【自然科学コース】2 年学年末考査 数学探求 I ①　2021.3.4(木)　　2 年 ＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

1.　関数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ の増減，極値，グラフの凹凸，漸近線を調べ，グラフの概形をかけ．　(14 点)

解答

$f(x)=\dfrac{(x+1)^2+1}{x+1}=x+1+\dfrac{1}{x+1}$ より，

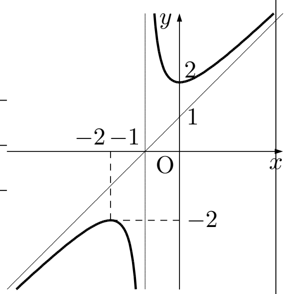
$\displaystyle\lim_{x\to\pm-1\pm0}f(x)=\pm\infty,\ \lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(x+1)\}=0$

$\therefore$ **直線 $\boldsymbol{x=-1}$，$\boldsymbol{y=x+1}$ が漸近線.**

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$
$$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$$

ゆえに，$f(x)$ の増減，凹凸，グラフは次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	／	$+$		$+$
$f(x)$	↗	-2	↘	／	↘	2	↗



よって，**$\boldsymbol{x=-2}$ で極大値 $\boldsymbol{-2}$，$\boldsymbol{x=0}$ で極小値 2** をとる．

2.　$-\pi\leqq x\leqq\pi$ における $y=2\sin x+\sin 2x$ の最大値と最小値を求めよ．　(14 点)

解答

奇関数なので，$0\leqq x\leqq\pi$ を調べる．

$$\begin{aligned}y'&=2\cos x+2\cos 2x\\&=2(\cos x+\cos 2x)\\&=2(\cos x+2\cos^2 x-1)\\&=2(2\cos x-1)(\cos x+1)\end{aligned}$$

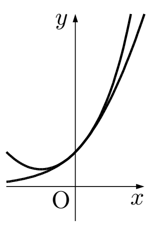
よって，y の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	0

よって，求める最大値は $f(\frac{\pi}{3})=\boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{3}}$，最小値は $f(-\frac{\pi}{3})=\boldsymbol{\frac{-3}{2}\sqrt{3}}$.

3.　すべての正の数 x に対して，$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ が成立することを示せ．　(14 点)

解答



$f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$ とおくと，

$$f'(x)=e^x-1-x$$
$$f''(x)=e^x-1$$

$x>0$ のとき，$f''(x)>0$ より，$f'(x)$ は単調増加する．
よって，$f'(x)>f'(0)=0$，$f(x)$ は単調増加する．
よって，$f(x)>f(0)=0$．故に，$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$　□

4.　方程式 $ax^5-x^2+3=0$ が 3 個の異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．　(14 点)

解答

$ax^5-x^2+3=0$ において，$x=0$ とすると，$3=0$ となり成立しない．よって $x\neq0$ とし，

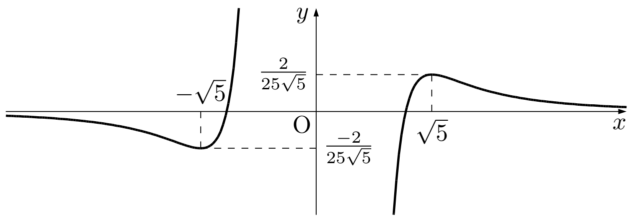
$$a=\frac{x^2-3}{x^5}:=f(x)\quad とおくと，$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x^5-(x^2-3)\cdot5x^4}{(x^5)^2}=\frac{-3(x^2-5)}{x^6}$$

よって，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{-2}{25\sqrt{5}}$	↗	／	↗	$\frac{2}{25\sqrt{5}}$	↘

また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to\pm0}f(x)=\mp\infty$ より，



よって，求める a の値の範囲は $\boldsymbol{\frac{-2}{25\sqrt{5}}<a<0,\ 0<a<\frac{2}{25\sqrt{5}}}$

5.　$f(x)=(x^2+a)e^x$ とする．ただし，a は定数とする．

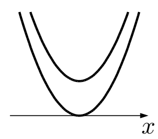
(1) 関数 $f(x)$ が極値をもたないような a の値の範囲を求めよ．(7 点)
(2) 曲線 $y=f(x)$ が変曲点をもつような a の値の範囲を求めよ．(7 点)

解答

(1) $f'(x)=2x\cdot e^x+(x^2+a)e^x=(x^2+2x+a)e^x$.
より，$f(x)$ が極値をもたないための条件は，

$f'(x)$ の符号が一定であること $\cdots(*)$

である．$x^2+2x+a=0$ の判別式を D とすると，$(*)$ となるための条件は，



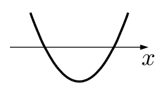
$$D=2^2-4\cdot a\leqq0$$

よって，求める a の値の範囲は $\boldsymbol{a\geqq1}$.

(2) $f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+a)e^x=(x^2+4x+2+a)e^x$.
より，$f(x)$ のグラフが変曲点をもつための条件は

$f''(x)$ に符号変化が起こること $\cdots(**)$

である．$x^2+4x+2+a=0$ の判別式を D とすると，$(**)$ となる条件は，



$$D=4^2-4(2+a)>0$$

よって，求める a の値の範囲は $\boldsymbol{a<2}$.

6. 次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ $(x>0)$ の増減を調べよ． (5点)

(2) $a^{b^2}=b^{a^2}$ かつ $a<b$ を満たす自然数の組 (a,b) は存在するか．ただし，a^{b^2} は底が a であり指数が b^2 である累乗を表し，b^{a^2} は底が b で指数が a^2 である累乗を表している． (10点)

解答

(1)

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}\cdot\log x+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{-2\log x+1}{x^3}$$

よって，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗		↘

(2)

$$\begin{aligned}a^{b^2}=b^{a^2}&\iff \log a^{b^2}=\log b^{a^2}\\&\iff b^2\log a=a^2\log b\\&\iff \frac{\log a}{a^2}=\frac{\log b}{b^2}\\&\iff f(a)=f(b)\end{aligned}$$

$f(x)$ の増減より，$0<a<e^{\frac{1}{2}}$ かつ $e^{\frac{1}{2}}<b$ である必要がある．
$e^{\frac{1}{2}}<2.8^{\frac{1}{2}}<2$ より，$a=1$．
このとき，$f(b)=f(a)=f(1)=0$ が必要だが，

$$x>1 \text{ のとき，}\quad f(x)=\frac{\log x}{x^2}>0$$

なので，$f(b)=0$ となる b は $b>e^{\frac{1}{2}}$ の範囲に存在しない．
以上より，$a^{b^2}=b^{a^2}$ なる自然数の組 (a,b) は存在しない． □

7. 1辺の長さが2の正四面体OABCにおいて，辺OA上に点Pをとり，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=1$ とする．さらに，辺PB上に点Qを，PBとCQが垂直にあるようにとる．OP：PAとPQ：QBをそれぞれ求めよ． (15点)

解答

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=1\cdots$① $\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0\cdots$②
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(t,s$ は実数$)$ とおく．

①より，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=1\\&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=1\\&\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=1\\&2\cdot2\cdot\frac{1}{2}-t\cdot2^2=1\quad\therefore\quad t=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $\therefore$ **OP：PA＝1：3**

②より，

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0\\&\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=0\\&\frac{1}{4}s\cdot2+(1-s)\cdot2^2-2-\frac{1}{16}s\cdot2^2-\frac{1}{4}(1-s)\cdot2+\frac{1}{4}\cdot2=0\\&\frac{s}{2}+4-4s-2-\frac{s}{4}-\frac{1}{2}+\frac{s}{2}+\frac{1}{2}=0\\&2-\frac{13}{4}s=0\quad\therefore\quad s=\frac{8}{13}\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{8}{13}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{5}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $\therefore$ **PQ：QB＝5：8**