連続性，微分可能性，平均値の定理に関する問題

1. 次の各々の関数が，連続関数になるように，定数 a の値を定めよ．

(1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \cdots\cdots \quad x \neq 1 \text{ のとき} \\ a & \cdots\cdots \quad x = 1 \text{ のとき} \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \cdots\cdots \quad x \neq 0 \text{ のとき} \\ a & \cdots\cdots \quad x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$

2. $f(x)$ が $x=a$ で微分可能なとき，次の極限値を求めよ．

(1) $L_1 = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$

(2) $L_2 = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$

(3) $L_3 = \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x^2-a^2} \quad (a \neq 0)$

3. 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$ を求めよ．

4. e を自然対数の底とする．$e \leqq p < q$ のとき，不等式

$$\log(\log q)-\log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ．