第1章　計算力を身に付けたい高校生向け

1.1　数I数と式 計算15題

1.1.1 2乗の展開 $(a+b)^2, (a+b+c)^2, (a+b+c+d)^2$

次の式を展開せよ.

(1) $(a+b)^2$

(2) $(a+b+c)^2$

(3) $(a+b+c+d)^2$

1.1.2 3乗の展開 $(a+b)^3, (a+b+c)^3$

次の式を展開せよ.

(1) $(a+b)^3$

(2) $(a+b+c)^3$

1.1.3 3次式 a^3+b^3 の因数分解

a^3+b^3 を因数分解せよ.

1.1.4 3次式 $a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解

$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ.

1.1.5 3次式の因数分解 $a^3+b^3+c^3+d^3-3abc-3bcd-3cda-3dab$

$a^3+b^3+c^3+d^3-3abc-3bcd-3cda-3dab$ を因数分解せよ.

1.1.6 x^n-y^n の因数分解

$x^2-y^2, x^3-y^3, x^4-y^4, x^5-y^5$ を因数分解せよ.

1.1.7 因数分解 〜 平方の差 ②〜

$x^4-13x^2y^2+4y^4$ を因数分解せよ.

1.1.8 因数分解 〜 平方の差 ①〜

x^6-y^6 を因数分解せよ.

1.1.9 因数分解の有名問題 〜 上級 〜

$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$ を因数分解せよ.

1.1.10 対称式 x^2+y^2 の計算

$x+y=10, xy=1$ のとき，x^2+y^2 の値を求めよ.

1.1.11 対称式 x^3+y^3 の計算

$x+y=10, xy=1$ のとき，x^3+y^3 の値を求めよ.

1.1.12 対称式 x^4+y^4, x^5+y^5 の計算

$x+y=10, xy=1$ のとき，x^4+y^4, x^5+y^5 の値を求めよ．

1.1.13 3 元対称式 $x^2+y^2+z^2$ の値

$x+y+z=2\sqrt{3}+1, xy+yz+zx=2\sqrt{3}-1, xyz=-1$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2+y^2+z^2$　(2) $x^3+y^3+z^3$　(3) $x^4+y^4+z^4$

1.1.14 3 元対称式 $x^3+y^3+z^3$ の値

$x+y+z=2\sqrt{3}+1, xy+yz+zx=2\sqrt{3}-1, xyz=-1$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2+y^2+z^2$　(2) $x^3+y^3+z^3$　(3) $x^4+y^4+z^4$

1.1.15 3 元対称式 $x^4+y^4+z^4$ の値

$x+y+z=2\sqrt{3}+1, xy+yz+zx=2\sqrt{3}-1, xyz=-1$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $x^2+y^2+z^2$　(2) $x^3+y^3+z^3$　(3) $x^4+y^4+z^4$

1.2 数 II 式と証明 計算 3 題

1.2.1 分数式の通分

次の式を計算せよ．

$$\frac{2x-1}{x^2-3x+2}-\frac{x-5}{x^2-5x+6}$$

1.2.2 繁分数の計算

次の式を計算せよ．

$$\frac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}}$$

1.2.3 連分数の計算

次の式を計算せよ．

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}$$

1.3 指数対数 計算 9 題

1.3.1 分数の分数乗

次の式の値を求めよ．

$$\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$$

1.3.2 累乗根の計算
次の式の値を求めよ.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{16}} \div \frac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{\sqrt{64}}} \times \frac{\sqrt{32}}{\sqrt[3]{\sqrt{32}}}$$

1.3.3 無理数乗の計算
次の式の値を求めよ.

$$6^{\sqrt{6}} \times 2^{\sqrt{6}} \div 3^{\sqrt{6}}$$

1.3.4 3 乗根の有理化
次の分数の分母を有理化せよ.

$$\frac{5}{\sqrt[3]{4}+1}$$

1.3.5 肩の上の対数
次の式の値を求めよ.

$$3^{\log_9 8}$$

1.3.6 対数計算
次の式の値を求めよ.

$$\log_5 \sqrt{2} - \frac{1}{2}\log_5 \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\log_5 \sqrt[3]{30}$$

1.3.7 無理数乗の大小比較
次の □ に $=, <, >$ のいずれかを入れよ.

(1) $\left(\sqrt{2}\right)^2 \,\square\, \log_{\sqrt{2}} 2$
(2) $\left(\sqrt{2}\right)^4 \,\square\, \log_{\sqrt{2}} 4$
(3) $\left(\sqrt{2}\right)^8 \,\square\, \log_{\sqrt{2}} 8$
(4) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{8}} \,\square\, \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$

1.3.8 底の変換公式
次の式の値を求めよ.

$$(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 4)$$

1.3.9 指数計算に対数を利用
$2^x = 5^y = 10^z$ のとき, $xy - yz - zx$ の値を求めよ.

1.4　数 II 微積 計算 10 題

1.4.1 $y=(2x+1)^3$ の微分

次の関数を微分せよ．

$$y=(2x+1)^3$$

1.4.2 $y=(2x+1)^2\left(3x^2-2\right)$ の微分

次の関数を微分せよ．

$$y=(2x+1)^2\left(3x^2-2\right)$$

1.4.3 3 次関数の極値の和と差

関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3bx$ の極大値と極小値の和および差がそれぞれ $-18, 32$ であるとき，定数 a, b の値を定めよ．

1.4.4 次数下げによる極値計算

次の関数の極値を求めよ．

$$y=x^3+x^2-2x$$

1.4.5 3 次関数の極値の差

次の関数の極大値と極小値の差が 4 であるような a の値を求めよ．

$$f(x)=x^3+ax^2+x$$

1.4.6 定積分の基本計算

定積分 $\displaystyle\int_1^5\left(x^2-3x\right)dx$ を求めよ．

1.4.7 $(ax+b)^n$ の定積分

定積分 $\displaystyle\int_0^1(2x-1)^5\,dx$ を求めよ．

1.4.8 $\sqrt{r^2-x^2}$ の定積分

定積分 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx$ を求めよ．

1.4.9 $\sqrt{x}$ の定積分

定積分 $\displaystyle\int_0\sqrt[3]{x}dx$ を求めよ．

1.4.10 絶対値の定積分

定積分 $\displaystyle\int_{-3}^3\left|x^2+x-2\right|dx$ の値を求めよ．

第 2 章　典型問題を押さえたい高校生向け

2.1　数 I 数と式 典型 6 題

2.1.1 2 つの文字含む因数分解

2 元 2 次式

$$6x^2 + 5xy + y^2 - 7x - 3y + 2$$

を因数分解せよ．

2.1.2 2 重根号

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ の 2 重根号をはずせ．

2.1.3 根号の計算

$\alpha = 2+\sqrt{3}$ のとき，$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ の値を求めよ．

2.1.4 係数に文字を含む 1 次不等式

次の不等式を解け．ただし，a は定数とする．

(1) $ax = 2(x+a)$

(2) $ax < x + 2$

(3) $ax + 1 > x + a^2$

2.1.5 1 次不等式の整数解

次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $\dfrac{x}{2} + 4 < \dfrac{2x+7}{3}$ を満たす最小の整数 x を求めよ．

(2) x の不等式 $2x + a > 5(x-1)$ を満たす x のうち，最大の整数が 4 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(3) x の連立不等式 $7x - 5 > 13 - 2x, x + a \geqq 3x + 5$ を満たす整数 x がちょうど 5 個存在するとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

2.1.6 絶対値を含む方程式・不等式

次の方程式・不等式を解け．

(1) $|x+3| = 4x$

(2) $|2x-1| \leqq x+3$

(3) $|x| + |x-1| = 3x$

(4) $|x| + |x-1| > 3x$

2.2 集合と命題 典型７題

2.2.1 n^2 が 2 の倍数であるならば n も 2 の倍数である

整数 n について，次のことを証明せよ．

(1) n^2 が 2 の倍数ならば，n も 2 の倍数である．
(2) n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数である．
(3) n^2 が 6 の倍数ならば，n も 6 の倍数である．

2.2.2 n^2 が 3 の倍数ならば n も 3 の倍数である

整数 n について，次のことを証明せよ．

(1) n^2 が 2 の倍数ならば，n も 2 の倍数である．
(2) n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数である．
(3) n^2 が 6 の倍数ならば，n も 6 の倍数である．

2.2.3 n^2 が 6 の倍数ならば n も 6 の倍数である

整数 n について，次のことを証明せよ．

(1) n^2 が 2 の倍数ならば，n も 2 の倍数である．
(2) n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数である．
(3) n^2 が 6 の倍数ならば，n も 6 の倍数である．

2.2.4 $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

次のことを証明せよ．

(1) $\sqrt{2}$ は無理数である．
(2) $\sqrt{6}$ は無理数である．

2.2.5 $\sqrt{6}$ が無理数であることの証明

次のことを証明せよ．

(1) $\sqrt{2}$ は無理数である．
(2) $\sqrt{6}$ は無理数である．

2.2.6 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることの証明

次のことを証明せよ．ただし，平方数でない正の整数 m に対して，$\sqrt{m}$ が無理数であることを前提としてよい．

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．
(2) 有理数 a, b のうち少なくとも 1 つが 0 でないならば，$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ は無理数である．

2.2.7 $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ が無理数であることの証明

次のことを証明せよ．ただし，平方数でない正の整数 m に対して，$\sqrt{m}$ が無理数であることを前提としてよい．

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．

(2) 有理数 a, b のうち少なくとも 1 つが 0 でないならば，$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ は無理数である．

2.3 2 次関数 典型 10 題

2.3.1 軸が動く 2 次関数の最大値・最小値

a は定数とする．関数 $y=x^2-2ax+3a$ の $0 \leqq x \leqq 4$ における最大値と最小値を求めよ．a は定数とする．

2.3.2 区間が動く 2 次関数の最大値・最小値

a は定数とする．関数 $y=x^2-2x+2$ の $a \leqq x \leqq a+2$ における最大値と最小値を求めよ．

2.3.3 2 次関数の最大最小から係数決定

関数 $y=ax^2-2ax+b\,(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 9 で，最小値が 1 であるとき，定数 a, b の値を求めよ．

2.3.4 2 次関数の最大値 M の最小値

a を与えられた定数として x の 2 次関数 $y=-x^2+4ax+4a$ を考え，その最大値を M とする．

(1) M を a の式で表せ．

(2) M を最小とする a の値を求めよ．また，そのときの M の値を求めよ．

2.3.5 独立 2 変数関数の最小値

x と y が互いに関係なく変化するとき，$P=x^2+2y^2-2xy+2x+3$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ．

2.3.6 複 2 次 4 次関数の最小値

関数 $y=x^4+6x^2+10$ の最小値を求めよ．

2.3.7 条件式付き 2 変数関数の最大最小 ～ 中級 ～

$2x^2+3y^2=8$ のとき，$4x+3y^2$ の最大値および最小値を求めよ．

2.3.8 解の配置 ①～ 正の解をもつ ～

2 次方程式 $x^2+2ax+3-2a=0$ が次のような条件を満たすような実数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 符号の異なる 2 解をもつ

(2) 正の解をもつ

2.3.9 解の配置 ②～ 区間に 1 つの解をもつ ～

2 次方程式 $ax^2-(a-1)\,x-a+1=0$ が $-1<x<1$ と $3<x<4$ にそれぞれ 1 つの実数解を持つような定数 a の値の範囲を求めよ．

2.3.10 解の配置 ③～ 区間に少なくとも 1 つの解 ～

2 次方程式 $x^2-(k+4)\,x-\dfrac{k}{2}+4=0$ が $1<x<4$ に少なくとも 1 つの実数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ．

2.4　三角比 典型 5 題

2.4.1 円に内接する四角形の面積

円 O に内接する四角形 ABCD が $\mathrm{AB}=2, \mathrm{BC}=3, \mathrm{CD}=1, \angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ を満たしている.

(1) 円 O の半径 R を求めよ.

(2) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ.

2.4.2 三角形の形状決定

次の等式を満たす △ABC はどのような形か.

$$a^2 \cos A \sin B = b^2 \cos B \sin A$$

2.4.3 三角形の内角の sin の比

$\dfrac{5}{\sin A} = \dfrac{7}{\sin B} = \dfrac{8}{\sin C}$ である △ABC の最小角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ.

2.4.4 内角二等分線の長さ

△ABC において，$\mathrm{AB}=5, \mathrm{AC}=8, \angle A=60^\circ$, $\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ.

2.4.5 内接円と外接円の半径

△ABC において，$\mathrm{AB}=5, \mathrm{BC}=7, \mathrm{AC}=8$ のとき，内接円の半径 r と外接円の半径 R を求めよ.

2.5　場合の数 典型 10 題

2.5.1 部屋分け 〜6 人を 2 つの部屋 A，B に分ける 〜

空室は作らないものとする.

(1) 6 人を A，B の 2 部屋に分ける方法は何通りあるか.

(2) 6 人を A，B，C の 3 部屋に分ける方法は何通りあるか.

2.5.2 部屋分け 〜6 人を 3 つの部屋 A，B，C に分ける 〜

空室は作らないものとする.

(1) 6 人を A，B の 2 部屋に分ける方法は何通りあるか.

(2) 6 人を A，B，C の 3 部屋に分ける方法は何通りあるか.

2.5.3 組分け ①〜12 人を 8 人，4 人に 〜

12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか.

(1) 8 人組と 4 人組に分ける.

(2) 5 人組と 4 人組と 3 人組に分ける.

(3) 2 つの 6 人組に分ける.

(4) 3 つの 4 人組に分ける．

2.5.4 組分け ②〜12 人を 5 人，4 人，3 人に〜

12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか．

(1) 8 人組と 4 人組に分ける．

(2) 5 人組と 4 人組と 3 人組に分ける．

(3) 2 つの 6 人組に分ける．

(4) 3 つの 4 人組に分ける．

2.5.5 組分け ③〜12 人を 6 人，6 人に〜

12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか．

(1) 8 人組と 4 人組に分ける．

(2) 5 人組と 4 人組と 3 人組に分ける．

(3) 2 つの 6 人組に分ける．

(4) 3 つの 4 人組に分ける．

2.5.6 組分け ④〜12 人を 4 人，4 人，4 人に〜

12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか．

(1) 8 人組と 4 人組に分ける．

(2) 5 人組と 4 人組と 3 人組に分ける．

(3) 2 つの 6 人組に分ける．

(4) 3 つの 4 人組に分ける．

2.5.7 重複組合せ〜ミカンの配り方 ①〜

10 個のミカンを A，B，C の 3 人配る．次の各々の場合，配り方は何通りあるか．

(1) どの人も少なくとも 1 個はもらう場合

(2) 1 つももらわない人がいても良い場合

2.5.8 重複組合せ〜ミカンの配り方 ②〜

10 個のミカンを A，B，C の 3 人配る．次の各々の場合，配り方は何通りあるか．

(1) どの人も少なくとも 1 個はもらう場合

(2) 1 つももらわない人がいても良い場合

2.5.9 同じものを含む円順列〜初級〜

次の各々の場合は何通りあるか．

(1) 赤玉 4 個，白玉 3 個，黒玉 1 個を円形に並べる方法

(2) 赤玉 4 個，白玉 2 個，黒玉 2 個を円形に並べる方法

2.5.10 同じものを含む円順列 〜 中級 〜

次の各々の場合は何通りあるか.

(1) 赤玉 4 個，白玉 3 個，黒玉 1 個を円形に並べる方法
(2) 赤玉 4 個，白玉 2 個，黒玉 2 個を円形に並べる方法

2.6 確率 典型 15 題

2.6.1 等確率 〜 区別のない 3 つのサイコロ 〜

区別のない 3 個のサイコロを投げるとき，出た目の和が 5 となる確率を求めよ.

2.6.2 同基準 〜 隣り合う確率を求める 2 つの方法 〜

トランプのスペード 13 枚を一列に並べるとき，絵札がすべて隣り合う確率を求めよ.

2.6.3 非復元抽出 〜 引いたくじは戻さない 〜

当たり 3 本，はずれ 7 本のくじから 4 本を引くとき，2 本だけ当たりくじを引く確率を求めよ．ただし，引いたくじは戻さないとする.

2.6.4 余事象の利用 〜 積が 4 の倍数になる確率 〜

1 から 8 までの数の書かれた 8 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき，次の確率を求めよ.

(1) 3 数の和が 18 以下となる確率
(2) 3 数の積が 4 の倍数となる確率

2.6.5 全体像を見る 〜 玉の色が 2 種類になる確率 〜

赤玉 3 個，白玉 3 個，青玉 3 個が入っている袋から 3 個の玉を取り出すとき，玉の色が 2 種類になる確率を求めよ.

2.6.6 対称性に着目 〜 ランダムウォークの確率 〜

数直線上の動点 P を，コインを投げて表が出れば正の向きに 1 だけ移動さ，裏が出れば負の向きに 1 だけ移動させる．原点 O から出発して，コインを 10 回投げた後の点 P が正の部分にある確率を求めよ.

2.6.7 推移グラフ 〜 ランダムウォークの確率 〜

数直線上の動点 P を，コインを投げて表が出れば正の向きに 1 だけ移動させ，裏が出れば負の向きに 1 だけ移動させる．原点 O から出発して，コインを 10 回投げた後に点 P が初めて原点に戻る確率を求めよ.

2.6.8 独立反復試行 〜 先に 4 勝で優勝 〜

A，B の 2 人が繰り返し試合を行う．各試合において，A が勝つ確率は p, B が勝つ確率は q で，引き分けはない．先に 4 勝した方が優勝とするとき，次の確率を求めよ.

(1) 6 試合目に A が優勝を決める確率
(2) 6 試合目に優勝者が決まる確率

2.6.9 独立反復試行 〜3 勝リードで優勝 〜

A，B の 2 人が繰り返し試合を行う．各試合において，A が勝つ確率は p, B が勝つ確率は q で，引き分けはない．先に 3 勝リードした方が優勝とするとき，次の確率を求めよ．

(1) 5 試合目に A が優勝を決める確率

(2) 9 試合目に A が優勝を決める確率

2.6.10 サイコロの目の積

サイコロを n 回振り，出た目のすべての積を X とするとき，

(1) X が偶数である確率を求めよ．

(2) X が 6 の倍数である確率を求めよ．

(3) X が 4 の倍数である確率を求めよ．

(4) X が 12 の倍数である確率を求めよ．

2.6.11 サイコロの目の最大値と最小値

サイコロを n 回振り，出た目の最大値を M，最小値を m とする．

(1) $M = 5$ となる確率を求めよ．

(2) $M = 5, m = 2$ となる確率を求めよ．

(3) $M - m = 3$ となる確率を求めよ．

2.6.12 条件付き確率 〜 くじ引き 〜

当たり 2 本，ハズレ 3 本入った箱からくじを 1 本取り出し，それを元に戻さずにもう 1 本取り出す．2 本目が当たりだったとき，1 本目も当たりである確率を求めよ．

2.6.13 条件付き確率 〜 箱と玉 〜

2 つの箱 A，B があり，A には赤玉 4 個と白玉 1 個，B には赤玉 2 個と白玉 3 個が入っている．サイコロを振り，1 の目が出れば A，他の目が出れば B を選び，選んだ箱から玉を 1 個取り出す．取り出した玉が赤であるとき，箱 A が選ばれていた確率を求めよ．

2.6.14 条件付き確率 〜 忘れた帽子 〜

5 回に 1 回の割合で，帽子を忘れる癖のある N 君が，正月に A，B，C の 3 軒を順に年始廻りをして家に帰ったとき，帽子を忘れてきたことに気づいた．家 B に忘れてきた確率を求めよ．

2.6.15 確率の最大化

O さんが各問題に正解する確率は $\dfrac{99}{100}$ である．O さんが 3 問違えるまで問題を解き続けるとき，n 問目で終わる確率 P_n が最大となる n を求めよ．

2.7 整数 典型 6 題

2.7.1 1 次不定方程式の整数解 〜1 組 〜

$29x + 42y = 4$ の整数解をすべて求めよ．

2.7.2 1 次不定方程式の整数解 〜 すべて 〜

$29x + 42y = 4$ の整数解をすべて求めよ．

2.7.3 3 元不定方程式の有名問題

$\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = 1$ を満たす自然数解 (l, m, n) をすべて求めよ．ただし，$l \leqq m \leqq n$ とする．

2.7.4 互いに素の証明

2 つの自然数 a と b が互いに素であるとき，a と $a + b$ も互いに素であることを示せ．

2.7.5 余りによる分類

n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数であることを示せ．

2.7.6 倍数証明

n が奇数のとき，$n^5 - n$ は 240 の倍数であることを証明せよ．

2.8 数 II 式と証明 典型 6 題

2.8.1 恒等式の基本

次の式が恒等式となるように，定数 a, b, c, d の値を定めよ．

$$x^3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$

2.8.2 条件つきの等式の証明

$a + b + c = 0$ のとき，$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc = 0$ であることを示せ．

2.8.3 比例式の計算

$x + y = \dfrac{y+z}{2} = \dfrac{z+x}{5} \neq 0$ のとき，$\dfrac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$ の値を求めよ．

2.8.4 少なくとも一つは 1 であることの証明

$\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = 1$ ならば，α, β, γ のうち少なくとも 1 つは 1 に等しいことを証明せよ．

2.8.5 不等式の証明

次の不等式を証明せよ．

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$$

2.9 図形と方程式 典型 12 題

2.9.1 2 直線の平行・垂直条件

2 直線 $ax + 2y = 1, x + (a-1)y = 3$ が次の条件を満たすとき，定数 a の値を求めよ．

(1) 平行　　(2) 垂直

2.9.2 3 点を通る円の方程式

3 点 A $(2,1)$, B $(6,3)$, C $(-1,2)$ がある.

(1) 3 点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ.

(2) 三角形 ABC の外心の座標と，外接円の半径を求めよ.

2.9.3 円と直線の共有点

円 $x^2+y^2=5$ と次の直線の共有点の座標を求めよ.

(1) $y=x-1$ (2) $y=2x+5$

2.9.4 円と直線が共有点をもつ条件

円 $x^2+y^2=8$ と直線 $y=x+m$ が共有点を持つとき，定数 m の値の範囲を求めよ.

2.9.5 円と直線が接する条件

円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=2x+m$ が接するとき，定数 m の値を求めよ.

2.9.6 円の接線の公式

円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,4)$ における接線の方程式を求めよ.

2.9.7 円に引いた接線の方程式

次のような接線の方程式を求めよ.

(1) 円 $x^2+y^2=5$ 上の点 $(3,4)$ における接線

(2) 点 $(1,3)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線

2.9.8 円に内接・外接する円

中心が $(4,3)$ で円 $x^2+y^2=1$ に接する円の方程式を求めよ.

2.9.9 軌跡 〜 初級 〜

2 点 A $(-3,0)$, B $(2,0)$ からの距離の比が $3:2$ であるような点 P の軌跡を求めよ.

2.9.10 三角形の重心の軌跡

2 点 O $(0,0)$, A $(1,0)$ と円 $x^2+y^2=9$ 上を動く点 Q を頂点とする三角形 OAQ の重心 P の軌跡を求めよ.

2.9.11 不等式の表す領域

次の不等式が表す領域を図示せよ.

(1) $y>x^2+1$

(2) $3x-2y-2\geqq 0$

(3) $x\leqq 2$

(4) $(x+2)^2+y^2<1$

(5) $x^2+y^2-6x-2y+1\geqq 0$

(6) $x^2+y^2<25, y<3x-5$

(7) $(x-y)(x+y-2)<0$

2.9.12 線形計画法

$3x+y \geqq 6, x+3y \geqq 6, x+y \leqq 6$ のとき，$x+2y$ の最大値と最小値を求めよ．

2.10 三角関数 典型 15 題

2.10.1 三角関数の相互関係

(1) $\sin\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta, \tan\theta$ の値を求めよ．
(2) $\tan\theta = 3$ のとき，$\sin\theta, \cos\theta$ の値を求めよ．

2.10.2 三角方程式・不等式 ～ 中級 ～

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け．

(1) $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(2) $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2.10.3 2 次関数の最大最小に帰着

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \sin^2\theta - \cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

2.10.4 三角方程式・不等式 ～2 次方程式に帰着 ～

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け．

(1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$
(2) $2\cos^2\theta \leqq 3\sin\theta$

2.10.5 2 直線のなす鋭角 θ

2 直線

$$y = 3x - 1,$$
$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

のなす鋭角 θ を求めよ．

2.10.6 加法定理を用いた点の回転移動

点 $\mathrm{P}(3, 2)$ を原点 O を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点 Q の座標を求めよ．

2.10.7 2 倍角を含む方程式・不等式

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け．

(1) $\sin 2x = \sin x$
(2) $\cos 2\theta \leqq 3\sin x - 1$

2.10.8 三角関数の合成

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ.

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

(2) $\sin\theta-\cos\theta$

2.10.9 三角方程式・不等式 〜 合成 〜

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け.

(1) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$

(2) $\sin x-\sqrt{3}\cos x>1$

2.10.10 三角関数の最大 〜 合成 〜

次の関数の最大値と最小値およびそのときの x の値を求めよ.

$y=\sin x+\cos x\,(0 \leqq x \leqq \pi)$

2.10.11 三角関数の最大 〜 sin と cos の 2 次式 〜

次の関数の最大値と最小値およびそのときの x の値を求めよ.

$y=\sin^2 x+4\sin x\cos x+5\cos^2 x\,(0 \leqq x < 2\pi)$

2.10.12 三角関数の最大値 〜 sin と cos の対称式 〜

次の関数の最大値と最小値を求めよ.

$y=2\sin x\cos x+\sin x+\cos x\,(0 \leqq x < 2\pi)$

2.10.13 三角方程式の解の個数

$\sin^2\theta-\cos\theta+a=0\,(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ について

(1) この方程式が解をもつための a の条件を求めよ.

(2) この方程式の解の個数を a の値の範囲によって調べよ.

2.10.14 $\sin 36^\circ$ の値

$\theta=36^\circ$ のとき，$\sin 3\theta=\sin 2\theta$ が成り立つことを示し，$\sin 36^\circ$ の値を求めよ.

2.10.15 和積公式の利用

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の方程式を求めよ.

$\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta=0$

2.11 指数対数 典型 17 題

2.11.1 指数計算 〜 逆数の対称式 〜

$a>0$ のとする．$a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}=4$ のとき，次の式の値を求めよ.

(1) $a + a^{-1}$

(2) $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}$

2.11.2 指数方程式・不等式 〜 初級 〜

次の方程式・不等式を解け．

(1) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 3$

(2) $4^x < 8^{x-1}$

(3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leqq \frac{1}{125}$

2.11.3 指数方程式・不等式 〜 中級 〜

次の方程式・不等式を解け．

(1) $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 = 0$

(2) $4^x + 2^x - 20 > 0$

2.11.4 指数関数の最大値 〜2 次関数に帰着 〜

次の関数の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

$y = 4^x - 2^{x+2} + 1\,(-1 \leqq x \leqq 2)$

2.11.5 対数の定義

次の対数の値を求めよ．

(1) $\log_7 49$

(2) $\log_2 64$

(3) $\log_5 5$

(4) $\log_4 1$

(5) $\log_2 \frac{1}{81}$

(6) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{1}25$

2.11.6 対数の基本性質

次の式を簡単にせよ．

(1) $\log_6 4 + \log_6 9$

(2) $4\log_2 \sqrt{3} - \log_2 18$

2.11.7 底の変換公式

次の式を簡単にせよ．

(1) $\log_4 8$

(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 8$

(3) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

2.11.8 対数を他の対数で表す

$a = \log_2 3, b = \log_3 7$ のとき，$\log_{42} 56$ を a, b を用いて表せ.

2.11.9 対数を利用した等式の証明

$xyz \neq 0, 2^x = 3^y = 6^z$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

2.11.10 指数に対数を含む数

次の式の値を求めよ.

(1) $10^{\log_{10} 3}$ (2) $81^{\log_3 10}$

2.11.11 対数関数を含む方程式・不等式

次の方程式 · 不等式を解け.

(1) $\log_2 x = 3$

(2) $\log_2 x < 3$

(3) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 1) \leqq 2$

2.11.12 対数関数を含む方程式・不等式（中級編）

次の方程式 · 不等式を解け.

(1) $\log_2 x + \log_2 (x - 7) = 3$

(2) $2 \log_2 (2 - x) \leqq \log_2 x$

2.11.13 対数含む関数の最大値

関数 $y = \log_2 x + \log_2 (16 - x)$ の最大値を求めよ.

2.11.14 対数関数の 2 次関数の最大値と最小値

次の関数の最大値と最小値を求めよ.

$$y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 3 \, (1 \leqq x \leqq 16)$$

2.11.15 常用対数を用いて桁数と最高位の数字を求める

$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

(1) 12^{80} は何桁の整数か.

(2) 12^{80} の最高位の数字を求めよ.

2.11.16 常用対数を用いて小数首位を求める

$\left(\frac{1}{30}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか. ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

2.11.17 指数関数の最大値 〜 逆数の対称式 〜

関数 $y = (2^x + 2^{-x}) - 2\,(4^x + 4^{-x})$ の最大値を求めよ.

2.12　数 II 微積 典型 16 題

2.12.1 接線の方程式

次の接線の方程式を求めよ.

(1) 曲線 $y = x^2 + 4x$ 上の点 $(1, 5)$ における接線

(2) 曲線 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ に点 $(0, 0)$ から引いた接線

2.12.2 共通接線の方程式

2 つの放物線 $y = x^2$ と $y = -x^2 + 6x - 5$ の共通接線の方程式を求めよ.

2.12.3 極値の計算工夫

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 5$ の極値を求めよ.

2.12.4 極値から係数決定

関数 $f(x) = x^3 + ax^2 - bx + c$ が、$x = -1$ で極大値 5 をとり、$x = 1$ で極小となるとき、定数 a, b, c の値を求めよ.

2.12.5 常に単調増加する 3 次関数

x の 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3kx^2 - kx - 1$ が常に単調増加するような定数 k の値の範囲を求めよ.

2.12.6 区間に文字を含む 3 次関数の最大最小

$a > 0$ とする．関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1\,(0 \leqq x \leqq a)$ について、

(1) 最小値を求めよ.　　(2) 最大値を求めよ.

2.12.7 係数に文字を含む 3 次関数の最大最小

$a > 0$ とする．関数 $f(x) = x^3 - 3a^2x\,(0 \leqq x \leqq 1)$ について、

(1) 最小値を求めよ.　　(2) 最大値を求めよ.

2.12.8 4 次方程式の実数解の個数

次の 4 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ.

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2 = 0$$

2.12.9 3 次方程式の実数解の個数

3 次方程式 $2x^3 + 3x^2 - 12x + a = 0$ が次の解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ.

(1) 異なる 3 つの実数解

(2) ただ一つの実数解

(3) 異なる 2 つの正の解と負の解

2.12.10 接線の本数

点 $(0, k)$ から曲線 $y = x^3 + 2x^2 - 4x$ に引くことのできる接線の本数を求めよ.

2.12.11 積分方程式 〜 定積分の微分 〜

等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x^3 - 3x^2 + x + a$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値の範囲を求めよ.

2.12.12 積分方程式 〜 定積分で表された関数 〜

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = 3x^2 - x\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt + 2$

(2) $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^1 (x-t)\,f(t)\,dt$

2.12.13 $\frac{1}{6}$ 公式の利用

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(1) $y = x^2 - 3x + 5, y = 2x - 1$

(2) $y = 2x^2 - 6x + 4, y = -3x^2 + 9x - 6$

2.12.14 放物線と直線で囲まれた面積の等分

放物線 $y = 2x - x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を直線 $y = kx$ が 2 等分するように、定数 k の値を定めよ.

2.12.15 放物線と直線で囲まれた面積の最小

放物線 $y = x^2$ と点 $(1, 2)$ を通る直線とで囲まれた図形の面積 S が最小になるとき、その直線の方程式を求めよ.

2.12.16 放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積

放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と、この放物線上の点 $(0, 3), (6, 15)$ に置ける接線で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

2.13 平面ベクトル 典型 20 題

2.13.1 ベクトルの大きさの最小

$\vec{a} = (3, 1), \vec{b} = (1, 2)$ と実数 t に対して, $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$ の大きさ $|\vec{c}|$ の最小値を求めよ.

2.13.2 ベクトルのなす角

$\vec{a} = (7, -1)$ と 45° の角をなし, 大きさが 10 である $\vec{b}$ を求めよ.

2.13.3 ベクトルの内積計算 〜 中級 〜

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$ で, $\vec{a} + \vec{b}$ と $2\vec{a} - 5\vec{b}$ が垂直であるとする.

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.

(2) 大きさ $\left|\vec{a} - 2\vec{b}\right|$ を求めよ.

2.13.4 ベクトルによる三角形の面積公式

平面上の 4 点 O, A, B, C に対して, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}, \mathrm{OA} = 2, \mathrm{OB} = 1, \mathrm{OC} = \sqrt{2}$ のとき,

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ.

(2) 三角形 OAB の面積を求めよ.

2.13.5 重心 G の位置ベクトル

3 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}\left(\vec{b}\right), \mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする三角形 ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ.

2.13.6 内分点、外分点の位置ベクトル

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}\left(\vec{b}\right)$ に対して,

(1) 線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の位置ベクトルを求めよ.

(2) 線分 AB を $m : n$ に内分する点 Q の位置ベクトルを求めよ.

2.13.7 点が一致することの証明

三角形 ABC において，辺 BC，CA，AB を 3: 1 に内分する点を，それぞれ P，Q，R，三角形 PQR の重心を G', 三角形 ABC の重心を G とする．このとき，G と G' は一致することを証明せよ.

2.13.8 ベクトル和の等式 ∼ 三角形 ∼

三角形 ABC に対して，次の式を満たす点 P の位置を求めよ.

$$2\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$$

2.13.9 3 点が一直線上にあることの証明

平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 2: 1 に内分する点を E，対角線 BD を 3: 1 に内分する点を F とする．3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ.

2.13.10 交点の位置ベクトル ∼ 初級 ∼

三角形 OAB において，辺 OA を 2: 1 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とする.

(1) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

(2) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

2.13.11 交点の位置ベクトル ∼ 中級 ∼

三角形 OAB において，辺 OA を 2: 1 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とする.

(1) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

(2) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

2.13.12 内積を利用した図形証明

三角形 ABC において，辺 BC の中点を M とするとき，等式

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2\left(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2\right)$$

が成立することを示せ.

2.13.13 垂心の位置ベクトル

$\mathrm{OA} = 2\sqrt{2}, \mathrm{OB} = \sqrt{3}$,$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積が 2 である三角形 OAB の垂心 H に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

2.13.14 内心の位置ベクトル

$\angle A = 60°, \mathrm{AB} = 8, \mathrm{AC} = 5$ である三角形 ABC の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{b}$,$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{c}$ とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ を用いて表せ.
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ を用いて表せ.

2.13.15 ベクトルの終点の存在範囲 〜 初級 〜

三角形 OAB において，次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $s + t = 2, s \geqq 0, t \geqq 0$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $s + t = \dfrac{1}{3}, s \geqq 0, t \geqq 0$

2.13.16 ベクトルの終点の存在範囲 〜 中級 〜

三角形 OAB において，次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $s + t = 2, s \geqq 0, t \geqq 0$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $s + t = \dfrac{1}{3}, s \geqq 0, t \geqq 0$

2.13.17 法線ベクトル

点 A $(3, 4)$ を通り，$\overrightarrow{n} = (2, 1)$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

2.13.18 法線ベクトル 〜2 直線のなす鋭角 〜

2 直線 $x + \sqrt{3}y - 5 = 0, \sqrt{3}x + y + 1 = 0$ がなす鋭角 θ を求めよ.

2.13.19 ベクトル方程式 〜 円の方程式 〜

次のような円の方程式を求めよ.

(1) 中心が原点 O $(0, 0)$ で，半径が 2 の円
(2) 中心が A $(1, 5)$ で，点 B $(2, 2)$ を通る円
(3) A $(5, 0)$, B $(9, 4)$ を直径の両端とする円

2.13.20 円のベクトル方程式

平面上の異なる 2 定点 A，B に対して，等式 $\left|2\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}\right| = 6$ をみたす動点 P はどのような図形を描くか.

2.14 空間ベクトル 典型 13 題

2.14.1 空間における三角形の面積

3 点 A $(3, 2, 4)$, B $(3, -1, -1)$, C $(5, 3, -3)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ.

2.14.2 空間における垂直条件

$\vec{a} = (2, -1, 0)\,, \vec{b} = (6. - 2, 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 である $\vec{p}$ を求めよ．

2.14.3 空間における点の一致の証明

四面体 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA，AC，BD の中点をそれぞれ K，L，M，N，Q，R とするとき，線分 KM，LN，QR の中点は一致することを証明せよ．

2.14.4 3 点が同一直線上にある条件

3 点 $\mathrm{A}\,(2, -1, 5)\,, \mathrm{B}\,(3, 6, 9)\,, \mathrm{C}\,(1, y, z)$ が一直線上にあるとき，y, z の値を求めよ．

2.14.5 4 点が同一平面上にある条件

4 点 $\mathrm{A}\,(3, 1, 2)\,, \mathrm{B}\,(4, 2, 3)\,, \mathrm{C}\,(5, 2, 5)\,, \mathrm{D}\,(-2, -1, z)$ が同一平面上にあるとき，z の値を求めよ．

2.14.6 平面 ABC と直線の交点

右の図の直方体において，対角線 OF と平面 ABC の交点を P とする．OP : OF を求めよ．

2.14.7 空間における垂直であることの証明

正四面体 ABCD において，三角形 BCD の重心を G とするとき，AG と BC が垂直であることを証明せよ．

2.14.8 平面に下ろした垂線の足の座標

$\mathrm{A}\,(2, 0, 0)\,, \mathrm{B}\,(0, 3, 0)\,, \mathrm{C}\,(0, 0, 3)$ の定める平面 ABC に原点 O から下ろした垂線を OH とするとき，点 H の座標を求めよ．

2.14.9 正四面体の第四の点の座標

3 点 $\mathrm{A}\,(6, 0, 0)\,, \mathrm{B}\,(0, 6, 0)\,, \mathrm{C}\,(0, 0, 6)$ に対して，正四面体 ABCD の頂点 D の座標を求めよ．

2.14.10 空間におけるベクトルの大きさの最小

原点 O と 3 点 $\mathrm{P}\,(1, 2, 1)\,, \mathrm{Q}\,(2, 1, 2)\,, \mathrm{R}\,(1, -2, 3)$ について $\left|x\overrightarrow{\mathrm{OP}} + y\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|$ の最小値と，その時の実数 x, y の値を求めよ．

2.14.11 ベクトル和の等式 〜 四面体 〜

四面体 ABCD において等式 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 3\overrightarrow{\mathrm{CP}} + 5\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \vec{0}$ を満たす点 P はどのような点か．

2.14.12 直線の方程式

次の直線の媒介変数表示と，直線の方程式を求めよ．

(1) 点 $\mathrm{A}\,(4, 5, 3)$ を通り，$\vec{d} = (3, 2 - 4)$ に平行な直線
(2) 2 点 $\mathrm{A}\,(1, 2, 3)\,, \mathrm{B}\,(2, -1, 5)$ を通る直線

2.14.13 平面の方程式

次のような平面の方程式を求めよ．

(1) 点 $\mathrm{A}\,(1, 2, 2)$ を通り，$\vec{n} = (2, -2, 4)$ に垂直
(2) 3 点 $\mathrm{A}\,(0, 1, 1)\,, \mathrm{B}\,(1, 0, 2)\,, \mathrm{C}\,(-3, 2, 3)$ を通る

2.15　数 B 数列 典型 17 題

2.15.1 等差数列であることの証明

(1) 一般項が $a_n = 3n - 4$ で表される数列 a_n が等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ．

(2) (1) の数列 a_n の項を一つおきに取り出して並べた数列 $a_1, a_3, a_5, \ldots\ldots$ が等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ．

2.15.2 3 項の和と積から等差数列の項を求める

等差数列をなす 3 数があって，その和が 27, 積が 693 である．この 3 数を求めよ．

2.15.3 等差数列の和の最大

初項 79, 公差 -2 の等差数列 a_n について、

(1) 第何項が初めて負となるか.

(2) 初項から第 n 項までの和が最大となるか．また、そのときの和を求めよ．

2.15.4 等比数列の和の扱い

初項から第 10 項までの和が 6, 初項から第 20 項までの和が 24 である等比数列 $\{a_n\}$ 初項から第 30 項までの和 S を求めよ

2.15.5 数列の和の和

次の数列 $\{a_n\}$ の和 S を求めよ．

$$1, 1+2, 1+2+3, \ldots\ldots, 1+2+\cdots+n$$

2.15.6 n を含む数列の和

次の数列 $\{a_n\}$ の和 S を求めよ．

$$1 \cdot (2n-1), 3(2n-3), 5(2n-5), \cdots\cdots, (2n-1)\cdot 1$$

2.15.7 漸化式を解く

次の条件によって定められる数列 a_n の一般項を求めよ．

$$a_1 = 2、a_{n+1} = 2a_n - 3\,(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

2.15.8 階差型の漸化式

次の条件を満たす数列 a_n の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, a(n+1) = a(n) + 3n + 1$$

2.15.9 指数型の漸化式

次の条件を満たす数列 a_n の一般項を求めよ．

$$a_1 = 10, a_{n+1} = 2a_n + 3^n\left(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots\right)$$

2.15.10 和と一般項の関係式

数列 a_n の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3n - 2a_n$ であるとき，数列 a_n の一般項を求めよ.

2.15.11 隣接 3 項間漸化式

次の条件によって定められる数列 a_n の一般項を求めよ.

(1) $a_1 = 1$、$a_2 = 2$、$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$

(2) $a_1 = 0$、$a_2 = 2$、$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

2.15.12 数学的帰納法

すべての自然数 n について、次の等式が成立することを証明せよ.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n)^2$$

2.15.13 数学的帰納法による等式証明

次の等式を数学的帰納法によって証明せよ.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2\left(n+1\right)^2$$

2.15.14 数学的帰納法による不等式証明

n が 3 以上の自然数のとき、$3^n > 5n + 1$ を証明せよ.

2.15.15 数学的帰納法による倍数証明

n を自然数とするとき、$5^{n+1} + 6^{2n-1}$ は 31 の倍数であることを証明せよ.

2.15.16 一般項の推測

次の条件で定められる数列 a_n の一般項を推測して、それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ.

$$a_1 = 3, \left(n+1\right)a_{n+1} = a_n^2 - 1$$

2.15.17 $x^n + y^n$ が整数であることの証明

n は自然数とする．2 数 x, y の和と積が整数のとき，$x^n + y^n$ は整数であることを、数学的帰納法を用いて証明せよ.

2.16 数 III 微分 典型 6 題

2.16.1 凹凸グラフの概形

関数 $f\left(x\right) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ の増減，極値，グラフの凹凸，漸近線を調べ，グラフの概形をかけ.

2.16.2 関数の最大最小

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ における $y = 2\sin x + \sin 2x$ の最大値と最小値を求めよ.

2.16.3 定数分離

方程式 $ax^5 - x^2 + 3 = 0$ が 3 個の異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ.

2.16.4 極値・変曲点をもつ条件

$f(x)=\left(x^2+a\right)e^x$ とする．ただし，a は定数とする．

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもたないような a の値の範囲を求めよ．
(2) 曲線 $y=f(x)$ が変曲点をもつような a の値の範囲を求めよ

2.16.5 $f''(x)$ を用いた不等式証明

すべての正の数 x に対して，$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ が成立することを示せ．

2.16.6 整数問題への応用

$a^{b^2}=b^{a^2}$ かつ $a<b$ をみたす自然数の組 (a,b) は存在するか．

第3章　応用問題にチャレンジしたい高校生向け

3.1　2次関数 応用6題

3.1.1 すべての実数 x で2次不等式が成り立つ条件

2次不等式 $ax^2+(a-1)x+a-1<0$ について，

(1) すべての実数 x に対してこの不等式が成立するための定数 a の範囲を求めよ．
(2) ある実数 x に対してこの不等式が成立するための定数 a の範囲を求めよ．

3.1.2 ある実数 x で2次不等式が成り立つ条件

2次不等式 $ax^2+(a-1)x+a-1<0$ について，

(1) すべての実数 x に対してこの不等式が成立するための定数 a の範囲を求めよ．
(2) ある実数 x に対してこの不等式が成立するための定数 a の範囲を求めよ．

3.1.3 2変数の「すべて」と「ある」

2つの関数 $f(x)=x^2+2x-2, g(x)=-x^2+2x+a+1$ について，次の各々が成立するような a の値の範囲を求めよ．

(1) $-2\leqq x\leqq 2$ を満たすすべての x_1,x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$
(2) $-2\leqq x\leqq 2$ を満たすある x_1,x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$

3.1.4「すべて」と「ある」の交換

x,y についての条件 p を次のように定める．

$$p:-x^2+(a-2)x+a-4<y<x^2-(a-4)x+3$$

次の各々が成立するための a の値の範囲を求めよ．

(1) どんな x に対しても，適当な y をとれば，p が成り立つ．
(2) 適当な y をとれば，どんな x に対しても，p が成り立つ．

3.1.5 区間で常に 2 次不等式が成立する条件

$0 \leqq x \leqq 3$ を満たす x に対して，$x^2 - 2ax + a + 2 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ.

3.1.6 区間に少なくとも 1 つの解

x についての 2 次方程式 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ の解が $1 < x < 3$ の範囲に少なくとも 1 つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ.

3.2 三角比 応用 5 題

3.2.1 平面に下ろした垂線の長さ直方体

$\mathrm{AB} = 3, \mathrm{AD} = 1, \mathrm{AE} = 2$ の直方体 $\mathrm{ABCD} - \mathrm{EFGH}$ において

(1) $\triangle\mathrm{AFC}$ の面積 S を求めよ.

(2) 点 B から平面 AFC に下ろした垂線 BI の長さを求めよ.

3.2.2 平面に下ろした垂線の長さ正四面体

1 辺が 6 の正四面体 OABC において，点 L，M，N は辺 OA，OB，OC を $1:1, 2:1, 1:2$ に内分する点である．頂点 O から平面 LMN に下ろした垂線 OH の長さを求めよ

3.2.3 円に内接する四角形の面積

円 O に内接する四角形 ABCD が $\mathrm{AB} = 2, \mathrm{BC} = 3, \mathrm{CD} = 1, \angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ を満たしている.

(1) 円 O の半径 R を求めよ.

(2) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ.

3.2.4 円に内接する四角形 〜 島根大 〜

円に内接する四角形 ABCD が $\mathrm{AB} = 4, \mathrm{BC} = 5, \mathrm{CD} = 7, \mathrm{DA} = 10$ を満たしている.

(1) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ.

(2) 2 本の対角線 AC，BD の交点を E とする．AE: EC を求めよ.

3.2.5 円に内接する四角形 〜 東京大 〜

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している．この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ.

3.3 数 II 式と証明 応用 7 題

3.3.1 相加相乗不等式の証明

正の数 a, b, c, d に対して，次の不等式を証明せよ．また，等号成立条件を求めよ.

(1) $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

(2) $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

(3) $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$

3.3.2 相加相乗不等式と最小値

$x > 0$ のとき，次の関数の最小値を求めよ．

(1) $y = 2x + \dfrac{1}{x}$

(2) $y = 2x + \dfrac{1}{x^2}$

3.3.3 分数関数の最小値

$x > 1$ とする．関数 $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ の最小値を求めよ

3.3.4 分数式の最大値

$x > 0$ とする．次のそれぞれの分数式の最大値を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{x^2 - x + 1}$

(2) $\dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

(3) $x\dfrac{2}{x^2 - x + 1}$

3.3.5 相加相乗不等式の等号成立条件

$x > 0, y > 0$ とする．$\left(x + \dfrac{1}{y}\right)\left(y + \dfrac{4}{x}\right)$ の最小値を求めよ

3.3.6 コーシー・シュワルツの不等式の証明 〜 初級 〜

次の不等式を証明せよ．また，等号成立条件を求めよ．

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) \geqq (ax + by)^2$$

3.3.7 コーシー・シュワルツの不等式の証明 〜 中級 〜

次の不等式を証明せよ．また，等号成立条件を求めよ．

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geqq (ax + by + cz)^2$$

3.4 数 II 複素数と方程式 応用 11 題

3.4.1 3 次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ において，次が成り立つことを示せ．3 解が $x = \alpha, \beta, \gamma$ である $\Leftrightarrow$

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

3.4.2 3 次方程式の 3 解 $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ の対称式

$x^3 - 3x + 1 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき，$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3, \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$ の値を求めよ．

3.4.3 3 解から 3 次方程式を作る

$x^3 - x + 1 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき，$\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}, \dfrac{1}{\gamma}$ を 3 つの解にもつ 3 次方程式を 1 つ作れ．

3.4.4 3 元対称式の連立方程式

x, y, z の連立方程式

$$x + y + z = -a - 2,$$

$$xy + yz + zx = 2a + 1,$$

$$xyz = -2$$

が，x, y, z が実数である解をもつような実数 a の範囲を求めよ．

3.4.5 3 次方程式が重解をもつ条件 〜 中級 〜

3 次方程式 $x^3 - 2x + k = 0$ が重解を持つのは，k がいかなる値のときか．

3.4.6 整式 $\mathrm{P}(x)$ を $(x-1)(x+1)^2$ で割った余り

整式 $\mathrm{P}(x)$ を $x - 1$ で割ったときの余りが $5, (x+1)^2$ で割ったときの余りが $x - 8$ であるとき，P を $(x-1)(x+1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

3.4.7 複素数係数 2 次方程式の実数解

a を実数の定数とする．x の 2 次方程式 $(1+i)x^2 - (a+1+i)x + (2-ai) = 0$ が実数解を持つのは，a がどんな値のときか．ただし，i は虚数単位である．

3.4.8 複素数係数の 2 次方程式

次の問いに答えよ．

(1) $z = x + yi(x, y$ は実数) が，$z^2 = i$ を満たすように，x, y の値を定めよ．

(2) 2 次方程式 $w^2 + 2(1+i)w + i = 0$ を解け．

3.4.9 複 2 次方程式

方程式 $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$ を解け．

3.4.10 相反方程式

4 次方程式 $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 4 = 0$ について次の問いに答えよ．

(1) この 4 次方程式の両辺を x^2 で割って，$t = x + \dfrac{2}{x}$ とおくことで得られる t に関する 2 次方程式を求めよ．

(2) この 4 次方程式の解をすべて求めよ．

3.4.11 1 の立方根，4 乗根，5 乗根，6 乗根

1 の平方根，1 の立方根，1 の 4 乗根，1 の 5 乗根，1 の 6 乗根を求めよ．かったるい説明に嫌気がさしたときに見る動画．早口 × 早送りで解説しました．雰囲気を掴んでもらえたらいいと思っています．

3.5 図形と方程式 応用問題 15 題

3.5.1 2 点から等距離の点の軌跡

2 点 $\mathrm{A}(-1, 3), \mathrm{B}(2, 1)$ からの距離が等しい点 P の軌跡を求めよ．

3.5.2 2 点からの距離の比が等しい点の軌跡

xy 平面上に，2 定点 $\mathrm{A}(-3,0), \mathrm{B}(3,0)$ がある．xy 平面上にあって

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$$

という条件を満たして動く動点 P の軌跡を求めよ．

3.5.3 パラメ ータ表示された点の軌跡

変数 t が全ての実数値をとって変化するとき，次のおのおの式で定められる点 $\mathrm{P}(x,y)$ の描く軌跡を求め，図示せよ．

(1) $x=t-1, y=t^2+4t-1$

(2) $x=t^2-1, y=t^4+4t^2-1$

3.5.4 放物線の頂点の軌跡

m が全ての実数値をとって変化するとき，放物線 $y=x^2-2mx+2m$ の頂点の軌跡を求めよ．

3.5.5 パラメ ータ表示された軌跡の除去点

変数 t が全ての実数値をとって変化するとき，次式で定まる点 $\mathrm{P}(x,y)$ の描く軌跡を求めよ．

$$x=\frac{1}{t^2+1}, y=\frac{t}{t^2+1}$$

3.5.6 円と直線の 2 交点の中点の軌跡

円 $C: x^2+y^2=1$ と直線 $l: y=m(x-2)$ がある．C と l が異なる 2 点で交わるように m の値が変化するとき，C と l の交点の中点 M の軌跡を求めよ．

3.5.7 放物線の直交する 2 接線の交点の軌跡

放物線 $y=x^2$ の異なる 2 接線が直交するとき，この 2 接線の交点 P の軌跡を求めよ．

3.5.8 2 直線の交点の軌跡

t がすべての実数値を取りながら変化するとき，xy 平面上の 2 つの直線 $tx-y=t, x+ty-2t-1=0$ の交点の軌跡を求めよ．

3.5.9 因数分解された不等式の領域

次のおのおのの条件を満たす点 (x,y) の存在範囲を図示せよ．

(1) $(3x-y-5)\left(x^2+y^2-25\right) \leqq 0$

(2) $(|x|+|y|-1)\left(x^2+y^2-1\right)<0$

3.5.10 線型計画法の基本

実数 x,y が条件 $x \geqq 0, y \geqq 0, 2x+y \leqq 4, x+4y \leqq 6, 2x+3y \leqq 6$ を満たして動くとき，$z=x+y$ の最大値を求めよ．

3.5.11 線型計画法の活用 *I*

実数 x,y が $x^2+y^2=2, x \geqq 0, y \geqq 0$ を満たして変わるとき，$z=x+y$ の最大値，最小値を求めよ．

3.5.12 片側が動く線分の中点の軌跡

円 $x^2+y^2=1$ 上の動点 P と，点 A $(3,4)$ とを結ぶ線分の中点 M の軌跡を求めよ．

3.5.13 点 $(\alpha+\beta, \alpha\beta)$ の動く範囲

点 P (α,β) が $\alpha^2+\beta^2<1$ を満たして動くとき，点 Q $(\alpha+\beta,\alpha\beta)$ の動く範囲を図示せよ．

3.5.14 直線の通過領域

t が $t>0$ の範囲を動くとき，直線 $y=2tx-t^2$ が通り得る領域を求めよ．

3.5.15 円の通過領域

放物線 $y=x^2$ 上を動く点 P がある．P を中心とし x 軸に接する円の内部が通過する範囲を図示せよ．

3.6 指数対数 応用 16 題

3.6.1 指数方程式 〜 中級 〜

次の各々の等式を満たす実数 x の値を求めよ．

(1) $(2^x)^2-5\cdot 2^x+4=0$
(2) $9^x-2\cdot 3^x-3=0$
(3) $4^{x+1}+2\cdot 2^x-2=0$

3.6.2 指数方程式の正の解と負の解

方程式 $9^x+2a\cdot 3^x+2a^2+a-6=0$ を満たす x の正の解，負の解が 1 つずつ存在するような，定数 a の値のとる範囲を求めよ．

3.6.3 対数方程式

次の方程式を解け．

(1) $\log_2\left(x^2-2x\right)=\log_2(3x-4)$
(2) $\log_2(x+2)+\log_2(x-5)=3$
(3) $\log_{\frac{1}{3}}(6-x)+2\log_3 x=0$

3.6.4 対数方程式が実数解を持つ条件

x についての方程式 $\log_3(x-3)=\log_9(kx-6)$ が相異なる 2 つの解をもつように，実数 k の範囲を求めよ．

3.6.5 底に文字を含む対数不等式

次の x についての不等式を解け．ただし，a は 1 ではない正の実数とする．

(1) $\log_a(2x+13)>\log_a(4-x)$
(2) $\log_a(x-a)\geqq\log_{a^2}(x-a)$
(3) $\log_a x\leqq\log_x a$

3.6.6 指数方程式が実数解を持つ条件

方程式 $4^x - a \cdot 2^{x+1} + a + 2 = 0$ を満たす実数 x が存在するような実数 a の値を求めよ.

3.6.7 桁数，最高位，最高次位

次の問いに答えよ.

(1) 2^{2019} は何桁か.

(2) 2^{2019} の最高位の数は何か.

(3) 2^{2019} の最高次位の数は何か.

3.6.8 小数首位とその数字

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{50}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．また，その数字を求めよ．ただし，必要ならば $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いて良い.

3.6.9 桁数を不等式で表す

(1) 29^{100} は 147 桁である．29^{23} は何桁の数となるか.

(2) $(1.25)^n$ の整数部分が 3 桁となる自然数 n はどんな範囲の数か．ただし，必要ならば $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて良い.

3.6.10 3^{333} の桁数の桁数を求めよ

(1) $\log_3 x = 3$ を満たす整数 x を求めよ.

(2) $\log_3 (\log_3 x) = 3$ を満たす整数 x は何桁か．また，最高位の数字を求めよ.

(3) $\log_3 (\log_3 (\log_3 x)) = 3$ を満たす整数 x の桁数を n とするとき，n は何桁か．必要ならば $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて良い.

3.6.11 常用対数の近似値 〜 津田塾大 〜

次の値を小数第 1 位まで求めよ．小数第 2 以下は切り捨てよ.

(1) $\log_{10} 2$　　(2) $\log_{10} 5$　　(3) $\log_{10} 3$

3.6.12 100^{99} と 99^{100} の大小比較

100^{99} と 99^{100} の大小を判定せよ．ただし，必要なら近似値 $\log[10]2 = 0.3010, \log[10]3 = 0.4771$ を用いて良い.

3.6.13 対数不等式が表す領域 〜 初級 〜

不等式 $1 < \log_x y < 2$ を満たす点 (x, y) の領域を図示せよ.

3.6.14 対数不等式が表す領域 〜 京大 〜

不等式 $\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)\left(\log_y 2\right)$ を満たす x, y の組 (x, y) の範囲を座標平面上に図示せよ.

3.6.15 3 乗根の無理数性

以下の問いに答えよ.

(1) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ.

(2) $p, q, \sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であることとする．このとき，$p = q = 0$ であることを示せ.

3.6.16 無理数の無理数乗は有理数になりえるか

次の各問いに答えよ.

(1) $\log_3 4$ は無理数であることを示せ.

(2) a, b がともに無理数で，a^b は有理数であるような数 a, b の組を 1 組求めよ.

3.7 場合の数 応用 10 題

3.7.1 正の約数の個数

次の各問いに答えよ.

(1) 5400 の正の約数の個数と約数の総和を求めよ.

(2) 10! の正の約数の個数を求めよ.

(3) 30! は最後にいくつ 0 が並ぶか.

(4) p を素数，n を正の整数とする．$p^n!$ は p で何回割れるか.

3.7.2 辞書式に並べる

a, i, k, o, s, y の 6 文字を辞書式に一列に並べて，文字列を作る.

(1) $aoisky$ は何番目か.

(2) 352 番目の文字列を求めよ.

3.7.3 整数をつくる問題 〜 初級 〜

$0, 1, 2, 3, 4, 5$ から異なる 3 つの数字を選んで 3 桁の整数を作る．このとき，次の数の個数を求めよ.

(1) 異なる整数

(2) 偶数

(3) 3 の倍数

(4) 異なる数の総和を求めよ.

3.7.4 整数をつくる問題 〜 中級 〜

9 個の数字 $2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4$ のうち 4 個を使って 4 桁の数をつくる.

(1) 全部で何個できるか.

(2) 3 の倍数は何個できるか.

3.7.5 立方体の色塗り

立方体に色を塗る塗り方は全部で何通りあるか求めよ．ただし，隣接する面は異なる色であり，かつ回転したり倒したりして同じになる塗り方は 1 通りとする.

(1) 各面に異なる 6 色をすべて用いて塗る.

(2) 各面に異なる 5 色をすべて用いて塗る.

(3) 各面に異なる 4 色をすべて用いて塗る.

3.7.6 同じものを含む円順列・数珠順列

白玉 1 個，赤玉 2 個，黄玉 4 個がある.

(1) これらを机の上に円形に並べる方法は何通りか.

(2) これらで何通りの首飾りができるか.

3.7.7 最短経路

以下図で A 地点から B 地点まで行く最短経路の総数を求めよ.

3.7.8 重複組合せ

次の等式・不等式を満たす整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ.

(1) $x + y + z = 6, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$

(2) $x + y + z = 6, x \geqq 1, y \geqq 1, z \geqq 1$

(3) $x + y + z \leqq 6, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$

(4) $1 \leqq x < y < z \leqq 6$

(5) $1 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 6$

3.7.9 完全順列

次の人数でプレゼント交換するとき，受け取り方は何通りあるか．ただし，全員が他人のプレゼントを受け取るとする.

(1) 1 人 (2) 2 人 (3) 3 人 (4) 4 人 (5) 5 人 (6) 6 人

3.7.10 区別する・しない

6 個のボ ー ルを 3 つの箱に入れるとき，入れ方は何通りか．1 空箱があってもよい 2 空箱はなしで，それぞれ求めよ.

(1) 1 から 6 まで異なる番号のついた 6 個のボ ー ルを A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合.

(2) 互いに区別の付かない 6 個のボ ー ルを A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合.

(3) 1 から 6 まで異なる番号のついた 6 個のボ ー ルを区別のつかない 3 つの箱に入れる場合.

(4) 互いに区別の付かない 6 個のボ ー ルを区別のつかない 3 つの箱に入れる場合.

3.8 平面ベクトル 応用 9 題

3.8.1 ベクトル和の等式

$\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，

$$6ec\mathrm{AP} + 3ec\mathrm{BP} + 4ec\mathrm{CP} = ec0$$

を満たす点 P を考える.

(1) 点 P はどのような位置にあるか.

(2) 面積比 $\triangle \mathrm{PBC} : \triangle \mathrm{PCA} : \triangle \mathrm{PAB}$ を求めよ.

3.8.2 線分の交点のベクトル

$\triangle \mathrm{ABC}$ の辺 AB を $1:2$ に内分する点を D，辺 AC を $3:1$ に内分する点を E，BE と CD の交点を F とするとき，$ec\mathrm{AF}$ を $ec\mathrm{AB}, ec\mathrm{AC}$ で表せ.

3.8.3 一直線上にあることの証明

$\triangle \mathrm{ABC}$ の辺 BC を $1:2$ に内分する点を P，辺 AC を $3:1$ に内分する点を Q，辺 AB を $6:1$ に外分する点を R とするとき，3 点 P，Q，R が一直線上にあることを示せ.

3.8.4 外心のベクトル

3 辺の長さが $\mathrm{AB}=2, \mathrm{BC}=6, \mathrm{CA}=2$ である $\triangle \mathrm{ABC}$ の外心を O とするとき，AO を AB，AC で表せ.

3.8.5 内心のベクトル

3 辺の長さが $\mathrm{BC}=7, \mathrm{CA}=5, \mathrm{AB}=3$ である $\triangle \mathrm{ABC}$ の内心を I とする．$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ.

3.8.6 垂心のベクトル

平面上に $\triangle \mathrm{ABC}$ があり，$\mathrm{AB}=1, \mathrm{AC}=2, \angle \mathrm{BAC}=45^\circ$ であるとする．$\triangle \mathrm{ABC}$ の垂心を H とするとき，AH を AB，AC で表せ.

3.8.7 2 直線のなす角を求める 3 つの方法

2 直線

l: $2x-y+3=0$,

m: $x-3y+5=0$

のなす角を求めよ.

3.8.8 ベクトルの終点の存在範囲

$\triangle \mathrm{OAB}$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．実数 s, t が次の条件を満たすとき，点 P の動く範囲を図示せよ.

(1) $s+t=1, s \geqq 0, t \geqq 0$

(2) $s+t=1, s \geqq 0$

(3) $s+t=2, s \geqq 0, t \geqq 0$

(4) $3s+t=2$

(5) $0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{2}, 0 \leqq t \leqq 1$

(6) $0 \leqq s+t \leqq 2, s \geqq 0, t \geqq 0$

3.8.9 ベクトル表現の存在と一意性

2 つの $\vec{a}, \vec{b}$ が 1 次独立であるとき，平面における任意のベクトル $\vec{c}$ は実数 $x,$ ⊠ y を用いて $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ という形でただ 1 通りに表されることを示せ.

3.9 空間ベクトル 応用 8 題

3.9.1 空間の直線に下ろした垂線の長さ

空間内の 3 点 $\mathrm{A}\,(1,1,1)\,,\mathrm{B}\,(0,1,2)\,,\mathrm{C}\,(3,3,0)$ について，点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さ CH を求めよ．

3.9.2 座標空間内の四面体の体積

空間内の 4 点 $\mathrm{A}\,(1,1,1)\,,\mathrm{B}\,(0,1,2)\,,\mathrm{C}\,(3,3,0)\,,\mathrm{D}\,(2,3,4)$ について，

(1) $\triangle$ABC の面積を求めよ．

(2) 四面体 ABCD の体積 V を求めよ．

3.9.3 平面と直線の交点の位置ベクトル 〜 初級 〜

平行六面体 OADB – CEGF において，辺 GD の中点を H とする．

(1) 直線 OH と平面 ABC の交点を L とするとき，OL を OA，OB，OC で表せ．

(2) 直線 OH と平面 AFC の交点を M とするとき，OM を OA，OB，OC で表せ．

3.9.4 平面と直線の交点の位置ベクトル 〜 中級 〜

平行六面体 OADB – CEGF において，辺 GD の中点を H とする．

(1) 直線 OH と平面 ABC の交点を L とするとき，OL を OA，OB，OC で表せ．

(2) 直線 OH と平面 AFC の交点を M とするとき，OM を OA，OB，OC で表せ．

3.9.5 四面体の重心

四面体の各頂点 A, B, C, D と，その対面の重心 G_1, G_2, G_3, G_4 を結んだ 4 本の線分 $\mathrm{AG_1}, \mathrm{BG_2}, \mathrm{CG_3}, \mathrm{DG_4}$ は 1 点で交わることを示せ．

3.9.6 正四面体の対辺が垂直であることの証明

1 辺の長さが a の正四面体 ABCD について，次の命題をそれぞれ示せ．

(1) 対辺 AB と CD は垂直である．

(2) 底面 $\triangle$BCD の重心を G とすると，直線 AG は底面に垂直である．

3.9.7 四面体とベクトル和の等式

四面体 ABCD の内部にある点 P が $2\mathrm{AP}+3\mathrm{BP}+4\mathrm{CP}+5\mathrm{DP}=0$ を満たすとき，四面体 PBCD，PCDA，PDAB，PABC の体積比を求めよ．

3.9.8 空間ベクトルの終点の存在範囲

四面体 OABC に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=l\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}+n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．実数 l, m, n が次の各条件を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を求めよ．

(1) $l+m+n=1$

(2) $l+m+n=1, l \geqq 0, m \geqq 0, n \geqq 0$

(3) $l+2m+3n=1$

(4) $0 \leqq l \leqq 1, 0 \leqq m \leqq 1, 0 \leqq n \leqq 1$

(5) $0 \leqq l+m+n \leqq 1, l \geqq 0, m \geqq 0, n \geqq 0$

第 4 章　分野強化したい受験生向け

第 5 章　数学を楽しみたい人向け

5.1　別解研究入門 12 題

5.1.1 パッポスの中線定理の 4 つの証明

三角形 ABC に対し，BC の中点を M とするとき，次の等式を証明せよ．

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$$

5.1.2 分数不等式 3 つの解法

不等式 $\dfrac{2x+3}{x+1} \leqq x+3$ を解け．

5.1.3 平面と直線の交点の位置ベクトル 〜 初級 〜

平行六面体 OADB − CEGF において，辺 GD の中点を H とする．

(1) 直線 OH と平面 ABC の交点を L とするとき，OL を OA，OB，OC で表せ．

(2) 直線 OH と平面 AFC の交点を M とするとき，OM を OA，OB，OC で表せ．

5.1.4 別解研究 〜 初級 〜

(1) 実数 x, y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$3x+4y$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) 実数 x, y が $x^2+y^2=1, y \geqq 0$ を満たすとき，$3x+4y$ の最大値と最小値を求めよ．

5.1.5 2 直線のなす角を求める 3 つの方法

2 直線

$l\colon 2x-y+3=0,$

$m\colon x-3y+5=0$

のなす角を求めよ．

5.1.6 線分の交点のベクトル

△ABC の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を D，辺 AC を 3 : 1 に内分する点を E，BE と CD の交点を F とするとき，ecAF を ecAB, ecAC で表せ．

5.1.7 通過領域の基本

t がすべての実数値を取りながら変化するとき，直線 $y=2tx-t^2$ が通り得る領域を図示せよ．

5.1.8 円外の点から引いた接線

円 $C: x^2+y^2=5$ に点 $\mathrm{A}\,(3,1)$ から引いた接線の方程式を求めよ．

5.1.9 三角形の面積公式 3 つの証明

$\mathrm{O}\,(0,0)\,,\mathrm{A}\,(x_1,y_1)\,,\mathrm{B}\,(x_2,y_2)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\,x_1y_2-x_2y_1\,|$$

である．これを示せ．

5.1.10 点と直線の距離の公式証明

点 $\mathrm{A}\,(x_1,y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|\,ax_1+by_1+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

である．これを示せ．

5.1.11 コーシー・シュワルツの不等式の証明 〜 初級 〜

次の不等式を証明せよ．また，等号成立条件を求めよ．

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\geqq(ax+by)^2$$

5.1.12 2 重根号

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ の 2 重根号をはずせ．

5.2 面積の組み換え 全 7 題

5.2.1 2 重接線で囲まれた部分の面積

4 次関数 $y=x^4+kx^3+lx^2+mx+n$ のグラフと直線 $y=px+q$ が $x=-1,3$ において接するとき，このグラフと直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

5.2.2 3 次関数のグラフと直線で囲まれた部分の面積

3 次関数 $y=x^3+lx^2+mx+n$ のグラフと直線 $y=px+q$ が $x=0,2,4$ で共有点をもつとき，この 3 グラフと直線で囲まれた部分の面積を求めよ．

5.2.3 3 次関数のグラフと接線で囲まれた部分の面積

3 次関数のグラフ $y=x^3+lx^2+mx+n$ の $x=-1$ における接線 $y=px+q$ が $x=3$ において再びこのグラフと交点をもつとき，この 3 次関数のグラフと接線で囲まれる部分の面積を求めよ．

5.2.4 2 放物線と共通接線で囲まれた部分の面積

直線 $y=px+q$ が，放物線 $y=x^2+mx+n$ と $x=1$ において接し，放物線 $y=x^2+m'x+n'$ と $x=3$ において接するとき，この直線と 2 つの放物線で囲まれる部分の面積を求めよ．

5.2.5 放物線と 2 接線で囲まれた部分の面積

放物線 $y = x^2 + mx + n$ が直線 $y = px + q$ と $x = 1$ において接し，$x = -1$ において直線 $y = p'x + q'$ と接するとき，この放物線と 2 直線で囲まれる部分の面積を求めよ．

5.2.6 放物線と接線で囲まれた部分の面積

放物線 $y = x^2 + mx + n$ と直線 $y = px + q$ が $x = 2$ において接するとき，この放物線，直線，および直線 $x = 4$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

5.2.7 2 つの放物線で囲まれた部分の面積

2 つの放物線 $y = 3x^2 + mx + n, y = -2x^2 + px + q$ が $x = 2, x = 3$ において交点をもつとき，この 2 つの放物線で囲まれる部分の面積を求めよ．

5.3 二項係数 6 題

5.3.1 二項係数を階乗で表す

異なる n 個から r 個とる組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ が

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

で与えられることを示せ．

5.3.2 二項係数の対称性の証明

自然数 $n, r\,(n \geqq r)$ について，次を示せ．

$${}_nC_r =_n C_{n-r}$$

5.3.3 パスカルの法則の証明

自然数 $n, r\,(n \geqq r)$ について，次を示せ．

$${}_n\mathrm{C}_r =_{n-1} \mathrm{C}_{r-1} +_{n-1} C_r$$

5.3.4 パスカルの法則の応用

自然数 $n, r\,(n \geqq r)$ について，次を示せ．

$${}_n\mathrm{C}_r =_{n-1} C_{r-1} +_{n-2} C_{r-1} + \cdots\cdots +_{r-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

5.3.5 二項係数の公式証明

自然数 $n, r\,(n \geqq r)$ について，次を示せ．$r \cdot_n C_r = n \cdot_{n-1} \mathrm{C}_{r-1}$

5.3.6 二項係数の等式証明

自然数 $n, p, q\,(n \geqq p, n \geqq q)$ について，次を示せ．

$${}_nC_q \cdot_{n-q} C_p =_n C_p \cdot_{n-p} C_q$$

5.4 数B数列 目で見る和の公式4つ

5.4.1 自然数の和

$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots\cdot + n$ を求めよ.

5.4.2 奇数の和

$1 + 3 + 5 + \cdots\cdots\cdot + (2n + 1)$ を求めよ.

5.4.3 平方数の和

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots\cdots + n^2$ を求めよ.

5.4.4 連続2整数の積の和

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots\cdots\cdots + n\,(n + 1)$ を求めよ.

5.5 手書きアニメで見る図形の定理

第6章 数学I

6.1 数I数と式 計算15題

6.1.1 2乗の展開 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})^2, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d})^2$

次の式を展開せよ.

(1) $(a + b)^2$
(2) $(a + b + c)^2$
(3) $(a + b + c + d)^2$

6.1.2 3乗の展開 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^3, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})^3$

次の式を展開せよ.

(1) $(a + b)^3$
(2) $(a + b + c)^3$

6.1.3 3次式 $\boldsymbol{a}^3 + \boldsymbol{b}^3$ の因数分解

$a^3 + b^3$ を因数分解せよ.

6.1.4 3次式 $\boldsymbol{a}^3 + \boldsymbol{b}^3 + \boldsymbol{c}^3 - 3\boldsymbol{abc}$ の因数分解

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ を因数分解せよ.

6.1.5 3次式の因数分解 $\boldsymbol{a}^3 + \boldsymbol{b}^3 + \boldsymbol{c}^3 + \boldsymbol{d}^3 - 3\boldsymbol{abc} - 3\boldsymbol{bcd} - 3\boldsymbol{cda} - 3\boldsymbol{dab}$

$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3abc - 3bcd - 3cda - 3dab$ を因数分解せよ.

6.1.6 $\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{y}^n$ の因数分解

$x^2 - y^2, x^3 - y^3, x^4 - y^4, x^5 - y^5$ を因数分解せよ.

6.1.7 因数分解 〜 平方の差 ②〜

$x^4 - 13x^2y^2 + 4y^4$ を因数分解せよ.

6.1.8 因数分解 〜 平方の差 ①〜

$x^6 - y^6$ を因数分解せよ.

6.1.9 因数分解の有名問題 〜 上級 〜

$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$ を因数分解せよ.

6.1.10 対称式 $x^2 + y^2$ の計算

$x + y = 10, xy = 1$ のとき，$x^2 + y^2$ の値を求めよ.

6.1.11 対称式 $x^3 + y^3$ の計算

$x + y = 10, xy = 1$ のとき，$x^3 + y^3$ の値を求めよ.

6.1.12 対称式 $x^4 + y^4, x^5 + y^5$ の計算

$x + y = 10, xy = 1$ のとき，$x^4 + y^4, x^5 + y^5$ の値を求めよ.

6.1.13 3 元対称式 $x^2 + y^2 + z^2$ の値

$x + y + z = 2\sqrt{3} + 1, xy + yz + zx = 2\sqrt{3} - 1, xyz = -1$ のとき，次の式の値を求めよ.

(1) $x^2 + y^2 + z^2$　(2) $x^3 + y^3 + z^3$　(3) $x^4 + y^4 + z^4$

6.1.14 3 元対称式 $x^3 + y^3 + z^3$ の値

$x + y + z = 2\sqrt{3} + 1, xy + yz + zx = 2\sqrt{3} - 1, xyz = -1$ のとき，次の式の値を求めよ.

(1) $x^2 + y^2 + z^2$　(2) $x^3 + y^3 + z^3$　(3) $x^4 + y^4 + z^4$

6.1.15 3 元対称式 $x^4 + y^4 + z^4$ の値

$x + y + z = 2\sqrt{3} + 1, xy + yz + zx = 2\sqrt{3} - 1, xyz = -1$ のとき，次の式の値を求めよ.

(1) $x^2 + y^2 + z^2$　(2) $x^3 + y^3 + z^3$　(3) $x^4 + y^4 + z^4$

6.2　数 I 数と式 典型 6 題

6.2.1 2 つの文字含む因数分解

2 元 2 次式

$$6x^2 + 5xy + y^2 - 7x - 3y + 2$$

を因数分解せよ.

6.2.2 2 重根号

$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ の 2 重根号をはずせ.

6.2.3 根号の計算

$\alpha = 2 + \sqrt{3}$ のとき，$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ の値を求めよ.

6.2.4 係数に文字を含む 1 次不等式

次の不等式を解け．ただし，a は定数とする．

(1) $ax = 2(x + a)$
(2) $ax < x + 2$
(3) $ax + 1 > x + a^2$

6.2.5 1 次不等式の整数解

次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $\dfrac{x}{2} + 4 < \dfrac{2x + 7}{3}$ を満たす最小の整数 x を求めよ．
(2) x の不等式 $2x + a > 5(x - 1)$ を満たす x のうち，最大の整数が 4 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．
(3) x の連立不等式 $7x - 5 > 13 - 2x, x + a \geqq 3x + 5$ を満たす整数 x がちょうど 5 個存在するとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

6.2.6 絶対値を含む方程式・不等式

次の方程式・不等式を解け．

(1) $|x + 3| = 4x$
(2) $|2x - 1| \leqq x + 3$
(3) $|x| + |x - 1| = 3x$
(4) $|x| + |x - 1| > 3x$

6.3 集合と命題 典型 7 題

6.3.1 n^2 が 2 の倍数であるならば n も 2 の倍数である

整数 n について，次のことを証明せよ．

(1) n^2 が 2 の倍数ならば，n も 2 の倍数である．
(2) n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数である．
(3) n^2 が 6 の倍数ならば，n も 6 の倍数である．

6.3.2 n^2 が 3 の倍数ならば n も 3 の倍数である

整数 n について，次のことを証明せよ．

(1) n^2 が 2 の倍数ならば，n も 2 の倍数である．
(2) n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数である．
(3) n^2 が 6 の倍数ならば，n も 6 の倍数である．

6.3.3 n^2 が 6 の倍数ならば n も 6 の倍数である

整数 n について，次のことを証明せよ．

(1) n^2 が 2 の倍数ならば，n も 2 の倍数である．

(2) n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数である．

(3) n^2 が 6 の倍数ならば，n も 6 の倍数である．

6.3.4 $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

次のことを証明せよ．

(1) $\sqrt{2}$ は無理数である．

(2) $\sqrt{6}$ は無理数である．

6.3.5 $\sqrt{6}$ が無理数であることの証明

次のことを証明せよ．

(1) $\sqrt{2}$ は無理数である．

(2) $\sqrt{6}$ は無理数である．

6.3.6 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることの証明

次のことを証明せよ．ただし，平方数でない正の整数 m に対して，$\sqrt{m}$ が無理数であることを前提としてよい．

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．

(2) 有理数 a, b のうち少なくとも 1 つが 0 でないならば，$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ は無理数である．

6.3.7 $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ が無理数であることの証明

次のことを証明せよ．ただし，平方数でない正の整数 m に対して，$\sqrt{m}$ が無理数であることを前提としてよい．

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．

(2) 有理数 a, b のうち少なくとも 1 つが 0 でないならば，$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ は無理数である．

6.4 2次関数 典型 10 題

6.4.1 軸が動く 2 次関数の最大値・最小値

a は定数とする．関数 $y = x^2 - 2ax + 3a$ の $0 \leqq x \leqq 4$ における最大値と最小値を求めよ．a は定数とする．

6.4.2 区間が動く 2 次関数の最大値・最小値

a は定数とする．関数 $y = x^2 - 2x + 2$ の $a \leqq x \leqq a+2$ における最大値と最小値を求めよ．

6.4.3 2 次関数の最大最小から係数決定

関数 $y = ax^2 - 2ax + b\,(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 9 で，最小値が 1 であるとき，定数 a, b の値を求めよ．

6.4.4 2 次関数の最大値 M の最小値

a を与えられた定数として x の 2 次関数 $y = -x^2 + 4ax + 4a$ を考え，その最大値を M とする．

(1) M を a の式で表せ．

(2) M を最小とする a の値を求めよ．また，そのときの M の値を求めよ．

6.4.5 独立 2 変数関数の最小値

x と y が互いに関係なく変化するとき，$P = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 3$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ．

6.4.6 複 2 次 4 次関数の最小値

関数 $y = x^4 + 6x^2 + 10$ の最小値を求めよ．

6.4.7 条件式付き 2 変数関数の最大最小 〜 中級 〜

$2x^2 + 3y^2 = 8$ のとき，$4x + 3y^2$ の最大値および最小値を求めよ．

6.4.8 解の配置 ①〜 正の解をもつ 〜

2 次方程式 $x^2 + 2ax + 3 - 2a = 0$ が次のような条件を満たすような実数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 符号の異なる 2 解をもつ

(2) 正の解をもつ

6.4.9 解の配置 ②〜 区間に 1 つの解をもつ 〜

2 次方程式 $ax^2 - (a-1)\,x - a + 1 = 0$ が $-1 < x < 1$ と $3 < x < 4$ にそれぞれ 1 つの実数解を持つような定数 a の値の範囲を求めよ．

6.4.10 解の配置 ③〜 区間に少なくとも 1 つの解 〜

2 次方程式 $x^2 - (k+4)\,x - \dfrac{k}{2} + 4 = 0$ が $1 < x < 4$ に少なくとも 1 つの実数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ．

6.5 2 次関数 応用 6 題

6.5.1 すべての実数 x で 2 次不等式が成り立つ条件

2 次不等式 $ax^2 + (a-1)\,x + a - 1 < 0$ について，

(1) すべての実数 x に対してこの不等式が成立するための定数 a の範囲を求めよ．

(2) ある実数 x に対してこの不等式が成立するための定数 a の範囲を求めよ．

6.5.2 ある実数 x で 2 次不等式が成り立つ条件

2 次不等式 $ax^2 + (a-1)\,x + a - 1 < 0$ について，

(1) すべての実数 x に対してこの不等式が成立するための定数 a の範囲を求めよ．

(2) ある実数 x に対してこの不等式が成立するための定数 a の範囲を求めよ．

6.5.3 2 変数の「 すべて 」と「 ある 」

2 つの関数 $f(x) = x^2 + 2x - 2, g(x) = -x^2 + 2x + a + 1$ について，次の各々が成立するような a の値の範囲を求めよ．

(1) $-2 \leqq x \leqq 2$ を満たすすべての x_1, x_2 に対して $f(x_1) < g(x_2)$

(2) $-2 \leqq x \leqq 2$ を満たすある x_1, x_2 に対して $f(x_1) < g(x_2)$

6.5.4「すべて」と「ある」の交換

x, y についての条件 p を次のように定める．

$$p : -x^2 + (a-2)x + a - 4 < y < x^2 - (a-4)x + 3$$

次の各々が成立するための a の値の範囲を求めよ．

(1) どんな x に対しても，適当な y をとれば，p が成り立つ．

(2) 適当な y をとれば，どんな x に対しても，p が成り立つ．

6.5.5 区間で常に 2 次不等式が成立する条件

$0 \leqq x \leqq 3$ を満たす x に対して，$x^2 - 2ax + a + 2 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

6.5.6 区間に少なくとも 1 つの解

x についての 2 次方程式 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ の解が $1 < x < 3$ の範囲に少なくとも 1 つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

6.6 三角比 典型 5 題

6.6.1 円に内接する四角形の面積

円 O に内接する四角形 ABCD が $\mathrm{AB} = 2, \mathrm{BC} = 3, \mathrm{CD} = 1, \angle\mathrm{ABC} = 60^\circ$ を満たしている．

(1) 円 O の半径 R を求めよ．

(2) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ．

6.6.2 三角形の形状決定

次の等式を満たす $\triangle$ABC はどのような形か．

$$a^2 \cos A \sin B = b^2 \cos B \sin A$$

6.6.3 三角形の内角の sin の比

$\dfrac{5}{\sin A} = \dfrac{7}{\sin B} = \dfrac{8}{\sin C}$ である $\triangle$ABC の最小角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

6.6.4 内角二等分線の長さ

$\triangle$ABC において，$\mathrm{AB} = 5, \mathrm{AC} = 8, \angle A = 60^\circ$, $\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ．

6.6.5 内接円と外接円の半径

$\triangle$ABC において，$\mathrm{AB} = 5, \mathrm{BC} = 7, \mathrm{AC} = 8$ のとき，内接円の半径 r と外接円の半径 R を求めよ．

6.7 三角比 応用 5 題

6.7.1 平面に下ろした垂線の長さ直方体

$\mathrm{AB}=3, \mathrm{AD}=1, \mathrm{AE}=2$ の直方体 $\mathrm{ABCD}-\mathrm{EFGH}$ において

(1) $\triangle\mathrm{AFC}$ の面積 S を求めよ.
(2) 点 B から平面 AFC に下ろした垂線 BI の長さを求めよ.

6.7.2 平面に下ろした垂線の長さ正四面体

1 辺が 6 の正四面体 OABC において，点 L，M，N は辺 OA，OB，OC を $1:1, 2:1, 1:2$ に内分する点である．頂点 O から平面 LMN に下ろした垂線 OH の長さを求めよ

6.7.3 円に内接する四角形の面積

円 O に内接する四角形 ABCD が $\mathrm{AB}=2, \mathrm{BC}=3, \mathrm{CD}=1, \angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ を満たしている.

(1) 円 O の半径 R を求めよ.
(2) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ.

6.7.4 円に内接する四角形 ～ 島根大 ～

円に内接する四角形 ABCD が $\mathrm{AB}=4, \mathrm{BC}=5, \mathrm{CD}=7, \mathrm{DA}=10$ を満たしている.

(1) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ.
(2) 2 本の対角線 AC，BD の交点を E とする．AE: EC を求めよ.

6.7.5 円に内接する四角形 ～ 東京大 ～

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している．この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ.

第 7 章　数学 A

7.1 場合の数 基本 6 題

7.1.1 順列

次の場合の数を求めよ.

(1) A，B，C，D を 1 列に並べる方法.
(2) A，B，C，D，E から 3 つを選んで並べる方法.
(3) A，B，C，D，E を円形に並べる方法.
(4) A，B，C，D，E で数珠を作る方法.
(5) A，B，C，D，E から 3 つを選んで作る組合せ.
(6) A，A，A，B，B，C を 1 列に並べる方法.

7.1.2 場合の数の基本 (2) ABCDE の 5 文字から 3 文字を選んで並べる方法

次の場合の数を求めよ.

(1) A, B, C, D を 1 列に並べる方法.
(2) A, B, C, D, E から 3 つを選んで並べる方法.
(3) A, B, C, D, E を円形に並べる方法.
(4) A, B, C, D, E で数珠を作る方法.
(5) A, B, C, D, E から 3 つを選んで作る組合せ.
(6) A, A, A, B, B, C を 1 列に並べる方法.

7.1.3 円順列

次の場合の数を求めよ.

(1) A, B, C, D を 1 列に並べる方法.
(2) A, B, C, D, E から 3 つを選んで並べる方法.
(3) A, B, C, D, E を円形に並べる方法.
(4) A, B, C, D, E で数珠を作る方法.
(5) A, B, C, D, E から 3 つを選んで作る組合せ.
(6) A, A, A, B, B, C を 1 列に並べる方法.

7.1.4 数珠順列

次の場合の数を求めよ.

(1) A, B, C, D を 1 列に並べる方法.
(2) A, B, C, D, E から 3 つを選んで並べる方法.
(3) A, B, C, D, E を円形に並べる方法.
(4) A, B, C, D, E で数珠を作る方法.
(5) A, B, C, D, E から 3 つを選んで作る組合せ.
(6) A, A, A, B, B, C を 1 列に並べる方法.

7.1.5 組合せ

次の場合の数を求めよ.

(1) A, B, C, D を 1 列に並べる方法.
(2) A, B, C, D, E から 3 つを選んで並べる方法.
(3) A, B, C, D, E を円形に並べる方法.
(4) A, B, C, D, E で数珠を作る方法.
(5) A, B, C, D, E から 3 つを選んで作る組合せ.
(6) A, A, A, B, B, C を 1 列に並べる方法.

7.1.6 同じものを含む順列

次の場合の数を求めよ.

(1) A, B, C, D を 1 列に並べる方法.

(2) A，B，C，D，E から 3 つを選んで並べる方法.

(3) A，B，C，D，E を円形に並べる方法.

(4) A，B，C，D，E で数珠を作る方法.

(5) A，B，C，D，E から 3 つを選んで作る組合せ.

(6) A，A，A，B，B，C を 1 列に並べる方法.

7.2 場合の数 典型 10 題

7.2.1 部屋分け ～6 人を 2 つの部屋 A，B に分ける ～

空室は作らないものとする.

(1) 6 人を A，B の 2 部屋に分ける方法は何通りあるか.

(2) 6 人を A，B，C の 3 部屋に分ける方法は何通りあるか.

7.2.2 部屋分け ～6 人を 3 つの部屋 A，B，C に分ける ～

空室は作らないものとする.

(1) 6 人を A，B の 2 部屋に分ける方法は何通りあるか.

(2) 6 人を A，B，C の 3 部屋に分ける方法は何通りあるか.

7.2.3 組分け ①～12 人を 8 人，4 人に ～

12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか.

(1) 8 人組と 4 人組に分ける.

(2) 5 人組と 4 人組と 3 人組に分ける.

(3) 2 つの 6 人組に分ける.

(4) 3 つの 4 人組に分ける.

7.2.4 組分け ②～12 人を 5 人，4 人，3 人に ～

12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか.

(1) 8 人組と 4 人組に分ける.

(2) 5 人組と 4 人組と 3 人組に分ける.

(3) 2 つの 6 人組に分ける.

(4) 3 つの 4 人組に分ける.

7.2.5 組分け ③～12 人を 6 人，6 人に ～

12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか.

(1) 8 人組と 4 人組に分ける.

(2) 5 人組と 4 人組と 3 人組に分ける.

(3) 2 つの 6 人組に分ける.

(4) 3 つの 4 人組に分ける.

7.2.6 組分け ④〜12 人を 4 人，4 人，4 人に 〜

12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか.

(1) 8 人組と 4 人組に分ける.
(2) 5 人組と 4 人組と 3 人組に分ける.
(3) 2 つの 6 人組に分ける.
(4) 3 つの 4 人組に分ける.

7.2.7 重複組合せ 〜 ミカンの配り方 ①〜

10 個のミカンを A，B，C の 3 人配る．次の各々の場合，配り方は何通りあるか.

(1) どの人も少なくとも 1 個はもらう場合
(2) 1 つももらわない人がいても良い場合

7.2.8 重複組合せ 〜 ミカンの配り方 ②〜

10 個のミカンを A，B，C の 3 人配る．次の各々の場合，配り方は何通りあるか.

(1) どの人も少なくとも 1 個はもらう場合
(2) 1 つももらわない人がいても良い場合

7.2.9 同じものを含む円順列 〜 初級 〜

次の各々の場合は何通りあるか.

(1) 赤玉 4 個，白玉 3 個，黒玉 1 個を円形に並べる方法
(2) 赤玉 4 個，白玉 2 個，黒玉 2 個を円形に並べる方法

7.2.10 同じものを含む円順列 〜 中級 〜

次の各々の場合は何通りあるか.

(1) 赤玉 4 個，白玉 3 個，黒玉 1 個を円形に並べる方法
(2) 赤玉 4 個，白玉 2 個，黒玉 2 個を円形に並べる方法

7.3 場合の数 応用 10 題

7.3.1 正の約数の個数

次の各問いに答えよ.

(1) 5400 の正の約数の個数と約数の総和を求めよ.
(2) 10! の正の約数の個数を求めよ.
(3) 30! は最後にいくつ 0 が並ぶか.
(4) p を素数，n を正の整数とする．$p^n!$ は p で何回割れるか.

7.3.2 辞書式に並べる

a, i, k, o, s, y の 6 文字を辞書式に一列に並べて，文字列を作る.

(1) $aoisky$ は何番目か.

(2) 352 番目の文字列を求めよ.

7.3.3 整数をつくる問題 〜 初級 〜

$0, 1, 2, 3, 4, 5$ から異なる 3 つの数字を選んで 3 桁の整数を作る．このとき，次の数の個数を求めよ.

(1) 異なる整数

(2) 偶数

(3) 3 の倍数

(4) 異なる数の総和を求めよ.

7.3.4 整数をつくる問題 〜 中級 〜

9 個の数字 $2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4$ のうち 4 個を使って 4 桁の数をつくる.

(1) 全部で何個できるか.

(2) 3 の倍数は何個できるか.

7.3.5 立方体の色塗り

立方体に色を塗る塗り方は全部で何通りあるか求めよ．ただし，隣接する面は異なる色であり，かつ回転したり倒したりして同じになる塗り方は 1 通りとする.

(1) 各面に異なる 6 色をすべて用いて塗る.

(2) 各面に異なる 5 色をすべて用いて塗る.

(3) 各面に異なる 4 色をすべて用いて塗る.

7.3.6 同じものを含む円順列 · 数珠順列

白玉 1 個，赤玉 2 個，黄玉 4 個がある.

(1) これらを机の上に円形に並べる方法は何通りか.

(2) これらで何通りの首飾りができるか.

7.3.7 最短経路

以下図で A 地点から B 地点まで行く最短経路の総数を求めよ.

7.3.8 重複組合せ

次の等式 · 不等式を満たす整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ.

(1) $x + y + z = 6, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$

(2) $x + y + z = 6, x \geqq 1, y \geqq 1, z \geqq 1$

(3) $x + y + z \leqq 6, x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$

(4) $1 \leqq x < y < z \leqq 6$

(5) $1 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 6$

7.3.9 完全順列

次の人数でプレゼント交換するとき，受け取り方は何通りあるか．ただし，全員が他人のプレゼントを受け取るとする．

(1) 1 人 (2) 2 人 (3) 3 人 (4) 4 人 (5) 5 人 (6) 6 人

7.3.10 区別する・しない

6 個のボ ー ルを 3 つの箱に入れるとき，入れ方は何通りか．1 空箱があってもよい 2 空箱はなしで，それぞれ求めよ．

(1) 1 から 6 まで異なる番号のついた 6 個のボ ー ルを A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合．
(2) 互いに区別の付かない 6 個のボ ー ルを A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合．
(3) 1 から 6 まで異なる番号のついた 6 個のボ ー ルを区別のつかない 3 つの箱に入れる場合．
(4) 互いに区別の付かない 6 個のボ ー ルを区別のつかない 3 つの箱に入れる場合．

7.4 場合の数 強化 3 題

7.4.1 $x+y+z=n$ の整数解の個数 〜 名城大 〜

n は自然数とする．

(1) $x+y+z=10, x>0, y>0, z>0$ を満たす整数の組合せ (x,y,z) は何通りあるか．
(2) $x+y+z=10, x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$ を満たす整数の組合せ (x,y,z) は何通りあるか．
(3) $x+y+z=n, x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$ を満たす整数の組合せ (x,y,z) は何通りあるか．

7.4.2 白玉が $k+1$ 個以上連続して現れない確率 〜1989 東大 〜

3 個の赤玉と n 個の白玉を無作為に環状に並べるものとする．このとき，白玉が連続して $k+1$ 個以上並んだ箇所が現れない確率を求めよ．ただし，$n\leqq k<n$ とする．

7.4.3 n 個のボ ー ルを 3 つの箱に分ける入れ方は何通りあるか

n を正の整数とし，n 個のボ ー ルを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える．ただし，1 個のボ ー ルも入らない箱があってもよいものとする．以下の 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めよ．

(1) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボ ー ルを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合．
(2) 互いに区別のつかない n 個のボ ー ルを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合．
(3) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボ ー ルを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合．
(4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別のつかないボ ー ルを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合．

7.5 確率 典型 15 題

7.5.1 等確率 〜 区別のない 3 つのサイコロ 〜

区別のない 3 個のサイコロを投げるとき，出た目の和が 5 となる確率を求めよ．

7.5.2 同基準 〜 隣り合う確率を求める 2 つの方法 〜

トランプのスペード 13 枚を一列に並べるとき，絵札がすべて隣り合う確率を求めよ．

7.5.3 非復元抽出 〜 引いたくじは戻さない 〜

当たり 3 本，はずれ 7 本のくじから 4 本を引くとき，2 本だけ当たりくじを引く確率を求めよ．ただし，引いたくじは戻さないとする．

7.5.4 余事象の利用 〜 積が 4 の倍数になる確率 〜

1 から 8 までの数の書かれた 8 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 3 数の和が 18 以下となる確率
(2) 3 数の積が 4 の倍数となる確率

7.5.5 全体像を見る 〜 玉の色が 2 種類になる確率 〜

赤玉 3 個，白玉 3 個，青玉 3 個が入っている袋から 3 個の玉を取り出すとき，玉の色が 2 種類になる確率を求めよ．

7.5.6 対称性に着目 〜 ランダムウォークの確率 〜

数直線上の動点 P を，コインを投げて表が出れば正の向きに 1 だけ移動さ，裏が出れば負の向きに 1 だけ移動させる．原点 O から出発して，コインを 10 回投げた後の点 P が正の部分にある確率を求めよ．

7.5.7 推移グラフ 〜 ランダムウォークの確率 〜

数直線上の動点 P を，コインを投げて表が出れば正の向きに 1 だけ移動させ，裏が出れば負の向きに 1 だけ移動させる．原点 O から出発して，コインを 10 回投げた後に点 P が初めて原点に戻る確率を求めよ．

7.5.8 独立反復試行 〜 先に 4 勝で優勝 〜

A，B の 2 人が繰り返し試合を行う．各試合において，A が勝つ確率は p, B が勝つ確率は q で，引き分けはない．先に 4 勝した方が優勝とするとき，次の確率を求めよ．

(1) 6 試合目に A が優勝を決める確率
(2) 6 試合目に優勝者が決まる確率

7.5.9 独立反復試行 〜3 勝リードで優勝 〜

A，B の 2 人が繰り返し試合を行う．各試合において，A が勝つ確率は p, B が勝つ確率は q で，引き分けはない．先に 3 勝リードした方が優勝とするとき，次の確率を求めよ．

(1) 5 試合目に A が優勝を決める確率
(2) 9 試合目に A が優勝を決める確率

7.5.10 サイコロの目の積

サイコロを n 回振り，出た目のすべての積を X とするとき，

(1) X が偶数である確率を求めよ．
(2) X が 6 の倍数である確率を求めよ．

(3) X が 4 の倍数である確率を求めよ．

(4) X が 12 の倍数である確率を求めよ．

7.5.11 サイコロの目の最大値と最小値

サイコロを n 回振り，出た目の最大値を M，最小値を m とする．

(1) $M=5$ となる確率を求めよ．

(2) $M=5, m=2$ となる確率を求めよ．

(3) $M-m=3$ となる確率を求めよ．

7.5.12 条件付き確率 ～ くじ引き ～

当たり 2 本，ハズレ 3 本入った箱からくじを 1 本取り出し，それを元に戻さずにもう 1 本取り出す．2 本目が当たりだったとき，1 本目も当たりである確率を求めよ．

7.5.13 条件付き確率 ～ 箱と玉 ～

2 つの箱 A，B があり，A には赤玉 4 個と白玉 1 個，B には赤玉 2 個と白玉 3 個が入っている．サイコロを振り，1 の目が出れば A，他の目が出れば B を選び，選んだ箱から玉を 1 個取り出す．取り出した玉が赤であるとき，箱 A が選ばれていた確率を求めよ．

7.5.14 条件付き確率 ～ 忘れた帽子 ～

5 回に 1 回の割合で，帽子を忘れる癖のある N 君が，正月に A，B，C の 3 軒を順に年始廻りをして家に帰ったとき，帽子を忘れてきたことに気づいた．家 B に忘れてきた確率を求めよ．

7.5.15 確率の最大化

O さんが各問題に正解する確率は $\dfrac{99}{100}$ である．O さんが 3 問違えるまで問題を解き続けるとき，n 問目で終わる確率 P_n が最大となる n を求めよ．

7.6 整数 典型 6 題

7.6.1 1 次不定方程式の整数解 ～1 組 ～

$29x+42y=4$ の整数解をすべて求めよ．

7.6.2 1 次不定方程式の整数解 ～ すべて ～

$29x+42y=4$ の整数解をすべて求めよ．

7.6.3 3 元不定方程式の有名問題

$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ を満たす自然数解 (l,m,n) をすべて求めよ．ただし，$l \leqq m \leqq n$ とする．

7.6.4 互いに素の証明

2 つの自然数 a と b が互いに素であるとき，a と $a+b$ も互いに素であることを示せ．

7.6.5 余りによる分類

n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数であることを示せ．

7.6.6 倍数証明

n が奇数のとき，$n^5 - n$ は 240 の倍数であることを証明せよ.

7.7 整数 強化 7 題

7.7.1 合同式

n, l, m は整数とする.

(1) n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを示せ.

(2) l, m を整数とする．$l^2 + m^2$ が 3 の倍数のとき，l, m がともに 3 の倍数であることを示せ.

7.7.2 合同式で $\pm$ を同時に処理

n を整数とする.

(1) $n^5 - n$ は 3 の倍数であることを示せ.

(2) n が奇数のとき，$n^5 - n$ は 120 の倍数であることを示せ.

7.7.3 合同式の威力を堪能する問題

(1) 2^{32} を 7 で割った余りを求めよ.

(2) n を自然数とする．$2^n - 1$ を 3 で割ると，n が奇数のときは 1 余り，n が偶数のときは割り切れることを示せ.

7.7.4 合同式を指数に代入するのは NG

次の問いに答えよ.

(1) 正の整数 n で $n^3 + 1$ が 3 で割り切れるものを全て求めよ.

(2) 正の整数 n で $n^n + 1$ が 3 で割り切れるものを全て求めよ.

7.7.5 無限降下法

次の方程式を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ．$a^3 + 2b^3 = 4c^3$

7.7.6 素数が無限に存在することの証明

素数は無限に存在することを示せ.

7.7.7 $6n - 1$ の形の素数が無限に存在することの証明

(1) 5 以上の素数は，ある自然数 n を用いて $6n + 1$ または $6n - 1$ の形で表されることを示せ.

(2) N を自然数とする．$6N - 1$ は $6n - 1$(n は自然数) の形で表される素数を約数に持つことを示せ.

(3) $6n - 1$(n は自然数) の形で表される素数は無限に多く存在することを示せ.

第 8 章　数学 II

第 9 章　数学 B

第 10 章　数学 III

10.1　数 III 複素数平面 強化 6 題

10.1.1 複素数の n 乗根

$z^6 = 1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

10.1.2 ド・モアブルの定理の利用 〜2016 九州大 〜

(1) θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする．このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ．

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right), \sin(n\theta) = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2) 次の方程式を満たす実数 $x\,(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ．

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3) 次の等式を証明せよ．

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

10.1.3 複素数平面上の三角形の形状決定

異なる 3 点 $\mathrm{O}(0), \mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta)$ に対し，等式 $2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$ が成り立つとき $\triangle\mathrm{OAB}$ はどんな形の三角形か．

10.1.4 複素数平面上の垂直条件 〜 茨城大 〜

複素数 z が $|z| = 1($ ただし，$z = -1)$ を満たすとする．$0, z, \dfrac{1}{z+1}$ が表す複素数平面上の点をそれぞれ O，A，B とするとき，

(1) $\dfrac{1}{z+1}$ の実部は $\dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(2) 2 直線 OA，OB が垂直に交わるような z の値をすべて求めよ．

10.1.5 複素数平面上の図形を表す方程式 2 つの解法

方程式 $z\bar{z} + (1+3i)\,z + (1-3i)\,\bar{z} + 9 = 0$ を満たす点 z の全体は，どのような図形を描くか．

10.1.6 複素数平面上の変換 〜2003〜 北海道大理系 〜〜

z を複素数とする．

(1) $\dfrac{1}{z+i} + \dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 z の描く図形 P を複素平面上に図示せよ．

(2) 点 z が (1) で求めた図形 P 上を動くとき，点 $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

10.2　数 III 曲線 強化 6 題

10.2.1 双曲線の方程式 2 つの解法

2 点 $(5,2),(5,-8)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が 6 の双曲線の方程式を求めよ．

10.2.2 楕円上の動点 〜2012 岡山大理系 〜

O を原点とする座標平面における曲線 $C: x^2+y^2=1$ 上に，点 $\mathrm{P}\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる．

(1) C の接線で，直線 OP に平行なものの方程式を求めよ．

(2) 点 Q が C 上を動くとき，$\triangle$OPQ の面積の最値と，最大値を与える点 Q の座標をすべて求めよ．

10.2.3 媒介変数表示 2 つの解法

t を媒介変数とする媒介変数表示

$$x=\frac{3}{1+t^2}, y=\frac{3t}{1+t^2}$$

で表された曲線はどのような図形を描くか．

10.2.4 媒介変数と軌跡 〜 弘前大 〜

円 $x^2+y^2=1$ の $y>0$ の部分を C とする．C 上の点 P と点 $\mathrm{R}(-1,0)$ を結ぶ直線 PR と y 軸の交点を Q とし，その座標を $(0,t)$ とする．

(1) 点 P の座標を $(\cos\theta, \sin\theta)$ とする．$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を t を用いて表せ．

(2) 3 点 A，B，S の座標を $\mathrm{A}(-3,0), \mathrm{B}(3,0), \mathrm{S}\left(0,\dfrac{1}{t}\right)$ とし，2 直線 AQ と BS の交点を T とする．点 P が C 上を動くとき，点 T の描く図形を求めよ．

10.2.5 極方程式 2 つの解法

極方程式 $r=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$ はどのような曲線を表すか．

10.2.6 極方程式 〜 神戸大 〜

$a>0$ を定数として，極方程式 $r=a(1+\cos\theta)$ により表される曲線 C_a を考える．次の問に答えよ．

(1) 極座標が $\left(\dfrac{a}{2},0\right)$ の点を中心として半径が 2 である円 S を，極方程式で表せ．

(2) 点 O と曲線 Ca 上の点 $P\neq O$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき，線分 PQ の長さは一定であることを示せ．

(3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき，極座標が $(2a,0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ．

10.3　数 III 関数 強化 4 題

10.3.1 分数不等式 3 つの解法

不等式 $\dfrac{2x+3}{x+1}\leqq x+3$ を解け．

10.3.2 無理不等式 ～ 旭川医科大 ～

x についての不等式 $\sqrt{a^2 - x^2} > ax - a$ を解け．ただし，a は定数で，$a \neq 0$ とする．

10.3.3 逆関数

$f(x) = 1 - x^2 \ (x \geqq 0)$ の逆関数を $g(x)$ とする．

(1) $g(x)$ を求めよ．

(2) 2 曲線 $y = f(x), y = g(x)$ の共有点の座標を求めよ．

10.3.4 合成関数の問題 ～ 小樽商科大 ～

$-1 < x < 1$ を定義域とする $f_p(x) = \dfrac{x-p}{1-px}, f_q(x) = \dfrac{x-q}{1-qx}\ (-1 < p < 1, -1 < q < 1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 定義域内のすべての x に対して，$-1 < f_q(x) < 1$ を示せ．

(2) 定義域内のすべての x に対して，$f_p(f_q(x)) = \dfrac{x-r}{1-rx}$ を満たすとき，r を p と q を用いて表し，$-1 < r < 1$ を示せ．

(3) 定義域内のすべての x に対して，$f_p(f_q(x)) = f_q(x)$ を満たす p を求めよ．

10.4 数 III 極限 強化 6 題

10.4.1 等比数列の極限

r を実数とするとき，数列 $\dfrac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+1}$ の極限を求めよ．

10.4.2 n 乗根の極限値 ～ 立命館大 ～

$0 < a < b$ である定数 a, b がある．$x_n = \left(\dfrac{a_n}{b} + \dfrac{b_n}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおくとき，

(1) 不等式 $b_n < a(x_n)^n < 2b_n$ を証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

10.4.3 格子点と極限 ～ 早稲田大 ～

n を正の整数とし，$y = n - x^2$ で表されるグラフと x 軸とで囲まれる領域を考える．この領域の内部および周に含まれ，x, y 座標がともに整数である点の個数を $a(n)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $a(5)$ を求めよ．

(2) $\sqrt{n}$ を超えない最大の整数を k とする．$a(n)$ を k と n の多項式で表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}$ を求めよ．

10.4.4 極限が有限の値になる条件 ～ 大阪市大 ～

次の極限が有限の値となるように定数 a, b を定め，そのときの極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9 - 8x + 7\cos 2x} - (a + bx)}{x^2}$$

10.4.5 フラクタル図形の面積 ～ 香川大 ～

面積 1 の正三角形 A_0 から初めて，下図のように図形 $A_1, A_2, \cdots$ をつくる．ここで，A_n は，A_{n-1} の各辺

の三等分点を頂点に持つ正三角形を A_{n-1} の外側に付け加えてできる図形である．このとき次の問いに答えよ．(図略)

(1) 図形 A_n の辺の数を求めよ．
(2) 図形 A_n の面積を S_n とするとき，$\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ．

10.4.6 確率の極限値 〜 慶応大 〜

n を自然数とする．区間 $[0, n)$ にごく小さな砂つぶを n 個でたらめに落とす実験を行った．どの砂粒についても，$[0,1), [1,2), \cdots, [n-1, n)$ のいづれの区間に落ちるかは同程度に確からしいとする．このとき，n 個のうちちょうど k 個の砂粒が区間 $[0,1)$ に落ちる確率を $P_n(k)$ とする．

(1) $P_n(k)$ を求めよ．
(2) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{k!{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}$ を求めよ．また，$\lim_{n \to \infty} P_n(k)$ を求めよ．

10.5 数 III 微分 典型 6 題

10.5.1 凹凸グラフの概形

関数 $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ の増減，極値，グラフの凹凸，漸近線を調べ，グラフの概形をかけ．

10.5.2 関数の最大最小

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ における $y = 2\sin x + \sin 2x$ の最大値と最小値を求めよ．

10.5.3 定数分離

方程式 $ax^5 - x^2 + 3 = 0$ が 3 個の異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

10.5.4 極値・変曲点をもつ条件

$f(x) = \left(x^2 + a\right)e^x$ とする．ただし，a は定数とする．

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもたないような a の値の範囲を求めよ．
(2) 曲線 $y = f(x)$ が変曲点をもつような a の値の範囲を求めよ

10.5.5 $f''(x)$ を用いた不等式証明

すべての正の数 x に対して，$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ が成立することを示せ．

10.5.6 整数問題への応用

$a^{b^2} = b^{a^2}$ かつ $a < b$ をみたす自然数の組 (a, b) は存在するか．

10.6 数 III 微分 強化 6 題

10.6.1 微分公式の証明 〜 和歌山県立医大 〜

(1) 導関数の定義から説きおこして，

(2) 積 · 商の微分法,

(3) 合成関数の微分法,

(4) 逆関数の微分法を順に追って説明し,

(5) $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$ なる指数関数の導関数と，$y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$ なる対数関数の導関数と,

(6) $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ なる三角関数の導関数とを導け．ただし，次のことがらは証明せずに，その結果だけを使ってよい．$i)\ \lim_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$($e$ は自然対数の底) $ii)\ \lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$($\theta$ は弧度法で表された角)

10.6.2 共通接線の本数 〜1987 東北大 〜

a を 0 でない実数とする．2 つの曲線 $y = e^x$ および $y = ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ.

10.6.3 関数の最大値 〜 京大 〜

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ．ただし，$\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いて良い.

10.6.4 2 変数関数の最大値 〜2021 大阪大 〜

a, b を $ab < 1$ を満たす正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{P}\,(a, b)$ から，曲線 $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ に 2 本の接線を引き，かつ，その接点を $\mathrm{Q}\left(s, \dfrac{1}{s}\right), \mathrm{R}\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$ とする．ただし，$s < t$ とする.

(1) s および t を a, b を用いて表せ.

(2) 点 $\mathrm{P}\,(a, b)$ が曲線 $y = \dfrac{9}{4} - 3x^2$ 上の $x > 0, y > 0$ を満たす部分を動くとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値とそのときの a, b の値を求めよ.

10.6.5 線分の長さの最大 〜2012 東大 〜

次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える.

$$x^2 + (y-1)^2 \leqq 1, x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする．その線分の長さ L の最大値を求めよ．また，L が最大値をとるとき，x 軸と l のなす角 $\theta\,(0 < \theta < \pi)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ.

10.6.6 不等式証明 〜2006 筑波大 〜

$a \geqq b > 0, x \geqq 0$ とし，n は自然数とする．次の不等式を示せ.

(1) $0 \leqq e^x - (1 + x) \leqq \dfrac{1}{2}x^2 e^x$

(2) $a^n - b^n \leqq n\,(a - b)\,a^{n-1}$

(3) $0 \leqq e^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{1}{2n}x^2 e^x$

10.7 数 III 積分 強化 10 題

10.7.1 置換積分による等式証明 〜2005 名古屋大 〜

(1) 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ を満たすとき，

$$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ を求めよ．

10.7.2 絶対値を含む関数の積分 〜2001 東工大 〜

$a>0, t>0$ に対して定積分 $\mathrm{S}(a,t)=\displaystyle\int_0^{a}\left|e^x-\frac{1}{t}\right|dx$ を考える．

(1) a を固定したとき，t の関数 $\mathrm{S}(a,t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ．

10.7.3 定積分の上端についての関数 〜 東工大 〜

$0<x<\pi$ で定義された関数

$$f(x)=\int_0^{x}\frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

の最小値を求めよ．

10.7.4 積分型の平均値の定理 〜 慶応大 〜

$f(x)$ が $x\geqq 0$ で連続な増加関数で，$f(0)=0$ とする．関数 $g(x)\,(x>0)$ を

$$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^{x}f(t)\,dt$$

と定める．$x>0$ において，$g(x)<f(x)$ および $g'(x)>0$ を示せ．

10.7.5 区分求積法 〜 東京理科大 〜

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}=\sum_{k=n}^{2n}\frac{\log k}{k}$ を求めよ．

10.7.6 ガウス記号と極限 〜2000 大阪大 〜

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．n を正の整数とし，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{[\sqrt{2}n^2-k^2]}{n^2}$$

とおく．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

10.7.7 定積分の値の評価 〜 信州大 〜

不等式

$$\pi(e-1)<\int_0^{\pi}e^{|\cos 4x|}dx<2\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$$

が成り立つことを示せ．

10.7.8 部分積分の使いどころ 〜2000 京大 〜

関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ で定める.

(1) $y=f(x)$ の $x=1$ における法線の方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた法線と x 軸および $y=f(x)$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ.

10.7.9 面積の等分 〜 京都府立医大 〜

次の不等式が定める図形を D とする.

$0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}, 0\leqq y\leqq \sin 2x$

(1) 曲線 $y=a\sin x$ と $y=\sin 2x$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で交わるような定数 a の範囲を求めよ.

(2) 曲線 $y=a\sin x$ が図形 D を面積の等しい 2 つの部分に分けるような定数 a を求めよ.

10.7.10 逆関数の積分 〜1994 東大 〜

xyz 空間において条件 $x^2+y^2\leqq z^2, z^2\leqq x, 0\leqq z\leqq 1$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ の全体からなる立体を考える．この立体の体積を V とし，$0\leqq k\leqq 1$ に対し，z 軸を直交する平面 $z=k$ による切り口の面積を S とする.

(1) $k=\cos\theta$ とおくとき，S を θ で表せ．θ は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の定数とする.

(2) V の値を求めよ.