## 整数問題への応用

問.  $a^{b^2} = \overline{b^{a^2}}$ かつ $\overline{a} < \overline{b}$ を

みたす自然数の組(a, b)は

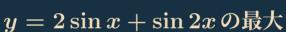
存在するか.

## 関数の最大最小



|問 $. \ -\pi \le x \le \pi$  における







f''(x)を用いた不等式証明 $\mathbb{R}^n$ 問.すべての正の数なに対し て, $e^x > 1 + x + rac{x}{2}$ が成

立することを示せ.

#### 定数分離

- 問. 方程式  $ax^5 x^2 + 3 =$

0が3個の異なる実数解をも

つようなaの値の範囲を求め

#### 凹凸グラフの概形 曲型

問. 関数  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$ 

の増減,極値,グラフの凹凸,漸近

線を調べ、グラフの概形をかけ.

### 極値・変曲点をもつ条件

問.  $f(x) = (x^2 + a) e^x$  とする. ただし、a は定数とする.

物III微分

曲型

(1) 関数 f(x) が極値をもたないような a の値の 節囲を求めよ.

(2) 曲線  $y=f\left(x\right)$  が変曲点をもつような a の値の範囲を求めよ

#### 複素数と方程式 対称式の連立方程式

<u>問.x</u>,y の連立方程式

 $2x + \overline{2y + xy} = 3\overline{a - 1},$ 

x + y + xy = a

が x, y が実数である解をもつような実数

aの節囲を求めよ.

解の条件〜解と係数の関係〜機構数と方程式 問. 方程式  $2x^2 + ax + 6 = 0$  の

2解のうち、

一方が他方の3倍

であるように実数 a の値を定めよ.

#### 2解から2次方程式を作る 曲型

問. 方程式  $3x^2 - 5x + 1 = 0$  の

2つの解を $\alpha$ ,  $\beta$ とするとき,

 $\alpha^3$ ,  $\beta^3$ を2つの解にもつ

2次方程式を1つ作れ.

問. 方程式  $2x^2-3x+4=0$  の

2つの解を $\alpha$ ,  $\beta$ とおくとき,

 $(2-lpha)\,(2-eta)$  の値 を求めよ.

不等式の証明

問.次の不等式を証明せよ.
$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

あることを証明せよ.

- 倍数証明
- $\mid$ 問 $_n$ が奇数のとき,
  - $n^5-\overline{n}$ は240の倍数で

### 余りによる分類 $\overline{\mathbb{B}_{\cdot}}$ $n^2$ が 3 の倍数なら ば、nも3の倍数である ことを示せ.

#### 互いに素の証明

であるとき、aとa+bも互

問、自然数aとbが互いに素

いに素であることを示せ.

### 3元不定方程式の有名問題

問. 
$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$
 を満たす

回、
$$\frac{l}{l}+\frac{l}{m}+\frac{l}{n}=1$$
を何だり  
自然数解  $(l, m, n)$  をすべて求め

よ. ただし、 $l \leq m \leq n$  とする.

#### 内接円と外接円の半径 問. △ABC において、

 $\overline{\mathrm{AB}} = 5, \ \overline{\mathrm{BC}} = 7, \ \overline{\mathrm{AC}} = 80$  2  $\stackrel{?}{>}$ 

の半径Rを求めよ.

内接円の半径ァと外接円

#### 内角二等分線の長さ

問.  $\triangle ABC$  において, AB=5, AC=8,  $\angle A=60^{\circ}$ 

**/A の**二等分線が辺 BC と交

わる点を Dとするとき、

線分 AD の長さを求めよ.

#### <u>三角形の内角の sin の比</u> 5 7 8

 $\frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}$ 

である  $\triangle$ ABC の最小角を  $\theta$  とするとき、 $\cos \theta$  の値を求め<u>よ</u>.

#### 三角形の形状決定







 $a^2 \cos A \sin B = b^2 \cos B \sin A$ 











#### 全体像を見る







問. 赤玉3個、白玉3個、青玉3個

り出すとき、玉の色が2種類になる

が入っている袋から3個の玉を取

確率を求めよ.

#### 余事象の利用



をそれぞれ求めよ.

問. 1から8までの数の書かれた8枚のカードか

ら3枚のカードを取り出すとき、

(1) 3数の和が18以下となる確率

(2) 3数の積が4の倍数となる確率

#### 非復元抽出

とする.

問. 当たり3本、はずれ7本のくじから4 本を引くとき、2本だけ当たりくじを引く



確率を求めよ. ただし、

引いたくじは戻さない





問.トランプの ♠13 枚を一列に並べるとき,

絵札 (J,Q,K) が



すべて隣り合う確率 を求めよ.



5となる確率

を求めよ.

出た目の和が

並ぶ順番についての条件 問. N, I, S, H, I, O, J, I の 8 文字を一列に並べ

るとき、4つの子音

N, S, H, J m

この順に並ぶもの

は通りあるか.

#### 円卓で向かい合う座り方 問. 大人2人と子ども4人が円卓に座るとき,

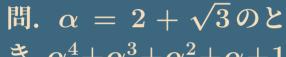
# 合うような座り方

### 大人2人が向かい

は何通りあるか.

<u>(2) 女</u>子が隣り合わない

## 根号の計算



 $\xi, \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$ 

の値を求めよ.

9個の頂点の3つを

結んでできる三角形

のうち.

**九角形と辺を共有しないものはいくつあるか.** 

対角線の本数 九角形の対角線

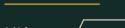


は何本あるか.

2重根号



号をはずせ.









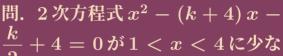
問.  $\sqrt{2+\sqrt{3}}$  の 2 重根

### 解の配置 Lv.3



問.  $2 \times \overline{5}$  程式  $x^2 - (k+4)x -$ 

<del>\_\_\_\_\_</del> くとも 1 つの実数解をもつような



実数 k の値の範囲を求めよ.



# | 解の配置 Lv.2 | 2次方程式 $ax^2 - (a-1)x -$

同、2 の 在 x = (u-1)x = a+1 = 0 が -1 < x < 1 と

3 < x < 4にそれぞれ1つの実数解を持つような定数aの値の範囲

#### 解の配置 Lv.1



問. 2 次方程式  $x^2 + 2ax + 3 - 2a = 0$ 

値の範囲を求めよ.

(2) 正の解をもつ

(1) 符号の異なる 2 解をもつ

が次のような条件を満たすような実数aの

# 2つの文字含む因数分解 \* 臓\* 間. 2元2次式

$$6x^2 + 5xy + y^2 - 7x -$$

3y+2

間. 
$$0 \le \theta < 2\pi$$
 のとき,次の方程式を解け.

(3)  $\tan \theta = \sqrt{3}$ 

$$(1) \,\, 2\sin\theta - 1 = 0$$

(1) 
$$2 \sin \theta - 1 = 0$$
  
(2)  $2 \cos \theta + \sqrt{3} = 0$ 

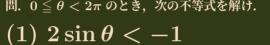
引、
$$0 \leqq heta < 2\pi$$
 のとき,次の不等式を解け、

問. 
$$0 \le \theta < 2\pi$$
 のとき,次の不等式を解け.



(2)  $\sqrt{2}\cos\theta - 1 \ge 0$ 

 $(3) \tan \theta \ge 1$ 



$$\sin \theta$$
 と  $\cos \theta$  の対称式 Lv.2 
問.  $\theta$  の動径が第 3 象限にあり、 $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$  のとき、次の式の値を求めよ.

(1)  $\sin \theta + \cos \theta$ 

(3)  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ 

$$(2) \sin \theta - \cos \theta$$

$$\sin heta$$
 と  $\cos heta$  の対称式  $Lv.1$  間.  $\sin heta + \cos heta = rac{1}{2}$  のとき次の値を求めよ.

(1) 
$$\sin \theta \cos \theta$$

(1)  $\sin \theta \cos \theta$ 

(1) 
$$\sin \theta \cos \theta$$
  
(2)  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ 

問. 
$$2x^2 + 3y^2 = 8$$
のとき、

 $4x + 3y^2$ の最大値および最

小値を求めよ.

めよ.

### 独立2変数関数の最小値

問.  $x \ge y$  が互いに関係なく変化す

るとき,
$$P=x^2+2y^2-2xy+2x+3$$
の最小値とそのときの $x=y$ 

2x+3の最小値とそのときの $x,\ y$ 

の値を求めよ.

### 2次関数の最大値 M の最小値

問. a を与えられた定数として x の 2 次関数 y = $-x^2 + 4ax + 4a$  を考え、その最大値を M とす

る. (1) M を a の式で表せ.

(2) M を最小とする a の値を求めよ、また、その

ときの M の値を求めよ.

# 2次関数の最大最小から係数決定調

問. 関数  $y = ax^2 - 2ax + ax^2$ 

 $\overline{b(0 \le x \le 3)}$ の最大値が9で、最

値を求めよ.

小値が1であるとき,定数a, $\overline{b}$ の

### 片側が固定された線分の中点の軌跡 問. $\exists Px^2 + y^2 = 1$ 上の動点Pと、 点 A (3, 4) を結ぶ 線分APの中点Mの

軌跡を求めよ.

### 少なくとも1つは1に等しい 戦 典型

問.  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$ ならば、 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  のうち

少なくとも1つは1に等しい

ことを証明せよ.

## 比例式の計算

数Ⅱ式と証明

問.  $x + y = \frac{y + z}{2} = \frac{z + x}{5}$ 

xy + yz + zx

のとき. の値を求めよ. 条件つきの等式の証明

問. a+b+c=0のとき,

 $a^{2}(b+c) + b^{2}(c+a) + c^{2}(a+b)$ 

+3abc = 0であることを示せ、

恒等式の基本

問.次の式が恒等式となるように、

定数 a, b, c, d の値を定めよ.

 $x^3 = a (x-1)^3 + b (x-1)^2$ 

+c(x-1)+d

問. 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  におい

て. 次が成り立つことを示せ.

$$2$$
解が $x=lpha,eta$ である $\iff lpha+eta=-rac{b}{a},\;lphaeta=rac{a}{a}$ 

て、火が成り立つことを示せ、
$$2$$
解が $x=lpha,eta$ である

間、3次方程式

 $x^3 + (a-1)x^2 - (a-4)x - 4 = 0$ 

が異なる3つの実数解をもつよう

な定数 a の値の範囲を求めよ.

### 円に内接する四角形の面積

問. 円 O に内接する四角形 ABCD が

 $\overline{\mathrm{AB} = 2, \ \mathrm{BC} = 3, \ \mathrm{CD} = 1, \ \angle \mathrm{ABC} = 60^{\circ}}$ を満たしている.

(1) 円 *O* の半径 *R* を求めよ.

(2) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ.

独立反復試行 Lv.1 問. サイコロを繰り返し5回投げるとき、

3の倍数の目が

ちょうど3回出る確率

を求めよ.

#### 

- (1) |x+3| = 4x
- $(2) \, | \, 2x 1 \, | \, \leqq x + 3 \,$
- (3) |x| + |x 1| = 3x

(4) |x| + |x-1| > 3x

#### 1次不等式の整数解



問. 次の問いに答えよ. (1) 不等式  $\frac{x}{2} + 4 < \frac{2x + 7}{2}$  を満たす最小の整数 x を求めよ.

(2) x の不等式 2x+a>5 (x-1) を満たす x のうち,最大の整数が 4 であるとき,定数 a の値の範囲を求めよ.(3) x の連立不等式 7x-5>13-2x, $x+a\geqq3x+5$  を満

(3) x の連立不等式 7x-5>13-2x,  $x+a \ge 3x+5$  を満たす整数 x がちょうど 5 個存在するとき,定数 a の値の範囲を求めよ.

#### 問. 次の不等式を解け. ただし<u>. a</u> は定数 とする.

(1) ax = 2(x + a)

(2) ax < x + 2

 $\overline{(3) \ a}x + 1 > x + a^2$ 

## 区間が動く2次関数の最大値・最小値 典型

問. a は定数とする. 関数 y=

問、
$$a$$
 は定数とする、関数  $y=x^2-2x+2$ の  $a \leq x \leq a+2$  に

おける最大値と最小値を求めよ.

軸が動く2次関数の最大値・最小値

問. a は定数とする. 関数 y= $x^2-2ax+3a \circ 0 \le x \le 4 \wr \zeta$ 

おける最大値と最小値を求めよ. a

は定数とする.

同じものを含む円順列 Lv.2 問. 赤玉4個, 白玉2個, 黒玉2個を円形に並べる 方法は何通りか.

同じものを含む円順列 Lv.1 問.赤玉4個,白玉3個, 黒玉1個を円形に並べる 方法は何通りか.

問. 10個のミカンをA,B,Cの3人配る.

1つももらわない人が

いても良いとき

の配り方は何通りあるか.

どの人も少なくとも

1個はもらうとき

の配り方は何通りあるか.

組分け Lv.3 12 人を 4人、4人、4人の

3組に分ける方法

組分け Lv.2 間。12 人を 6人、6人の

2組に分ける方法

組分け Lv.1 問. 12 人を 5人, 4人, 3人の

は何通りか.

3組に分ける方法

組分け Lv.0 間。12 人を

8人、4人の

2組に分ける方法





### 部屋分け Lv.1 問. 空室は作らないものとする.

6人をA, Bの

2部屋に分ける方法

#### 背理法証明 Lv.2

問. 有理数 a, b のうち少なくとも 1 つが 0 でないなら ば、 $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  は無理数であることを証明せよ、ただ

し、平方数でない正の整数 m に対して、 $\sqrt{m}$  が無理数 であることを前提としてよい。 a と b の少なくとも一方 が 0 でないと $\overline{b},\ a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$  が無理数であることを証 明せよ.

#### 背理法証明 Lv.1

問.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  は無理数であること

を証明せよ. ただし、平方数でない 正の整数mに対して、 $\sqrt{m}$ が無理 数であることを前提としてよい.

 $\sqrt{6}$ は無理数であることの証明 $^{^{ t the the left}}$  $| ext{ ll. } \sqrt{2}$ は無理数である

ことを証明せよ.

 $\sqrt{2}$ は無理数であることの証明 $^{
m HRColor}_{
m HM}$  $| 問. \sqrt{6}$  は無理数であ

<u>る.ことを証明せよ.</u>

#### 対偶証明法 Lv.3

問. 整数n について、 $n^2$ が6

の倍数ならば、nも6の倍数

であることを証明せよ.

#### 対偶証明法 Lv.2

問. 整数nについて、 $n^2$ が3

であることを証明せよ.

の倍数ならば、nも3の倍数

## 対偶証明法 Lv.1

問. 整数nについて、 $n^2$ が2

であることを証明せよ.

の倍数ならば、nも2の倍数

### 指数型の漸化式 問.次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の

 $a_1 = 10, \ a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ 

 $a_1 = 1, \ a_{n+1} = a_n + 3n + 1$ 

一般項を求めよ.

## 和と一般項の関係式

問. 数列  $\{a_n\}$  の初項から第 n 項

までの和 $S_n$ が $S_n=3n-2a_n$ で

あるとき,数列  $\{a_n\}$  の一般項を求

めよ.

問. n は自然数とする. 2 数 x,y

の和と積が整数のとき、 $x^n + y^n$ 

を用いて証明せよ.

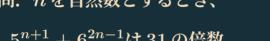
は整数であることを、数学的帰納法

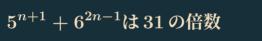
## 一般項の推測 $_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}}$ 問.次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一

般項を推測して、それが正しいことを数学 的帰納法によって証明せよ.

的帰納法によって証明せよ.
$$a_1=3,\ (n+1)\,a_{n+1}=a_n^2-1$$

## 数学的帰納法による倍数証明 間. nを自然数とするとき、





であることを証明せよ.

# 数学的帰納法による不等式証明 \*\*典型 問. n が 3 以上の自然数のとき,

 $3^n > 5n+1$ 

を証明せよ.

#### 数学的帰納法による等式証明 曲刑 問. 次の等式を数学的帰納法によ

って証明せよ、

って証明せよ、
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = rac{1}{4} n^2 \left( n + 1 
ight)^2$$

の等式が成立することを証明せよ.

 $(1^3+2^3+\cdots+n^3)=(1+2+\cdots+n)^2$ 

 $a_1=0, a_2=2,$ 

 $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ 

同、次の条件によって足められる第 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ、

 $a_1 = 2, \ a_{n+1} = 2a_n - 3$ 

放物線と2本の接線で囲まれた部分の面積 問. 放物線  $y = x^2 - 4x + 3$  と、こ

の放物線上の点 (0,3), (6,15) に

おける接線で囲まれた図形の面積

Sを求めよ.

# 放物線で囲まれた面積の最小 間. 放物線 $y=x^2$ と点 (1,2) を通る直線とで囲まれた図形の面積

Sが最小になるとき、その直線の方

程式を求めよ.

放物線で囲まれた面積の等分 
$$\mathbb{R}^{2}$$
 問. 放物線  $y=2x-x^2$  と  $x$  軸で

y = kxが2等分するように、定数

kの値を定めよ.

 $\overline{(1)} \ y = x^2 - 3x + 5, \ y = 2x - 1$ 

$$(1) \,\, y = x^2 - 3x + 5, \,\, y = 2x - 1 \ (2) \,\, \left\{ egin{array}{l} y = 2x^2 - 6x + 4, \ y = -3x^2 + 9x - 6 \end{array} 
ight.$$

 $(1) \ f(x) = 3x^2 - x \int_0^2 f(t) \, dt + 2$   $(2) \ f(x) = 1 + \int_0^1 (x - t) f(t) \, dt$ 

## 積分方程式~定積分の微分~ 端期

を求めよ.

問. 等式
$$\int_{-x}^{x}f\left( t
ight) dt=x^{3}-3x^{2}+x+a$$

を満たす関数 f(x) と定数 a の値の範囲

に引くことのできる接線の本数を

求めよ.

#### 3次方程式の実数解の個数

問.3 次方程式  $2x^3+3x^2-12x+a=0$  が次

曲型

の解をもつとき、定数 *a* の値の範囲を求めよ. (1) 異なる 3 つの実数解

- (2) ただ一つの実数解
- (3) 異なる2つの正の解と負の解

## 4次方程式の実数解の個数 典型

問. 次の4次方程式の異なる実数

 $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2 = 0$ 

 $\overline{f(x)} = x^3 - 3a^2x$ 

大値を求めよ.

 $00 \le x \le 1$  における最小値と最

3次関数の最大最小~区間に文字~ 端川 典型 問 $\overline{a} > 0$ とする。関数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 

の  $0 \le x \le a$  における最小値と最大値を求めよ.

の極値を求めよ.

### 共通接線の方程式

間、2つの放物線

 $y = x^2$ ,  $y = -x^2 + 6x - 5$ 

の共通接線の方程式を求めよ.

(2) 曲線  $y = x^3 - 3x^2 - 1$  に点 (0,0)

ける接線

から引いた接線

#### 等差数列の和の最大 曲型

問. 初項 79, 公差 -2 の等差数列  $\{a_n\}$  に

ついて、 (1) 第何項が初めて負となるか.

(2) 初項から第n 項までの和が最大とな るか、また、そのときの和を求めよ.

指数関数の最大値 ~ 逆数の対称式 ~ <sup>橋数対数</sup> 問. 関数

$$y = (2^x + 2^{-x}) - 2(4^x + 4^{-x})$$

ッー (- '- ') - (+ '- '- ') の最大値を求めよ.

# 対数関数の最大値 $\sim$ 対数の 2 次式 $\sim$ $^{ t tbw/f}$ 問. 次の関数の $1 \leq x \leq 16$ にお

ける最大値と最小値を求めよ.

から取入値と取入値を求める。
$$y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 3$$

 $y = \log_2 x + \log_2 \left(16 - x\right)$ 

<del>- g = 10g<sub>2</sub> x + 1</del>0g<sub>2</sub> (10 - x) の最大値を求めよ.

#### 

(1)  $\log_2 x + \log_2 (x - 7) = 3$ 

(1) 
$$\log_2 x + \log_2 (x - 7) = 3$$
  
(2)  $2 \log_2 (2 - x) \le \log_2 x$ 

等差数列をなす3数の和と積から 問. 等差数列をなす3数があって, その和が27、積が693である. こ

の3数を求めよ.

#### 物 R 物列 等差数列であることの証明 曲型

問. (1) 一般項が  $a_n = 3n - 4$  で表される数列  $\{a_n\}$  が等差数列であることを示し、初項と公差を 求めよ.

(2) (1) の数列  $\{a_n\}$  の項を一つおきに取り出し て並べた数列  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $a_5$ ,  $\cdots$  が等差数列である

ことを示し、初項と公差を求めよ.

## 小数首位 ~ 常用対数の利用 ~ を小数で表した とき、小数第何位に初めて 0 で

 $\log_{10} 3 = 0.4771 \,$ とする.

ない数字が現れるか. ただし,

桁数と最高位の数字 ~ 常用対数 ~ 問.  $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771 \,$ とする. (1) 1280 は何桁の整数か.

(2) 12<sup>80</sup> の最高位の数字を求めよ.

# 対数方程式,不等式~初級~ 間. 次の方程式・不等式を解け.

$$(1) \log_2 x = 3$$

 $(3)\,\log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right)\leqq 2$ 

(1) 
$$\log_2 x = 3$$
  
(2)  $\log_2 x < 3$ 

# 指数に対数を含む数 問. 次の式の値を求めよ. $(1) \,\, \overline{10^{\log_{10} 3}}$ (2) $81^{\log_3 10}$

#### 

とき,次の等式が成り立つことを証

明せよ. $rac{1}{2}+rac{1}{2}=rac{1}{2}$ 

# 対数を他の対数で表す 問. $a = \log_2 3, b = \log_3 7$

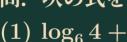
いて表せ.

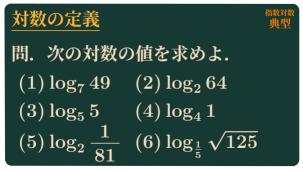
のとき,  $\log_{42} 56$ をa, bを用

# 底の変換公式 問. 次の式を簡単にせよ. $(1) \log_4 8$

# 対数の基本性質 問. 次の式を簡単にせよ. (1) $\log_6 4 + \log_6 9$

 $1/(2) \ 4 \log_2 \sqrt{3} - \log_2 18$ 





# 指数関数の最大値~2 次関数に帰着~ 問.次の関数の最大値と最小値を

求めよ.また,そのときのxの値を求めよ.

 $y=4^x\!-\!2^{x+2}\!+\!1\,(-1\le x\le 2)$ 

# 指数方程式.不等式~中級~ 次の方程式・不等式を解け.

 $\overline{(1)\ 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1} = 0$ 

指数方程式・不等式 
$$\sim$$
 初級  $\sim$  簡. 次の方程式・不等式を解け. 
$$(1) \left(\frac{1}{9}\right)^x = 3 \quad (2) \ 4^x < 8^{x-1}$$

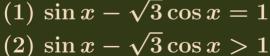
指数計算 
$$\sim$$
 逆数の対称式  $\sim$  問題  $a>0$ のとする.  $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}=4$ のとき、次の式の値を求めよ.

 $(1) \,\, a + a^{-1} \ (2) \,\, a^{rac{1}{2}} + a^{rac{1}{2}}$ 

$$y = \sin x + \cos x$$

 $(0 \le x \le \pi)$ 

三角方程式・不等式 
$$\sim$$
 合成  $\sim$  問.  $0 \le x < 2\pi$  のとき, 次の方程式・不等式を解け.



#### 

 $(1) \sin 2x = \sin x$ 

$$\begin{array}{l} (1) \sin 2x = \sin x \\ (2) \cos 2\theta \leq 3 \sin x - 1 \end{array}$$

# 2直線のなす鋭角 $\theta$

関 2 直線 
$$\int\limits_{\mathbf{1}} y = 3x - 1,$$

2直線  $y = \frac{1}{2}x + 1$ 

のなす鋭角 $\theta$ を求めよ.

#### 2次関数の最大最小に帰着 問. $0 \le \theta < 2\pi$ のとき,関数

 $y = \sin^2 \theta - \cos \theta$ 

の最大値と最小値を求めよ. また、そのときの $\theta$ の値を求めよ.

三角方程式・不等式 
$$\sim$$
2 次方程式に帰着  $\sim$  典型 間.  $0 \le \theta < 2\pi$  のとき,

次の方程式・不等式を解け.

$$(1) 2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$$

(2)  $2\cos^2\theta \leq 3\sin\theta$ 

問、
$$0 \le heta < 2\pi$$
 のとき,次の方程式・不等式を解け、 $\sqrt{3}$ 

$$(1)\,\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)  $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ 

# 三角関数の相互関係

問.  $\tan \theta = 3$ のとき、

$$\tan \theta = 3$$
のこと $\sin \theta \cdot \cos \theta$ の値

 $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ の値

を求めよ.

### 平面の方程式

を通る

空間ベクトル

問. 次のような平面の方程式を求めよ.

(1) 点 A(1, 2, 2) を通り、 $\vec{n}$ 

(2, -2, 4) に垂直

(2) 3点A(0, 1, 1), B(1, 0, 2), C(-

# 空間ベクトルの和の等式等型

問. 四面体 ABCD において等式

$$\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{CP} + 5\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{0}$$

を満たす点 P はどのような点か.

について $\left|x\overrightarrow{\mathrm{OP}}+y\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}
ight|$ 

の最小値と,そのときの実数 x,y の値を求めよ.

#### 正四面体の第四の点の座標 曲刑 問. 3点A(6,0,0), B(0,

に対して,正四面体 ABCD の頂点Dの座標を求めよ.

x+2y の最大値と最小値を求めよ.

 $x+y\stackrel{-}{\leq} 6$ 

# 領域の図示 全盛り

間、次の不等式が表す領域を図示せよ.

词、八の个寺氏が衣す祖域を図示せる。
$$(1)_{11}>x^2+1$$
  $(2)_{11}3x=2y$ 

(1)  $y > x^2 + 1$  (2)  $3x - 2y - 2 \ge 0$ 

(1) 
$$y > x + 1$$
 (2)  $3x - 2y - 1$   
(3)  $x \le 2$  (4)  $(x + 2)^2 + 1$ 

(5) 
$$x \ge 2$$
 (4)  $(x+2)^2 + y^2 < 2$   
(5)  $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 \ge 0$ 

$$egin{aligned} (3) \ x &\leq 2 & (4) \ (x+2)^2 + y^2 \ (5) \ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$) \ x \le 2 \qquad \qquad (4) \ (x+2)^2 + y^2 < 1$$

(6)  $\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ y < 3x - 5 \end{cases}$  (7) (x - y)(x + y - 2) < 0

#### 内心の位置ベクトル

2 二 缶

問.  $\angle A = 60^{\circ}$ , AB = 8, AC = 5 である三角形 ABC の内心を I とし、直線 AI と辺 BC の交

点を D とする.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$  とする.

(1)  $\overrightarrow{AD}$  を  $\overrightarrow{b}$ ,  $\overrightarrow{c}$  を用いて表せ. (2)  $\overrightarrow{AI}$  を  $\overrightarrow{b}$ ,  $\overrightarrow{c}$  を用いて表せ.

(2) Al を b ,  $\dot{c}$  を用いて表せ

ベクトルによる三角形の面積公式 典型 問. 平面上の 4 点 O、 A、 B、 C に対  $\mathbf{L}\tau, \ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}, \ OA = \mathbf{C}$  $2, OB = 1, OC = \sqrt{2}$ のとき、

**(1)** 内積 <del>○A · ○B</del> を求めよ.

(2) 三角形 OAB の面積を求めよ.

平面に下ろした垂線の足の座標点が 問. A(2, 0, 0), B(0, 3, 0), C

の定める平面 ABC に原点 O から

下ろした垂線を OH とするとき、

点日の座標を求めよ.

# 三角形の重心の軌跡

問. 2点〇(0,0), A(1,0)と

円  $x^2 + y^2 = 9$  上を動く点 Q を頂点とする

三角形OAQの重心P

の軌跡を求めよ.

距離の比が3:2である

点Pの軌跡を求めよ.

# 軌跡 Lv.1

問. 2点A(-3,0), B(2,0)からの

# 円に内接・外接する円

問. 中心が (4, 3) で

 $| egin{aligned} eta x^2 + y^2 = 1 \, m{\mathcal{U}} \end{aligned}$ 

接する円の方程式

を求めよ.

空間における点の一致の証明 端期の 問. 四面体 ABCD において、辺 AB, BC, CD, DA, AC, BD の中点をそれぞれK, L, M, N, Oとするとき、線分 KM、LN、QR

占け一致オスァレを証明みと

空間における三角形の面積 <sup>\*\*\*\*\*</sup> 問. 3点A(3, 2, 4), B(3,

を頂点とする三角形 ABC の

面積を求めよ.

# 円外から引いた接線 問. 点(1,3)から

円 $x^2+y^2=5$ に

引いた接線の方程式

を求めよ.

空間図形の垂直証明 空間ベクトル 曲刑 問、正四面体 ABCD におい て、三角形BCDの重心をG <u>とするとき、AGとBCが垂</u>

| 直であることを証明せよ.

## 円と直線が接する条件

問.  $\begin{cases} \exists \exists x^2 + y^2 = 10 \\ \exists x : y = 2x + m \end{cases}$ 

接するとき、

定数 m の値を求めよ.

- 4点が同一平面上にある条件 🏻 問. 4点A(3, 1, 2), B(4, 2, 3)
- が同一平面上にあるとき、zの値を

求めよ.

3点が同一直線上にある条件 <sup>\*\*\*</sup> 典型 <sup>\*\*\*</sup> 問. 3点 A (2, -1, 5), B (3

問. 3点A(2, -1, 5), B(が一直線上にあるとき, y, z

の値を求めよ.

問.  $\left\{ egin{array}{ll} egin{array}{$ 

### 共有点をもつとき, 定数 m の値の範囲を求めよ.

### 円と直線の共有点

問. 円 $\overline{x}^2 + y^2 = 5$ と次の直線の

(1) y = x - 1

(2) y = 2x + 5

共有点の座標を求めよ.

#### 円のベクトル方程式 曲型

問. 平面上の異なる2定点A, B

に対して,等式 $|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=6$ 

をみたす動点 P はどのような図形

を描くか、

## 平面ABCと直線の交点 薫製

問、右の図の直方体において、対角

線 OF と平面 ABC の交点を P と

**する.** OP : OF を求めよ.

### ベクトル方程式~円の方程式~

問. 次のような円の方程式を求めよ. (1) 中心が原点 O (0, 0) で、半径が 2 の円

(2) 中心が A (1, 5) で, 点 B (2, 2) を通る円

(3) A (5, 0), B (9, 4) を直径の両端とする円

空間における垂直条件 
$$\vec{a}$$
 =  $(2, -1, 0)$ ,  $\vec{b}$  =

(6, -2, 1)の両方に垂直で,大き

さが3である $\overrightarrow{p}$ を求めよ.

法線ベクトル〜2 直線のなす鋭角〜 $^{*}$  典型 間、2 直線  $x+\sqrt{3}y-5=$ 

问、2 国際  $x+\sqrt{3}y-5=0,\ \sqrt{3}x+y+1=0$  がなす

鋭角 $\theta$ を求めよ.

## 法線ベクトル 問. 点A(3, 4)を通り, $\vec{n} =$

(2, 1) に垂直な直線の方程式

を求めよ.

ベクトルの終点の存在範囲 Lv.2 典型 間. 三角形 OAB において,次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ. 
$$(1)$$
  $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, s+t=2, s \ge 0, t \ge$ 

 $0, t \geq 0$ 

ベクトルの終点の存在範囲 Lv.1 典型 間. 三角形 OAB において、次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ. (1) 
$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, s+t=2, s \ge 0, t \ge$$

0

 $(2) \ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \ s+t = \frac{1}{3}, \ s \geq$ 

 $0, t \geq 0$ 

### 3点を通る円の方程式 問. 3 点 A(2,1), B(6,3), C(-1,2) がある.

(1) 3 点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ.

(2) 三角形 ABC の外心の座

標と、外接円の半径を求めよ.

垂心の位置ベクトル 問. OA =  $2\sqrt{2}$ , OB  $\sqrt{3}$ ,  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  の内積が 2 で ある三角形 OAB の垂心 H に対

して、 $\overrightarrow{OH}$  を $\overrightarrow{OA}$  と $\overrightarrow{OB}$  を用いて

## 内積を利用した図形証明ギ典型

問. 三角形 ABC において、辺 BC

の中点を M とするとき、等式

 $AB^2 + AC^2 = 2 (AM^2 + BM^2)$ 

が成立することを示せ.

#### 

点を C, 辺 OB の中点を D とする.

- (1) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき,  $\overrightarrow{OP}$  を  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表せ.
- (2) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき,  $\overrightarrow{OQ}$  を  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表せ.

点を C, 辺 OB の中点を D とする.

(1) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき,  $\overrightarrow{OP}$ 

 $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表せ.
(2) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき、 $\overrightarrow{OQ}$ 

(2) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき,OQ を  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表せ.

3点が一直線上にあることの証明のよう 問.平行四辺形 ABCD において、 辺 CD を 2:1 に内分する点を E. 対角線 BD を 3:1 に内分する点を **Fとする.** 3点A, F, Eは一直線

アあるアンを証明みと

## 

問. 三角形 ABC において、辺BC, CA, A

を 3: 1 に内分する点を、それぞれ

 $P, Q, R, 三角形 PQR の重心を <math>G', \Xi$ 

角形 ABC の重心を G とする. このとき、

 $G \ge G'$  は一致することを証明せよ.

### 解の配置~解と係数の関係~離型 問. 2次方程式 $x^2-2(m-2)x-m+14=0$

が次のようなことなる2つの解を持つとき、定数

(1) ともに正の解 (2) ともに負の解

*m* の値の範囲を求めよ.

(3) 符号が異なる解 (4) ともに 1 より大きい

リ・二円/// ADO に外して、久の と満たす占Dの位置を求めて

を満たす点 
$$P$$
 の位置を求めよ.  $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ 

## ベクトルのなす角

問.  $\vec{a} = (7, -1) \, \xi \, 45^{\circ} \, O$ 

角をなし, 大きさが 10 である

 $\overrightarrow{b}$ を求めよ.

## 2直線の平行・垂直条件 興型

問. 
$$2$$
 直線  $\begin{cases} ax+2y=1, \\ x+(a-1)y=3 \end{cases}$ が次の条件を満たすとき、定数  $a$  の

が次の条件を満たすとき,定数 *a 6* 値を求めよ.(1) 平行 (2) 垂直

問.  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$ で, $\vec{a} + \vec{b}$ と  $2\vec{a} - 5\vec{b}$ 

が垂直であるとする.
$$(1)$$
 内積  $\overrightarrow{a}\cdot \overrightarrow{b}$  を求めよ.

- (2) 大きさ  $|\vec{a}-2\vec{b}|$  を求めよ.

 $\frac{x^3 + (a-4)x - 2a = 0}{x^3 + (a-4)x - 2a}$ 

が2重解をもつとき,

**が2重解をもつとき**, 実数*a* の値を求めよ.

ベクトルの大きさの最小 
$$\vec{h} = (1, 2) \mathcal{E}$$

問.  $\vec{a} = (3, 1), \vec{b} = (1, 2)$  と

実数tに対して、 $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$ の

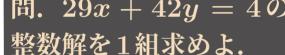
大きさ  $|ec{c}|$  の最小値を求めよ.

# 問. 29x + 42y = 40

1次不定方程式の整数解~すべて~ 典型

整数解をすべて求めよ.

問. 29x + 42y = 40



 $f\left( x
ight) =x^{3}+3kx^{2}-kx-1$ 

が常に単調増加するような定数 k

の値の範囲を求めよ.

極値から係数決定 問. 関数  $f\left(x
ight)=x^3+ax^2-bx+c$ 

が、x=-1で極大値 5 をとり、x=1で極小となるとき、定数 a,b,c の値を求めた

### nを含む数列の和 次の数列 $\{a_n\}$ の和 S を求め よ. $1 \cdot (2n-1)$ , $3 \cdot (2n-3)$ , $5 \cdot (2n-5)$ ,

 $\cdots$ ,  $(2n-1)\cdot 1$ 

 $1, 1+2, 1+2+3, \cdots, 1+2+\cdots+n$ 

### 等比数列の和の扱い 問. 初項から第 10 項までの和が 6, 初項

から第 20 項までの和が 24 である等比数 列  $\{a_n\}$  の、初項から第 30 項までの和 S

を求めよ.