平均値の定理

〜基礎から「解けない漸化式」への応用まで〜

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}=\sqrt{2}$$

平均値の定理の基本

関数 $f(x)$ が，閉区間 $[a,\ b]$ で連続，かつ，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとする．
このとき，開区間 $(a,\ b)$ 内の値 c で，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

を満たすものが存在する．

例題 1． 関数 $f(x)=\log x$ の区間 $1 \leqq x \leqq e$ について，平均値の定理における c の値を求めよ．

例題 2． 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$ を求めよ．

問題 1． 双曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の 2 点 $(1,\ 1)$，$(2,\ \frac{1}{2})$ を結ぶ線分と平行な直線で，この双曲線に接するものの方程式を求めよ．

問題 2． $A_n = \dfrac{1}{2}(\log n)^2$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(A_{n+1} - A_n)$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ は用いてよい．

例題 3． e を自然対数の底とする．$e \leqq p < q$ のとき，不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ．

「解けない漸化式」への応用

例題 4． $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos x$ とする．

(1) 任意の x，y に対し，$|f(x) - f(y)| \leqq \dfrac{1}{2}|x - y|$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $x = f(x)$ はただ 1 つの解をもつことを証明せよ．

(3) 任意の a に対して，$a_0 = a$，$a_n = f(a_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ は，$f(x) = x$ の解に収束することを示せ．

問題 3． $a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+a_n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$ とする．

(a) 1 以上の実数 x で，$f(x) = x$ を満たすものを求めよ．

(b) 1 以上の実数 a，b に対し，常に $|f(a) - f(b)| \leqq \dfrac{1}{4}|a - b|$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

問題 4． $a_1 = \sqrt{2},\quad a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

問題 5． 関数 $f(x)$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$ とする．

(1) $x > \dfrac{1}{2}$ ならば $0 \leqq f'(x) < \dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(2) x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}\ (n = 0, 1, \cdots)$ を $x_{n+1} = f(x_n)$ によって定める．
$x_0 > \dfrac{1}{2}$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ であることを示せ．

例題 1． 関数 $f(x)=\log x$ の区間 $1 \leqq x \leqq e$ について，平均値の定理における c の値を求めよ．

解答

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ より，**平均値の定理**より，$1<c<e$ なる c で，

$$\frac{\log e-\log 1}{e-1}=\frac{1}{c}$$

を満たすものが存在する．このとき，$c=\boldsymbol{e-1}$.

例題 2． 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$ を求めよ．

解答

$f(x)=\sin x$ とおくと，$f'(x)=\cos x$ である．

平均値の定理より，x と $\sin x$ の間の値 c で，

$$\frac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=f'(c) \quad \text{すなわち} \quad \frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\cos c$$

となるものが存在する．$x\to 0$ のとき，$c\to 0$ より，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}=\lim_{c\to 0}\cos c=\mathbf{1}$$

問題 1.　双曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の 2 点 $(1,\ 1)$，$(2,\ \frac{1}{2})$ を結ぶ線分と平行な直線で，この双曲線に接するものの方程式を求めよ．

解答　$y' = -\dfrac{1}{x^2}$ より，接点の座標を $(c,\ \frac{1}{c})$ とおくと，

$$\frac{\frac{1}{2}-1}{2-1} = -\frac{1}{c^2} \qquad \therefore \quad c = \sqrt{2}$$

ゆえに，求める直線の方程式は

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}^2}(x-\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2}}$$

問題 2.　$A_n = \dfrac{1}{2}(\log n)^2$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(A_{n+1}-A_n)$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ は用いてよい．　(名大)

解答　$f(x) = \dfrac{1}{2}(\log x)^2$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{\log x}{x}$.

平均値の定理より，$n < x < n+1$ かつ

$$\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n} = \frac{\log c}{c}$$

となる c が存在する．$n \to \infty$ のとき，$c \to \infty$ より，

$$\lim_{x\to\infty}(A_{n+1}-A_n) = \lim_{c\to\infty}\frac{\log c}{c} = \mathbf{0}$$

例題 3.　e を自然対数の底とする．$e \leqq p < q$ のとき，不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ．　(名大)

解答　$f(x) = \log(\log x)$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{1}{x\log x}$.

平均値の定理より，$p < c < q$ となる c で

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p} = f'(c) \quad \text{すなわち} \quad \frac{\log(\log q)-\log(\log p)}{q-p} = \frac{1}{c\log c}$$

を満たすものが存在する．$p \geqq e$ より，$c > e$ なので，

$$\frac{1}{c\log c} < \frac{1}{e\log e} = \frac{1}{e} \qquad \therefore \quad \frac{\log(\log q)-\log(\log p)}{q-p} < \frac{1}{e}$$

したがって，$\log(\log q) - \log(\log p) < \dfrac{q-p}{e}$.　□

「解けない漸化式」への応用

例題 4． $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos x$ とする．

(1) 任意の x，y に対し，$|f(x)-f(y)|\leqq\dfrac{1}{2}|x-y|$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $x=f(x)$ はただ 1 つの解をもつことを証明せよ．

(3) 任意の a に対して，$a_0=a$，$a_n=f(a_{n-1})$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ は，$f(x)=x$ の解に収束することを示せ．　(三重大)

解答

(1) $x=y$ のとき，両辺$=0$ より，成立するので，以下 $x\neq y$ とする．
$f'(x)=-\dfrac{1}{2}\sin x$．**平均値の定理**より，$x$ と y の間の値 c で

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=-\frac{1}{2}\sin c$$

となるものが存在する．したがって，

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leqq\frac{1}{2}$$

$\therefore\quad |f(x)-f(y)|\leqq\dfrac{1}{2}|x-y|$.　□

(2) $g(x)=x-f(x)$ とおくと，$g'(x)=1+\dfrac{1}{2}\sin x>0$ より，$g'(x)$ は単調増加．
これと，$g(0)=-\dfrac{1}{2}<0<\dfrac{\pi}{2}=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，
$g(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在する．
これが $x=f(x)$ となる唯一の x である．　□

(3) $f(x)=x$ を満たす x を α とおく．$x=a_{n-1}$，$y=\alpha$ を (2) に適用すると

$$|a_n-\alpha|\leqq\frac{1}{2}|a_{n-1}-\alpha|$$

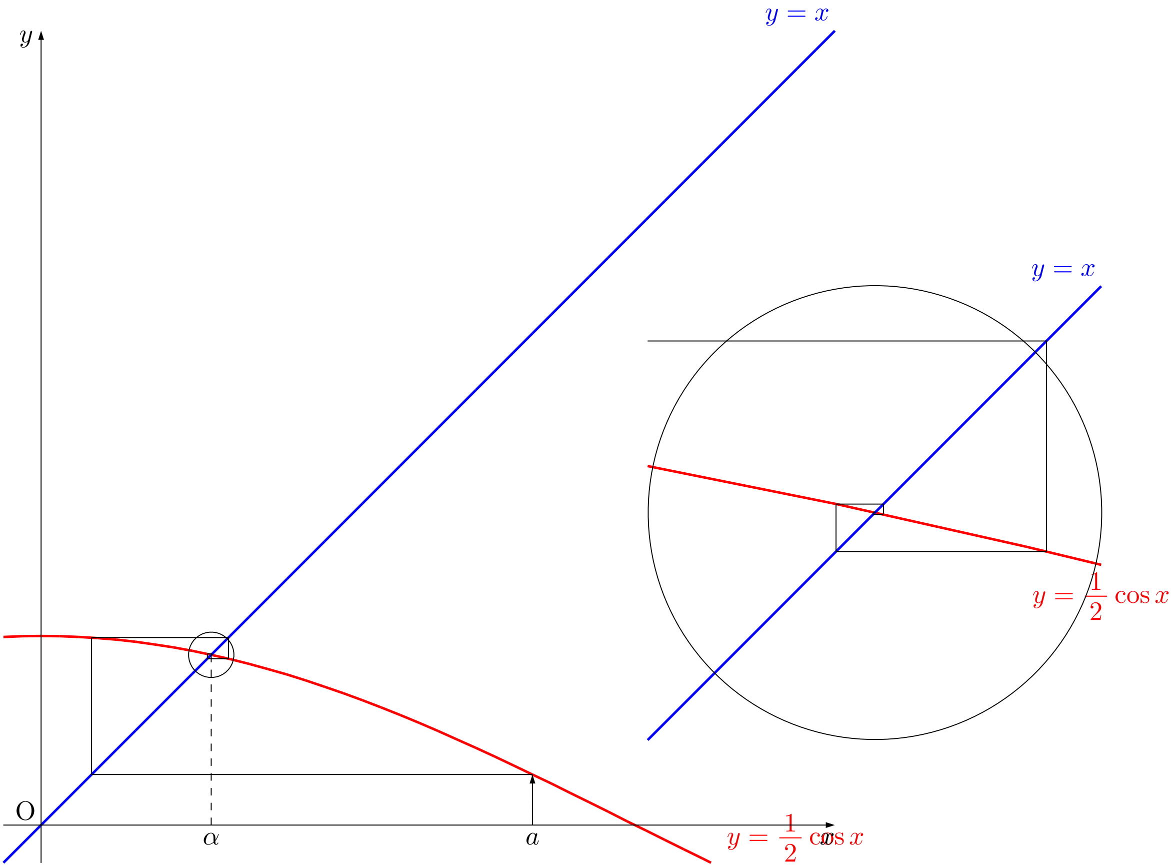
これを繰り返し用いると

$$|a_n-\alpha|\leqq\frac{1}{2}|a_{n-1}-\alpha|\leqq\cdots\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n|a_0-\alpha|$$

$$0\leqq|a_n-\alpha|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$　□

蜘蛛の巣図；



lim を用いずにそのまま表してみる遊び；

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\cos\left(\cdots\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right) = \alpha$$

ただし，α は $\dfrac{1}{2}\cos\alpha = \alpha$ の解.

※ 消失点における値が初項 a であり，a が任意の実数でこの等式は成り立つ.

問題 3． $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$ とする．

(a) 1 以上の実数 x で，$f(x) = x$ を満たすものを求めよ．

(b) 1 以上の実数 a，b に対し，常に $|f(a) - f(b)| \leqq \dfrac{1}{4}|a-b|$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

解答

(1) (a) $x = 1 + \dfrac{1}{1+x}$ とすると，$x^2 = 2$．　$x \geqq 1$ より，$x = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

(b) $a = b$ のとき，両辺$= 0$ より，成立するので，以下 $a \neq b$ とする．

$f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$． **平均値の定理**より，$a$ と b の間の値 c で，

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = -\frac{1}{(1+c)^2}$$

を満たすものが存在する．このとき，

$$\frac{|f(a)-f(b)|}{|a-b|} = \frac{1}{(1+c)^2} \leqq \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

ゆえに，　$|f(a) - f(b)| \leqq \dfrac{1}{4}|a-b|$．　□

(2) k を自然数とし，$a_k \geqq 1$ と仮定すると，$a_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{1+a_k} > 1$．

これと，$a_1 \geqq 1$ より，任意の自然数 n に対して，$a_n \geqq 1$ である．

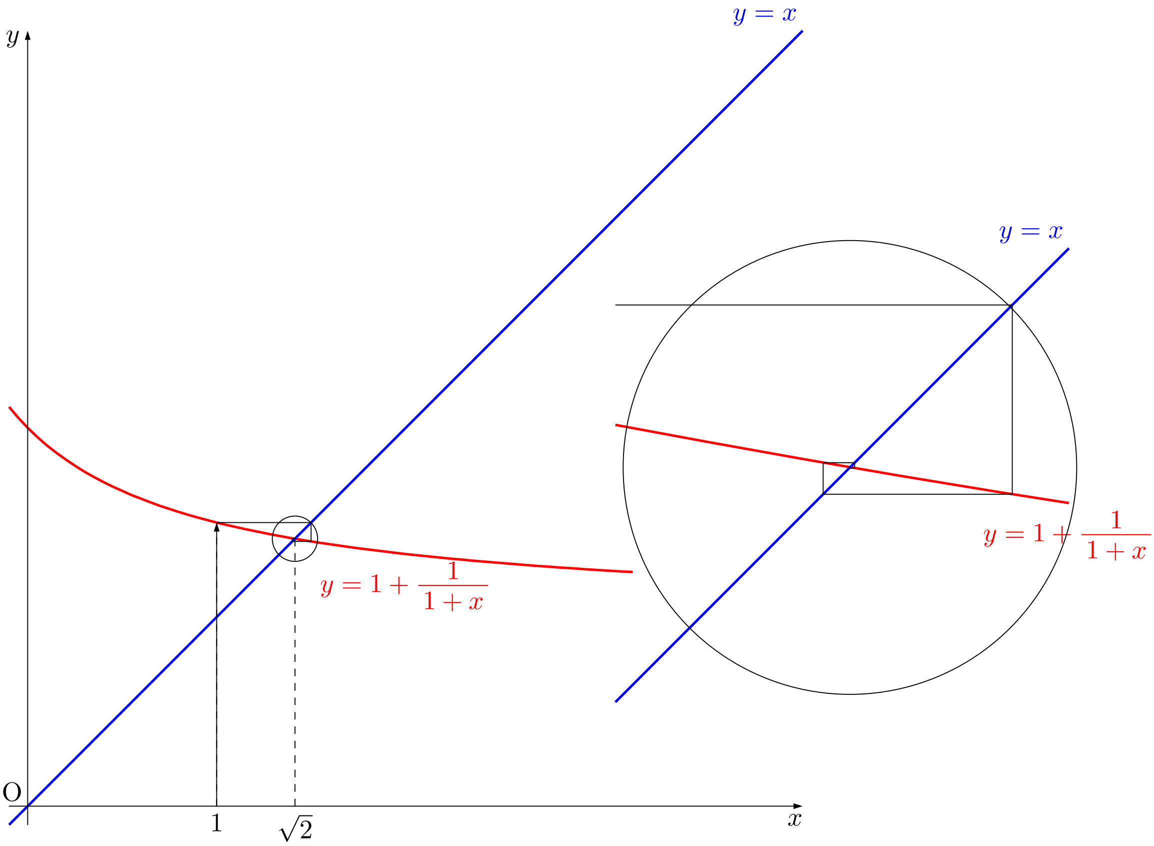
よって，$a = a_n$，$b = \sqrt{2}$ を (1)(b) に適用できて，

$$\left|a_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqq \frac{1}{4}\left|a_n - \sqrt{2}\right|$$

$$\therefore \quad 0 \leqq \left|a_n - \sqrt{2}\right| \leqq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left|a_1 - \sqrt{2}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\sqrt{2}}$.

蜘蛛の巣図；



lim を用いずにそのまま表してみる遊び；

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}}=\sqrt{2}$$

問題 4. $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

解答

$f(x) = \sqrt{2}^x$ とおくと，$f(2) = 2$，$f(4) = 4$ である.
$y = f(x)$ のグラフは常に下に凸であり，$y = x$ のグラフは直線であるから，
この 2 つの交点は多くて 2 点しかない.
以上より，$f(\alpha) = \alpha$ となる実数 α は $\alpha = 2, 4$ しかない.
さて，k を自然数とし，$a_k < 2$ と仮定すると，$a_{k+1} = \sqrt{2}^{a_k} < \sqrt{2}^2 = 2$.
これと $a_1 = \sqrt{2} < 2$ より，任意の自然数 n に対して $a_n < 2$.
$f'(x) = \sqrt{2}^x \log\sqrt{2}$.
平均値の定理より，$a_n < c < 2$ なる実数 c で

$$\frac{f(2) - f(a_n)}{2 - a_n} = f'(c) \quad \text{すなわち} \quad \frac{2 - a_{n+1}}{2 - a_n} = \sqrt{2}^c \log\sqrt{2}$$

を満たすものが存在する．ここで，

$$\sqrt{2}^c \log\sqrt{2} < \sqrt{2}^2 \log\sqrt{2} = 2\log\sqrt{2} = \log\sqrt{2}^2 = \log 2$$

に注意すると，

$$\frac{2 - a_{n+1}}{2 - a_n} < \log 2 \quad \text{すなわち} \quad 2 - a_{n+1} < \log 2(2 - a_n)$$

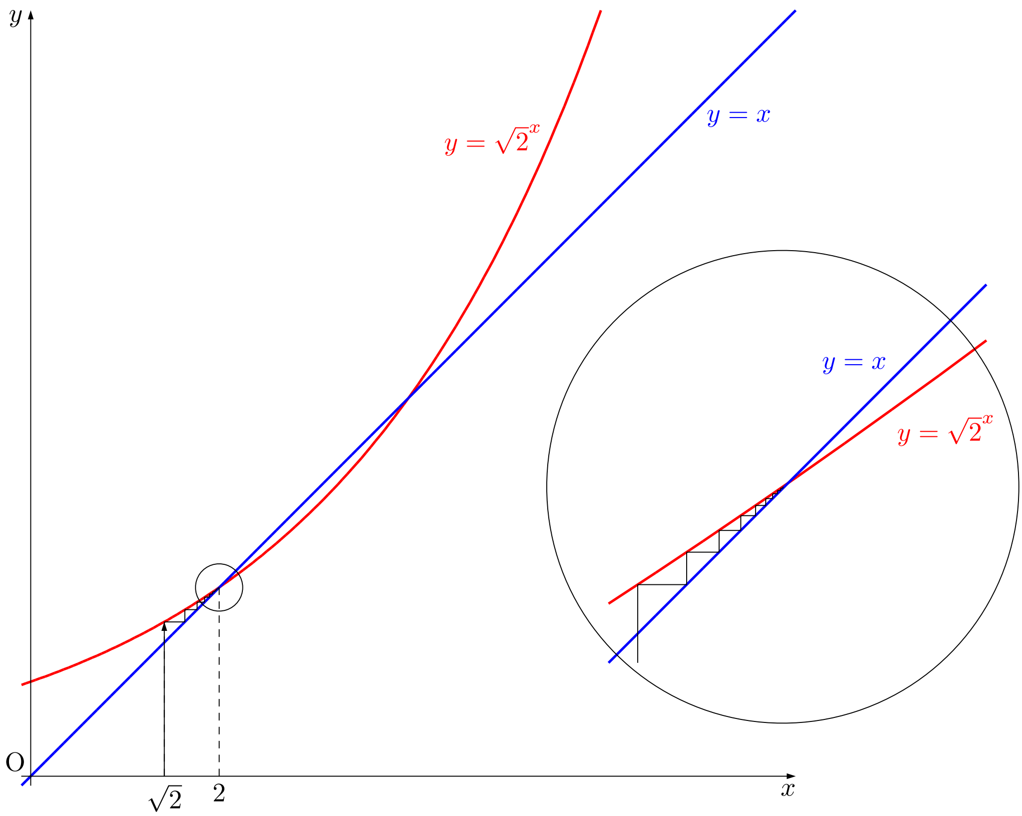
これをくり返し用いると，

$$\therefore \quad 2 - a_n < \log 2(2 - a_{n-1}) < \cdots < (\log 2)^{n-1}(2 - a_1)$$

$$\therefore \quad 0 \leqq 2 - a_n < (\log 2)^{n-1}(2 - a_1) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

したがって $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{2}$

蜘蛛の巣図；



lim を用いずにそのまま表してみる遊び；

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}} = 2$$

問題 5． 関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ とする．

(1) $x>\dfrac{1}{2}$ ならば $0 \leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(2) x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=0,1,\cdots)$ を $x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める．$x_0>\dfrac{1}{2}$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=1$ であることを示せ．　(東大)

解答

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\{1\cdot(1+e^{-2(x-1)})+x\cdot(-2e^{-2(x-1)})\}=\dfrac{1}{2}\{1+e^{-2(x-1)}-2xe^{-2(x-1)}\}$

$f''(x)=\dfrac{1}{2}\{-2e^{-2(x-1)}-2e^{-2(x-1)}+4xe^{-2(x-1)}\}=2(x-1)e^{-2(x-1)}$.

よって，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$(\frac{1}{2})$

したがって，$x>\dfrac{1}{2}$ ならば $0 \leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$.　□

(2) (1) の結果より，$x>\dfrac{1}{2}$ において，$f(x)$ は単調増加する．これと

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{1+e^{-2\cdot(\frac{1}{2}-1)}\right\}=\frac{1+e}{4}>\frac{1+1}{4}=\frac{1}{2}$$

より，$x>\dfrac{1}{2}$ ならば $f(x)>\dfrac{1}{2}$ である．

ゆえに，k を 0 以上の整数として，$x_k>\dfrac{1}{2}$ を仮定すると，$x_{k+1}=f(x_k)>\dfrac{1}{2}$.

これと $a_0>\dfrac{1}{2}$ より，任意の 0 以上の整数 n に対して，$x_n>\dfrac{1}{2}$ が成立する．

平均値の定理より，1 と x_n の間の値 c で，

$$\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c)\quad \text{すなわち}\quad \frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}=f'(c)$$

を満たすものが存在する．

ここで，$1>\dfrac{1}{2}$ かつ $x_n>\dfrac{1}{2}$ より，$c>\dfrac{1}{2}$ なので，(1) の結果から

$$\frac{|x_{n+1}-1|}{|x_n-1|}=f'(c)<\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad |x_{n+1}-1|<\frac{1}{2}|x_n-1|.$$

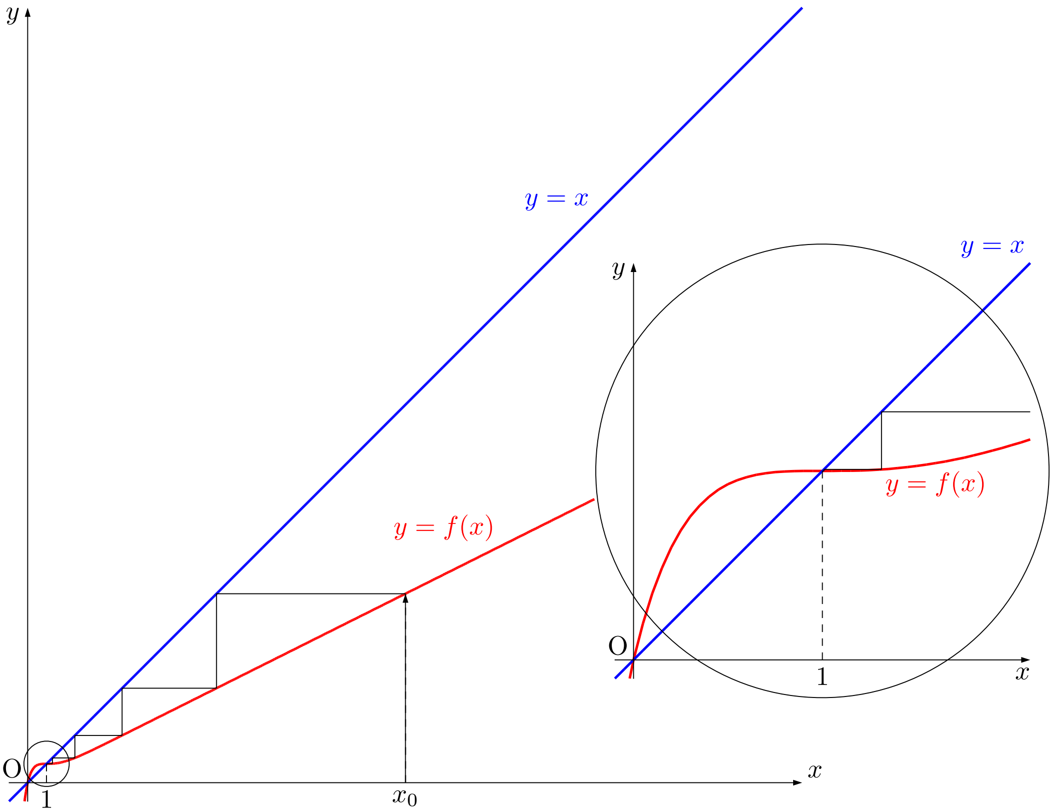
これを繰り返し用いると，

$$|x_n-1|<\frac{1}{2}|x_{n-1}-1|<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^n|x_0-1|$$

$$\therefore\quad 0 \leqq |x_n-1|<\left(\frac{1}{2}\right)^n|x_0-1| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=1$　□

蜘蛛の巣図；



lim を用いずにそのまま表してみる遊び；

$f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ とすると

$$f\Bigl(f\Bigl(f\bigl(f\bigl(f\left(f\left(f\left(f\left(f\cdots\right)\right)\right)\right)\bigr)\bigr)\Bigr)\Bigr)=1$$

※ 消失点における値が初項 x_0 であり，この値が $x_0>\dfrac{1}{2}$ を満たすときにこの等式は成立する．

... 以上の問題を眺めていると自然に浮かんでくるのは...

問 1.　漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ をもつ数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとする．このとき，必ず $f(\alpha) = \alpha$ が成り立つといえるか？

問 2.　漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ をもつ数列 $\{a_n\}$ が収束するために，初項 a_1 と $f(x)$ についてどのような条件が必要か？