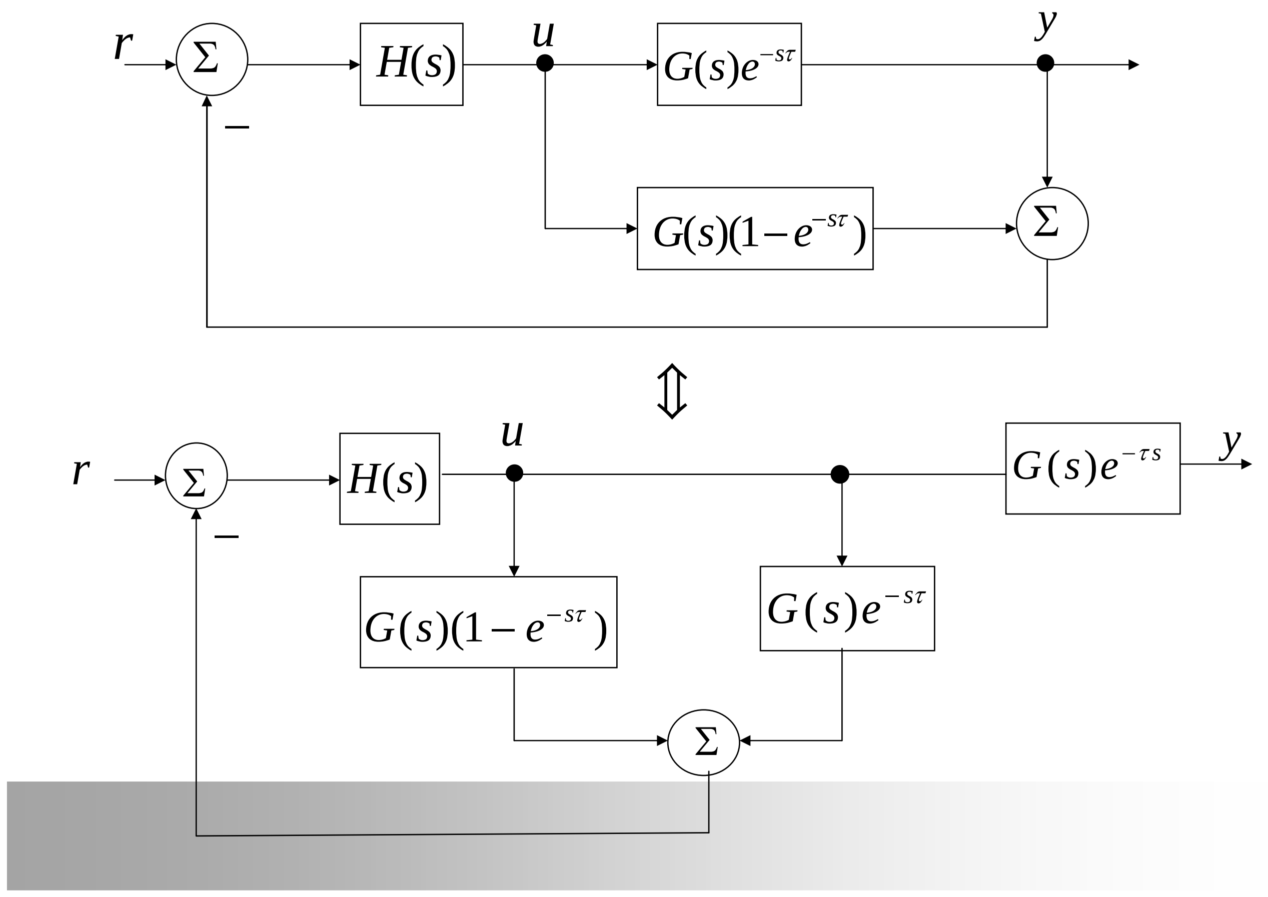
המנבא של Smith

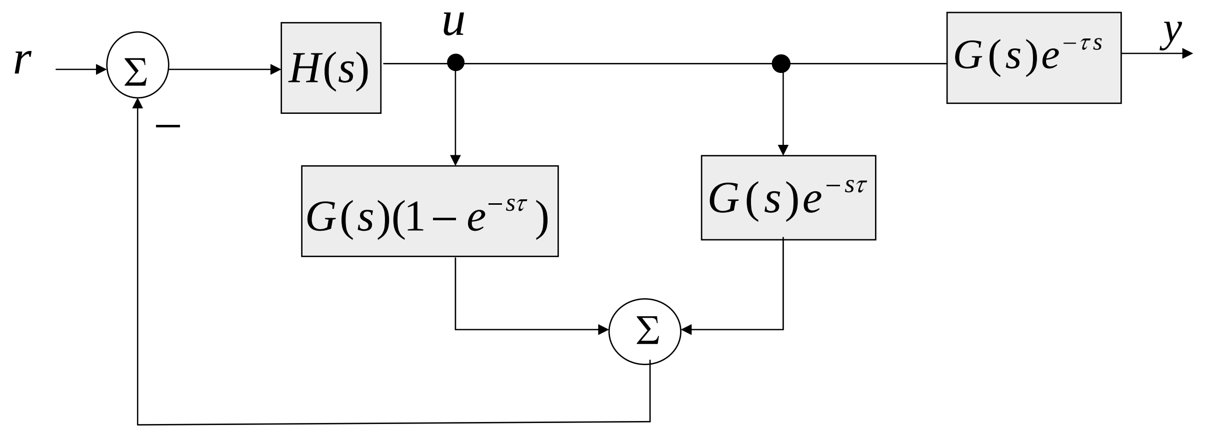
- בעבר הוצעו מספר שיטות לתכנון בנוכחות השהיה.
- אחת מהן היא שימוש בקרוב Pade ל $e^{-s\tau}$ למשל:

$$e^{-s\tau} \approx \frac{1-\frac{\tau}{2}s}{1+\frac{\tau}{2}s}$$

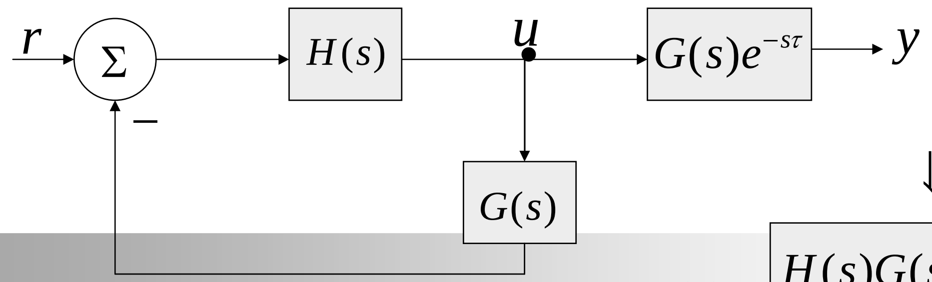
- הבעיה: זהו קרוב ובכל מיקרה המופע של אפס ימני עדיין מופיע.
- Smith הציע מבנה לחוג סגור המתגבר על בעיית המופע.
- במבנה המוצע ניתן לתכנן הבקר כאילו אין השהייה!


r
Σ
H(s)
u
G(s)e^{−τs}
y
המתקן
G(s)
e^{−sτ}
Σ
Σ
r
Σ
בקר
H(s)
u
G(s)e^{−sτ}
y
מנבא
G(s)(1 − e^{−sτ})
Σ


r
Σ
H(s)
u
G(s)e^{−sτ}
y
−
G(s)(1−e^{−sτ})
Σ
⇕
r
Σ
H(s)
u
G(s)e^{−τs}
y
−
G(s)(1−e^{−sτ})
G(s)e^{−sτ}
Σ



$$\Updownarrow$$



$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \boxed{\frac{H(s)G(s)e^{-s\tau}}{1 + H(s)G(s)}} R(s)$$

- המסקנה היא שניתן לתכנן החוג הסגור כאילו אין השהיה.
- לא נפתרנו מההשהיה. היציאה תהיה מושהה אך החוג הסגור לא יכלול השהיה כלל.
- התיאור הנ"ל רגיש לידיעה מדויקת של המערכת ושל ההשהיה.
- היתה למעלה הנחה שניתן לבטל את השפעת $G(s)e^{-s\tau}$ ע"י הכללת הרכיב $G(s)e^{-s\tau}$ בבקר. ביטול זה אפשרי רק כאשר ל $G(s)$ אין קטבים ב RHP (מותר קוטב בראשית).

מנבא Smith המתוקן

- כאשר $G(s)$ אינה יציבה יש להחליף את הרכיב $G(s)(1-e^{-s\tau})$ ברכיב $G(s)(F(s)-e^{-s\tau})$ כך שלאחרון אין קטבים ב RHP.

  למנבא שיתקבל קוראים מנבא Smith המתוקן (Modified Smith Predictor).

דוגמא

- פונקצית התמסורת של מערכת היא: $G(s)=\frac{1}{s+1}e^{-5s}$
- אנו מעוניינים בחוג סגור יציב ומהיר ברוחב פס של $10rad/\sec$.
- לפונקצית התמסורת מופע של $-5.78rad$ ב $\omega=1rad/\sec$ ולכן לא ניתן לקבל החוג המהיר ע"י התכנון הרגיל.
- יש להשתמש במנבא Smith.
- ע"י בחירת $H=9$ נקבל התמסורת $T(s)=\frac{9}{s+10}e^{-5s}$
- נקבל תגובה מהירה רק אחרי השהיה של 5 שניות.