整数問題への応用

数III微分
典型

問．$a^{b^2} = b^{a^2}$ かつ $a < b$ をみたす自然数の組 $(a,\ b)$ は存在するか．

関数の最大最小

数III微分
典型

問. $-\pi \leqq x \leqq \pi$ における $y = 2\sin x + \sin 2x$ の最大値と最小値を求めよ.

$f''(x)$ を用いた不等式証明

数III微分
典型

問．すべての正の数 x に対して，$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ が成立することを示せ．

定数分離

数III微分
典型

問．方程式 $ax^5 - x^2 + 3 = 0$ が 3 個の異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

凹凸グラフの概形

数III微分
典型

問．関数 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ の増減，極値，グラフの凹凸，漸近線を調べ，グラフの概形をかけ．

極値・変曲点をもつ条件

数III微分
典型

問．$f(x) = \left(x^2 + a\right)e^x$ とする．ただし，a は定数とする．

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもたないような a の値の範囲を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ が変曲点をもつような a の値の範囲を求めよ

対称式の連立方程式

問．x，y の連立方程式

$$\begin{cases} 2x+2y+xy=3a-1, \\ x+y+xy=a \end{cases}$$

が x，y が実数である解をもつような実数 a の範囲を求めよ．

解の条件 ～解と係数の関係～

複素数と方程式
典型

問. 方程式 $2x^2 + ax + 6 = 0$ の

2解のうち,

一方が他方の3倍

であるように実数 a の値を定めよ.

２解から２次方程式を作る

複素数と方程式
典型

問．方程式 $3x^2-5x+1=0$ の２つの解を α，β とするとき，

α^3，β^3 を２つの解にもつ２次方程式を１つ作れ．

2次方程式の2解 α, β の対称式

複素数と方程式
典型

問. 方程式 $2x^2 - 3x + 4 = 0$ の2つの解を α, β とおくとき,

$$(2-\alpha)(2-\beta)$$ の値

を求めよ.

不等式の証明

数II式と証明
典型

問．次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

倍数証明

整数
典型

問. nが奇数のとき，
$n^5 - n$は240の倍数であることを証明せよ.

余りによる分類

整数
典型

問． n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数であることを示せ．

互いに素の証明

整数典型

問．自然数 a と b が互いに素であるとき，a と $a+b$ も互いに素であることを示せ．

3元不定方程式の有名問題

整数
典型

問. $\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$ を満たす自然数解 $(l,\ m,\ n)$ をすべて求めよ．ただし，$l \leqq m \leqq n$ とする．

内接円と外接円の半径

三角比
典型

問. △ABC において,

$AB = 5,\ BC = 7,\ AC = 8$ のとき,

内接円の半径 r と外接円の半径 R を求めよ.

内角二等分線の長さ

三角比
典型

問. $\triangle ABC$ において，$AB = 5$，$AC = 8$，$\angle A = 60^\circ$

$\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき，

線分 AD の長さを求めよ．

三角形の内角の sin の比

$$\frac{5}{\sin A} = \frac{7}{\sin B} = \frac{8}{\sin C}$$

である △ABC の最小角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ.

三角形の形状決定

問. 次の等式を満たす

△ABCはどのような形か.

$$a^2 \cos A \sin B = b^2 \cos B \sin A$$

全体像を見る

確率
典型

問．赤玉３個，白玉３個，青玉３個が入っている袋から３個の玉を取り出すとき，玉の色が２種類になる確率を求めよ．

余事象の利用

確率
典型

問．１から８までの数の書かれた８枚のカードから３枚のカードを取り出すとき，

(1) ３数の和が 18 以下となる確率

(2) ３数の積が４の倍数となる確率

をそれぞれ求めよ．

非復元抽出

確率
典型

問．当たり３本，はずれ７本のくじから４本を引くとき，２本だけ当たりくじを引く確率を求めよ．ただし，

引いたくじは戻さない

とする．

同基準

確率
典型

問．トランプの ♠13 枚を一列に並べるとき，

絵札 (J,Q,K) が
すべて隣り合う確率

を求めよ．

等確率

確率典型

問．区別のない３個のサイコロを投げるとき，

出た目の和が

５となる確率

を求めよ．

並ぶ順番についての条件

場合の数
典型

問．N, I, S, H, I, O, J, I の８文字を一列に並べるとき，４つの子音

N, S, H, J が
この順に並ぶもの

は通りあるか．

円卓で向かい合う座り方

場合の数
典型

問．大人２人と子ども４人が円卓に座るとき，

大人２人が向かい合うような座り方

は何通りあるか．

隣り合う・隣り合わない並び方

場合の数
典型

問．男子 5 人と女子 3 人を一列に並べるとき，次のような並べ方は何通りあるか．

(1) 女子３人が隣り合う

(2) 女子が隣り合わない

根号の計算

数Ⅰ数と式
典型

問. $\alpha = 2+\sqrt{3}$ のとき, $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$ の値を求めよ.

頂点を結んでできる三角形の個数

場合の数
典型

問．九角形の

９個の頂点の３つを
結んでできる三角形

のうち，

九角形と辺を共有しないものはいくつあるか．

対角線の本数

問.

九角形の対角線は何本あるか.

２重根号

別解研究入門
他

問．$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ の２重根号をはずせ．

解の配置 Lv.3

2次関数
典型

問．2次方程式 $x^2-(k+4)x-\dfrac{k}{2}+4=0$ が $1<x<4$ に少なくとも1つの実数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ．

解の配置 Lv.2

2次関数
典型

問．2次方程式$ax^2-(a-1)x-a+1=0$が$-1<x<1$と$3<x<4$にそれぞれ1つの実数解を持つような定数aの値の範囲を求めよ

解の配置 Lv.1

2次関数
典型

問．2次方程式 $x^2+2ax+3-2a=0$ が次のような条件を満たすような実数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 符号の異なる2解をもつ

(2) 正の解をもつ

２つの文字含む因数分解

数Ⅰ数と式
典型

問．２元２次式

$$6x^2 + 5xy + y^2 - 7x - 3y + 2$$

を因数分解せよ

三角関数の方程式 Lv.1

三角関数
典型

問．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

(1) $2\sin\theta - 1 = 0$

(2) $2\cos\theta + \sqrt{3} = 0$

(3) $\tan\theta = \sqrt{3}$

三角関数の不等式 Lv.1

三角関数
典型

問．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け．

(1) $2\sin\theta < -1$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta - 1 \geqq 0$

(3) $\tan\theta \geqq 1$

$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式 Lv.2

三角関数
典型

問．θ の動径が第 3 象限にあり、$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき、次の式の値を求めよ.

(1) $\sin\theta + \cos\theta$

(2) $\sin\theta - \cos\theta$

(3) $\sin\theta,\ \cos\theta$

$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式 Lv.1

三角関数
典型

問. $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき次の値を求めよ.

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

条件式付き 2 変数関数の最大最小 Lv.2

2 次関数
典型

問. $2x^2+3y^2=8$ のとき, $4x+3y^2$ の最大値および最小値を求めよ.

複２次４次関数の最小値

２次関数
典型

問．関数 $y = x^4 + 6x^2 + 10$ の最小値を求めよ．

独立２変数関数の最小値

２次関数
典型

問．x と y が互いに関係なく変化するとき，$P = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 3$ の最小値とそのときの x，y の値を求めよ．

2 次関数の最大値 M の最小値

2 次関数
典型

問. a を与えられた定数として x の 2 次関数 $y = -x^2 + 4ax + 4a$ を考え，その最大値を M とする.

(1) M を a の式で表せ.

(2) M を最小とする a の値を求めよ．また，そのときの M の値を求めよ.

２次関数の最大最小から係数決定

問．関数 $y = ax^2 - 2ax + b\,(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が９で，最小値が１であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

片側が固定された線分の中点の軌跡

問．円 $x^2+y^2=1$ 上の動点Ｐと，
点Ａ$(3,\ 4)$ を結ぶ

線分ＡＰの中点Ｍの
軌跡を求めよ．

少なくとも１つは１に等しい

数II式と証明
典型

問. $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=1$

ならば，α，β，γ のうち

少なくとも１つは１に等しい

ことを証明せよ.

比例式の計算

数II式と証明
典型

問. $x+y=\dfrac{y+z}{2}=\dfrac{z+x}{5}\neq 0$ のとき,

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$$

の値を求めよ.

条件つきの等式の証明

数II式と証明
典型

問. $a + b + c = 0$のとき,

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc = 0$$

であることを示せ.

恒等式の基本

数II式と証明
典型

問．次の式が恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ．

$$x^3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$

解と係数の関係の証明

複素数と方程式
典型

問．2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ において，次が成り立つことを示せ．

$$2\text{解が } x = \alpha, \beta \text{ である}$$

$$\iff \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

異なる３つの実数解

複素数と方程式
典型

問．３次方程式

$$x^3 + (a-1)x^2 - (a-4)x - 4 = 0$$

が異なる３つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

円に内接する四角形の面積

三角比
応用

問. 円 O に内接する四角形 ABCD が

$\mathrm{AB}=2,\ \mathrm{BC}=3,\ \mathrm{CD}=1,\ \angle\mathrm{ABC}=60^\circ$

を満たしている.

(1) 円 O の半径 R を求めよ.

(2) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ.

独立反復試行 Lv.1

確率
典型

問．サイコロを繰り返し５回投げるとき，

３の倍数の目が

ちょうど３回出る確率

を求めよ．

絶対値を含む方程式・不等式

数Ｉ数と式
典型

問． 次の方程式・不等式を解け．

(1) $|x+3| = 4x$

(2) $|2x-1| \leqq x+3$

(3) $|x| + |x-1| = 3x$

(4) $|x| + |x-1| > 3x$

1次不等式の整数解

数 I 数と式
典型

問．次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $\dfrac{x}{2} + 4 < \dfrac{2x+7}{3}$ を満たす最小の整数 x を求めよ．

(2) x の不等式 $2x + a > 5(x-1)$ を満たす x のうち，最大の整数が 4 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(3) x の連立不等式 $7x - 5 > 13 - 2x$，$x + a \geqq 3x + 5$ を満たす整数 x がちょうど 5 個存在するとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

係数に文字を含む１次不等式

数Ｉ数と式
典型

問．次の不等式を解け．ただし，a は定数とする．

(1) $ax = 2(x + a)$

(2) $ax < x + 2$

(3) $ax + 1 > x + a^2$

区間が動く２次関数の最大値・最小値

２次関数
典型

問．a は定数とする．関数 $y = x^2 - 2x + 2$ の $a \leqq x \leqq a + 2$ における最大値と最小値を求めよ．

軸が動く２次関数の最大値・最小値

２次関数
典型

問．a は定数とする．関数 $y = x^2 - 2ax + 3a$ の $0 \leqq x \leqq 4$ における最大値と最小値を求めよ．a は定数とする．

同じものを含む円順列 Lv.2

場合の数
典型

問．赤玉４個，白玉２個，黒玉２個を円形に並べる方法は何通りか．

同じものを含む円順列 Lv.1

問．赤玉４個，白玉３個，黒玉１個を円形に並べる方法は何通りか．

重複組合せ Lv.2

場合の数
典型

問. 10 個のミカンを A, B, C の 3 人配る.

１つももらわない人がいても良いとき

の配り方は何通りあるか.

重複組合せ Lv.1

場合の数
典型

問. 10 個のミカンを A, B, C の 3 人配る.

どの人も少なくとも
1 個はもらうとき

の配り方は何通りあるか.

組分け Lv.3

場合の数
典型

問．12 人を

４人，４人，４人の
３組に分ける方法

は何通りか．

組分け Lv.2

場合の数
典型

問．12 人を

６人，６人の

２組に分ける方法

は何通りか．

組分け Lv.1

場合の数
典型

問．12 人を

5人，4人，3人の
3組に分ける方法

は何通りか．

組分け Lv.0

問．12 人を

８人，４人の
２組に分ける方法

は何通りか．

部屋分け Lv.2

問．空室は作らないものとする．

６人をＡ，Ｂ，Ｃの３部屋に分ける方法

は何通りか．

部屋分け Lv.1

場合の数
典型

問．空室は作らないものとする．

６人をＡ, Ｂの
２部屋に分ける方法

は何通りか．

背理法証明 Lv.2

集合と命題
典型

問．有理数 a, b のうち少なくとも 1 つが 0 でないならば，$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ．ただし，平方数でない正の整数 m に対して，$\sqrt{m}$ が無理数であることを前提としてよい．a と b の少なくとも一方が 0 でないとき，$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ．

背理法証明 Lv.1

集合と命題
典型

問．$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ．ただし，平方数でない正の整数 m に対して，$\sqrt{m}$ が無理数であることを前提としてよい．

$\sqrt{6}$ は無理数であることの証明

集合と命題
典型

問．$\sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ．

$\sqrt{2}$ は無理数であることの証明

集合と命題
典型

問．$\sqrt{6}$ は無理数である．ことを証明せよ．

対偶証明法 Lv.3

集合と命題
典型

問．整数 n について，n^2 が 6 の倍数ならば，n も 6 の倍数であることを証明せよ．

対偶証明法 Lv.2

集合と命題
典型

問．整数 n について，n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数であることを証明せよ．

対偶証明法 Lv.1

集合と命題
典型

問．整数 n について，n^2 が 2 の倍数ならば，n も 2 の倍数であることを証明せよ．

指数型の漸化式

数B数列
典型

問．次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 10,\ a_{n+1} = 2a_n + 3^n$$

階差型の漸化式

数B数列
典型

問．次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3n + 1$$

和と一般項の関係式

数B数列
典型

問．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3n - 2a_n$ であるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$x^n + y^n$ が整数であることの証明

数B数列
典型

問．n は自然数とする．2 数 x, y の和と積が整数のとき，$x^n + y^n$ は整数であることを、数学的帰納法を用いて証明せよ．

一般項の推測

数B数列
典型

問．次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測して、それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ．

$$a_1 = 3,\ (n+1)\,a_{n+1} = a_n^2 - 1$$

数学的帰納法による倍数証明

数B数列
典型

問．n を自然数とするとき、

$5^{n+1}+6^{2n-1}$ は 31 の倍数

であることを証明せよ．

数学的帰納法による不等式証明

数B数列
典型

問．n が 3 以上の自然数のとき，

$$3^n > 5n + 1$$

を証明せよ．

数学的帰納法による等式証明

数B数列
典型

問．次の等式を数学的帰納法によって証明せよ．

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

数学的帰納法

問．すべての自然数 n について、次の等式が成立することを証明せよ．

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$$

隣接３項間漸化式

数Ｂ数列
典型

問．次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 2, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_1 = 0,\ a_2 = 2, \\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \end{cases}$

漸化式を解く

数B数列
典型

問．次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 3$$

放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積

数II微積
典型

問. 放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と、この放物線上の点 $(0, 3)$, $(6, 15)$ における接線で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

放物線で囲まれた面積の最小

数II微積
典型

問．放物線 $y = x^2$ と点 $(1, 2)$ を通る直線とで囲まれた図形の面積 S が最小になるとき、その直線の方程式を求めよ．

放物線で囲まれた面積の等分

数II微積
典型

問．放物線 $y = 2x - x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を直線 $y = kx$ が２等分するように、定数 k の値を定めよ．

$\frac{1}{6}$ 公式の利用

問．次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $y = x^2 - 3x + 5,\ y = 2x - 1$

(2) $\begin{cases} y = 2x^2 - 6x + 4, \\ y = -3x^2 + 9x - 6 \end{cases}$

積分方程式 ～ 定積分を用いた関数 ～

数II微積
典型

問．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(1) $f(x) = 3x^2 - x\int_0^2 f(t)\,dt + 2$

(2) $f(x) = 1 + \int_0^1 (x-t)\,f(t)\,dt$

積分方程式 ～ 定積分の微分 ～

数Ⅱ微積
典型

問．等式

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^3 - 3x^2 + x + a$$

を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値の範囲を求めよ．

接線の本数

数II微積
典型

問. 点 $(0,k)$ から曲線

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x$$

に引くことのできる接線の本数を求めよ.

3 次方程式の実数解の個数

数Ⅱ微積
典型

問. 3 次方程式 $2x^3 + 3x^2 - 12x + a = 0$ が次の解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ.

(1) 異なる 3 つの実数解

(2) ただ一つの実数解

(3) 異なる 2 つの正の解と負の解

4次方程式の実数解の個数

数Ⅱ微積
典型

問．次の 4 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2 = 0$$

3 次関数の最大最小 ～ 係数に文字 ～

数Ⅱ微積
典型

問．$a > 0$ とする．関数

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値と最大値を求めよ．

3 次関数の最大最小 ～ 区間に文字 ～

数Ⅱ微積
典型

問．$a > 0$ とする．関数

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

の $0 \leqq x \leqq a$ における最小値と最大値を求めよ．

極値の計算工夫

数Ⅱ微積
典型

問．関数

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 5$$

の極値を求めよ．

共通接線の方程式

数Ⅱ微積
典型

問．２つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -x^2 + 6x - 5$$

の共通接線の方程式を求めよ．

接線の方程式

数II微積
典型

問．次の接線の方程式を求めよ．

(1) 曲線 $y = x^2 + 4x$ 上の点 $(1, 5)$ における接線

(2) 曲線 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ に点 $(0, 0)$ から引いた接線

等差数列の和の最大

数B数列
典型

問．初項 79, 公差 -2 の等差数列 $\{a_n\}$ について、

(1) 第何項が初めて負となるか．

(2) 初項から第 n 項までの和が最大となるか．また、そのときの和を求めよ．

指数関数の最大値 ～ 逆数の対称式 ～

指数対数
典型

問．関数

$$y=\left(2^{x}+2^{-x}\right)-2\left(4^{x}+4^{-x}\right)$$

の最大値を求めよ．

対数関数の最大値 ～ 対数の 2 次式 ～

指数対数
典型

問．次の関数の $1 \leqq x \leqq 16$ における最大値と最小値を求めよ．

$$y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 3$$

対数関数の最大値 ～ 真数が 2 次式 ～

指数対数
典型

問．関数

$$y = \log_2 x + \log_2 (16 - x)$$

の最大値を求めよ．

対数方程式・不等式 ～ 中級 ～

指数対数
典型

問. 次の方程式・不等式を解け.

(1) $\log_2 x + \log_2 (x - 7) = 3$

(2) $2\log_2 (2 - x) \leqq \log_2 x$

等差数列をなす３数の和と積から

問．等差数列をなす３数があって，その和が 27，積が 693 である．この３数を求めよ．

等差数列であることの証明

数B数列
典型

問．(1) 一般項が $a_n = 3n - 4$ で表される数列 $\{a_n\}$ が等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ．

(2) (1) の数列 $\{a_n\}$ の項を一つおきに取り出して並べた数列 a_1，a_3，a_5，$\cdots$ が等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ．

小数首位 ～ 常用対数の利用 ～

指数対数
典型

問．$\left(\dfrac{1}{30}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

桁数と最高位の数字 〜 常用対数 〜

指数対数
典型

問. $\log_{10} 2 = 0.3010$,

$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

(1) 12^{80} は何桁の整数か.

(2) 12^{80} の最高位の数字を求めよ.

対数方程式・不等式 ～ 初級 ～

指数対数
典型

問．次の方程式・不等式を解け．

(1) $\log_2 x = 3$

(2) $\log_2 x < 3$

(3) $\log_{\frac{1}{3}} (x-1) \leqq 2$

指数に対数を含む数

指数対数
典型

問. 次の式の値を求めよ.

(1) $10^{\log_{10} 3}$

(2) $81^{\log_3 10}$

対数を利用した等式の証明

指数対数
典型

問．$xyz \neq 0$, $2^x = 3^y = 6^z$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

対数を他の対数で表す

問． $a = \log_2 3$， $b = \log_3 7$ のとき， $\log_{42} 56$ を a， b を用いて表せ．

底の変換公式

指数対数
典型

問．次の式を簡単にせよ．

(1) $\log_4 8$

(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 8$

(3) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

対数の基本性質

問．次の式を簡単にせよ．

(1) $\log_6 4 + \log_6 9$

(2) $4\log_2 \sqrt{3} - \log_2 18$

対数の定義

問．次の対数の値を求めよ．

(1) $\log_7 49$　(2) $\log_2 64$

(3) $\log_5 5$　(4) $\log_4 1$

(5) $\log_2 \dfrac{1}{81}$　(6) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{125}$

指数関数の最大値 ～2 次関数に帰着～

指数対数
典型

問．次の関数の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

$$y = 4^x - 2^{x+2} + 1 \ (-1 \leqq x \leqq 2)$$

指数方程式・不等式 ～ 中級 ～

指数対数
典型

次の方程式・不等式を解け.

(1) $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 = 0$

(2) $4^x + 2^x - 20 > 0$

指数方程式・不等式 〜 初級 〜

指数対数
典型

問．次の方程式・不等式を解け．

(1) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = 3$ (2) $4^x < 8^{x-1}$

(3) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \leqq \dfrac{1}{125}$

指数計算 ～ 逆数の対称式 ～

指数対数
典型

問．$a > 0$ のとする．$a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = 4$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $a + a^{-1}$

(2) $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}$

三角関数の最大 ～ 合成 ～

三角関数
典型

問．次の関数の最大値と最小値

およびそのときの x の値を求めよ．

$$y = \sin x + \cos x$$

$$(0 \leqq x \leqq \pi)$$

三角方程式・不等式 ～合成～

三角関数
典型

問. $0 \leqq x < 2\pi$ のとき,

次の方程式・不等式を解け.

(1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$

(2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 1$

2倍角を含む方程式・不等式

三角関数
典型

問．$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，

次の方程式・不等式を解け．

(1) $\sin 2x = \sin x$

(2) $\cos 2\theta \leqq 3\sin x - 1$

2直線のなす鋭角 θ

三角関数
典型

問．2直線 $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ y = \dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases}$

のなす鋭角 θ を求めよ．

2 次関数の最大最小に帰着

三角関数
典型

問．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数

$$y = \sin^2\theta - \cos\theta$$

の最大値と最小値を求めよ．

また，そのときの θ の値を求めよ．

三角関数
典型

三角方程式・不等式 ～2 次方程式に帰着～

問． $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，
次の方程式・不等式を解け．

(1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$

(2) $2\cos^2\theta \leqq 3\sin\theta$

三角方程式・不等式 ～中級～

三角関数
典型

問．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け．

(1) $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

三角関数の相互関係

問．$\tan\theta = 3$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

平面の方程式

空間ベクトル
典型

問．次のような平面の方程式を求めよ．

(1)　点 A $(1,\ 2,\ 2)$ を通り，$\vec{n} = (2,\ -2,\ 4)$ に垂直

(2) 3 点 A $(0,\ 1,\ 1)$，B $(1,\ 0,\ 2)$，C $(-$

を通る

空間内の直線の方程式

空間ベクトル
典型

問．次の直線の媒介変数表示と，直線の方程式を求めよ．

(1) 点 A$(4,\ 5,\ 3)$ を通り，$\vec{d} = (3,\ 2,\ -4)$ に平行な直線

(2) 2 点 A$(1,\ 2,\ 3)$，B$(2,\ -1,\ 5)$ を通る直線

空間ベクトルの和の等式

空間ベクトル
典型

問．四面体 ABCD において等式

$$\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{CP} + 5\overrightarrow{DP} = \vec{0}$$

を満たす点 P はどのような点か.

空間ベクトルの大きさの最小

空間ベクトル
典型

問. 原点 O と 3 点 P (1, 2, 1), Q (2, 1,
について

$$\left|x\overrightarrow{\mathrm{OP}}+y\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|$$

の最小値と，そのときの実数 x, y の値を求めよ．

正四面体の第四の点の座標

空間ベクトル
典型

問．３点Ａ (6, 0, 0)，Ｂ (0,
に対して，正四面体ＡＢＣＤ
の頂点Ｄの座標を求めよ．

線形計画法

図形と方程式
典型

問.
$$\begin{cases} 3x+y \geqq 6 \\ x+3y \geqq 6 \\ x+y \leqq 6 \end{cases}$$ のとき,

$x+2y$ の最大値と最小値を求めよ.

領域の図示 全盛り

図形と方程式
典型

問．次の不等式が表す領域を図示せよ．

(1) $y > x^2 + 1$

(2) $3x - 2y - 2 \geqq 0$

(3) $x \leqq 2$

(4) $(x+2)^2 + y^2 < 1$

(5) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 \geqq 0$

(6) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ y < 3x - 5 \end{cases}$

(7) $(x - y)(x + y - 2) < 0$

内心の位置ベクトル

平面ベクトル
典型

問. $\angle A = 60°$, AB $= 8$, AC $= 5$ である三角形 ABC の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

ベクトルによる三角形の面積公式

平面ベクトル
典型

問．平面上の 4 点 O, A, B, C に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{OC}=\sqrt{2}$ のとき，

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(2) 三角形 OAB の面積を求めよ．

平面に下ろした垂線の足の座標

空間ベクトル
典型

問．A (2, 0, 0)，B (0, 3, 0)，C
の定める平面 ABC に原点 O から
下ろした垂線を OH とするとき,
点 H の座標を求めよ.

三角形の重心の軌跡

図形と方程式
典型

問．２点 O (0, 0)，A (1, 0) と
円 $x^2+y^2=9$ 上を動く点 Q を頂点とする

三角形OAQの重心P
の軌跡を求めよ．

軌跡 Lv.1

図形と方程式
典型

問．２点 A $(-3,\ 0)$，B $(2,\ 0)$ からの

距離の比が３：２である

点Ｐの軌跡を求めよ．

円に内接・外接する円

図形と方程式
典型

問．中心が (4, 3) で

円 $x^2 + y^2 = 1$ に
接する円の方程式

を求めよ．

空間における点の一致の証明

空間ベクトル
典型

問．四面体 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA，AC，BD の中点をそれぞれ K，L，M，N，Q とするとき，線分 KM，LN，QR の中点は一致することを証明せよ．

空間における三角形の面積

空間ベクトル
典型

問. 3点 $A\,(3,\ 2,\ 4)$, $B\,(3,$
を頂点とする三角形 ABC の
面積を求めよ.

円外から引いた接線

図形と方程式
典型

問．点 $(1,\ 3)$ から

円 $x^2 + y^2 = 5$ に

引いた接線の方程式

を求めよ．

空間図形の垂直証明

問．正四面体 ABCD において，三角形 BCD の重心を G とするとき，AG と BC が垂直であることを証明せよ．

円と直線が接する条件

図形と方程式
典型

問. $\begin{cases} \text{円}: x^2 + y^2 = 10 \\ \text{直線}: y = 2x + m \end{cases}$ が

接するとき,

定数 m の値を求めよ.

4点が同一平面上にある条件

空間ベクトル
典型

問. 4点A$(3, 1, 2)$, B$(4, 2, 3)$
が同一平面上にあるとき, z の値を
求めよ.

3 点が同一直線上にある条件

空間ベクトル
典型

問．3点A $(2,\ -1,\ 5)$，B $(3$

が一直線上にあるとき，y，z

の値を求めよ．

円と直線が共有点をもつ条件

図形と方程式
典型

問. $\begin{cases} \text{円}: x^2 + y^2 = 8 \\ \text{直線}: y = x + m \end{cases}$ が

共有点をもつとき,

定数 m の値の範囲を求めよ.

円と直線の共有点

図形と方程式
典型

問．円 $x^2 + y^2 = 5$ と次の直線の共有点の座標を求めよ．

(1) $y = x - 1$

(2) $y = 2x + 5$

円のベクトル方程式

平面ベクトル
典型

問．平面上の異なる 2 定点 A，B に対して，等式 $\left|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=6$ をみたす動点 P はどのような図形を描くか．

平面 ABC と直線の交点

空間ベクトル
典型

問．右の図の直方体において，対角線 OF と平面 ABC の交点を P とする．OP : OF を求めよ．

ベクトル方程式 ～ 円の方程式 ～

平面ベクトル
典型

問．次のような円の方程式を求めよ．

(1) 中心が原点 O (0, 0) で，半径が 2 の円

(2) 中心が A (1, 5) で，点 B (2, 2) を通る円

(3) A (5, 0)，B (9, 4) を直径の両端とする円

空間における垂直条件

空間ベクトル
典型

問．$\vec{a}=(2,\ -1,\ 0)$，$\vec{b}=(6,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 である $\vec{p}$ を求めよ.

法線ベクトル 〜2 直線のなす鋭角〜

平面ベクトル
典型

問．2 直線 $x+\sqrt{3}y-5=0$，$\sqrt{3}x+y+1=0$ がなす鋭角 θ を求めよ．

法線ベクトル

平面ベクトル
典型

問． 点 A $(3,\ 4)$ を通り，$\vec{n}=(2,\ 1)$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

ベクトルの終点の存在範囲 Lv.2

平面ベクトル
典型

問．三角形 OAB において，次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $s+t=2$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $s+t=\dfrac{1}{3}$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$

ベクトルの終点の存在範囲 Lv.1

平面ベクトル
典型

問. 三角形 OAB において, 次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $s + t = 2$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $s + t = \dfrac{1}{3}$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$

3点を通る円の方程式

問. 3点 A $(2, 1)$, B $(6, 3)$, C $(-1, 2)$ がある.

(1) 3点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ.

(2) 三角形 ABC の外心の座標と, 外接円の半径を求めよ.

垂心の位置ベクトル

問．$\mathrm{OA}=2\sqrt{2}$, $\mathrm{OB}=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積が 2 である三角形 OAB の垂心 H に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ

内積を利用した図形証明

平面ベクトル
典型

問．三角形 ABC において，辺 BC の中点を M とするとき，等式

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$$

が成立することを示せ．

交点の位置ベクトル Lv.2

平面ベクトル
典型

問．三角形 OAB において，辺 OA を 2: 1 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とする．

(1) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

(2) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき，$\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

交点の位置ベクトル Lv.1

平面ベクトル
典型

問. 三角形 OAB において, 辺 OA を 2: 1 に内分する点を C, 辺 OB の中点を D とする.

(1) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

(2) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

3 点が一直線上にあることの証明

問．平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 2: 1 に内分する点を E，対角線 BD を 3: 1 に内分する点を F とする．3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ．

点が一致することの証明

平面ベクトル
典型

問．三角形 ABC において，辺 BC，CA，A

を 3：1 に内分する点を，それぞれ P，Q，R，三角形 PQR の重心を G$'$，三角形 ABC の重心を G とする．このとき，G と G' は一致することを証明せよ．

解の配置 ～ 解と係数の関係 ～

複素数と方程式
典型

問．2 次方程式 $x^2 - 2(m-2)x - m + 14 = 0$ が次のようなことなる 2 つの解を持つとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(1) ともに正の解 (2) ともに負の解

(3) 符号が異なる解 (4) ともに 1 より大きい

平面ベクトルの和の等式

平面ベクトル
典型

問．三角形ABCに対して，次の式を満たす点Pの位置を求めよ．

$$2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

ベクトルのなす角

平面ベクトル
典型

問. $\vec{a} = (7, -1)$ と 45° の角をなし, 大きさが10である $\vec{b}$ を求めよ.

2 直線の平行・垂直条件

図形と方程式
典型

問．2 直線 $\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ x + (a-1)\,y = 3 \end{cases}$

が次の条件を満たすとき，定数 a の値を求めよ．(1) 平行　(2) 垂直

ベクトルの内積計算 Lv.2

平面ベクトル
典型

問. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ で, $\vec{a} + \vec{b}$ と $2\vec{a} - 5\vec{b}$ が垂直であるとする.

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.

(2) 大きさ $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ を求めよ.

２重解をもつ３次方程式

複素数と方程式
典型

問．３次方程式

$$x^3+(a-4)x-2a=0$$

が２重解をもつとき，

実数 a の値を求めよ．

ベクトルの大きさの最小

平面ベクトル
典型

問. $\vec{a} = (3,\ 1)$, $\vec{b} = (1,\ 2)$ と実数 t に対して, $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$ の大きさ $|\vec{c}|$ の最小値を求めよ.

1 次不定方程式の整数解 ～ すべて ～

整数
典型

問．$29x + 42y = 4$ の整数解をすべて求めよ．

1 次不定方程式の整数解 〜1 組〜

整数
典型

問. $29x+42y=4$ の整数解を１組求めよ.

常に単調増加する３次関数

数Ⅱ微積
典型

問．x の３次関数

$$f(x) = x^3 + 3kx^2 - kx - 1$$

が常に単調増加するような定数 k の値の範囲を求めよ．

極値から係数決定

数II微積
典型

問．関数

$$f(x) = x^3 + ax^2 - bx + c$$

が、$x = -1$ で極大値 5 をとり、$x = 1$ で極小となるとき、定数 a, b, c の値を求めよ．

n を含む数列の和

数B数列
典型

問. 次の数列 $\{a_n\}$ の和 S を求めよ.

$$1 \cdot (2n-1),\ 3 \cdot (2n-3),\ 5 \cdot (2n-5),$$

$$\cdots,\ (2n-1) \cdot 1$$

数列の和の和

問．次の数列 $\{a_n\}$ の和 S を求めよ．

$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \cdots,\ 1+2+\cdots+n$$

等比数列の和の扱い

数B数列
典型

問．初項から第 10 項までの和が 6，初項から第 20 項までの和が 24 である等比数列 $\{a_n\}$ の，初項から第 30 項までの和 S を求めよ．