ベクトルの腕試し6題

$\boxed{\mathbf{1}}$ 平面上において同一直線上にない異なる 3 点 A，B，C があるとき，次の各々の式を満たす点 P の集合を求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\leqq\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ (鳥取大)

$\boxed{\mathbf{2}}$ 四面体 OABC の辺 OA，OB 上にそれぞれ点 D，E をとる．ただし，点 D は点 A，O と異なり，AE と BD の交点 F は線分 AE，BD をそれぞれ $2:1$，$3:1$ の比に内分している．また，辺 BC を $t:1$ $(t>0)$ の比に内分する点 P をとり，CE と OP の交点を Q とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ および t を用いて表せ．

(3) 直線 FQ と平面 ABC が平行になるような t の値を求めよ． (東京医科歯科大)

$\boxed{\mathbf{3}}$ 　$\triangle$ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし，その外接円の中心を O とする．正の実数 p に対して,BC を $(p+1):p$ に外分する点を D とし，線分 AD と $\triangle$ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ． (北海道大)

$\boxed{\mathbf{4}}$　空間内に 3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, 3) をとる．

(1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CP}}) = 0$ を満たしながら動くとき，この点はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ．

(2) (1) における定点 Q は 3 点 A，B，C を通る平面上にあることを示せ．

(3) (1) における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ．　(九大)

$\boxed{\mathbf{5}}$　平面上に三角形 ABC がある．その平面上の点 P が，$l\overrightarrow{\mathrm{PA}} + m\overrightarrow{\mathrm{PB}} + n\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$ を満たしているとする．ただし，l，m，n は $l + m + n = 1$ を満たす実数である．

(1) 点 P が辺 BC 上にあるための l，m，n の条件を求めよ．

(2) 点 P が直線 BC に関して A と同じ側にあるための l，m，n の条件を求めよ．　(津田塾大)

$\boxed{\textbf{6}}$ 点 O$(0,\ 0,\ 0)$ と点 N$(0,\ 0,\ 1)$ を直径の両端とする球面 S がある．xy 平面上の点 P$(\alpha,\ \beta,\ 0)$ を考え，直線 NP と球面 S の交わりで N と異なる点を Q$(X,\ Y,\ Z)$ とする．

(1) X，Y，Z を α，β で表せ．

(2) Q が，球面 S と平面 $x+y=\dfrac{1}{4}$ の交わりの円 C 上を動くとき，点 P の描く図形を求めよ．