極限と微分法 重要テーマ８つ

1． 解けない漸化式と極限

数列 $\{a_n\}$ は，$0 < a_1 < 3$，$a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすものとする．このとき，以下を示せ．

(1) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$0 < a_n < 3$

(2) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$3 - a_n \leqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} (3 - a_1)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

2． 格子点と極限

a，m は自然数で a は定数とする．xy 平面上の点 $(a,\ m)$ を頂点とし，原点と点 $(2a,\ 0)$ を通る放物線を考える．この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m，この領域の内部および境界線上にある格子点数を L_m とする．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{L_m}{S_m}$ を求めよ．

(京大)

3． 関数の極限

k を正の定数とする．曲線 $y = \cos kx$ と 3 直線 $x = -\theta$，$x = 0$，$x = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{2\pi}{k}\right)$ との交点を通る円の中心を P とする．θ が 0 に近づくとき，P はどのような点に近づくか．

(東北大)

4． 連続性と微分可能性，関数方程式

実数全体で定義された実数値をとる関数 $f(x)$，$g(x)$ がある．任意の実数 a，b に対し，

$$f(a+b) = f(a)g(b) + f(b)g(a),$$

$$f(a-b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

を常に満たすものとし，$f(x)$ は恒等的には 0 でないとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(0)$，$g(0)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 任意の実数 x，h に対して $f(x+2h) - f(x) = 2f(h)g(x+h)$ が成り立つことを示せ．

(3) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であるとき，$f'(x)$ を $f'(0)$ と $g(x)$ で表せ．

(名古屋市立大)

5．　関数の極大・極小

関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-px}} - ax$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を定めよ．ただし，p は正の定数である．(北大)

6．　関数の最大・最小

二等辺三角形の等辺は一定であるとき，内接円の面積が最大となる場合の等辺と底辺の比を求めよ．(岩手大)

7．　方程式への応用

関数 $f(x) = \dfrac{x}{\log x}$ $(x > 1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ の増減，グラフの凹凸を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) x 軸上の点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を通り曲線 $y = f(x)$ に接する直線が，2 本引けるように a の値の範囲を定めよ．(旭川医大)

8．　不等式への応用

(1) x を正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ．

(2) $\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ と $\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ．(名大)

極限と微分法 重要テーマ８つ

1．解けない漸化式と極限

数列 $\{a_n\}$ は，$0 < a_1 < 3$，$a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすものとする．このとき，以下を示せ．

(1) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$0 < a_n < 3$

(2) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$3 - a_n \leqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(3 - a_1)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

2. 格子点と極限

a, m は自然数で a は定数とする．xy 平面上の点 $(a,\ m)$ を頂点とし，原点と点 $(2a,\ 0)$ を通る放物線を考える．この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m，この領域の内部および境界線上にある格子点数を L_m とする．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}$ を求めよ．

(京大)

3．　関数の極限

k を正の定数とする．曲線 $y=\cos kx$ と 3 直線 $x=-\theta$，$x=0$，$x=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{2\pi}{k}\right)$ との交点を通る円の中心を P とする．θ が 0 に近づくとき，P はどのような点に近づくか．　(東北大)

4.　連続性と微分可能性，関数方程式

実数全体で定義された実数値をとる関数 $f(x)$，$g(x)$ がある．任意の実数 a，b に対し，

$$f(a+b)=f(a)g(b)+f(b)g(a),$$

$$f(a-b)=f(a)g(b)-f(b)g(a)$$

を常に満たすものとし，$f(x)$ は恒等的には 0 でないとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(0)$，$g(0)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 任意の実数 x，h に対して $f(x+2h)-f(x)=2f(h)g(x+h)$ が成り立つことを示せ．

(3) $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとき，$f'(x)$ を $f'(0)$ と $g(x)$ で表せ．　　(名古屋市立大)

5.　関数の極大・極小

関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-px}} - ax$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を定めよ．ただし，p は正の定数である．　(北大)

6．関数の最大・最小

二等辺三角形の等辺は一定であるとき，内接円の面積が最大となる場合の等辺と底辺の比を求めよ．(岩手大)

7．　方程式への応用

関数 $f(x)=\dfrac{x}{\log x}$ $(x>1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) x 軸上の点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を通り曲線 $y=f(x)$ に接する直線が，2 本引けるように a の値の範囲を定めよ．　(旭川医大)

8．　不等式への応用

(1) x を正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ.

(2) $\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ と $\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ.　(名大)