第５回　指数タワーを作る

２を指数に連ねてみると…

$$2^2 = 4$$
$$2^{2^2} = 16$$
$$2^{2^{2^2}} = 65536$$
$$2^{2^{2^{2^2}}} = 200352993040684646497907235156025575044782547556975141926501697370894105$$ 続きは裏面

という具合に天文学も驚くくらいの速度で大きくなっていく．２の代わりにより大きい数 a を連ねても，２の場合以上の速さで指数タワーは発散するはずだ．一方，１より小さい正の数 a であればいくら連ねても常に１より小さいので，指数タワーが無限大に発散することはない．それでは，

a が１より大きければ $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ は常には発散するだろうか？

答えは意外にも No である．実際，$a = \sqrt{2}$ とすると，

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^2 = 2$$
$$\therefore \quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} < \sqrt{2}^2 = 2$$
$$\therefore \quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}} < \sqrt{2}^2 = 2$$
$$\vdots$$

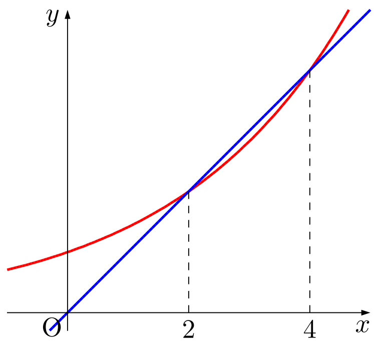
という具合で，いくら連ねても２を超えることはない．

さらに，連ねる $\sqrt{2}$ を追加するたびに，式の値は大きくなっているので，指数タワーはある値に収束するはずである．

その極限値を

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = x \quad \text{とおくと，} \quad \sqrt{2}^x = x$$

が成立する．$x = 2, 4$ はこの方程式を満たすことと，$y = \sqrt{2}^x$ と $y = x$ のグラフの凸性より，$\sqrt{2}^x = x$ の解は多くて２個であることから，適当な x はこれ以外にないと言い切れる．



さらに，$x \leqq 2$ より，$x = 2$ と決まる．以上から

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$$

が証明された．

以上から，$a = \sqrt{2}$ と $a = 2$ の間に，指数タワー

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

が収束から発散に切り替わるような境目の値が存在するはずだ！と予想できる．

次回，この値を求めにいこう．

第 6 回　指数タワーが発散するのはいつか？

第 5 回で作った指数タワー $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ が ∞ に発散するような a の範囲を求めよう．ここでは $a > 0$ に限って考えるとする．

さて，そもそも $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ とは何か，というと，漸化式

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = a^{x_n}$$

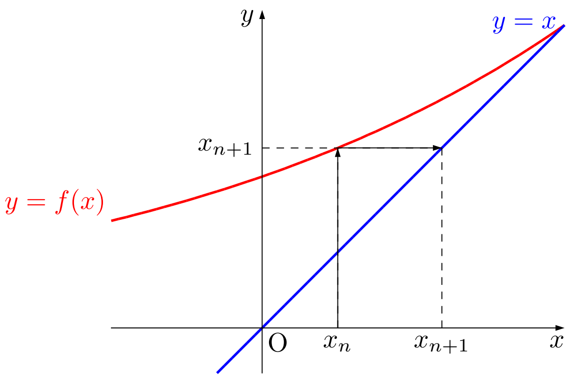
で定められる数列の極限 x_n の極限に他ならない；

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \lim_{x\to\infty} x_n$$

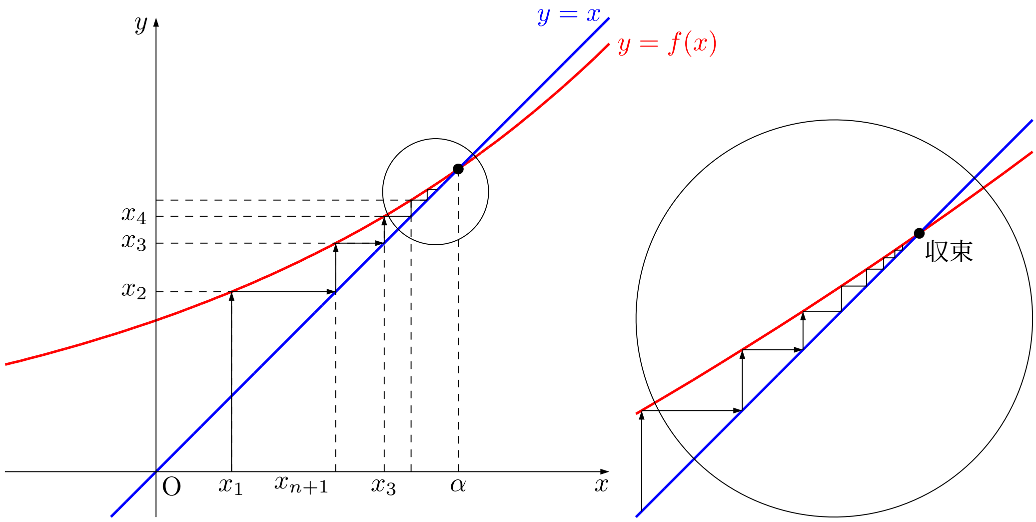
数列の極限を議論する道具として「蜘蛛の巣図」を導入する．

蜘蛛の巣図の導入

一般に，漸化式 $x_{n+1} = f(x_n)$ が定める x_{n+1} と x_n の項の関係は次のようになっている．



これを繰り返していくことで，視覚的に x_n の変化の様子を追うことができる．この図を蜘蛛の巣図と呼ぶことがある．運がよければ，極限値 $\lim_{n\to\infty} x_n$ すら求めることも可能；



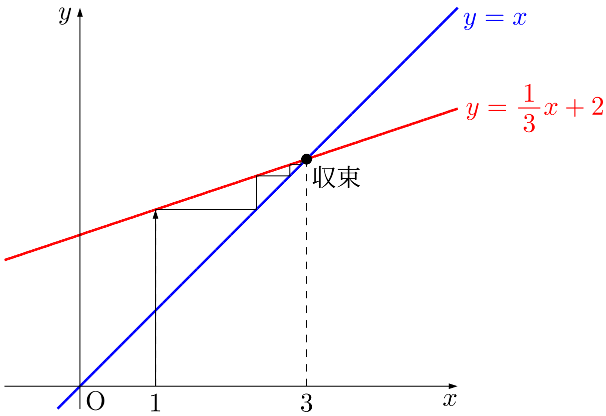
本題に入る前に，簡単な数列に対する蜘蛛の巣図をいくつか見ておこう．

蜘蛛の巣図の例１

　例えば，漸化式

$$x_1 = 1,\quad x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 2$$

で定義される数列 $\{x_n\}$ に対しては，$f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$ として蜘蛛の巣図を書くと；



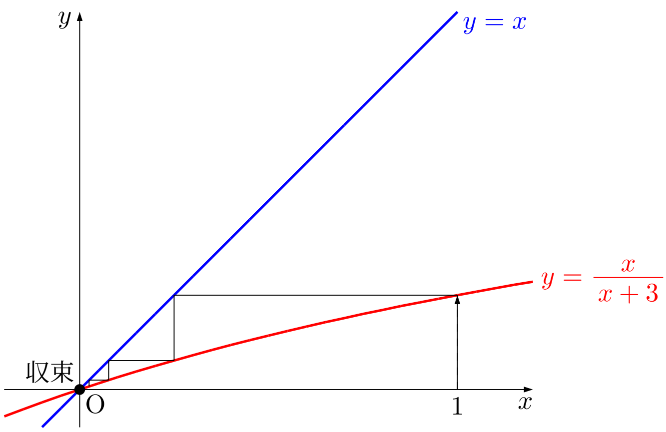
となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 3$ がわかる．これは，漸化式を解いて，$x_n = -2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + 3 \xrightarrow{n\to\infty} 3$ としたものと一致する．

蜘蛛の巣図の例２

　今度は，分数形の漸化式

$$x_1 = 1,\quad x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 3}$$

で定義される数列 $\{x_n\}$ に対しても同様にして，$f(x) = \dfrac{x}{x+3}$ として蜘蛛の巣図を書くと；



となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ がわかる．これも，漸化式を解いて，$x_n = \dfrac{2}{3^n - 1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ としたものと一致している．

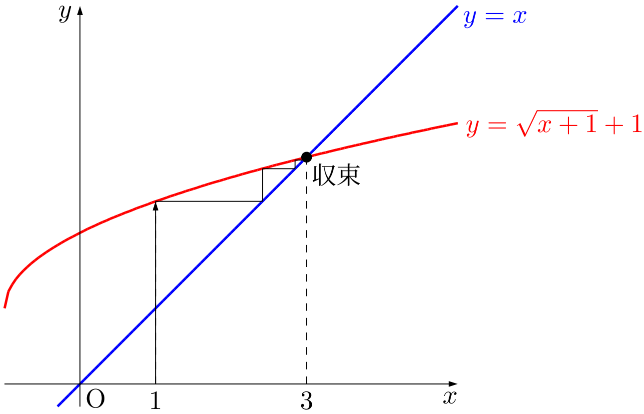
　しかし，**蜘蛛の巣図が活躍するのは，漸化式が解けない数列の極限**を求める場合である．

蜘蛛の巣図の例 3

解けない漸化式

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1} + 1$$

で定められた数列 $\{x_n\}$ についても，$f(x) = \sqrt{x+1} + 1$ として蜘蛛の巣図を書くと；



となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 3$ がわかる．この漸化式は解くことができないので，**「一般項がもとまらないまま，極限を求めることができた」**ことの意義は大きい．

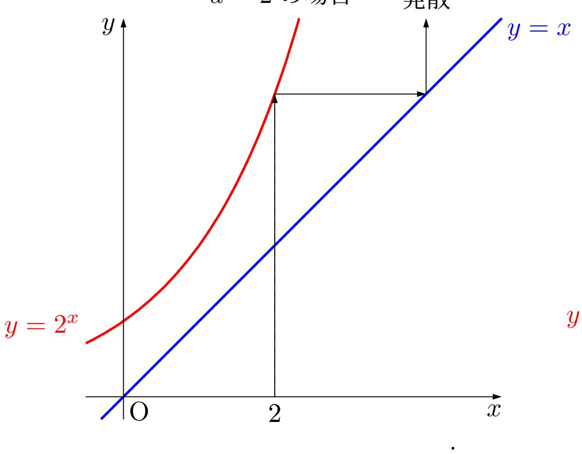
そろそろ，蜘蛛の巣図に慣れてきただろうか？それでは，本題に戻ろう．

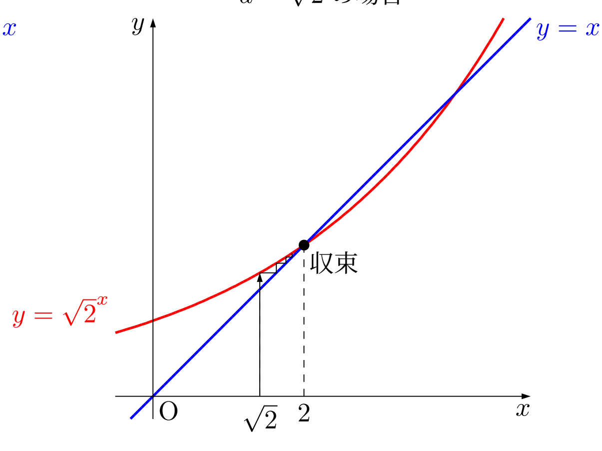
本題

いま，$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ は，次の漸化式で定められる数列の極限 x_n の極限であった；

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = a^{x_n} \quad \text{によって定められる数列 } \{x_n\} \text{ に対して，} \quad a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \lim_{x\to\infty} x_n$$

そこで，$f(x) = a^x$ として蜘蛛の巣図を書いてみると；

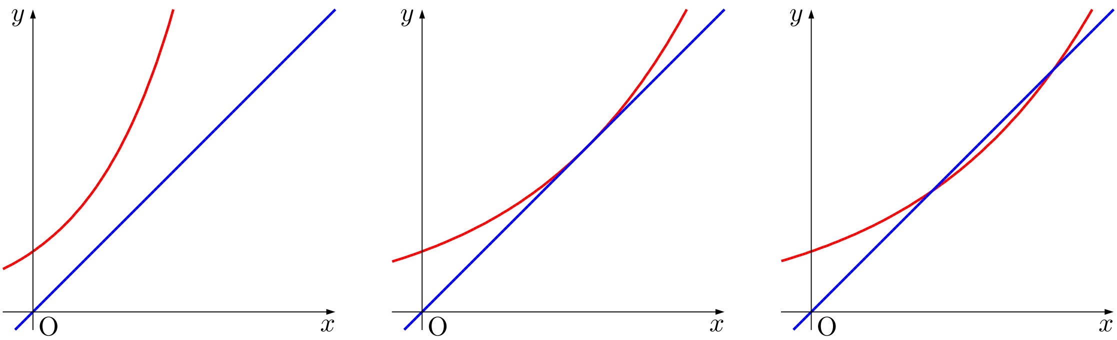




となり，$2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \infty$ と $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$ がわかった．これは第 5 回での計算結果に一致している．

今求めたいのは，収束と発散が起こる狭間の a の値である．すなわち，

$a=2$ の場合　　　$a=\ ?\ $ の場合　　　$a=\sqrt{2}$ の場合



$\color{red}{y=a^x}$ のグラフが直線 $\color{blue}{y=x}$ に接するときの a の値を求めたい!!

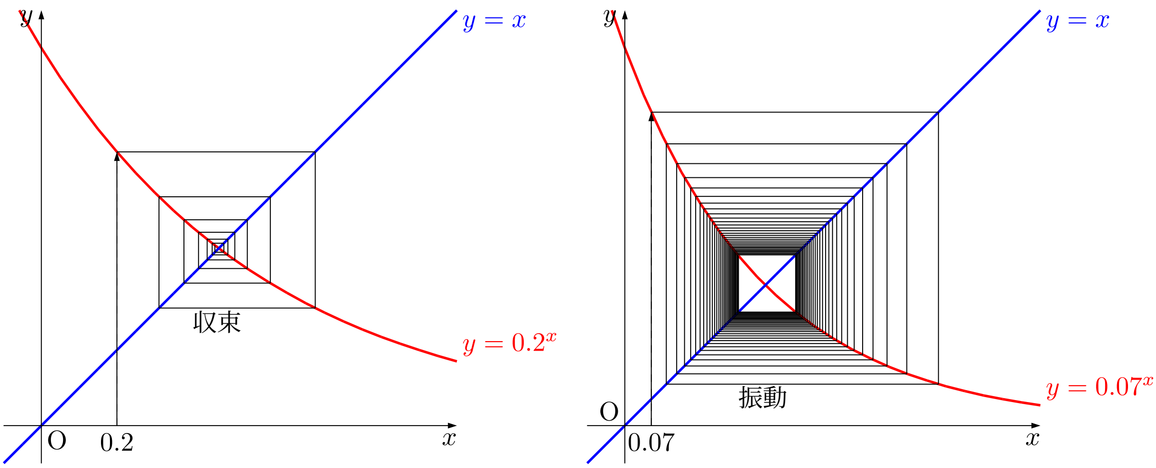
> $\color{red}{y=a^x}$ を微分すると $\color{red}{y'=a^x\log a}$，$\color{blue}{y=x}$ を微分すると $\color{blue}{y'=1}$，
>
> よって，接する条件は $\begin{cases} a^t=t\cdots① \\ a^t\log a=1\cdots② \end{cases}$ を満たす t が存在することである．
>
> ①，②より，$t\log a=1 \quad \therefore\ \log a^t=1 \quad \therefore\ a^t=e$
>
> これを②に代入して，$e\log a=1 \quad \therefore\ \log a=\dfrac{1}{e} \quad \therefore\ \boldsymbol{a=e^{\frac{1}{e}}}$.

この計算から，指数タワーの発散は，$a=e^{\frac{1}{e}}$ を境目にして決まることがわかった；

結論：　**指数タワー $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ は，** $\begin{cases} \boldsymbol{a>e^{\frac{1}{e}}} \text{ **のとき，**} & \text{**無限大に発散する**} \\ \boldsymbol{0<a\leqq e^{\frac{1}{e}}} \text{ **のとき，**} & \text{**無限大に発散しない**} \end{cases}$

ちなみに，$0<a\leqq e^{\frac{1}{e}}$ であればいつでも収束するだろうか？答えは意外にも No である；

$a=0.2$ の場合　　　$a=0.07$ の場合



ここまできたら，**振動する a の範囲，収束する a の範囲も明確にしたい！**と思うのは，私だけではないはずだ！

しかし，今期の読切ジャーナルはひとまずここまで．最後までお付き合いありがとうございました．どうでしたか？少しでも面白いと感じる部分があれば，書いた甲斐があります．また感想を聞かせてくださいね．

大橋