# 第 3 回　$\sin x$ と $\cos x$ を多項式関数で近似する

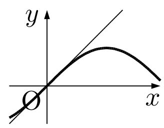
**問．** $x > 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

**(1)** $\sin x < x$　　　**(2)** $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2!}$

**(3)** $\sin x > x - \dfrac{x^3}{3!}$　　　**(4)** $\cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$

**解答**

(1) $y = \sin x$ の $x = 0$ における微分係数は 1 なので，右のグラフより，$\sin x < x$. $\square$




(2) $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2!}$ とおくと，

$$f'(x) = -\sin x + x > 0 \quad \because \quad (1)$$

よって，$f(x)$ は単調増加するので，$f(x) > f(0) = 0$. ゆえに，$\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2!}$. $\square$

(3) $g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{3!}$ とおくと，

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} > 0 \quad \because \quad (2)$$

よって，$g(x)$ は単調増加するので，$g(x) > g(0) = 0$. ゆえに，$\sin x > x - \dfrac{x^3}{3!}$. $\square$

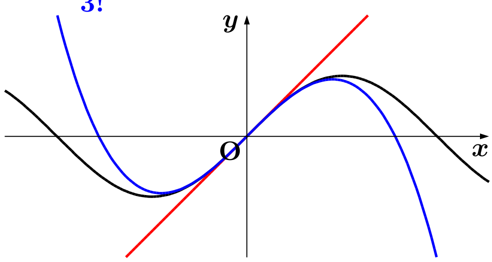
(4) $h(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!}$ とおくと，

$$h'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{3!} < 0 \quad \because \quad (3)$$

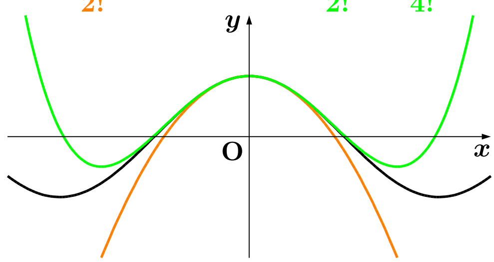
よって，$h(x)$ は単調減少するので，$h(x) < h(0) = 0$. ゆえに，$\cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$. $\square$

この問題から得られたのは，$\sin x$ と $\cos x$ の多項式関数による評価である；

$$x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$$




$$1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$




これを繰り返していくと，$\sin x$，$\cos x$ の多項式近似が見えてくる；

**$\sin x$，$\cos x$ のテイラー展開**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \qquad \cdots\cdots ②$$

# 第4回　$e^x$ を多項式関数で近似する

**問．** $x>0$ のとき，次の各不等式を証明せよ．ただし，$n$ は自然数とする．

**(1)** $e^x > 1+x$　　**(2)** $e^x > 1+x+\dfrac{x^2}{2!}$

**(3)** $e^x > 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$

**解答**

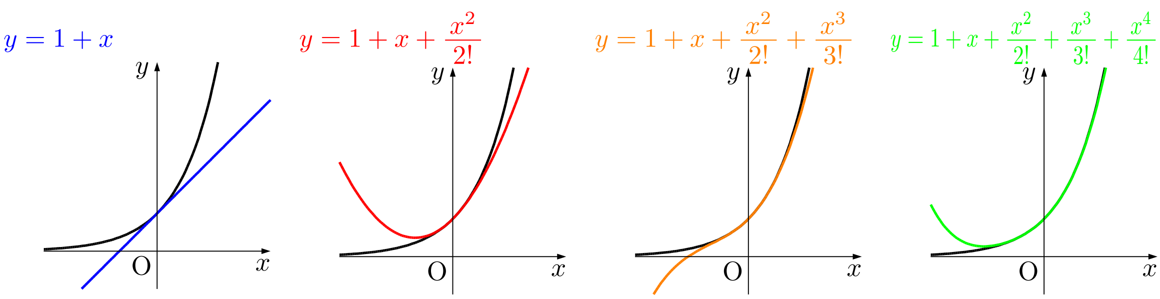
(1) $f(x)=e^x-1-x$ とおくと，$f'(x)=e^x-1>0$.
よって，$f(x)$ は単調増加ので，$f(x)>f(0)=0$．ゆえに，$e^x>1+x$. □

(2) $g(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$ とおくと，$f'(x)=e^x-1-x>0$　$\because$　(i).
よって，$g(x)$ は単調増加するので，$g(x)>g(0)=0$．ゆえに，$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$. □

(3) $f_n(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2!}-\cdots-\dfrac{x^n}{n!}$ とおく．$k$ を自然数とし $f_k(x)>0$ と仮定すると，

$$f'_{k+1}(x)=\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\cdots-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)'$$
$$=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\cdots-\frac{x^k}{k!}=f_k(x)>0.$$

よって，$f_{k+1}(x)$ は単調増加するので，$f_{k+1}(x)>f_{k+1}(0)=0$.
これと (i) より $f_1(x)>0$ から，全ての自然数 $n$ に対して，$f_n(x)>0$ が成立する．
ゆえに，$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ が成立する． □




(3) の不等式において，右辺の級数は増加数列であり，かつ，$e^x$ を超えないので，収束することがわかる．実は，その極限は左辺に一致することが知られている；

**$e^x$ のテイラー展開**

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

この等式の証明は大学以降に譲る．ここに $x=1$ を代入すると

**自然対数の底 $e$ の値の近似式**

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

が得られる．これはなかなか収束の速い近似式で，実用性が高い．