連続性と中間値の定理

(1) 関数 $f(x)$ が $\boldsymbol{x=a}$ **において連続**であるとは,

であることをいう．関数 $f(x)$ が区間 I 内の全ての a において連続であるとき,
$f(x)$ は**区間 $\boldsymbol{I}$ で連続**であるという.

(2) 定義域全体で連続である関数を**連続関数**という.
連続関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して,

$$\text{和 } f(x)+g(x),\quad \text{差 } f(x)-g(x),\quad \text{積 } f(x)g(x),\quad \text{商} \frac{f(x)}{g(x)},\quad \text{絶対値 } |f(x)|,\quad \text{逆関数 } f^{-1}(x),\quad \text{合成関数 } (g\circ f)(x)$$

はすべて連続関数である.

最大値・最小値の存在定理

関数 $f(x)$ が, ______________________________であるとき,

$f(x)$ は，この区間内で最大値と最小値をもつ.

解の存在定理

関数 $f(x)$ が, ____であるとき,

$a<c<b$　かつ　$f(c)=0$　となる c が存在する

中間値の定理

関数 $f(x)$ が, ____であるとき,

$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 m に対し,

$a<c<b$　かつ　$f(c)=m$　となる c が存在する

微分可能性と平均値の定理

(3) 関数 $f(x)$ と x の異なる値 x_1，x_2 に対し，

という値を，関数 $f(x)$ の **x_1 と x_2 の間の平均変化率**という．

(4) 関数 $f(x)$ と定数 a に対し，

を，関数 $f(x)$ の **$x=a$ における微分係数**といい，記号 $\boldsymbol{f'(a)}$ で表す．
a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数を，$f(x)$ の**導関数**といい，$\boldsymbol{f'(x)}$ で表す．
与えられた関数 $f(x)$ に対して $f'(x)$ を求めることを**微分する**という．

(5) 関数 $f(x)$ が，**$x=a$ において微分可能**であるとは，

ことをいう．関数 $f(x)$ が区間 I 内の全ての a において微分可能であるとき，
$f(x)$ は**区間 I で微分可能**であるという．

ロルの定理

関数 $f(x)$ が，閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続，かつ，開区間 $a < x < b$ で微分可能，かつ，

$f(a) = f(b)$ を満たすとき，

$a < c < b$　かつ　　　　　　　　　　となる c が存在する．

平均値の定理

関数 $f(x)$ が，閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続，かつ，開区間 $a < x < b$ で微分可能であるとき，

$a < c < b$　かつ　　　　　　　　　　　　　となる c が存在する．

高校数学を逸脱するより発展的な話題

平均値の定理の一般化として，次の定理がある．

コーシーの平均値定理

$f(x)$，$g(x)$ は閉区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続，開区間 $a < x < b$ で微分可能であるとする．さらに，$a < x < b$ のどの点においても，$f'(x)$，$g'(x)$ が同時に 0 になることはないものとする．このとき，$g(a) \neq g(b)$ ならば

$$a < c < b \quad \text{かつ} \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が存在する．

通常の平均値の定理は，$g(x) = x$ という特別な場合だとみなせる．$f(x)$，$g(x)$ のそれぞれに，通常の平均値の定理を適用すれば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_1), \qquad \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c_2)$$

となる，c_1，c_2 が存在し，辺々を割れば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

を得るが，ここにおいて $c_1 = c_2$ となる保証はない．この c の値を共通のものとしてとることができる，というのが，コーシーの平均値の定理の主張である．

証明は，目的の式を $F'(c) = 0$ という形に整理して作られる $F(x)$ に，ロルの定理を適用する．

証明

$F(x) = (g(b)-g(a))(f(x)-f(a)) - (f(b)-f(a))(g(x)-g(a))$ とおくと，
$F(a) = 0$ かつ $F(b) = 0$ より，ロルの定理が適用できて，

$$a < c < b \quad \text{かつ} \quad F'(c) = 0 \quad \text{となる } c \text{ が存在する．}$$

$F'(c) = 0$ から，

$$(g(b)-g(a))f'(c) - (f(b)-f(a))g'(c) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(証明終了)

ロピタルの定理

$f(x)$，$g(x)$ は $x = a$ の近くで微分可能であり，かつ，$f(a) = 0$，$g(a) = 0$ とし，
さらに，$x = a$ の近くで $g'(a) \neq 0$ であるとする．このとき，

$$\text{極限値} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{が存在するならば} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

証明

コーシーの平均値の定理により a の近くの x の値に対し，

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる c が x と a の間に存在する．$x \to a$ のとき，$c \to a$ より，

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(証明終了)

これは，非常に強力な定理で，広く親しまれています．

利用例 ： $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$