第１回　1.1^n と n^{10} のどちらがより速く発散するか？

数列 $\{1.1^n\}$ も $\{n^{10}\}$ も，無限大に発散することには変わりない．それでは，どちらの方が速く発散するだろうか？概数を表に示す．

n	1	10	100	1000
1.1^n	1.1	2.5937424601	13780.6123398224	2469932918006030000000000000000000000000000
n^{10}	1	10000000000	100000000000000000000	1000000000000000000000000000000

言葉を用意する．正の無限大に発散するような 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ を満たすとき，$\{a_n\}$ は $\{b_n\}$ より速く発散する，といい，

$$n\text{ が十分に大きいとき，}\quad a_n \ll b_n$$

と表す．これは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\infty$ と同値である．

各種数列の発散速度

1 より大きい実数 r と自然数 k に対して， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{r^n}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0$

つまり，n が十分大きいとき， $\quad n^k \ll r^n \ll n!$

これを表題に当てはめると，答えは意外にも $1.1^n \gg n^{10000}$ となる．

証明　$n \geqq k+1$ のとき，$r^n=((r-1)+1)^n=\displaystyle\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_l(r-1)^l > {}_n\mathrm{C}_{k+1}(r-1)^{k+1}$ より，

$$\begin{aligned}
\frac{n^k}{r^n} &\leqq \frac{n^k}{{}_n\mathrm{C}_{k+1}(r-1)^{k+1}}\\
&=\frac{(k+1)k(k-1)\cdots 2\cdot 1}{\underbrace{n(n-1)\cdots(n-k)}_{k+1\text{ 個}}}\cdot\frac{n^k}{(r-1)^{k+1}}\\
&=\frac{(k+1)k(k-1)\cdots 2\cdot 1}{n(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})}\cdot\frac{1}{(r-1)^{k+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{r^n}=0
\end{aligned}$$

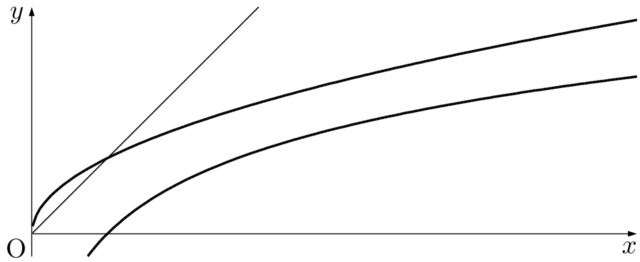
一方，$N \leqq r < N+1$ なる自然数 N をとすると，$n \geqq N+1$ のとき，

$$\begin{aligned}
\frac{r^n}{n!} &= \frac{r\cdot r\cdot r\cdot\cdots\cdot r}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot N}\cdot\frac{r\cdot r\cdot r\cdot\cdots\cdot r}{(N+1)\cdot\cdots\cdot n}\\
&\leqq \frac{r\cdot r\cdot r\cdot\cdots\cdot r}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot N}\cdot\frac{r\cdot r\cdot r\cdot\cdots\cdot r}{\underbrace{(N+1)\cdot\cdots\cdot(N+1)}_{(n-N)\text{ 個}}}\\
&=\frac{r\cdot r\cdot r\cdot\cdots\cdot r}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot N}\cdot\left(\frac{r}{(N+1)}\right)^{n-N} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0
\end{aligned}$$

$\square$

第2回 $\sqrt{x}$ と $\log x$ で，発散速度がより遅いのはどちらか？

無理関数 $y=\sqrt{x}$ も，対数関数 $y=\log x$ も，$x\to\infty$ のとき，$y\to\infty$ であることには変わりない．そしてその発散速度はいづれも $y=x$ より遅いことは想像するに容易い．では，より遅いのはどちらだろうか？



各種関数の発散速度

正の実数 α に対して， $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0$

つまり，x が十分大きいとき， $\log x \ll x^\alpha \ll e^x$

証明　まず，$n-1\leqq x<n$，$k-1\leqq\alpha<k$ なる自然数 n,k をとれば，$x\to\infty$ のとき $n\to\infty$ となるので，

$$\frac{x^\alpha}{e^x}<\frac{n^k}{e^{n-1}}=\frac{n^k}{e^n}\cdot e\xrightarrow{x\to\infty}0\quad\therefore\quad\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$$

さらに，$\log x=t$ とおくと，$x\to\infty$ のとき，$t\to\infty$ より，

$$\frac{\log x}{x^\alpha}=\frac{t}{(e^t)^\alpha}=\left(\frac{t^{\frac{1}{\alpha}}}{e^t}\right)^\alpha\xrightarrow{x\to\infty}0^\alpha=0\quad\therefore\quad\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0$$

証明の別のアプローチとして，不等式

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\ (n\text{ は自然数})$$

を利用する方法も考えられる．

これで，表題の答えは $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\gg\log x$ ということがわかった．驚きなのは $\alpha=0.00001$ であっても $x^{0.00001}\gg\log x$ ということだ．対数関数が如何に遅いかがわかる．