ベクトルの演習 12 題

ベクトルの頻出テーマを含む問題を 12 題セレクトしました．学んだことを総動員して解いてください．演習の授業では，**事前に自分で解いていない問題の解説を聞いても，効果は 0 です．** 必ず事前に 1 題 20 分は自分で考える時間を確保しましょう．

また，班に分かれ，1 時間で 2 題ずつ，板書を使って **「いかにしてその問題が解かれるか」を説明してもらいます．** 質疑応答の時間も取ります．説明者は，直前に大橋が当てます．誰が当てられても説明 & 質疑応答できるようになるためには，班内・班外を問わない交流・協力は必須です．説明の観点については，裏面を参考にしてください．

それでは，充実した演習の時間にしましょう！

大橋

1 三角形 ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 実数 s，t が $0 \leqq s+t \leqq 1$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ の範囲を動くとき，次の各条件を満たす点 P の存在する範囲をそれぞれ図示せよ．

(a) $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b})$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (2s+t)\vec{a} + (s-t)\vec{b}$

(2) (1) の各場合に，点 P の存在する範囲の面積は三角形 ABC の面積の何倍か．

2 △ABC の外心 O から直線 BC, CA，AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P，Q，R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{0}$ が成立しているとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の関係式を求めよ．

(2) ∠A の大きさを求めよ．

3 平面上の 3 点 O，A，B は条件 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1$ を満たす．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ および △OAB の面積を求めよ．

(2) 点 P が平面上を $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ を満たしながら動くときの △PAB の面積の最大値を求めよ．

4 △ABC があり，AB = 3，BC = 7，CA = 5 を満たしている．△ABC の内心を I，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおく．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) △ABC の面積を求めよ．

(3) 辺 AB 上に点 P，辺 AC 上に点 Q を，3 点 P，I，Q が一直線上にあるようにとるとき，△APQ の面積 S のとり得る値の範囲を求めよ．

5 xyz 空間内の 4 点 O$(0,0,0)$，A$(1,1,0)$，B$(0,1,1)$，C$(1,0,1)$ と，実数 l，m，n に対して，点 P(x,y,z) を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = l\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}} + n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

で定める．l, m, n が

$$l + m + 2n = 1,\ l \geqq 0,\ m \geqq 0,\ n \geqq 0$$

を満たしなが動くとき，P が描く図形の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 座標空間の原点 O を中心とする半径 1 の球面上に点 A，B，C があり，関係式

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{6}$$

を満たしているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) △OAB の面積を求めよ．

(2) △OAB を含む平面に点 C から垂線 CP を下す．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 a，b を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 原点を O とする座標平面において，点 A$(1,0,0)$，点 B$(0,1,0)$ をとり，$\angle\mathrm{COA}=60^\circ$，$\angle\mathrm{COB}=45^\circ$ となるように，点 C$(x,\ y,\ 1)$ をとる．点 O と点 C を通る直線を l とし，直線 l 上に点 D をとる．

(1) x，y を求めなさい．

(2) 点 D が直線 l 上を動くとき，三角形 ABD の面積が最も小さくなるような点 D の座標を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 空間内に 5 点 A$(5,0,0)$，B$(1,1,2)$，C$(0,0,5)$，P$(0,0,2)$，Q$(2,1,0)$ がある．点 R が平面 ABC 上を動くとき，PR+RQ の最小値と，そのときの R の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 3 点 A$(3,0,0)$，B$(0,6,0)$，C$(0,0,9)$ を含む平面上を点 P が $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\leqq 100$ を満たしつつ動く．

(1) 点 P の動きうる領域の面積 S を求めよ．

(2) 点 P から xy 平面に下ろした垂線の足 Q の動きうる領域の面積 T を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 空間において，平面 $z=10$ 上にある中心 $(0,0,10)$，半径 1 の円周上を光源が回っている．2 点 P$(-1,1,8)$，Q$(3,5,0)$ を結ぶ線分が xy 平面にはられたスクリーン上に落とす影全体を xy 平面に図示し，その面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ a，b は実数で $a^2+b^2>0$ とする．変数 θ が連立不等式

$$\begin{cases} a\sin\theta+b\cos\theta\geqq 0 \\ a\cos\theta-b\sin\theta\geqq 0 \end{cases}$$

を満たす範囲にあるとき，$\sin\theta$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{12}}$ 空間において，点 A$(3,\ 0,\ 6)$ と球 $T:(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=4$ とが与えられている．点 A から球 T に任意に接線を引き，それが xy 平面と交わる点を P とする．

(1) 点 P はどんな曲線上にあるか．

(2) 球面 T 上の接点は円を作る．この円を含む平面の方程式を求めよ．

ジョージ・ポリア著『いかにして問題をとくか』より抜粋

問題解決への４つのステップ

第１に

問題を理解しなければならない.

問題を理解すること

- 未知のものは何か．与えられているもの（データ）は何か．条件は何か.
- 条件を満足させうるか．条件は未知のものを定めるのに十分であるか．または不十分であるか．または余剰であるか．または矛盾しているか.
- 図をかけ．適当な記号を導入せよ.
- 条件の各部を分離せよ．それをかき表わすことができるか.

第２に

データと未知のものとの関連を見つけなければならない.

関連がすぐにわからなければ補助問題を考えなければならない.

そうして解答の計画をたてなければならない.

計画を立てること

- 前にそれを見たことがないか．または同じ問題を少し違った形で見たことがあるか.
- 似た問題を知っているか．役に立つ定理を知っているか.
- 未知のものをよく見よ！そうして未知のものが同じかまたはよく似ている，見なれた問題を思い起せ.
- 似た問題ですでにといたことのある問題がここにある．それを使うことができないか．その結果を使うことができないか．その方法を使うことができないか．それを利用するためには，何か補助要素を導入すべきではないか.
- 問題をいい変えることができるか．それを違ったいい方をすることができないか．定義にかえれ.
- もしも与えられた問題がとけなかったならば，何かこれと関連した問題をとこうとせよ．もっとやさしくてこれと似た問題は考えられないか．もっと一般的な問題は？もっと特殊な問題は？類推的な問題は？問題の一部分をとくことができるか．条件の一部を残し，他を捨てよ．そうすればどの程度まで未知のものが定まり，どの範囲で変りうるか．データを役立たせうるか．未知のものを定めるのに適当な他のデータを考えることができるか．未知のものもしくはデータ，あるいは必要ならば，その両方を変えることができるか．そうして新しい未知のものと，新しいデータとが，もっと互いに近くなるようにできないか.
- データをすべて使ったか．条件のすべてを使ったか．問題に含まれる本質的な概念はすべて考慮したか.

第３に

計画を実行せよ.

計画を実行すること

- 解答の計画を実行するときに，各段階を検討せよ．その段階が正しいことをはっきりとみとめられるか

第４に

得られた答えを検討せよ.

ふり返ってみること

- 結果を試すことができるか．議論を試すことができるか.
- 結果を違った仕方で導くことができるか．それを一目のうちに捉えることができるか.
- 他の問題にその結果や方法を応用することができるか.