整数問題への応用

数III微分
典型

問. $a^{b^2} = b^{a^2}$ かつ $a < b$ をみたす自然数の組 (a, b) は存在す

関数の最大最小

数III微分
典型

問. $-\pi \leqq x \leqq \pi$ における $y = 2\sin x + \sin 2x$ の最大値と最小

値を求めよ。

$f''(x)$ を用いた不等式証明

数III微分
典型

問. すべての正の数 x に対して, $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ が成立することを示せ.

定数分離

数III微分
典型

問．方程式 $ax^5 - x^2 + 3 = 0$ が 3 個の異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

凹凸グラフの概形

数Ⅲ微分
典型

問．関数 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x +}{x + 1}$

の増減，極値，グラフの凹凸，
漸近線を調べ，グラフの概形

極値・変曲点をもつ条件

数III微分
典型

問．$f(x) = \left(x^2 + a\right) e^x$ とする．ただし，a は定数とする．

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもたないような a の値の範囲を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ が変曲点をもつような a の値の範囲を求めよ

確率
典型

確率の最大化

問．O さんが各問題に正解する確率は $\dfrac{99}{100}$ である．O さんが 3 問違えるまで問題を解き続けるとき，n 問目で終わる確率 P_n が最大となる n を求めよ．

条件付き確率 Lv.3

確率
典型

問．５回に１回の割合で，帽子を忘れる癖のある N 君が，正月に A，B，C の３軒を順に年始廻りをして家に帰ったとき，帽子を忘れてきたことに気づいた．家 B に忘れてきた確率を求めよ．

条件付き確率 Lv.2

確率
典型

問．2 つの箱 A，B があり，A には赤玉 4 個と白玉 1 個，B には赤玉 2 個と白玉 3 個が入っている．サイコロを振り，1 の目が出れば A，他の目が出れば B を選び，選んだ箱から玉を 1 個取り出す．取り出した玉が赤であるとき，箱 A が選ばれていた確率を求めよ．

条件付き確率 Lv.1

確率
典型

問．当たり２本，ハズレ３本入った箱からくじを１本取り出し，それを元に戻さずにもう１本取り出す．２本目が当たりだったとき，１本目も当たりである確率を求めよ．

独立反復試行 Lv.2

確率
典型

問．A，B の 2 人が繰り返し試合を行う．各試合において，A が勝つ確率は p，B が勝つ確率は q で，引き分けはない．先に 3 勝リードした方が優勝とするとき，次の確率を求めよ．

(1) 5 試合目に A が優勝を決める確率

(2) 9 試合目に A が優勝を決める確率

独立反復試行 Lv.1

確率
典型

問．A，B の 2 人が繰り返し試合を行う．各試合において，A が勝つ確率は p，B が勝つ確率は q で，引き分けはない．先に 4 勝した方が優勝とするとき，次の確率を求めよ．

(1) 6 試合目に A が優勝を決める確率

(2) 6 試合目に優勝者が決まる確率

ランダムウォーク Lv.2

確率
典型

問．数直線上の動点 P を，コインを投げて表が出れば正の向きに 1 だけ移動させ，裏が出れば負の向きに 1 だけ移動させる．原点 O から出発して，コインを 10 回投げた後に点 P が初めて原点に戻る確率を求めよ．

ランダムウォーク Lv.1

確率
典型

問．数直線上の動点 P を，コインを投げて表が出れば正の向きに 1 だけ移動さ，裏が出れば負の向きに 1 だけ移動させる．原点 O から出発して，コインを 10 回投げた後の点 P が正の部分にある確率を求めよ．

全体像を見る

確率
典型

問．赤玉３個，白玉３個，青玉３個が入っている袋から３個の玉を取り出すとき，玉の色が２種類になる確率を求めよ．

余事象の利用

確率
典型

問．１から８までの数の書かれた８枚のカードから３枚のカードを取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) ３数の和が 18 以下となる確率

(2) ３数の積が４の倍数となる確率

非復元抽出 ～引いたくじは戻さない～

確率 **典型**

問．当たり３本，はずれ７本のくじから４本を引くとき，２本だけ当たりくじを引く確率を求めよ．ただし，引いたくじは戻さないとする．

同基準

問．トランプのスペード 13 枚を一列に並べるとき，絵札がすべて隣り合う確率を求めよ．

等確率

問．区別のない３個のサイコロを投げるとき，出た目の和が５となる確率を求めよ．

根号の計算

数 I 数と式
典型

問．$\alpha = 2 + \sqrt{3}$ のとき，$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ の値を求めよ．

別解研究入門

２重根号

問．$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ の２重根号をは

解の配置 Lv.3

２次関数
典型

問．２次方程式 $x^2-(k+4)x$

$\frac{k}{2}+4=0$ が $1<x<4$ に

少なくとも１つの実数解をも

解の配置 Lv.2

2次関数
典型

問. 2次方程式 $ax^2-(a-1)$
$a+1=0$ が $-1<x<1$
と $3<x<4$ にそれぞれ1
つの実数解を持つような定数

解の配置 Lv.1

2次関数
典型

問．2次方程式 $x^2+2ax+3-2a=0$ が次のような条件を満たすような実数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 符号の異なる2解をもつ

(2) 正の解をもつ

２つの文字含む因数分解

数Ⅰ数と式
典型

問．２元２次式

$$6x^2 + 5xy + y^2 - 7x - 3y + 2$$

を因数分解せよ

条件式付き２変数関数の最大最小 Lv.2

２次関数
典型

問．$2x^2+3y^2=8$ のとき，$4x+3y^2$ の最大値および最小値を求めよ．

複２次４次関数の最小値

２次関数
典型

問．関数 $y = x^4 + 6x^2 + 10$ の最小値を求めよ．

独立２変数関数の最小値

２次関数
典型

問. x と y が互いに関係なく変化するとき, $P = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 3$ の最小値とそのときの x, y の値

2 次関数の最大値 M の最小値

2 次関数
典型

問．a を与えられた定数として x の 2 次関数 $y = -x^2 + 4ax + 4a$ を考え，その最大値を M とする．

(1) M を a の式で表せ．

(2) M を最小とする a の値を求めよ．また，そのときの M の値を求めよ．

２次関数の最大最小から係数決定

問．関数 $y = ax^2 - 2ax + b \, (0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が９で，最小値が１であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

サイコロの目の最大値と最小値

確率
典型

問．サイコロを n 回振り，出た目の最大値を M，最小値を m とする．

(1) $M=5$ となる確率を求めよ．

(2) $M=5,\ m=2$ となる確率を求めよ．

(3) $M-m=3$ となる確率を求めよ．

サイコロの目の積

確率
典型

問．サイコロを n 回振り，出た目のすべての積を X とするとき，

(1) X が偶数である確率を求めよ.

(2) X が 6 の倍数である確率を求めよ.

(3) X が 4 の倍数である確率を求めよ.

(4) X が 12 の倍数である確率を求めよ.

絶対値を含む方程式・不等式

数Ⅰ数と式
典型

問．次の方程式・不等式を解け．

(1) $|x+3| = 4x$

(2) $|2x-1| \leqq x+3$

(3) $|x| + |x-1| = 3x$

(4) $|x| + |x-1| > 3x$

1次不等式の整数解

数Ⅰ数と式
典型

問．次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $\dfrac{x}{2}+4<\dfrac{2x+7}{3}$ を満たす最小の整数 x を求めよ．

(2) x の不等式 $2x+a>5(x-1)$ を満たす x のうち，最大の整数が 4 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(3) x の連立不等式 $7x-5>13-2x$，$x+a\geqq 3x+5$

係数に文字を含む１次不等式

数Ｉ数と式
典型

問．次の不等式を解け．ただし，a は定数とする．

(1) $ax = 2(x + a)$

(2) $ax < x + 2$

(3) $ax + 1 > x + a^2$

区間が動く２次関数の最大値・最小値

２次関数
典型

問．a は定数とする．関数 $y = x^2 - 2x + 2$ の $a \leqq x \leqq a + 2$ における最大値と最小値を求めよ．

軸が動く２次関数の最大値・最小値

問．a は定数とする．関数 $y = x^2 - 2ax + 3a$ の $0 \leqq x \leqq 4$ における最大値と最小値を求めよ．a は定数と

同じものを含む円順列 Lv.2

場合の数
典型

問．赤玉４個，白玉２個，黒玉２個を円形に並べる方法は何通りか．

同じものを含む円順列 Lv.1

場合の数
典型

問. 赤玉４個, 白玉３個, 黒玉１個を円形に並べる方法は何通りか.

重複組合せ Lv.2

問．10個のミカンを A，B，C の3人配る．1つももらわない人がいても良い場合，配り方は何通りあるか．

重複組合せ Lv.1

場合の数
典型

問．10個のミカンを A，B，C の3人配る．どの人も少なくとも1個はもらう場合，配り方は何通りあるか．

組分け Lv.3

問．１２人を３つの４人組に分ける方法は何通りか．

組分け Lv.2

場合の数
典型

問．12人を2つの6人組に分ける方法は何通りか．

組分け Lv.1

問．１２人を５人組と４人組と３人組に分ける方法は何通りか．

組分け Lv.0

場合の数
典型

問．１２人を８人組と４人組に分ける方法は何通りか．

部屋分け Lv.2

場合の数
典型

問．空室は作らないものとする．6人を A, B, C の3部屋に分ける方法は何通りあるか．

部屋分け Lv.1

場合の数
典型

問．空室は作らないものとする．６人を A，B の２部屋に分ける方法は何通りあるか．

背理法証明 Lv.2

集合と命題
典型

問．有理数 a，b のうち少なくとも１つが 0 でないならば，$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ．ただし，平方数でない正の整数 m に対して，$\sqrt{m}$ が無理数であることを前提としてよい．

背理法証明 Lv.1

集合と命題
典型

問．$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ．ただし，平方数でない正の整数 m に対して，$\sqrt{m}$ が無理数であることを前提としてよい．

$\sqrt{6}$ は無理数であることの証明

集合と命題
典型

問．$\sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ．

$\sqrt{2}$ は無理数であることの証明

集合と命題
典型

問．$\sqrt{6}$ は無理数であることを証明せよ．

対偶証明法 Lv.3

集合と命題
典型

問．整数 n について，n^2 が 6 の倍数ならば，n も 6 の倍数であることを証明せよ．

対偶証明法 Lv.2

集合と命題
典型

問．整数 n について，n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数であることを証明せよ．

対偶証明法 Lv.1

集合と命題
典型

問．整数 n について，n^2 が 2 の倍数ならば，n も 2 の倍数であることを証明せよ．