Department of Electrical Engineering
Electronics
Computers
Communications

קורס בקרה 2

ד"ר גבי דוידוב

נושאי הקורס "בקרה 2"

- **1. חזרה על בקרה 1: LOOP SHAPING** משתני מצב, קונטרולאביליות, אובזרבביליות, צורות קנוניות
- **2. בקרת מערכות בעזרת** משוב מצב והזזת קטבים
- **3. משחזר מצב ותכונותיו,** תכן משחזר מסדר מלא וסדר מופחת
- **4. שילוב משחזר מצב ומשוב מצב**
- **5. הרחבת מושגי קונטרולאביליות ואובזרוביליות,** צורות קנוניות של מערכות לא מינימאליות , Detectability, Stabilizability
- **6. ליאפונוב:** בחינת יציבות מערכות לא לינאריות, עיקרון לה-סאל, למת ברבלט, (בקרה אדפטיבית)
- **7 מבוא לבקרה אופטימאלית** LQR – Linear Quadratic Regulator : אופטימיזציות משוב המצב והמשערך לפי קריטריונים ריבועיים של אנרגיית הבקרה ושגיאות מצב
- **8. מסנן קלמן:** חזרה על אותות אקראיים גאוסיים, משחזר מצב למערכות רועשות - אופטימאלי
- **9. מבוא לבקרה אופטימאלית עבור תהליך ומדידה רועשים:** LQG- Linear Quadratic Gaussian
- **10. *מערכות לינאריות משתנות בזמן***

נושאי החזרה

- 1. רקע היסטורי על התפתחות הבקרה
- 2. חזרה על בקרה קלאסית – דוגמת תכן LOOP SHAPING
- 4. משוואות מצב רציפות ודסקרטיות של מערכות לינאריות
- 5. פולונום אופייני, משפט קיילי המילטון, קונטרולאביליות, אובזרואביליות
- 6. מערכת מינימאלית, טרנספורמציות, צורות קנוניות, שקילות, תוצאות מאלגברה לינארית
- 7. מידול של מערכות

רקע היסטורי על התפתחות הבקרה

בקרה קלאסית – עד שנות ה- 60 של המאה ה- 20 (בקרה 1)

- פונקציות תמסורת (התמרות לפלס) תגובת תדר
- כלים עיקריים: דיאגרמות בודה נייקויסט Root Locus ניקולס - גישה היוריסטית (Cut and Try)

בקרה "מודרנית" במרחב המצב – שנות 60 ואילך (בקרה 2)

- תכן במרחב המצב
- בקרה אופטימאלית על בסיס קריטריוני ביצועים - גישה מתימטית

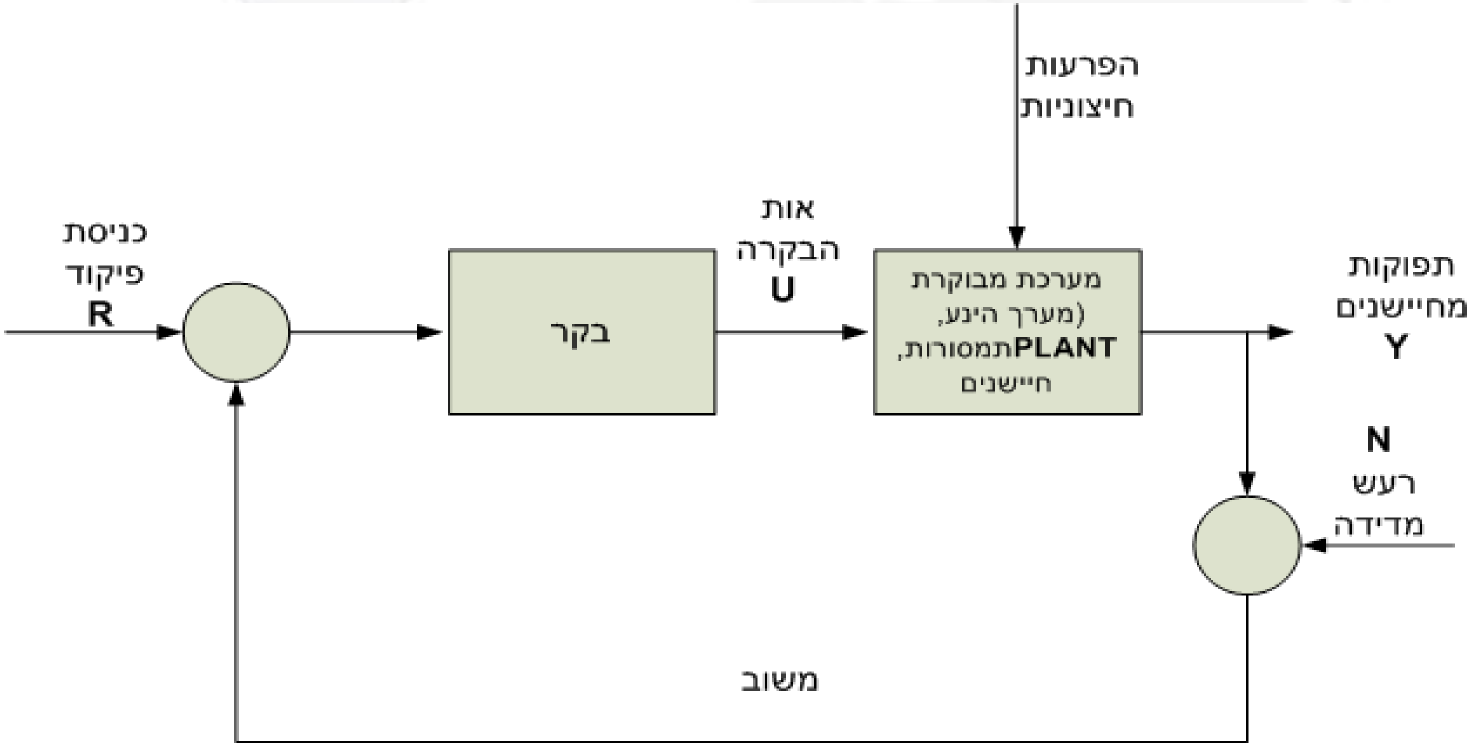
בקרה "מודרנית" במישור התדר– שנות 80 ואילך

- חזרה לפונקציות תמסורת ותגובת תדר – דגש על אי וודאות במודל – בקרה רובוסטית QFT , H2 H infinity’
- בקרה אדפטיבית (בקרה 2)
- בקרת NN
- Fuzzy Logic
- **MPC:** Model predictive Control
- Reinforcement Learning Control

עבודת מהנדס הבקרה/מערכת

1. מפרט דרישות ביצועים מהמערכת

- עקיבה, מהירויות, תאוצות, הצבה
- ייצוב/רגולציה נגד הפרעות קרקע אוויר, ים , רעשי חיישנים
- דיוקי תצפית ללא רעידות , דיוקי ירי, דיוקי הצבה/חיתוך/כרסום...
- פיתרון בעיות עקב השהיות



עבודת מהנדס הבקרה/מערכת

2. ניתוח הדרישות: מידול מערכת- סימולציה, תקציב שגיאות ובחירת רכיבים:

- **הפרעות במערכת**: קרקע, הלמים, רעידות, רוח/גלים – PSD (**עיבוד אותות**)
PSD – Power Spectrum Density

- **בחירת הנעים (Actuators):** חשבון מומנטים/כוחות נדרשים (**הנדסת הספק**)

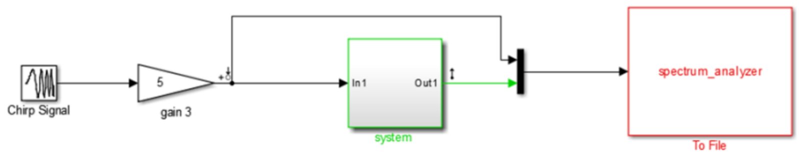
- **סנסורים**: ***מדי זווית יחסיים*** - אנקודרים, רזולוורים , פוטנציומטרים, טכומטרים, ***מדידים אינרציאליים***: ג'ירוסקופים, מדי תאוצה, GPS , **מצלמות**: **עיבוד תמונה/ראייה ממוחשבת**

- **הגדרת דרישות על המכאניקה**: מומנטי חיכוך, אי איזון, תדרים עצמיים (**הנד. מכניקה**)

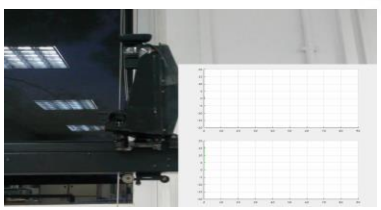
- **דרישות מחשב**: יישום הבקרה ב- CPU, קצבי דגימה, השהיות מותרות, אורך מילה (**תוכנה קידוד**)

עבודת מהנדס הבקרה/מערכת - המשך

3. **לאחר בניית אב טיפוס - מבצעים מדידות לאימות המידול והסימולציה –** ספקטרום אנלייזר, עירור המערכת, מדידת התגובות וביצוע אנאליזה ספקטראלית וזמנית.



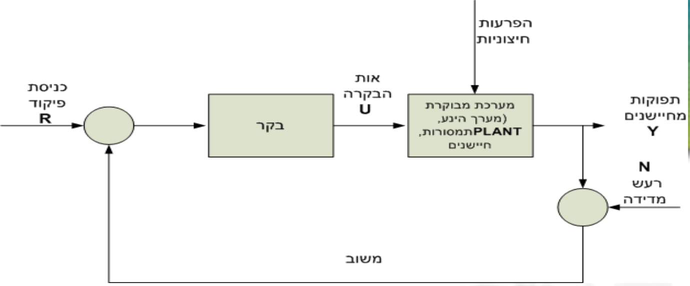
4. **תכן מתימטי על בסיס המידול והמדידות – תכן לעמידה בדרישות – בסימולציות (נתמקד בקורס).**



5. **יישום וכוונון התכן – יישום בסימולציות ועל הדגם הניסויי.**

6. **מימוש** – יישום התכן על המערכת המבוקרת וביצוע אופטימיזציות ביצועים

בעיית הבקרה של מערכות - תזכורת

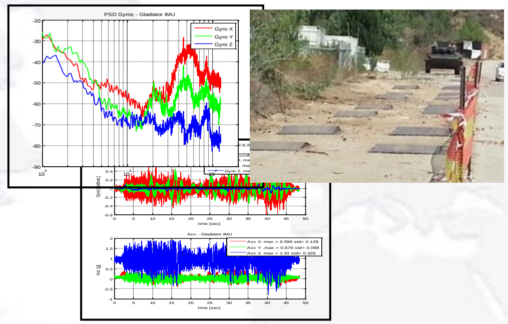


- דרישות ביצועים עיקריות במערכות בקרה:
  - **עקיבה** – עקיבה עם שגיאות מצב מתמיד מינימאליות של פלט המערכת Y אחר אות פיקוד R
  - **עמידה להפרעות (רגולציה)** – רגישות נמוכה של הפלט Y להפרעות חיצוניות.
  - **עמידות לרעשים** – רגישות נמוכה לרעשי מדידה מחיישנים ומאות המשוב.
  - **הגבלת מאמץ הבקרה** – עמידה בביצועים במסגרת הגבלות המומנטים האפשריים במערכת – הגבלת U.
  - **רובוסטיות** – רגישות נמוכה לשינויים ואי – ודאויות בפרמטרים של מודל התהליך. קריטי בייצור שוטף של מערכות.
- הדרישות לעיל עלולות להיות מנוגדות זו לזו ומצריכות ביצוע "פשרות הנדסיות" בביצוע התכן.

Control development process

System Analysis
Mechanical & Servo requirements revision- a design to achieve performance goals.
Hit Probability Analysis

Vehicle Parameters tests
ground disturbances measurements

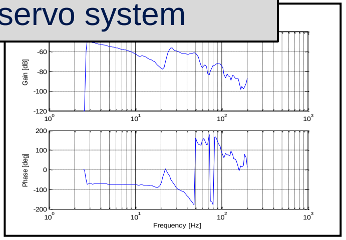


Simulation
Developing full system electro-mechanic simulations

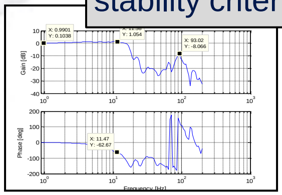
Servo & Mechanic detailed design & manufacture

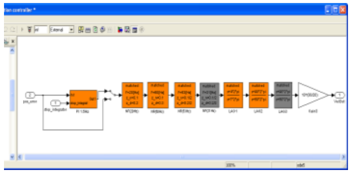
Prototype receiving
(Plant)

Plant Measurements
Time & Frequency domains tests to verify designed servo system



Control model Design
Design control loops under stability criteria





Dynamic development
Running the turret on a 2DOF Simulator with the measured ground disturbances. Optimization of servo controllers and testing the stabilization performance

Field tests
* Course driving – test stabilization performance
* Shooting tests

Results analysis , Updates & optimizations

Return on tests - if needed

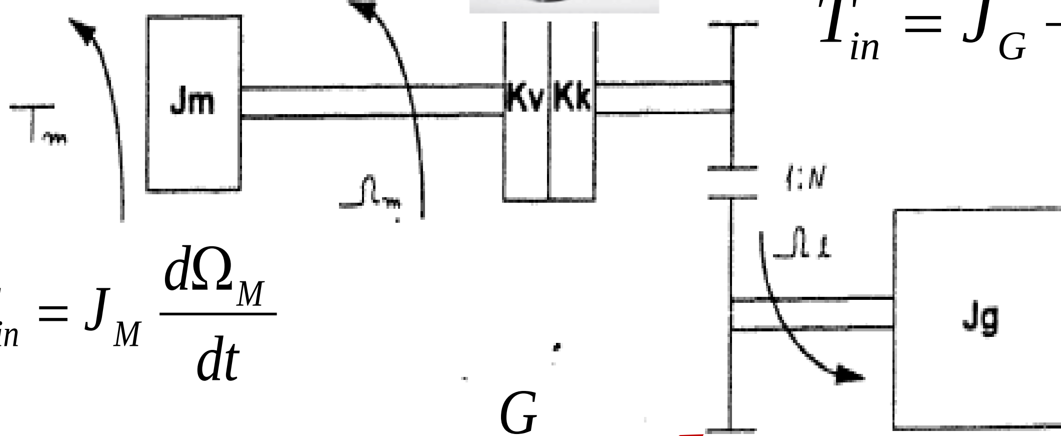
ייצוב אינרציאלי של עמדת נשק

- רגולציה כנגד הפרעות קרקע

סימולציה מערכתית בסיסית – "מולקולה"

$$T_{M[Nm]} = I_{c[A]} K_{T[NM/A]}$$

$$T_{in} = J_G \frac{d\Omega_G}{dt}$$

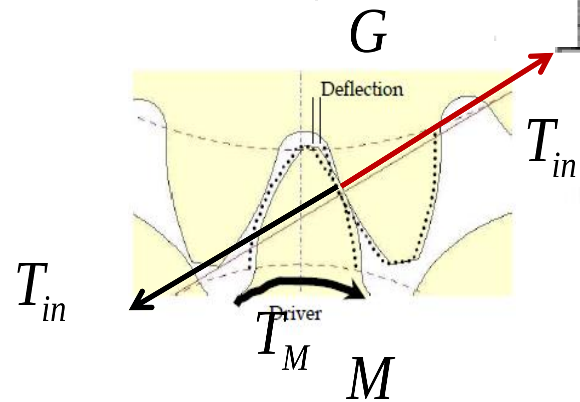


$$T_M - T_{in} = J_M \frac{d\Omega_M}{dt}$$

$K_T[Nm/Amp]$ *Motor Const*

$K_K[Nm/rad]$ *Gear Stiffness (spring)*

$K_V[Nm/rad/\sec]$ *Gear Damping*



$$T_{in} = K_{K[Nm/rad]} \underbrace{\int (\Omega_M - \Omega_G) dt}_{\Delta\Theta[rad]} + K_{V[NM/rad/s]} \underbrace{(\Omega_M - \Omega_G)}_{\Delta\Omega[rad/\sec]}$$

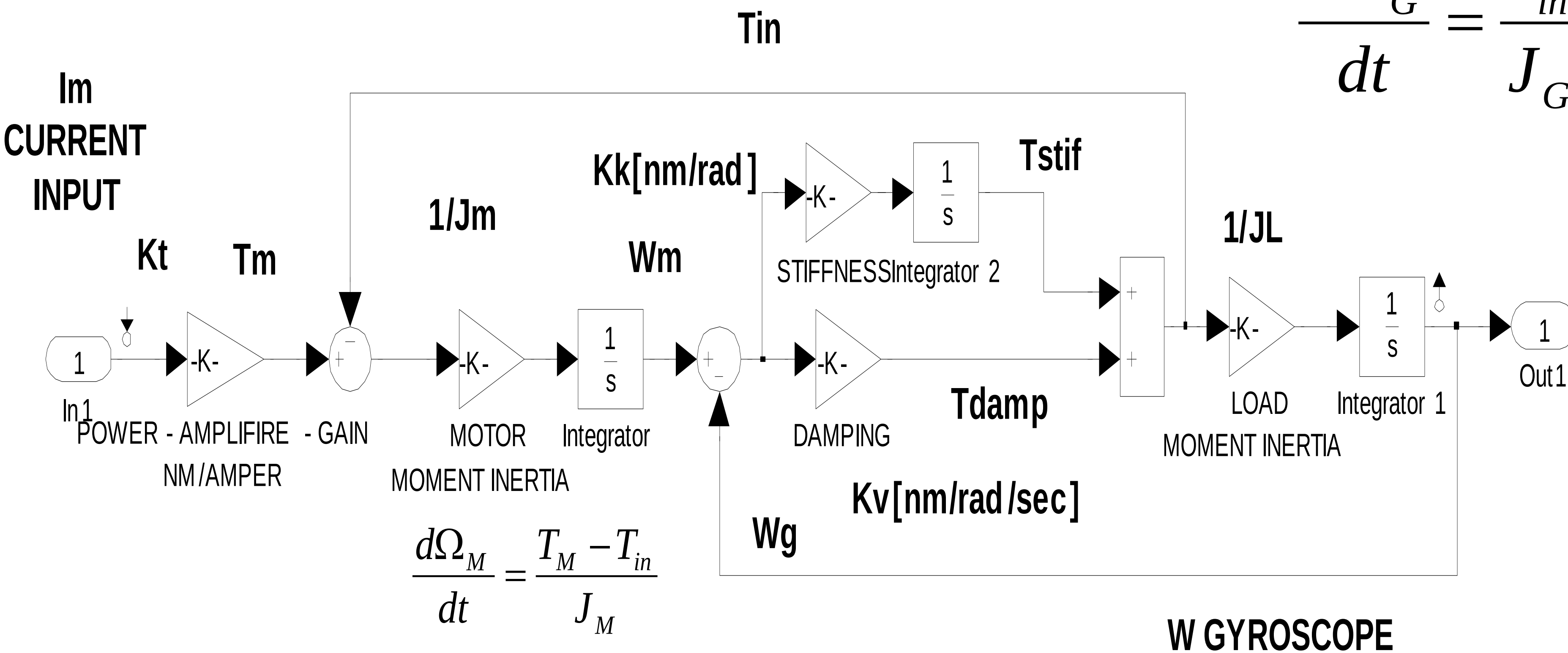
סימולציה מערכתית בסיסית - המשך

- סימולציה מערכתית

$$T_{in} = K_{K[NM/RAD]}\int(\Omega_M - \Omega_G)dt + K_{V[Nm/rad/s]}(\Omega_m - \Omega_G)$$

$$T_{M[Nm]} = I_{c[A]} K_{T[Nm/A]}$$

$$\frac{d\Omega_G}{dt} = \frac{T_{in}}{J_G}$$

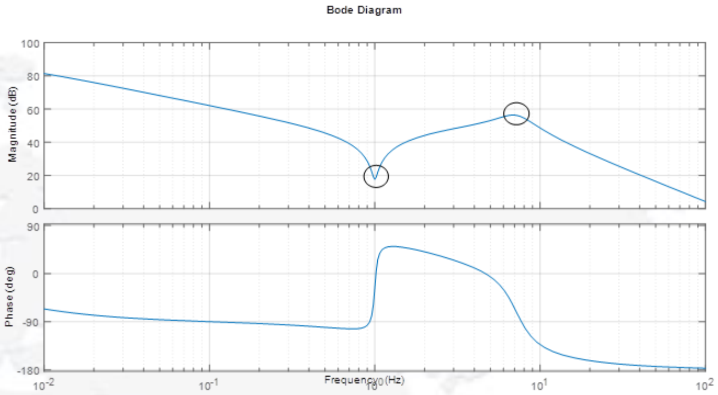


$$\frac{d\Omega_M}{dt} = \frac{T_M - T_{in}}{J_M}$$

סימולציה מערכתית בסיסית

- פונקציית תמסורת מזרם מנוע למהירות ציר מנוע

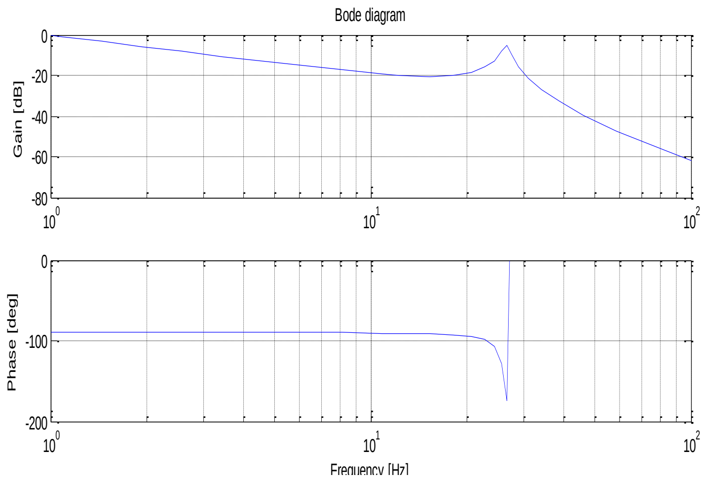
$$\frac{\Omega_M}{I_c}(s)=\frac{K_T}{(J_g+J_M)s}\frac{1+\frac{K_V}{K_K}s+\frac{J_G}{K_K}s^2}{1+\frac{K_V}{K_K}s+\frac{J^*}{K_K}s^2}$$



- פונקציית תמסורת מזרם מנוע למהירות עומס

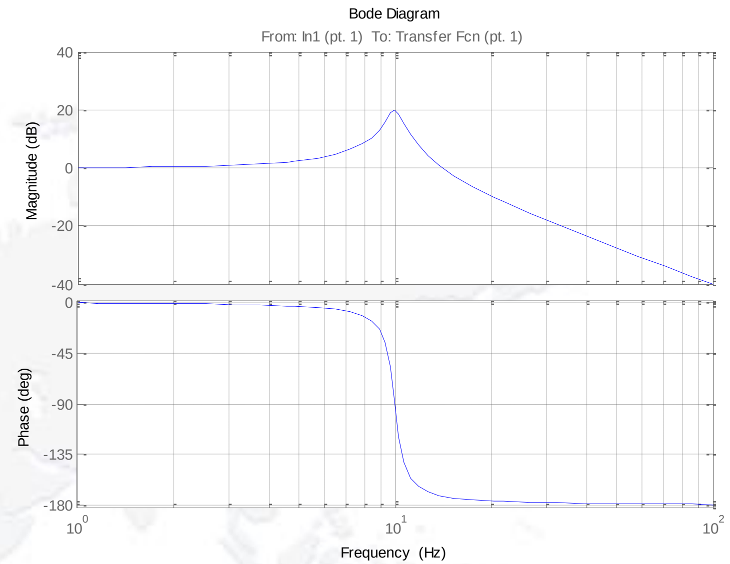
$$\frac{\Omega_G}{I_c}(s)=\frac{K_T}{(J_g+J_M)s}\frac{1+\frac{K_V}{K_K}s}{1+\frac{K_V}{K_K}s+\frac{J^*}{K_K}s^2}$$

$$J^*=\frac{J_M J_L}{J_M+J_L}$$



תזכורת למערכת מסדר שני

$$G(s)=\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right)+1}$$



ξ : damping ratio, ω_n : natural frequency

$\xi > 1$: overdamped

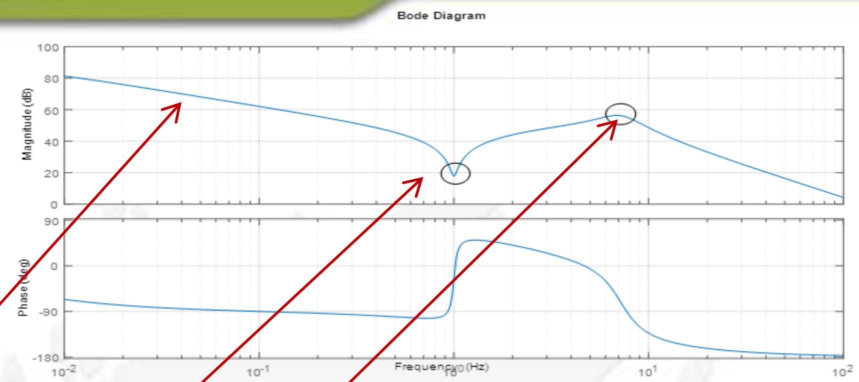
$\xi < 1$: underdamped

$\xi = 1$: critically damped

$\xi = 0$: undamped

"המולקולה" הבסיסית

$$\frac{\Omega_M}{I_c}(s)=\frac{K_T}{(J_g+J_M)s}\,\frac{1+\dfrac{K_V}{K_K}s+\dfrac{J_G}{K_K}s^2}{1+\dfrac{K_V}{K_K}s+\dfrac{J^*}{K_K}s^2}$$



- ניתן לראות שהתמסורת כוללת:

  - אינטגרטור טהור (עקב המעבר ממומנט – תאוצה) למהירות זוויתית

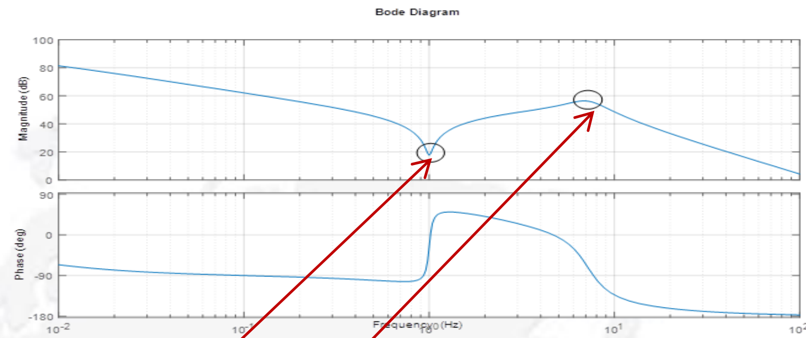
    $$\frac{K_T}{(J_g+J_M)s}$$

  - שני אפסים קומפלקסיים עם תדר עצמי: $\omega_z=2\pi f_z=\sqrt{\dfrac{K_k}{J_G}}$ ועם ריסון: $\dfrac{2\xi}{\omega_z}=\sqrt{\dfrac{K_k}{K_V}}$

  - שני קטבים קומפלקסיים עם תדר עצמי: $\omega_p=2\pi f_p=\sqrt{\dfrac{K_k}{J_G\,\|\,J_m}}$ ועם ריסון: $\dfrac{2\xi}{\omega_p}=\sqrt{\dfrac{K_k}{K_V}}$

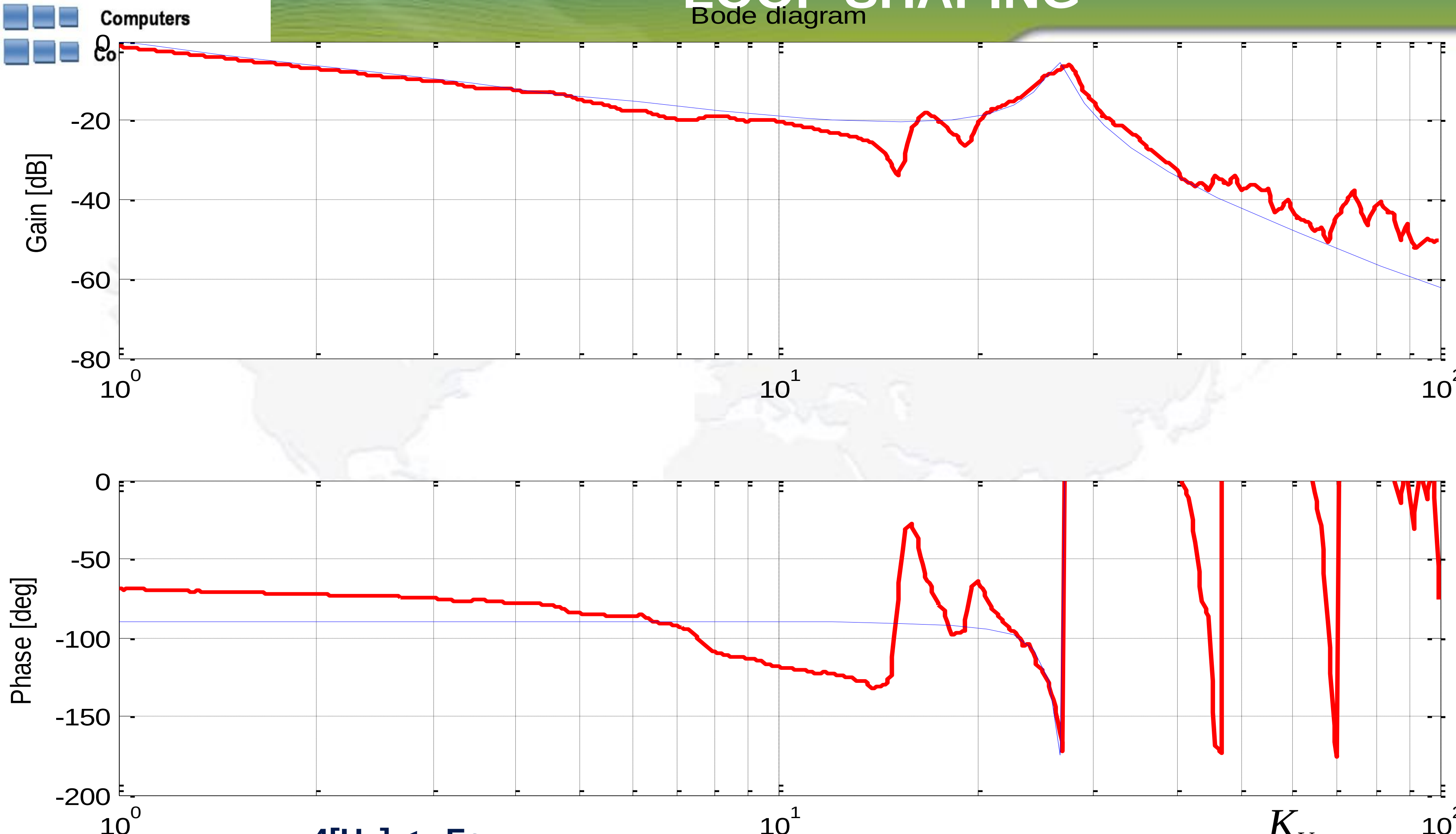
"המולקולה" הבסיסית
מומנט מנוע - טכו

$$\frac{\Omega_M}{I_c}(s) = \frac{K_T}{(J_g + J_M)s}\,\frac{1 + \frac{K_V}{K_K}s + \frac{J_G}{K_K}s^2}{1 + \frac{K_V}{K_K}s + \frac{J^*}{K_K}s^2}$$



- התדר $\omega_z = 2\pi f_z = \sqrt{\frac{K_k}{J_G}}$ הוא למעשה גבול העברת מומנטים ממנוע לעומס. על מנת לאפשר העברה של מומנטים ברוחב סרט גדול יש להגדיל את קשיחות הממסרת ו/או להקטין את אינרציית העומס.
- התדר $\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{K_k}{J_G \| J_m}} \approx \sqrt{\frac{K_k}{J_m}}$ הוא תדר רזוננס מנוע-ממסרת.
  בדרך כלל $J_G >> J_m$ אז $\omega_p > \omega_z$
- כשאיפה נרצה שרזוננס העומס (לא נראה כאן) יהיה שונה מרזוננס מנוע-ממסרת
- על מנת לקבל מערכת מרוסנת נדרוש K_V גבוה על ידי בחירת חומרים עם מקדם תקומה גבוה.

LOOP SHAPING

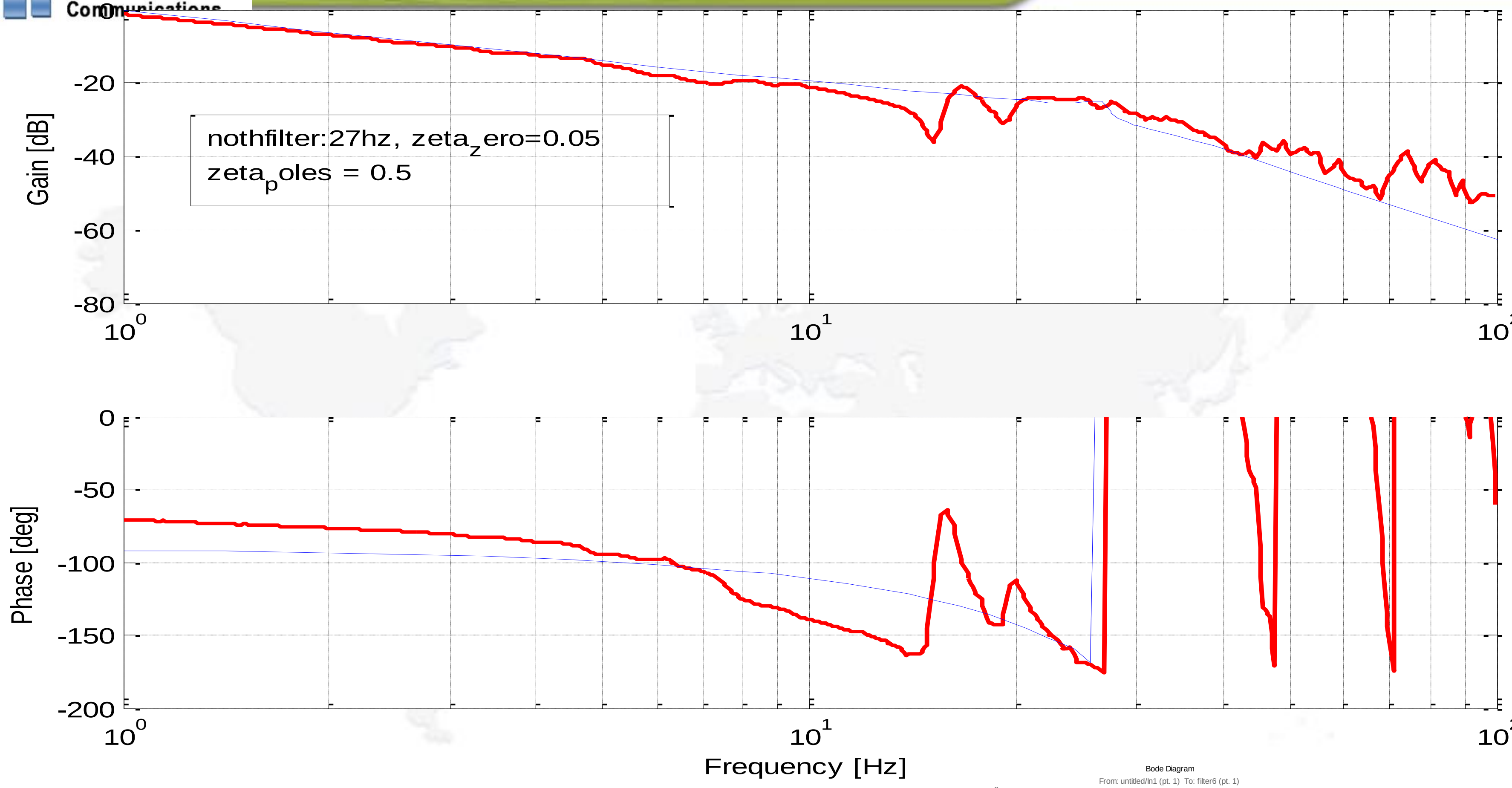


- רוחב סרט Fc > 4[Hz]
- עודף פאזה > 40[Deg]
- עודף הגבר > 10[dB]
- הגבר חוג פתוח ב- 1[Hz] > 20[dB]
- שגיאת מצב מתמיד אפס לכניסת ריצה

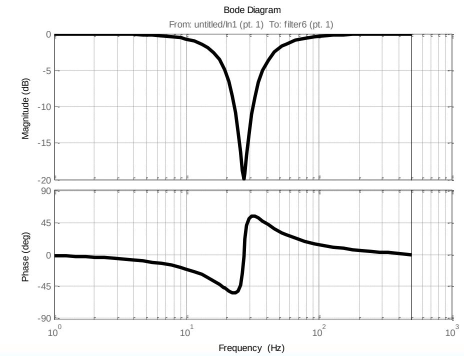
$$\frac{\Omega_G}{I_c}(s) = \frac{K_T}{(J_g + J_M)s} \frac{1 + \frac{K_V}{K_K} s}{1 + \frac{K_V}{K_K} s + \frac{J^*}{K_K} s^2}$$

LOOP SHAPING

Bode diagram

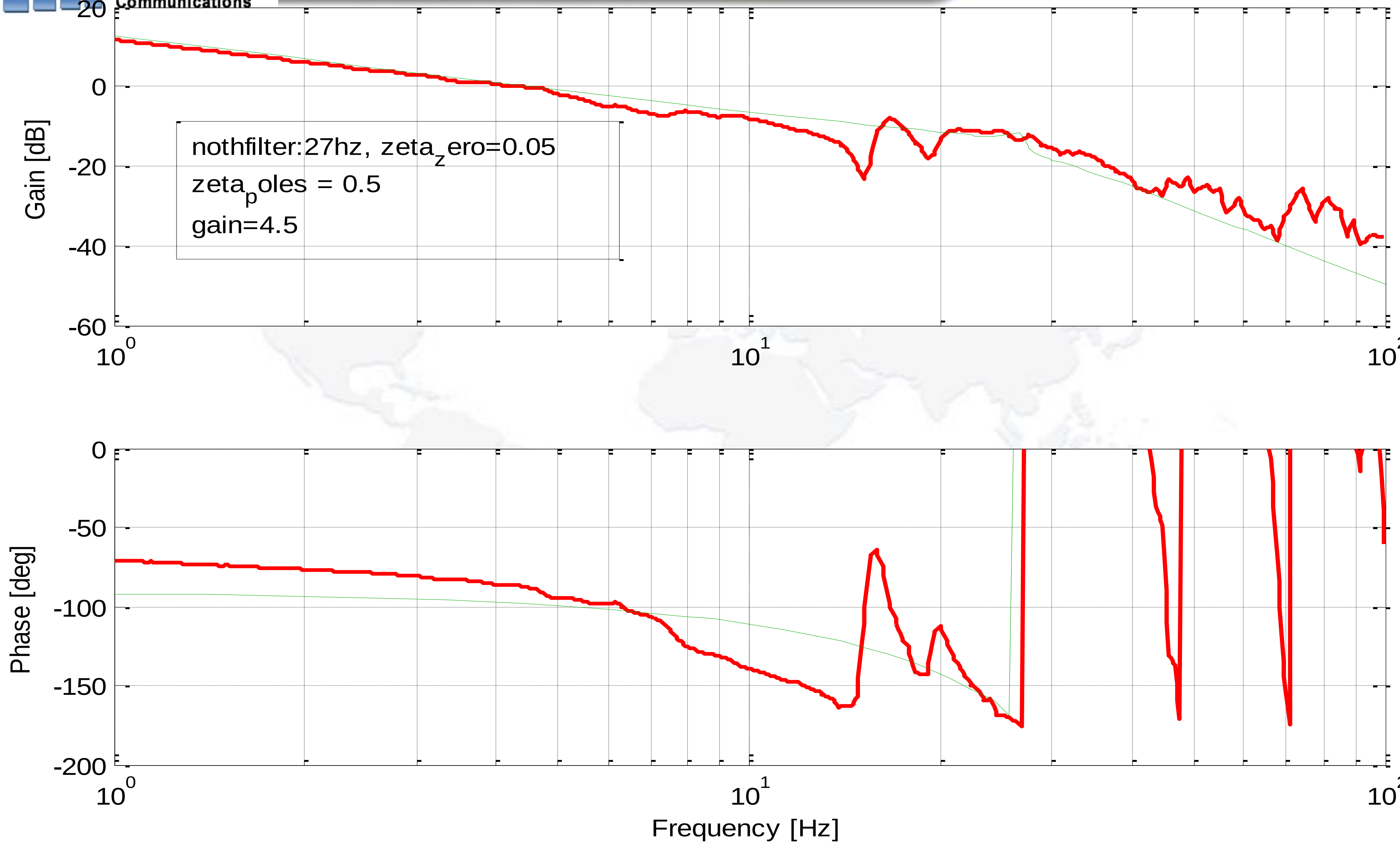


$$H(s)\Big|_{Notch\,Filter} = \frac{s^2 + 2\xi_0 \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi_p \omega_n s + \omega_n^2} \quad \xi_p > \xi_0$$

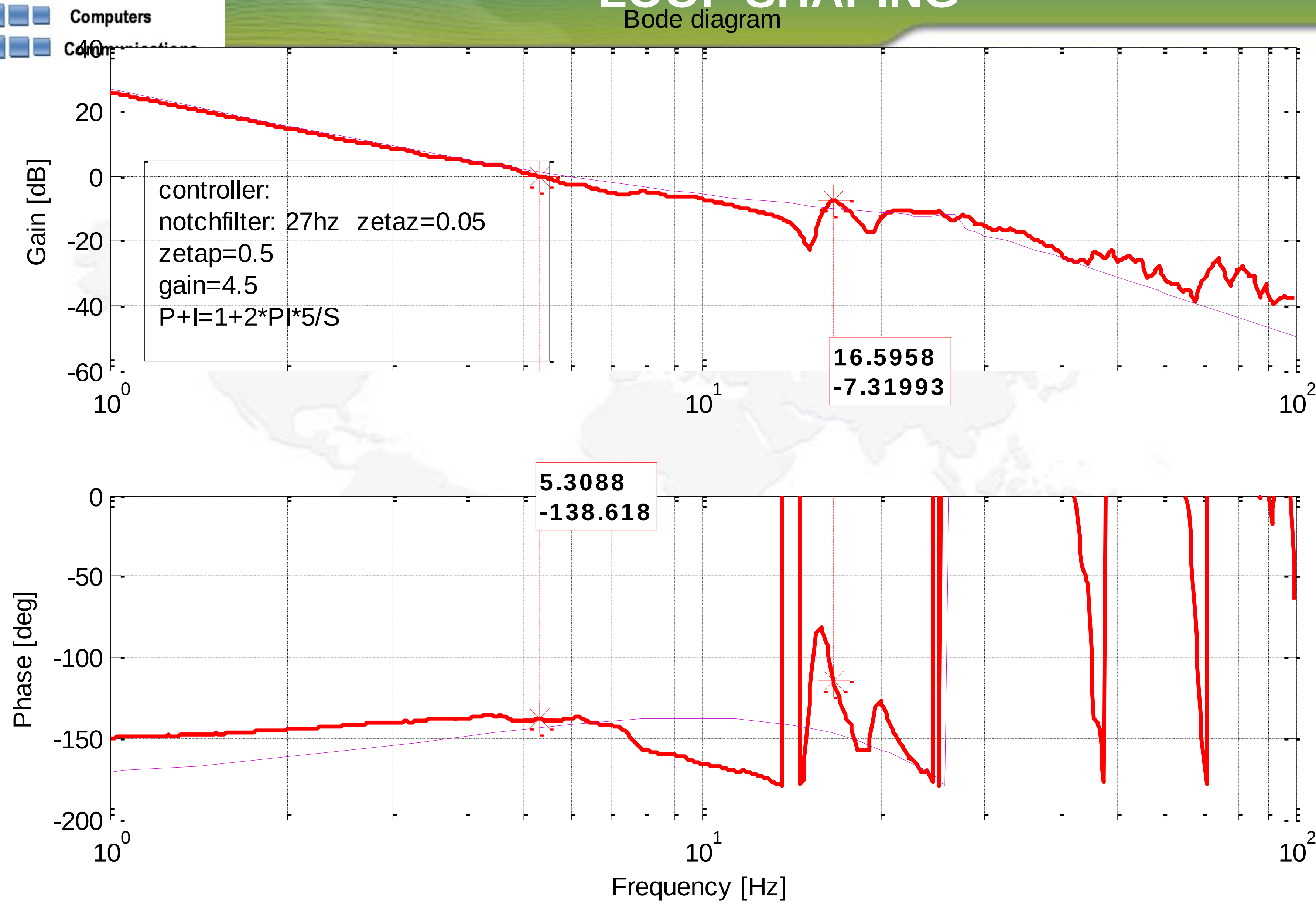


LOOP SHAPING

Bode diagram

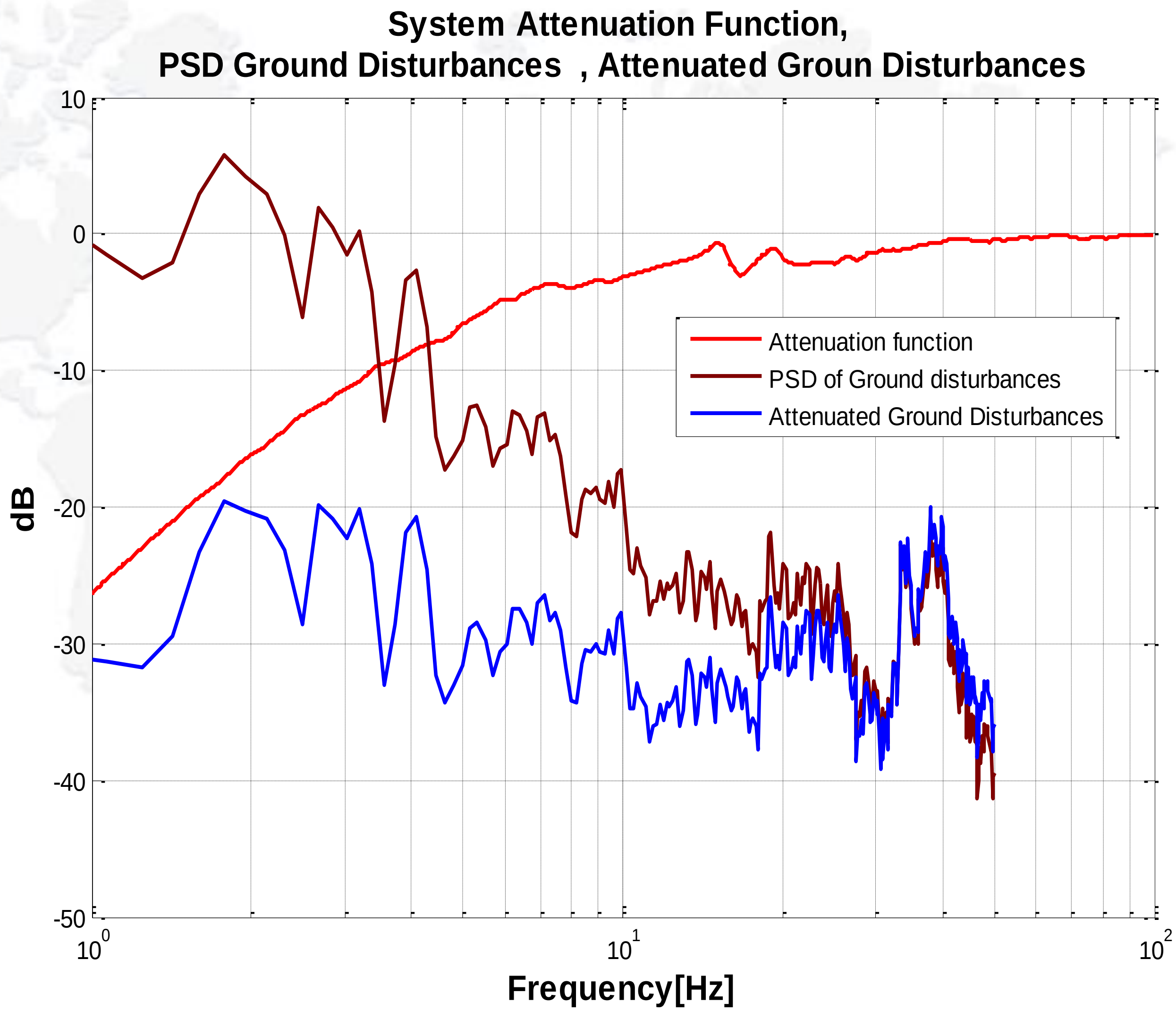


LOOP SHAPING

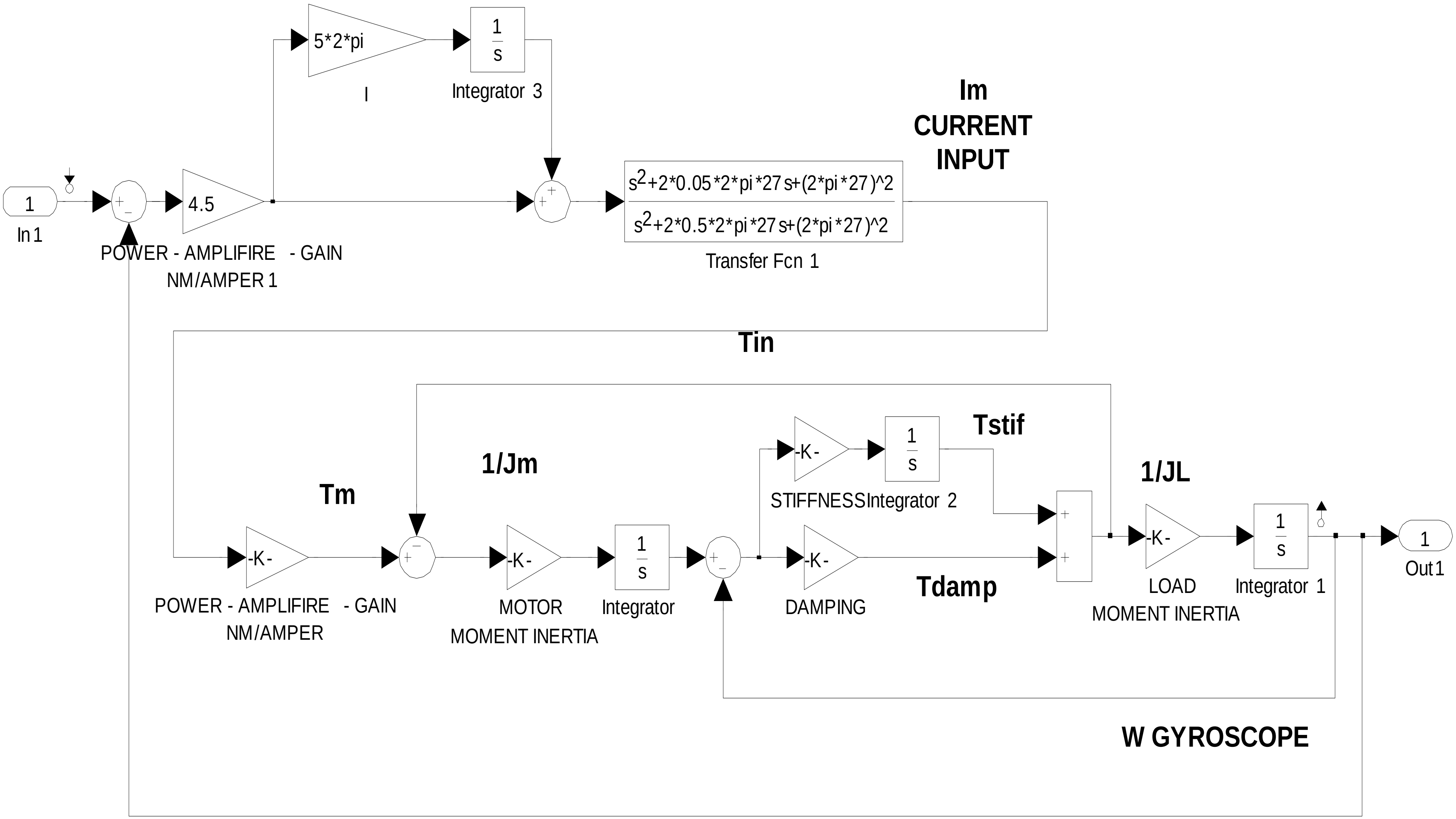


DISTURBANCE ATTENUATION

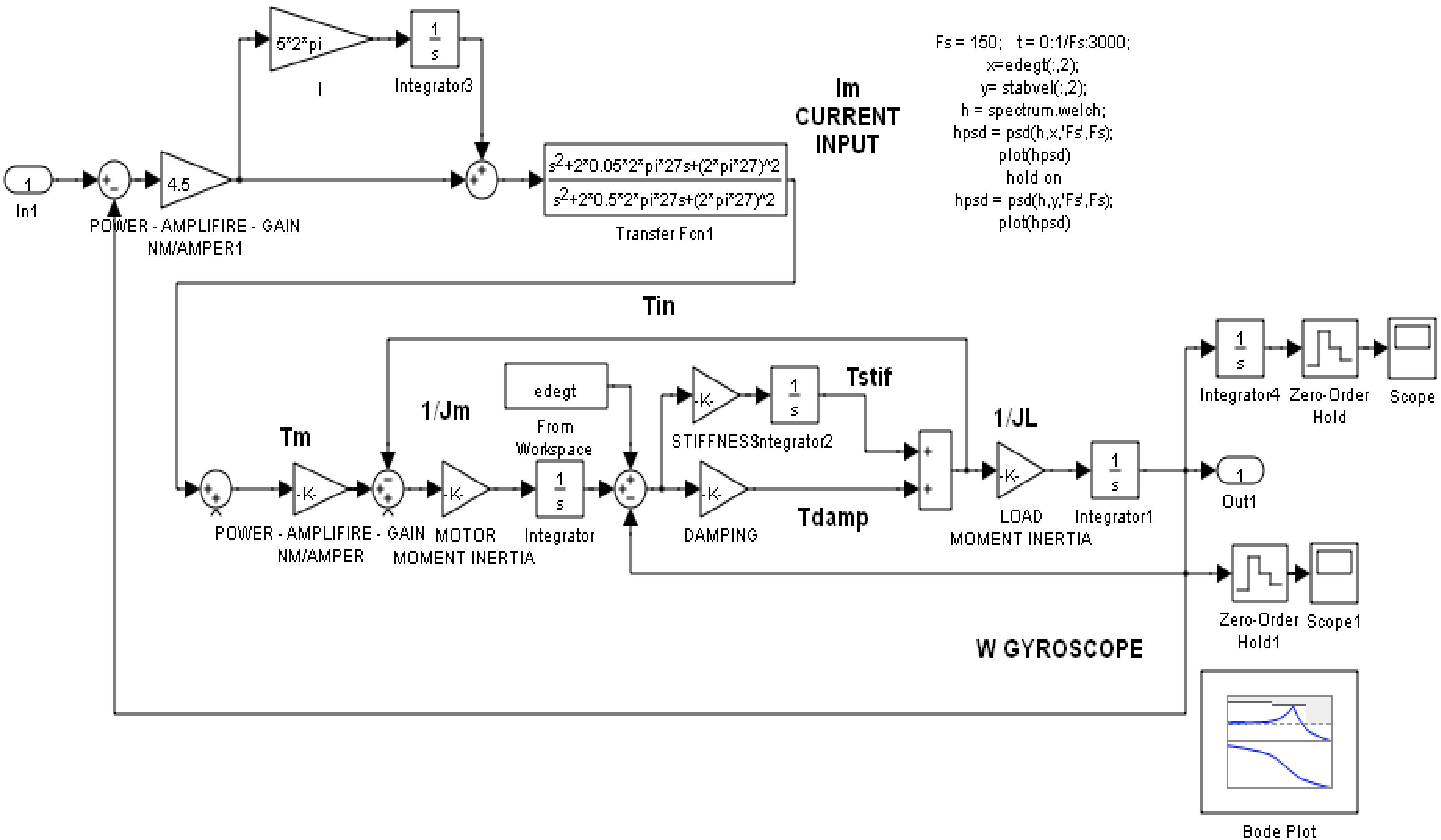
```
Fs = 150; t = 0:1/Fs:3000;
x=edegt(:,2);
y= stabvel(:,2);
h = spectrum. periodogram;
hpsd = psd(h,x,'Fs',Fs);
plot(hpsd)
hold on
hpsd = psd(h,y,'Fs',Fs);
plot(hpsd))
```



hazaraDugmaNotch.slx



hazaraDugmaNotchstabAcc.slx




```
Fs = 150;   t = 0:1/Fs:3000;
x=edegt(:,2);
y= stabvel(:,2);
h = spectrum.welch;
hpsd = psd(h,x,'Fs',Fs);
plot(hpsd)
hold on
hpsd = psd(h,y,'Fs',Fs);
plot(hpsd)
```

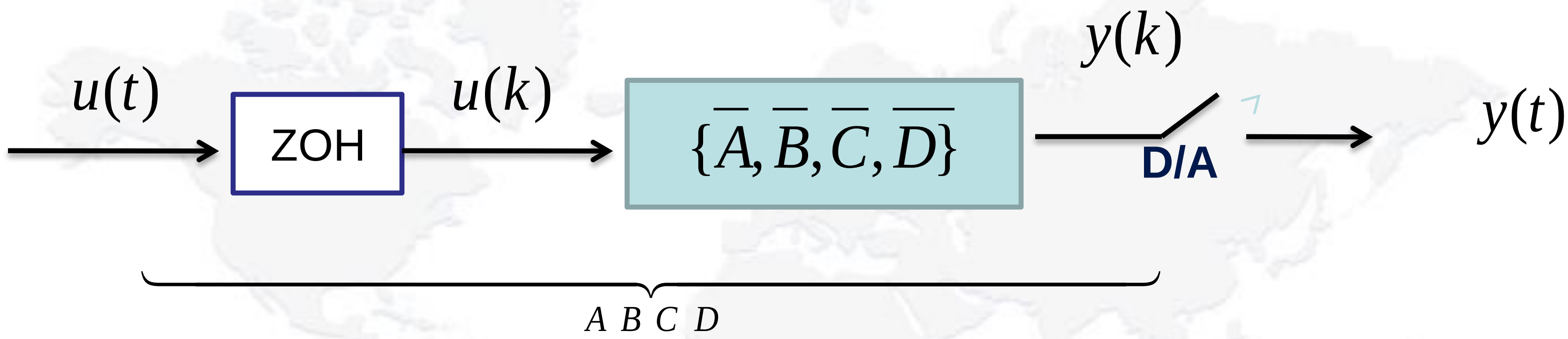
חזרה על משוואות מצב

	Continuous	Discrete
State Space Equations	$\dot{X} = AX + BU$ $Y = CX + DU \qquad X(t_0) = X_0$	$X(k+1) = AX(k) + BU(k)$ $Y(k) = CX(k) + DU(k) \qquad X(0) = X_0, k = 0,1\ldots n$
Transfer function	$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ $\mathscr{L}^{-1}(sI - A)^{-1} = e^{At}1(t)$ $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} 1(t)$	$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ $\mathscr{L}^{-1}(zI - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} 1(k)$
Impulse Response	$g(t) = \mathscr{L}^{-1}[G(s)]$ $= Ce^{At}B \cdot 1(t) + D\delta(t)$	$g(k) = CA^{k-1}B1(k-1) + D\delta(k)$
Solution	$y(t) = Ce^{At}X_0 + \int_0^t e^{A\tau}BU(t-\tau)d\tau + DU(t)$	$y(k) = CA^k X_0 + \sum_{l=1}^{k} CA^{l-1}B(k-l)d\tau + DU(k)$

חזרה על משוואות מצב

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$Y = CX + DU \qquad X(t_0) = X_0$$

דגימה - מעבר מרציף לבדיד



$$\bar{A} = e^{AT}; \qquad \bar{B} = \left[\int_0^T e^{A\sigma} d\sigma\right] B; \qquad \bar{C} = C; \qquad \bar{D} = D$$

$$X(k+1) = \bar{A}X(k) + \bar{B}U(k)$$
$$Y(k) = \bar{C}X(k) + \bar{D}U(k) \qquad X(0) = X_0, k = 0,1 \ldots n$$
$$T \quad Sampling \;\; Time$$

תוצאות מאלגברה לינארית

- **פולינום אופייני של מטריצה A:**

- **נסמן:** $a(s)=\det(sI-A)=s^{n}+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\ldots+a_{n-1}s+a_n$

- **ל -** $a(s)$ **יש n שרשים:** λ_i .
- **כאשר** λ_i **הם הערכים העצמיים של A.**

- **וקטור עצמי** p **של מטריצה** A: $Ap=\lambda p$

- **נסמן:** $(\lambda I-A)p=0$

תוצאות מאלגברה לינארית

- מתקיים:

$$\det A = \lambda_1 * \lambda_2 * \lambda_3 * \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

- משפט קיילי המילטון:
  - כל מטריצה ריבועית מקיימת את הפולינום האופייני שלה:

$$a(A) = \det(sI - A)\Big|_{s \Leftrightarrow A} \Rightarrow A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \ldots + a_{n-1} A + a_n I = 0$$

$$\Rightarrow A^n = -a_1 A^{n-1} - a_2 A^{n-2} - \ldots - a_{n-1} A - a_n I$$

  - ולכן A^n ניתנת לביטוי כצירוף ליניארי של:

$$\left\{ A^n \Rightarrow I, A^1, A^2 \cdots A^{n-1} \right\}$$

חזרה על משוואות מצב

קונטרולאביליות

- מערכת נקראת קונטרולאבילית אם ניתן להביאה מכל מצב התחלתי נתון לכל מצב סופי רצוי על ידי כניסת בקרה מתאימה.

משפט: מערכת LTI נתונה הינה קונטרולאבילית אם ורק אם המטריצה

$$\mathscr{C} = [B, AB, A^2B, \ldots\ldots A^{n-1}B]$$

היא בדרגה מלאה דהיינו:

$$rank\,\mathscr{C} = n$$

חזרה על משוואות מצב

אובזרבביליות

- מערכת נקראת אובזרבבילית אם ניתן לשחזר את כל וקטור המצב עבור כל מצב התחלתי, מתוך מדידות הכניסה , ומדידות חלקיות של תפוקות המערכת.

משפט: מערכת LTI נתונה הינה אובזרבבילית אם ורק אם המטריצה

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

היא בדרגה מלאה דהיינו:

$$rank\,\mathcal{O} = n$$

חזרה על משוואות מצב

מערכת מינימאלית

- מערכת נקראת מינימאלית אם היא גם קונטרולאבילית וגם אובזרבבילית ואז ב- $G(s)$ אין צמצום קטבים ואפסים

טרנספורמציות

- עבור T לא סינגולארית כלשהיא המערכת המקורית S והמערכת לאחר טרנספורמציה $\bar{S}$ הן מערכות שקולות:

$$\bar{X} \longleftrightarrow T^{-1}X$$

$$S \in \{A, B, C, D\} \longleftrightarrow \bar{S} \in \{T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D\}$$

חזרה על משוואות מצב

- טרנספורמציית השקילות שומרת על תכונות המערכת:
  - אותם ע"ע
  - תכונות אובזרבביליות וקונטרולאביליות נשמרות
  - אותן פונקציות תמסורת
  - הקשר בין מטריצות הקונטרולאביליות: $\overline{\mathscr{C}} = T^{-1}\mathscr{C}$
  - הקשר בין מטריצות אובזרבביליות: $\overline{\mathscr{O}} = T\mathscr{O}$

Canonical forms

Controller Form

$$\{A_c, B_c, C_c, D_c\}$$

כאשר:

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

משפט:

כל מערכת קונטרולאבילית S ניתן להעתיק על ידי T מתאים לקבלת מערכת $\bar{S}$ בעלת צורה קנונית Controller Form.

שתי המערכות בעלות אותה תמסורת נומינאלית והן שקולות זו לזו.

צורות קנוניות

נחשב מטריצת שקילות T

- נתונה מערכת $S \in \{A, B, C, D\}$ יש למצוא מטריצה T הפיכה לקבלת:

$$\left\{ A_c = T^{-1}AT, B_c = T^{-1}B, C_c = CT \right.$$

- נסמן:

$$T = \begin{bmatrix} \underbrace{t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_n}_{colons} \end{bmatrix}$$

- מתקיים:

$$B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad B = TB_c = [t_1, \cdots t_n] * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = t_1 \Rightarrow t_1 = B$$

צורות קנוניות

- נחשב את העמודות הבאות:

$$A_c = T^{-1}AT \quad \Rightarrow TA_c = AT \quad AT = \left[At_1, At_2 \cdots, At_n\right] = [t_1,t_2,\cdots,t_n]\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

- עמודה ראשונה:

$$\Rightarrow At_1 = -a_1 t_1 + t_2 \quad \Rightarrow t_2 = At_1 + a_1 t_1\Big|_{t_1=B} \quad \Rightarrow t_2 = AB + a_1 B$$

- עמודה שנייה:

$$At_2 = -a_2 t_1 + t_3 \quad \Rightarrow t_3 = \underbrace{A\left(AB + a_1 B\right)}_{t_2} + \underbrace{a_2 B}_{a_2 t_1} \quad = A^2 B + a_1 AB + a_2 B$$

- עמודה N :

$$At_n = -a_n t_1 \quad \Rightarrow t_n = -a_n A^{-1} B$$

- ממשפט קיילי המילטון:

$$-a_n I = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A$$

$$\Rightarrow -a_n A^{-1} B = \left[A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A\right] A^{-1} B = t_n$$

$$\Rightarrow -a_n A^{-1} B = [A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \cdots a_{n-1} I] B = t_n$$

צורות קנוניות

- קיבלנו:

$$T=\left[\underbrace{B}_{t_1},\underbrace{AB+a_1B}_{t_2},\underbrace{A^2B+a_1AB+a_2B}_{t_3},\cdots,\underbrace{A^{n-1}B+a_1A^{n-2}B+\cdots+a_{n-1}B}_{t_n}\right]$$

- לאחר ארגון וסידור איברים נקבל

$$T=\left[B,AB,A^2B\cdots,A^{n-1}B\right]\mathscr{C}_c^{-1}$$

שלבים לחישוב T

- חשבו מטריצת קונ׳ של המערכת הנתונה
- חשבו מקדמי פולינום אופייני של A
- חשבו הופכי של מטריצת קונ׳ קנונית ←
- חשבו

$$T=\mathscr{C}*\mathscr{C}_c^{-1}$$

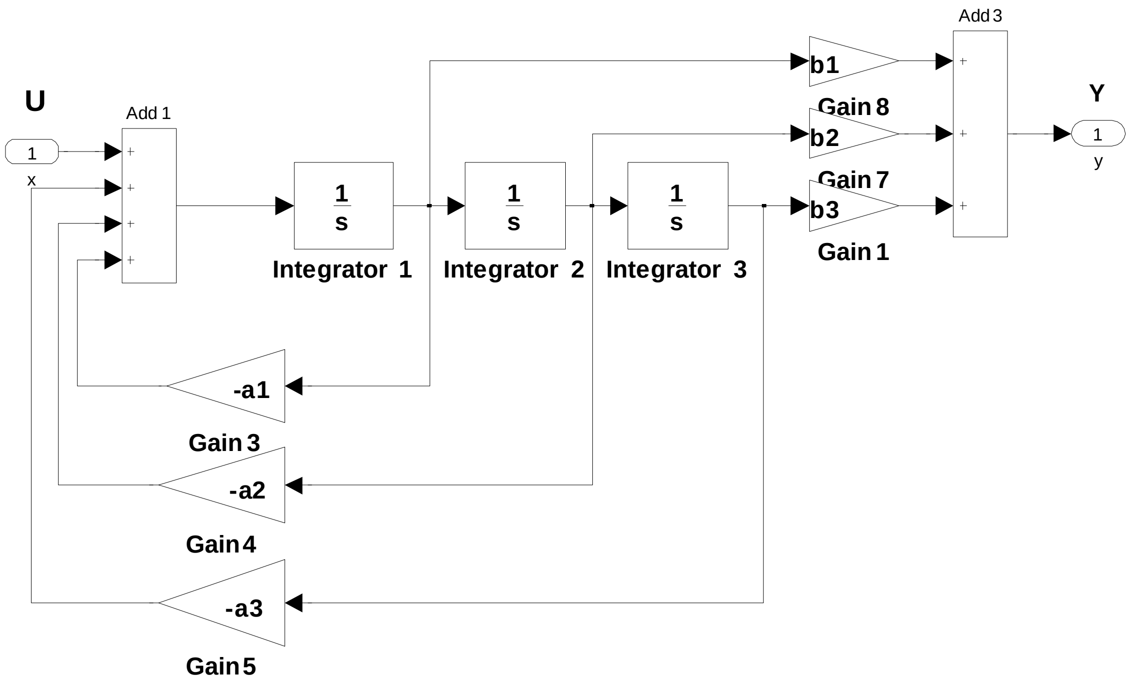
$$\mathscr{C}_c^{-1}=\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & a_1 & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

צורות קנוניות

- מימוש צורה קנונית של קונטרולר:

$$H(s)=\frac{b_1 s^2+b_2 s+b_3}{s^3+a_1 s^2+a_2 s+a_3}$$

$$A_c=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & -a_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},B_c=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},C_c=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}$$



Observer Form

$$\{A_o, B_o, C_o, D_0\}$$

כאשר:

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0\cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

משפט:

- כל מערכת אובזרבבילית S ניתן להעתיק על ידי T מתאים למערכת $\bar{S}$ בעלת צורה קנונית Observer Form.
- שתי המערכות בעלות אותה תמסורת נומינאלית והן שקולות זו לזו. $\bar{\mathcal{O}}\mathcal{O}^{-1} = T$

צורות קנוניות

- מטריצת אובזרבביליות של הצורה הקנונית הינה נתונה לפי:

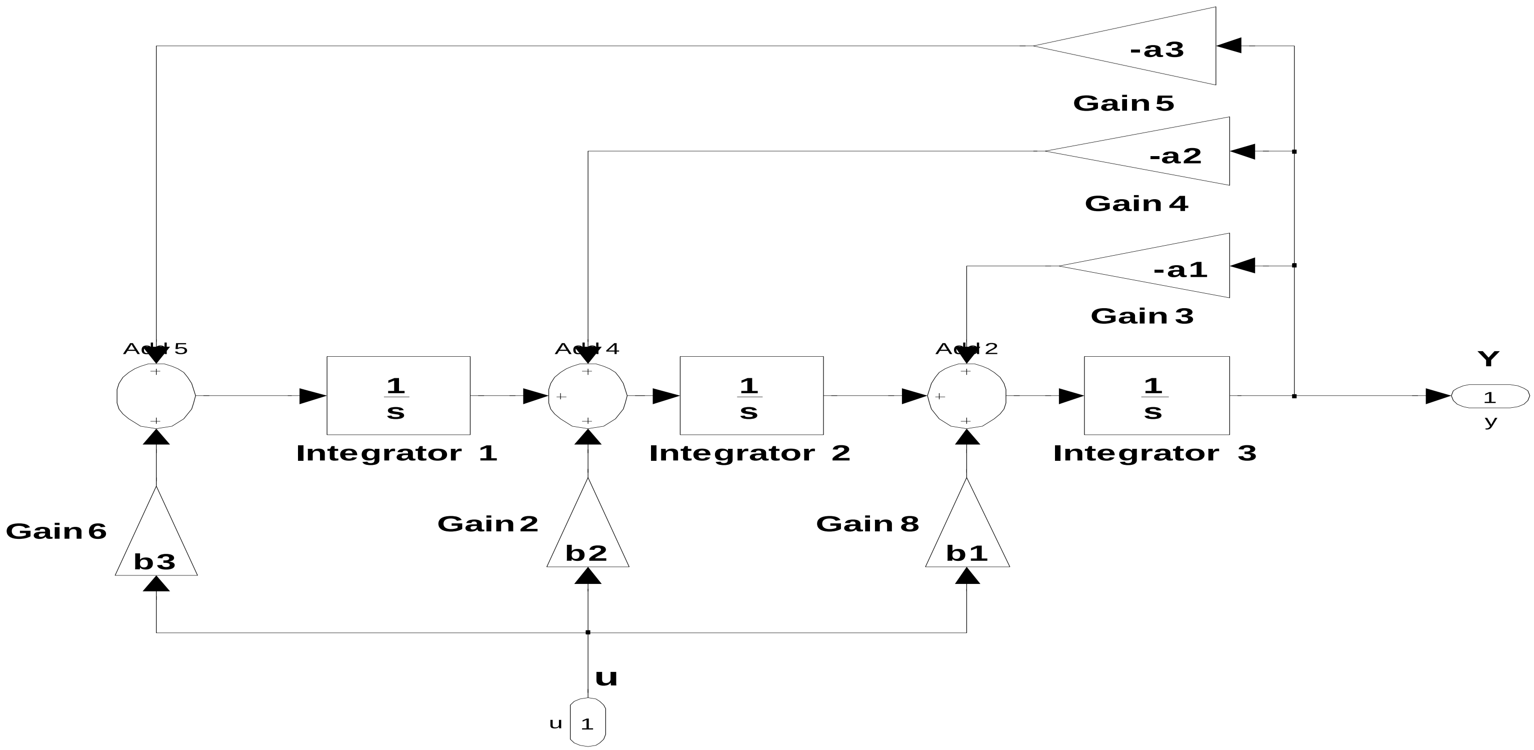
$$\mathcal{O}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & -a_1 & 1 & \ddots & 0 \\ -a_n & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & -a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

צורות קנוניות

- מימוש צורה קנונית של אובזרוור:

$$H(s)=\frac{b_1 s^2+b_2 s+b_3}{s^3+a_1 s^2+a_2 s+a_3}$$

$$A_o=\begin{bmatrix}-a_1 & 1 & 0\\ -a_2 & 0 & 1\\ -a_3 & 0 & 0\end{bmatrix},B_o=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix},C_o=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



תוצאות מאלגברה לינארית

תת מרחב נפרש:

- נתונה קבוצת וקטורים:

$$\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$$

- תת המרחב הנפרש על ידי קבוצה זו נתון לפי:

$$span\{x_1, x_2, \cdots x_n\} = \left\{ x \middle| x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i,} \quad \alpha_i \in R \right\}$$

אי השוויון של קושי שוורץ

$$\left|x^T y\right|^2 = (\sum x_i y_i)^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

חישוב דטרמיננטה של מטריצה

- עבור מטריצה A נסמן ב- $M_{i,j}$ את המטריצה $(n-1)x(n-1)$ המתקבלת ע"י מחיקת השורה ה- i והעמודה ה- j של המטריצה A .
- נסמן $\gamma_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(M_{i,j})$
- (הקופקטור של $a_{i,j}$)
- אזי:

$$\det A = \sum_j a_{i,j} \gamma_{i,j}$$

- עבור i כלשהוא

תהליך גרהם שמיט:

- בניית קבוצה אורתו-נורמאלית הפורשת את אותו תת-מרחב כמו קבוצת וקטורים נתונה.
- נתונה קבוצת וקטורים:

$$\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$$

- תהליך גרהם שמיט נתון על ידי:

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$$y_2 = \frac{x_2 - \alpha y_1}{\|x_2 - \alpha y_1\|} \xrightarrow{such\ \ that} y_1^T y_2 = 0$$

$$y_3 = \frac{x_3 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2}{\|x_3 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2\|} \xrightarrow{such\ \ that} y_1^T y_3 = 0, y_2^T y_3 = 0$$

- וכך הלאה.

תוצאות מאלגברה לינארית

מטריצת טופליץ (Toeplitz):

- זו מטריצה בה כל האיברים (i, j) אשר $(i-j)$ קבוע - שווים ביניהם
  כלומר:
  $$a_{i,j} = a_{i+l,j+l}$$

חישוב דטרמיננטה של מטריצה

- עבור מטריצה A נסמן ב- $M_{i,j}$ את המטריצה $(n-1)x(n-1)$ המתקבלת ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j של המטריצה A .
- נסמן $\gamma_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(M_{i,j})$
- (הקופקטור של $a_{i,j}$)
- אזי: $\det A = \sum_j a_{i,j}\gamma_{i,j}$
- עבור i כלשהוא

תוצאות מאלגברה לינארית

- חישוב הופכי של מטריצה לא סינגולארית:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}adjA$$

- כאשר:

$$[adjA^{T}]_{i,j}=\gamma_{i,j}$$

- מטריצות בלוקים:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}=\det A*\det B$$

- אם המטריצה A אינה סינגולארית אזי:

$$\det\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}=\det A*\det[B-CA^{-1}D]$$

תוצאות מאלגברה לינארית

- דטרמיננט של מכפלת מטריצות ריבועיות

$$\det AB = \det BA = \det A * \det B$$

- אם שתי המכפלות AB ו-BA מוגדרות אזי:

$$\det[I - AB] = \det[I - BA]$$

- עבור מטריצה A, מרחב האפס של A (Null Space)

$$\mathcal{N}(A) = \{x | \quad Ax = 0\}$$

- התחום של A (range):

$$\mathscr{R}(A) = \{x | \quad x = Ay\}$$

תוצאות מאלגברה לינארית

- **דרגת שורות של מטריצה:** מספר מקסימאלי של שורות הבלתי תלויות של A .
- **דרגת העמודות של A** : מוגדרת בצורה זהה על עמודות A.
- **מתקיים תמיד:** דרגת המטריצה=דרגת עמודות=דרגת שורות

- נסמן את דרגות **A, B** : $\rho(A), \rho(B)$ כאשר **AB** ו **A+B** קיימים:
- **אזי:** $\rho(A)+\rho(B)-n \le \rho(AB) \le \min\{\rho(A), \rho(B)\}$
- כאשר n הוא מספר העמודות של A והשורות של B.
- **בנוסף:** $\rho(A+B) \le \rho(A)+\rho(B)$

- **אם עבור וקטורים u,v מתקיים:** $A = uv^T$
- **אזי:** $\rho(A) = 1$

תוצאות מאלגברה לינארית

- **אם A הפיכה (לא סינגולארית) ו- u, v שני ווקטורים אזי:**

$$(A+uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

- **היפוך מטריצות בלוקים:**

$$\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1}+E\Delta^{-1}F & -E\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}F & \Delta^{-1} \end{bmatrix}$$

- **כאשר :**

$$\Delta = B - CA^{-1}D$$

$$E = A^{-1}D$$

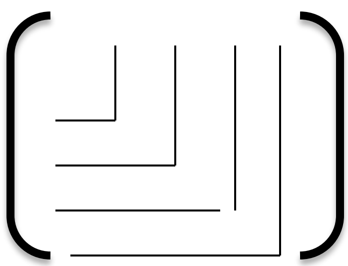
$$F = CA^{-1}$$

מטריצות חיוביות / אי שליליות

- מטריצות חיוביות /אי שליליות: בקורס זה מטריצות המוגדרות כ- חיוביות או אי שליליות - הן מטריצות סימטריות וממשיות
- מטריצה אי שלילית A היא מטריצה המקיימת: $\forall x \neq 0 \qquad x^T A x \geq 0$
- מטריצה חיובית מוגדרת A היא מטריצה המקיימת:

$$\forall x \neq 0 \qquad x^T A x > 0$$

- מטריצה היא חיובית מוגדרת אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה הם חיוביים ממש.
- מטריצה היא אי שלילית אם ורק אם חלק מהערכים העצמיים שלה הם חיוביים וחלקם הוא אפס.
- מטריצה היא חיובית מוגדרת אם כל המינורים המובילים שלה הם חיוביים (הדטרמיננטות של המטריצות):



מידול משוואות מצב של מערכות סטאטיות, מהירות קבועה:

- מודל Bias (סחיפה קבועה או שגיאה קבועה) של חיישן, או דינאמיקת מטרה סטאטית:

$$x = c \to \quad \dot{x} = 0 \cdot x + 0 \cdot u = 0$$

- מודל מטרה נעה במהירות קבועה והמיקום בלבד נמדד:

$$x_{vel} = c \to x_{pos} = x_1, x_{vel} = x_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ y = x_1 \end{cases} \to \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- $$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

מידול משוואות מצב של מערכות מתמרנות:

- מודל מטרה מתמרנת בתדר קבוע ידוע והמיקום נמדד בעזרת חיישן מתאים הכולל שגיאה קבועה לא ידועה :

$$x_{pos} = a\sin(\omega t) \rightarrow \quad \begin{aligned} & x_{pos} = x_1, x_{vel} = x_2 \\ & y = x_{pos} + c \end{aligned}$$

- יש למצוא משוואות מצב לתיאור התמרון והסחיפה הקבועה:

$$\dot{x}_1 = a\omega\cos(\omega t), \quad \dot{x}_1 \overset{\Delta}{=} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a\omega^2\sin(\omega t) \rightarrow \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1$$

$$x_3 = c \rightarrow \dot{x}_3 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ y = x_1 + x_3 \end{cases} \rightarrow$$

- $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

מידול של מערכות דיסקרטיות - דוגמא

מידול משוואות מצב של מערכות דיסקרטיות:

- מצאו משוואות מצב של המערכת: $x(k) = ak + b \quad k = 0,1,2\ldots n$
- a b קבועים ואינם ידועים
- ניתן לראות כי:

$$x(k) = ak + b$$
$$x(k+1) = a(k+1) + b = ak + a + b$$
$$x(k+2) = a(k+2) + b = ak + 2a + b$$

- מתקיים:

$$\Rightarrow x(k+2) = 2x(k+1) - x(k)$$

- משוואות מצב:

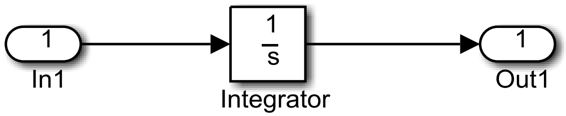
$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix}$$

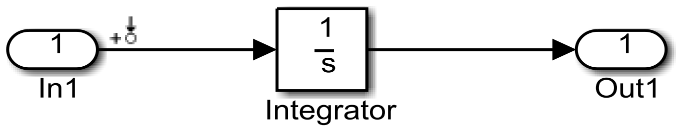
נספח

נספח

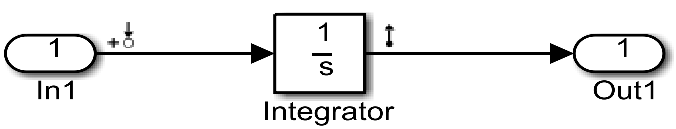
קבלת BODE בסימולינק

- בנו מודל בסימולינק כמתואר בדוגמא:



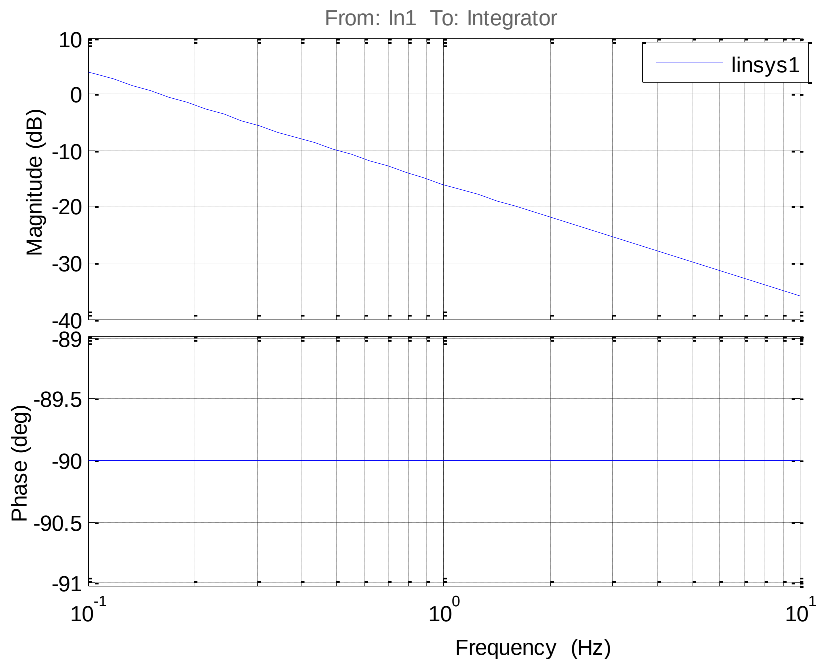
- עמדו עם העכבר על חץ קלט ובצעו קליק שמאלי ואחר כך קקיק ימני
  - בחרו Linear Analysis Point ← Input perturbation לקבלת:
  - 

  - באופן דומה בצעו על חץ הפלט אבל יש לבחור Output Measurement לקבלת:



קבלת BODE בסימולינק

- בסרגל הכלים של המודל בחרו **Analysis** ← **Control Design** ← **Linear Analysis**
- יתקבל מסך חדש. בסרגל הכלים לשונית **EXECT LINEARIZATION** ← **New Bode** ויש להפעיל את החץ הירוק לקבלת גרף בודה אמפליטודה ופאזה
- על מנת להעביר את הגרף לאיור יש לבחור **FIGURS** בסרגל הכלים ולבחור **Print to Figure**



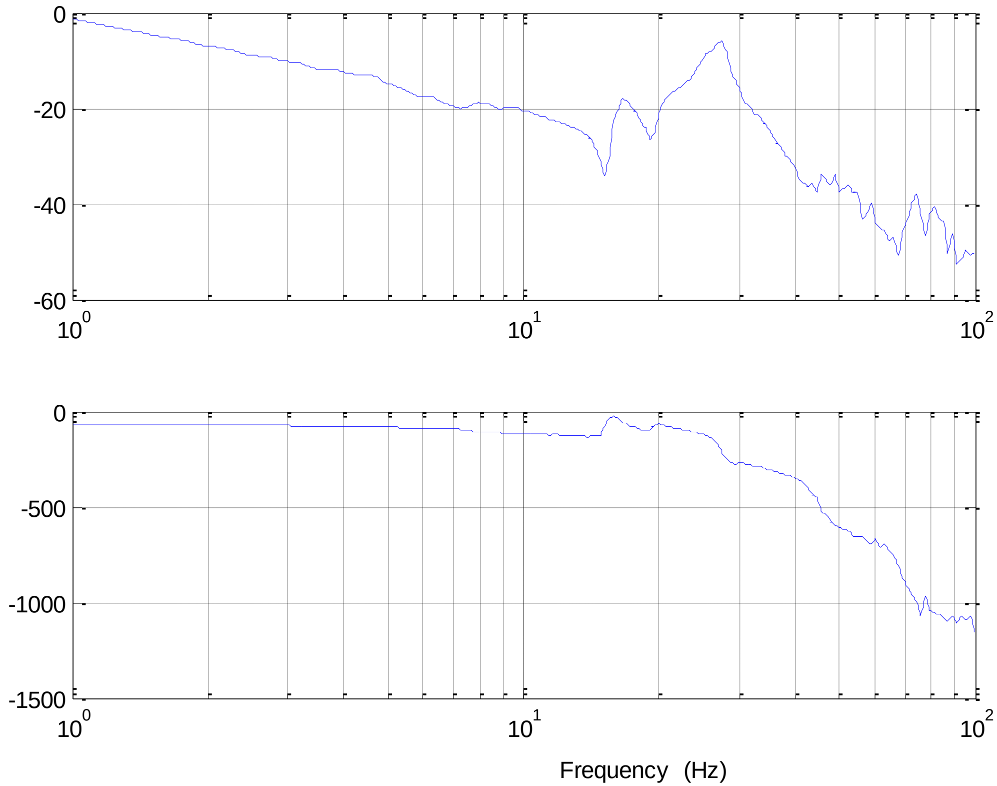
עבודה עם פיילי נתונים

- בדוגמת ההרצאה נתון פייל נתונים: plant.mat שהם תוצאה ספקטראלית מדודה ממערכת סרוו אמיתית
- במטלב בצעו: load('plant.mat') בעזרת who יתקבלו:
  - o2i1.mat פייל של מספרים קומפלקסיים
    ו- o2i1x.mat פייל תדרים בהרצים
- הפקודה:

```
Figure, subplot(2,1,1)...,
semilogx(o2i1x,20*log10(o2i1)),grid,subplot(2,1,2)...
,semilogx(o2i1x,(180/pi)*phase(o2i1)),grid
```

- תניב גרף בודה:

עבודה עם פייל נתונים



- לצורך עבודה עם **sistool** נהפוך את פיילי הנתונים למערכת בעזרת הפקודה:
  - sys=frd(o2i1,o2i1x,'FrequencyUnit','Hz');
- כעת **sys** הינה פונקציית תמסורת שניתן להפעיל עליה את פונקציות **sisotool**

צורות קנוניות

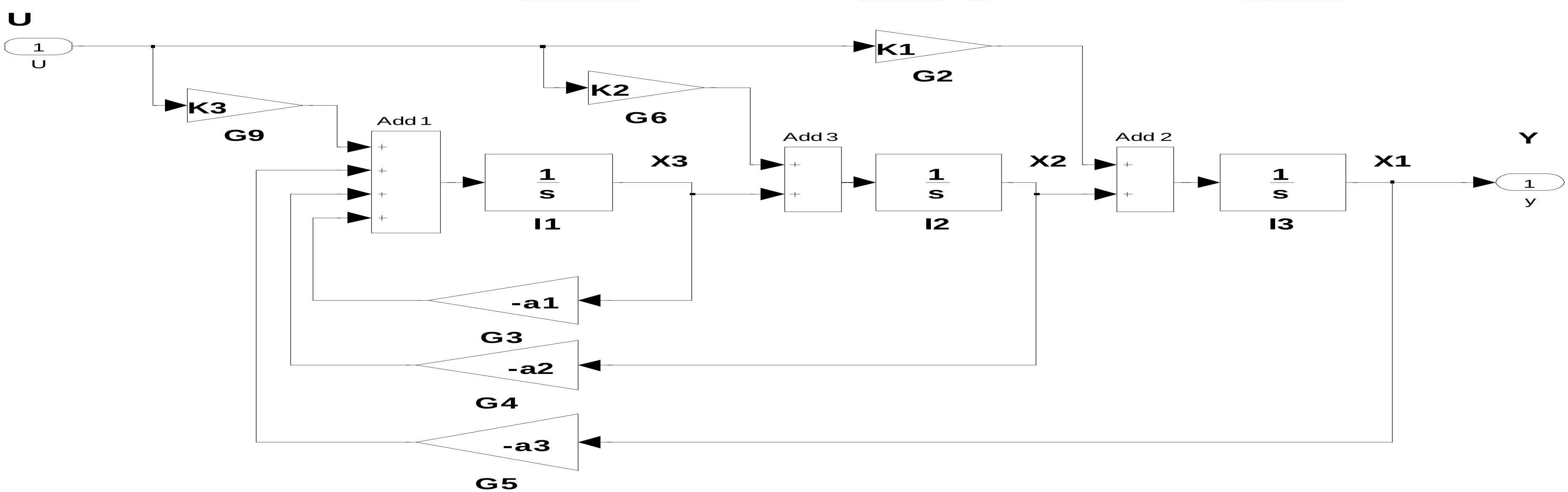
- מימוש צורה קנונית של אובזרבביליטי:

$$H(s)=\frac{b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

$$A_{oT}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix},B_{oT}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix},C_{oT}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ a_1 & 1 & 0\\ a_2 & a_1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\beta_1=b_1\\ \beta_2=b_2-a_1b_1\\ \beta_3=b_3-a_1b_2-a_2b_1+a_1^2b_1\end{cases}$$

- למטריצה A המבנה:
- Companion Form



צורות קנוניות

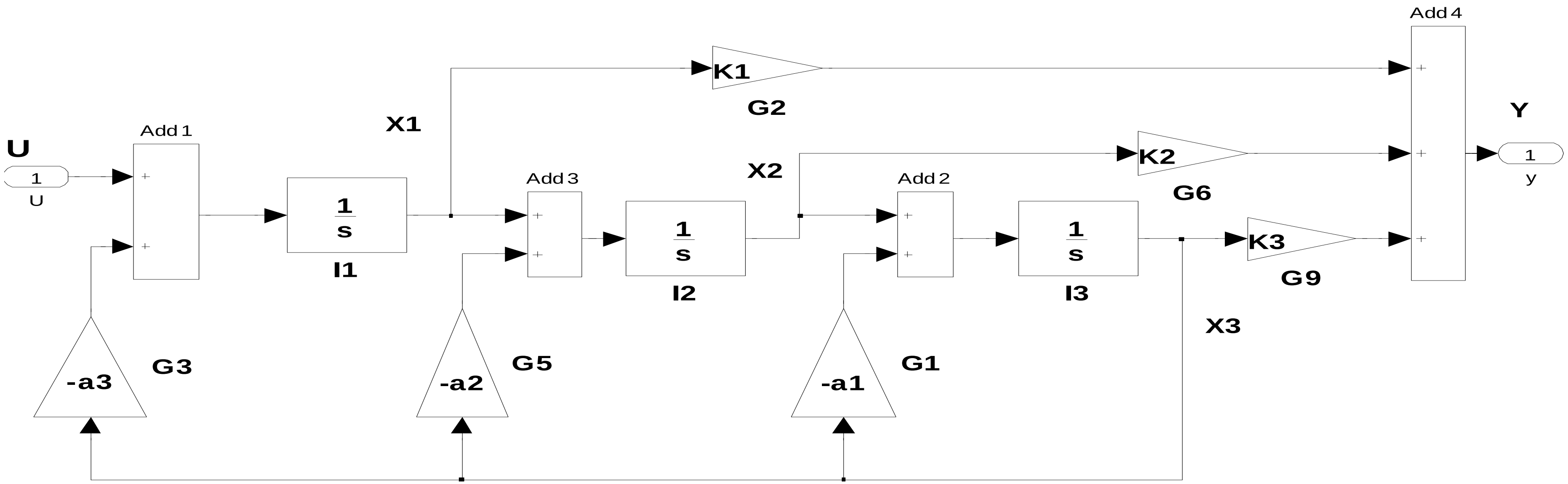
- מימוש צורה קנונית של קונטרולביליטי:

$$H(s)=\frac{b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

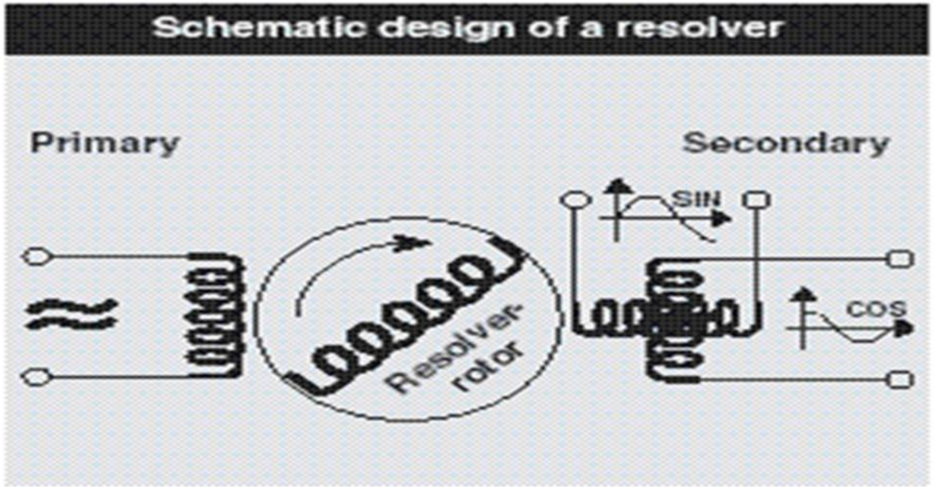
$$A_{cT}=\begin{bmatrix}0&0&-a_3\\1&0&-a_2\\0&1&-a_1\end{bmatrix},B_{cT}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},C_{cT}=\begin{bmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{bmatrix}$$

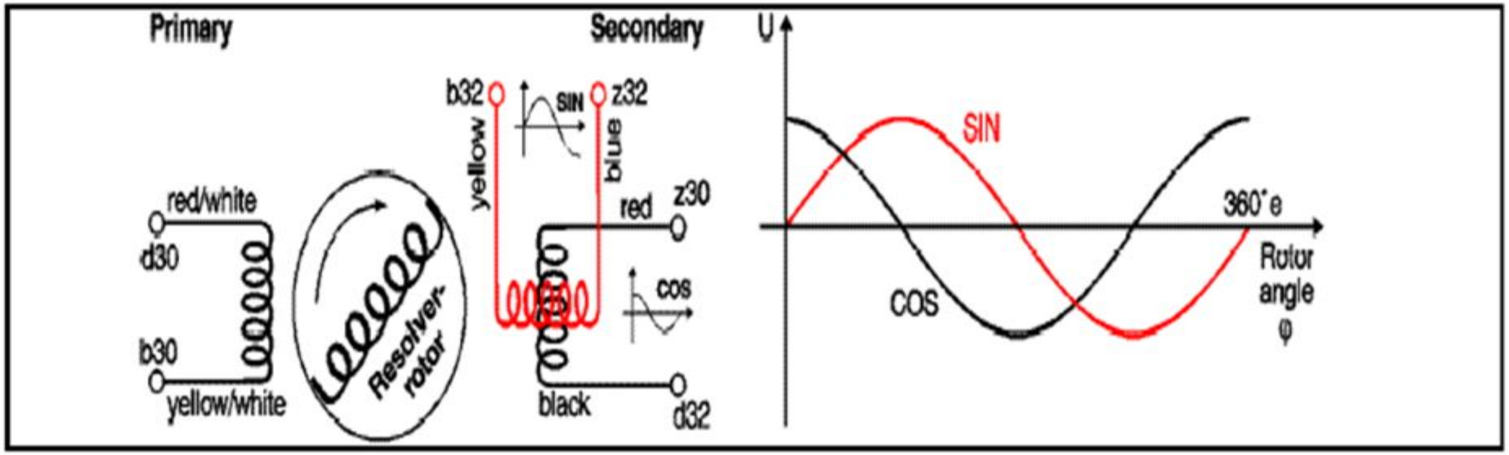
$$\begin{bmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a_1&a_2\\0&1&a_1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

- למטריצה A' המבנה:
- Companion Form



RESOLVER


Schematic design of a resolver
Primary
Secondary
SIN
COS
Resolver-rotor


Primary
Secondary
red/white
d30
b30
yellow/white
Resolver-rotor
b32
z32
SIN
yellow
blue
red
z30
cos
black
d32
U
SIN
COS
360° e
Rotor angle φ

TACHOMETER

Tachometer

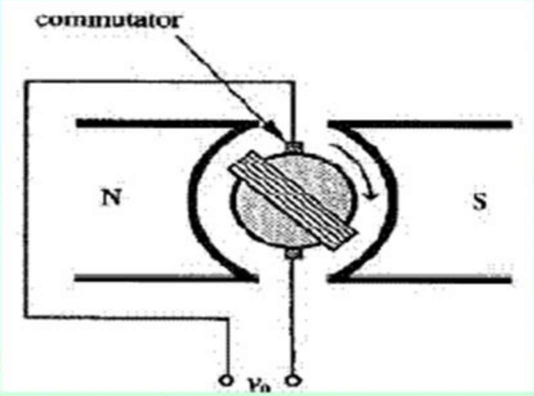
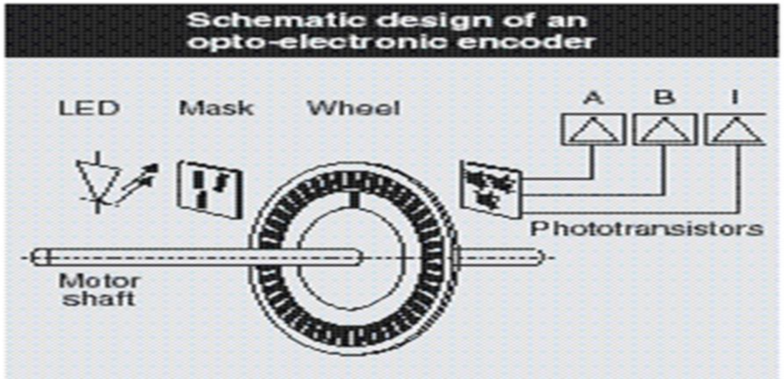
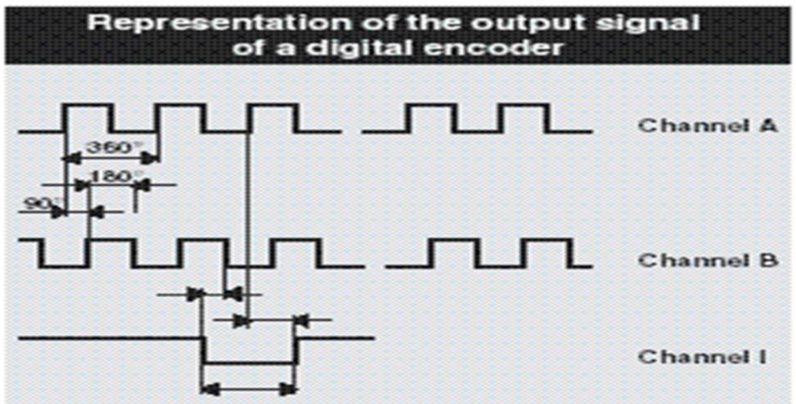


Fig. 9.6. The principle of a DC tachometer

Working principle:
The permanent magnet generates a steady and uniform magnetic field. Relative motion between the field and the rotor induces voltages, which is proportional to the speed of the rotor.

סנסורים





- SHAFT ENCODER
  - INCREMENTAL
  - ABSOLUTE

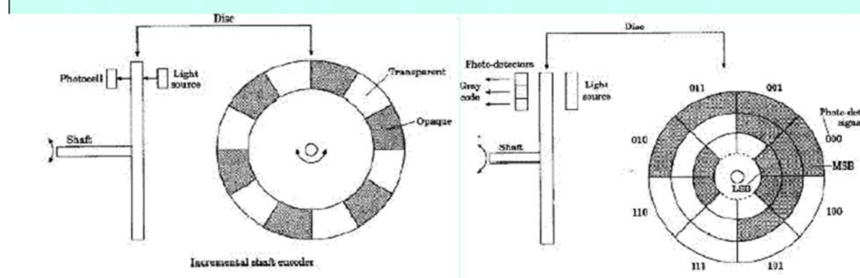
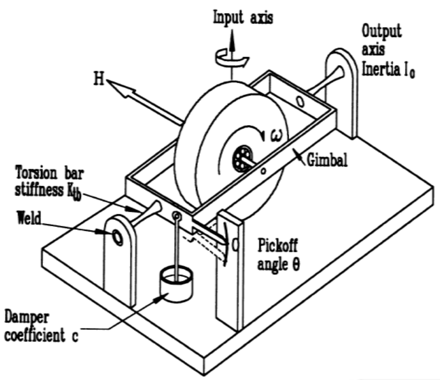


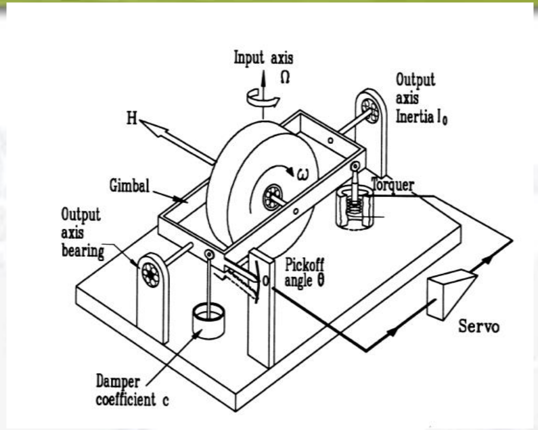
Fig. 9.7. Incremental and absolute shaft encoders

סנסורים

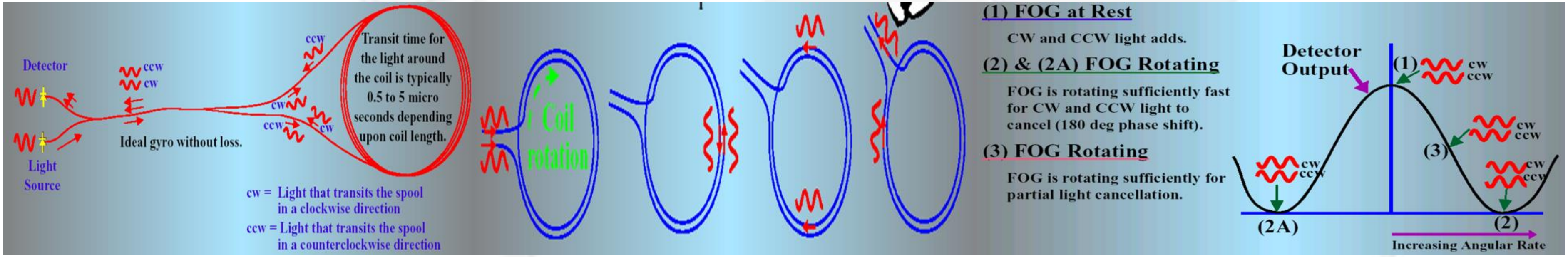
GYROSCOPE

Electro-mechanical





Fiber Optic Gyro – FOG



MEMS – Coriolis Gyro