第 1 回　微分計算力向上のための 25 分演習

1. 関数 $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$ のグラフの概形をかけ.

2. $f(x) = x + \sqrt{2x - x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の増減を調べ，その最大値，最小値を求めよ.

3. 次の各問に答えよ.

(1) $0 \leqq x < 2\pi$ の区間において，2 曲線

$$y = 2\sin x, \quad y = a - \cos 2x$$

が接するように定数 a の値を定めよ．ここで，2 曲線が点 P で接するとは，P を共有し，かつ P における接線が一致することである.

(2) 2 曲線

$$y = \log(2x+3), \quad y = a - \log x$$

が直交するように定数 a の値を定めよ．ここで，2 曲線が点 P で直交するとは，P で交わり，かつ P における 2 接線が直交することである.

4. 次の各問に答えよ.

(1) $x > 0$ のとき $e^x > \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ.

(2) (1) を利用して，$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ を証明せよ.

第 2 回　　微分計算力向上のための 25 分演習

1． 関数 $f(x)=\dfrac{4x+3}{x^2-x+1}$ の極小値を求めよ．

2． $y=f(x)=2\sin x+\sqrt{3}\sin 2x$ の最小値を求めよ．

3. k を実数の定数とし，

$$f(x) = x^2(x+8), \quad g(x) = (x^2-1)(x+4)$$

とするとき，x に関する方程式

$$f(x) - kg(x) = 0$$

の相異なる実数解の個数は k の値によってどう変わるか.

4. 次の各問に答えよ.

(1) $x > 0$ のとき $\log x < \sqrt{x}$ が成立することを示せ．必要なら $e > 2$ であることは証明せずに用いて良い.

(2) (1) を利用して，$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を証明せよ.

第 3 回　微分計算力向上のための 25 分演習

1. 曲線 $y = x^2 \log x$ の概形をかけ．必要なら，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x^2 \log x = 0$ を利用してもよい．

2. 次の関数の極大値，極小値を求めよ．

$$f(x) = \frac{\cos x \sin x}{\cos x + \sin x}$$

3. $f(x)=x^3+x^2-x+3$ とする．$x \geqq 0$ の範囲で，常に $f(x) \geqq \alpha x$ となる定数 α の最大値を求めよ．

4. 次の各問に答えよ．

(1) $f(x)=x^2e^{-x}$ の $x>0$ における最大値 M を求めよ．

(2) (1) の結果を利用して

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}=0$$

を証明せよ．

(3) (2) の結果を利用して

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^t}=0$$