平面ベクトルの基礎

ベクトルは座標を一般化した概念です．図形問題を式計算に落とし込むだけでなく，式の問題を図形に視覚化することも可能にします．基礎となる 7 つの項目について，基本形の問題を抜粋しました．

大橋

$\boxed{1}$ 条件式で定まる点の位置

$\triangle$ ABC の内部に点 P があり，$6\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ を満たしている．

(1) 点 P はどのような位置にあるか．

(2) 面積比 $\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}$ を求めよ．

$\boxed{2}$ 共線条件

$\triangle$ABC の辺 BC を $1:2$ に内分する点を P，辺 AC を $3:1$ に内分する点を Q，辺 AB を $6:1$ に外分する点を R とするとき，3 点 P，Q，R が一直線上にあることを示せ．

$\boxed{3}$ 交点の位置ベクトル

$\triangle$ABC の辺 AB を $1:2$ に内分する点を D， 辺 AC を $3:1$ に内分する点を E，BE と CD の交点を F とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

$\boxed{4}$ 三角形の五心の位置ベクトル

〔**垂心**〕3 辺の長さが $\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=2$， $\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ である $\triangle$ABC の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

〔**内心**〕3 辺の長さが $\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CA}=5$， $\mathrm{AB}=3$ である $\triangle$ABC の内心を I とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

〔**外心**〕3 辺の長さが $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=\sqrt{6}$，$\mathrm{CA}=2$ である $\triangle$ABC の外心を O とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ．

5 **ベクトル方程式**

〔1〕2 直線 $x-2y+3=0$，$x+3y+5=0$ のなす角 θ を求めよ．

〔2〕xy 平面上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 0)$ に対して，

$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}})=0$$

を満たす xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の描く軌跡を求めよ．

〔3〕定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ と動点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ について，$|4\vec{p}-3\vec{a}-\vec{b}|=12$ で表される点 P はどのような図形を描くか．

6 **終点の存在範囲**

$\triangle\mathrm{OAB}$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(s, t$ は実数$)$ とする．s，t が次の条件を満たすとき，点 P の動く範囲を図示せよ．

(1) $s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(2) $s+t=1$，$s\geqq 0$

(3) $s+t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(4) $3s+t=2$

(5) $0\leqq s\leqq \dfrac{1}{2}$，$0\leqq t\leqq 1$

(6) $0\leqq s+t\leqq 2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

7 **別解研究**

(1) 実数 x，y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$3x+4y$ の最大値と最小値を求めよ．
(2) 実数 x，y が $x^2+y^2=1$，$y\geqq 0$ を満たすとき，$3x+4y$ の最大値と最小値を求めよ．