整数問題への応用

数III微分
典型

問．$a^{b^2} = b^{a^2}$ かつ $a < b$ をみたす自然数の組 $(a,\ b)$ は存在するか．

関数の最大最小

数III微分
典型

問. $-\pi \leqq x \leqq \pi$ における $y = 2\sin x + \sin 2x$ の最大値と最小値を求めよ.

$f''(x)$ を用いた不等式証明

数III微分
典型

問． すべての正の数 x に対して，$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ が成立することを示せ．

定数分離

数III微分
典型

問．方程式 $ax^5 - x^2 + 3 = 0$ が３個の異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

凹凸グラフの概形

数III微分
典型

問．関数 $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ の増減，極値，グラフの凹凸，漸近線を調べ，グラフの概形をかけ．

極値・変曲点をもつ条件

数III微分
典型

問．$f(x)=\left(x^2+a\right)e^x$ とする．ただし，a は定数とする．

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもたないような a の値の範囲を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ が変曲点をもつような a の値の範囲を求めよ

対称式の連立方程式

複素数と方程式
典型

問．x, y の連立方程式

$$\begin{cases} 2x+2y+xy=3a-1, \\ x+y+xy=a \end{cases}$$

が x, y が実数である解をもつような実数 a の範囲を求めよ．

解の条件 〜解と係数の関係〜

複素数と方程式
典型

問．方程式 $2x^2 + ax + 6 = 0$ の

2解のうち，

一方が他方の3倍

であるように実数 a の値を定めよ．

２解から２次方程式を作る

複素数と方程式
典型

問．方程式 $3x^2 - 5x + 1 = 0$ の２つの解を α，β とするとき，

α^3，β^3 を２つの解にもつ

２次方程式を１つ作れ．

2 次方程式の 2 解 α, β の対称式

複素数と方程式
典型

問. 方程式 $2x^2 - 3x + 4 = 0$ の 2 つの解を α, β とおくとき,

$$(2-\alpha)(2-\beta) \text{ の値}$$

を求めよ.

不等式の証明

数Ⅱ式と証明
典型

問．次の不等式を証明せよ．

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$$

倍数証明

整数
典型

問. nが奇数のとき,
$n^5 - n$は240の倍数であることを証明せよ.

余りによる分類

整数
典型

問．n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数であることを示せ．

互いに素の証明

整数典型

問．自然数 a と b が互いに素であるとき，a と $a+b$ も互いに素であることを示せ．

3元不定方程式の有名問題

整数
典型

問. $\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$を満たす自然数解$(l,\ m,\ n)$をすべて求めよ．ただし，$l \leqq m \leqq n$とする．

内接円と外接円の半径

三角比
典型

問. $\triangle ABC$ において,

$AB = 5,\ BC = 7,\ AC = 8$ のとき,

内接円の半径 r と外接円の半径 R を求めよ.

内角二等分線の長さ

三角比
典型

問. △ABC において, $AB = 5$, $AC = 8$, $\angle A = 60^\circ$

$\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき,

線分 AD の長さを求めよ.

三角比
典型

三角形の内角の sin の比

$$\frac{5}{\sin A}=\frac{7}{\sin B}=\frac{8}{\sin C}$$

である $\triangle$ABC の最小角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ.

三角形の形状決定

問．次の等式を満たす$\triangle$ABCはどのような形か．

$$a^2 \cos A \sin B = b^2 \cos B \sin A$$

全体像を見る

確率
典型

問．赤玉３個，白玉３個，青玉３個が入っている袋から３個の玉を取り出すとき，玉の色が２種類になる確率を求めよ．

余事象の利用

確率
典型

問．1 から 8 までの数の書かれた 8 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1) 3 数の和が 18 以下となる確率

(2) 3 数の積が 4 の倍数となる確率

非復元抽出 ～ 引いたくじは戻さない ～

確率
典型

問．当たり３本，はずれ７本のくじから４本を引くとき，２本だけ当たりくじを引く確率を求めよ．ただし，引いたくじは戻さないとする．

同基準

確率
典型

問．トランプのスペード 13 枚を一列に並べるとき，絵札がすべて隣り合う確率を求めよ．

等確率

確率
典型

問．区別のない３個のサイコロを投げるとき，出た目の和が５となる確率を求めよ．

根号の計算

数I数と式
典型

問. $\alpha = 2 + \sqrt{3}$のとき, $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1$の値を求めよ.

２重根号

別解研究入門

問．$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ の２重根号をはずせ．

解の配置 Lv.3

2次関数
典型

問. 2次方程式 $x^2-(k+4)x-\frac{k}{2}+4=0$ が $1<x<4$ に少なくとも1つの実数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ.

解の配置 Lv.2

2次関数
典型

問．2次方程式$ax^2-(a-1)x-a+1=0$が$-1<x<1$と$3<x<4$にそれぞれ1つの実数解を持つような定数aの値の範囲を求めよ

解の配置 Lv.1

2 次関数
典型

問．2 次方程式 $x^2 + 2ax + 3 - 2a = 0$ が次のような条件を満たすような実数 a の値の範囲を求めよ．

(1) 符号の異なる 2 解をもつ

(2) 正の解をもつ

２つの文字含む因数分解

数Ⅰ数と式
典型

問．２元２次式

$$6x^2 + 5xy + y^2 - 7x - 3y + 2$$

を因数分解せよ

条件式付き 2 変数関数の最大最小 Lv.2

2 次関数
典型

問．$2x^2 + 3y^2 = 8$ のとき，$4x + 3y^2$ の最大値および最小値を求めよ．

複２次４次関数の最小値

２次関数
典型

問．関数 $y = x^4 + 6x^2 + 10$ の最小値を求めよ．

独立２変数関数の最小値

２次関数
典型

問. x と y が互いに関係なく変化するとき, $P = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 3$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ.

2 次関数の最大値 M の最小値

2 次関数
典型

問．a を与えられた定数として x の 2 次関数 $y = -x^2 + 4ax + 4a$ を考え，その最大値を M とする．

(1) M を a の式で表せ．

(2) M を最小とする a の値を求めよ．また，そのときの M の値を求めよ．

2次関数の最大最小から係数決定

問．関数 $y = ax^2 - 2ax + b\,(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が９で，最小値が１であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

少なくとも１つは１に等しい

問. $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=1$

ならば，α，β，γ のうち

少なくとも１つは１に等しい

ことを証明せよ.

比例式の計算

数II式と証明
典型

問. $x+y=\dfrac{y+z}{2}=\dfrac{z+x}{5}\neq 0$ のとき,

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$$ の値を求めよ.

条件つきの等式の証明

数II式と証明
典型

問. $a+b+c=0$ のとき,

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc=0$$

であることを示せ.

恒等式の基本

数II式と証明
典型

問．次の式が恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ．

$$x^3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$

解と係数の関係の証明

複素数と方程式
典型

問. 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において, 次が成り立つことを示せ.

$$2\text{解が } x=\alpha, \beta \text{ である}$$

$$\iff \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

異なる３つの実数解

複素数と方程式
典型

問．３次方程式

$$x^3+(a-1)x^2-(a-4)x-4=0$$

が異なる３つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

円に内接する四角形の面積

三角比
応用

問. 円 O に内接する四角形 ABCD が

$\mathrm{AB}=2,\ \mathrm{BC}=3,\ \mathrm{CD}=1,\ \angle\mathrm{ABC}=60^\circ$

を満たしている.

(1) 円 O の半径 R を求めよ.

(2) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ.

独立反復試行 Lv.1

問．サイコロを繰り返し５回投げる時, ３の倍数の目がちょうど３回出る確率を求めよ．

絶対値を含む方程式・不等式

数Ⅰ数と式
典型

問．次の方程式・不等式を解け．

(1) $|x+3| = 4x$

(2) $|2x-1| \leqq x+3$

(3) $|x| + |x-1| = 3x$

(4) $|x| + |x-1| > 3x$

1次不等式の整数解

数 I 数と式
典型

問．次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $\dfrac{x}{2}+4<\dfrac{2x+7}{3}$ を満たす最小の整数 x を求めよ．

(2) x の不等式 $2x+a>5(x-1)$ を満たす x のうち，最大の整数が 4 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(3) x の連立不等式 $7x-5>13-2x$, $x+a\geqq 3x+5$ を満たす整数 x がちょうど 5 個存在するとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

係数に文字を含む１次不等式

数Ⅰ数と式
典型

問．次の不等式を解け．ただし，a は定数とする．

(1) $ax = 2(x + a)$

(2) $ax < x + 2$

(3) $ax + 1 > x + a^2$

区間が動く２次関数の最大値・最小値

２次関数 典型

問．a は定数とする．関数 $y = x^2 - 2x + 2$ の $a \leqq x \leqq a + 2$ における最大値と最小値を求めよ．

軸が動く２次関数の最大値・最小値

２次関数
典型

問．a は定数とする．関数 $y = x^2 - 2ax + 3a$ の $0 \leqq x \leqq 4$ における最大値と最小値を求めよ．a は定数とする．

同じものを含む円順列 Lv.2

場合の数
典型

問．赤玉４個，白玉２個，黒玉２個を円形に並べる方法は何通りか．

同じものを含む円順列 Lv.1

場合の数
典型

問．赤玉４個，白玉３個，黒玉１個を円形に並べる方法は何通りか．

重複組合せ Lv.2

場合の数
典型

問．10 個のミカンを A，B，C の 3 人配る．1 つももらわない人がいても良い場合，配り方は何通りあるか．

重複組合せ Lv.1

場合の数
典型

問．10 個のミカンを A，B，C の 3 人配る．どの人も少なくとも 1 個はもらう場合，配り方は何通りあるか．

組分け Lv.3

問．12人を3つの4人組に分ける方法は何通りか．

組分け Lv.2

場合の数
典型

問．12人を2つの6人組に分ける方法は何通りか．

組分け Lv.1

場合の数
典型

問．12人を5人組と4人組と3人組に分ける方法は何通りか．

組分け Lv.0

場合の数
典型

問．12人を８人組と４人組に分ける方法は何通りか．

部屋分け Lv.2

場合の数
典型

問．空室は作らないものとする．6 人を A，B，C の 3 部屋に分ける方法は何通りあるか．

部屋分け Lv.1

場合の数
典型

問．空室は作らないものとする．6人を A，B の2部屋に分ける方法は何通りあるか．

背理法証明 Lv.2

集合と命題
典型

問．有理数 a，b のうち少なくとも 1 つが 0 でないならば，$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ．ただし，平方数でない正の整数 m に対して，$\sqrt{m}$ が無理数であることを前提としてよい．

背理法証明 Lv.1

集合と命題
典型

問．$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ．ただし，平方数でない正の整数 m に対して，$\sqrt{m}$ が無理数であることを前提としてよい．

$\sqrt{6}$ は無理数であることの証明

集合と命題
典型

問．$\sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ．

$\sqrt{2}$ は無理数であることの証明

集合と命題
典型

問．$\sqrt{6}$ は無理数である．ことを証明せよ．

対偶証明法 Lv.3

問．整数 n について，n^2 が 6 の倍数ならば，n も 6 の倍数であることを証明せよ．

対偶証明法 Lv.2

集合と命題
典型

問．整数 n について，n^2 が 3 の倍数ならば，n も 3 の倍数であることを証明せよ．

対偶証明法 Lv.1

集合と命題
典型

問．整数 n について，n^2 が 2 の倍数ならば，n も 2 の倍数であることを証明せよ．

指数型の漸化式

数B数列
典型

問．次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 10,\ a_{n+1} = 2a_n + 3^n$$

階差型の漸化式

数B数列
典型

問．次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3n + 1$$

和と一般項の関係式

数B数列
典型

問．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3n - 2a_n$ であるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$x^n + y^n$ が整数であることの証明

数B数列
典型

問．n は自然数とする．2 数 x, y の和と積が整数のとき，$x^n + y^n$ は整数であることを、数学的帰納法を用いて証明せよ．

一般項の推測

数B数列
典型

問．次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測して、それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ.

$$a_1 = 3,\ (n+1)\,a_{n+1} = a_n^2 - 1$$

数学的帰納法による倍数証明

数B数列
典型

問. n を自然数とするとき、

$$5^{n+1}+6^{2n-1} \text{は} 31 \text{の倍数}$$

であることを証明せよ.

数学的帰納法による不等式証明

数B数列
典型

問. n が 3 以上の自然数のとき,

$$3^n > 5n + 1$$

を証明せよ.

数学的帰納法による等式証明

数B数列
典型

問．次の等式を数学的帰納法によって証明せよ．

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2\left(n+1\right)^2$$

数学的帰納法

数B数列
典型

問. すべての自然数 n について、次の等式が成立することを証明せよ.

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$$

隣接３項間漸化式

数Ｂ数列
典型

問．次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 2, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_1 = 0,\ a_2 = 2, \\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \end{cases}$

漸化式を解く

数B数列
典型

問．次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 3$$

放物線と2本の接線で囲まれた部分の面積

問. 放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と、この放物線上の点 $(0, 3)$, $(6, 15)$ における接線で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

放物線で囲まれた面積の最小

数II微積
典型

問．放物線 $y = x^2$ と点 $(1, 2)$ を通る直線とで囲まれた図形の面積 S が最小になるとき、その直線の方程式を求めよ．

放物線で囲まれた面積の等分

数Ⅱ微積
典型

問．放物線 $y = 2x - x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を直線 $y = kx$ が2等分するように、定数 k の値を定めよ．

$\frac{1}{6}$ 公式の利用

数Ⅱ微積
典型

問．次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $y=x^2-3x+5,\ y=2x-1$

(2) $\begin{cases} y=2x^2-6x+4, \\ y=-3x^2+9x-6 \end{cases}$

積分方程式 〜 定積分を用いた関数 〜

数Ⅱ微積
典型

問．次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(1) $f(x) = 3x^2 - x\int_0^2 f(t)\,dt + 2$

(2) $f(x) = 1 + \int_0^1 (x-t)\,f(t)\,dt$

積分方程式 〜 定積分の微分 〜

数Ⅱ微積
典型

問．等式

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^3 - 3x^2 + x + a$$

を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値の範囲を求めよ．

接線の本数

数Ⅱ微積
典型

問. 点 $(0, k)$ から曲線

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x$$

に引くことのできる接線の本数を求めよ.

3次方程式の実数解の個数

数II微積
典型

問. 3次方程式 $2x^3+3x^2-12x+a=0$ が次の解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ.

(1) 異なる3つの実数解

(2) ただ一つの実数解

(3) 異なる2つの正の解と負の解

4次方程式の実数解の個数

数Ⅱ微積
典型

問．次の 4 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2 = 0$$

3 次関数の最大最小 〜 係数に文字 〜

数Ⅱ微積
典型

問．$a > 0$ とする．関数

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値と最大値を求めよ．

3 次関数の最大最小 ～ 区間に文字 ～

数Ⅱ微積
典型

問．$a>0$ とする．関数

$$f(x)=x^3-3x^2+1$$

の $0 \leqq x \leqq a$ における最小値と最大値を求めよ．

極値の計算工夫

数Ⅱ微積
典型

問. 関数

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 5$$

の極値を求めよ.

共通接線の方程式

数Ⅱ微積
典型

問．２つの放物線

$$y = x^2,\quad y = -x^2 + 6x - 5$$

の共通接線の方程式を求めよ．

接線の方程式

数II微積
典型

問．次の接線の方程式を求めよ．

(1) 曲線 $y = x^2 + 4x$ 上の点 $(1, 5)$ における接線

(2) 曲線 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ に点 $(0, 0)$ から引いた接線

等差数列の和の最大

数B数列
典型

問．初項 79, 公差 -2 の等差数列 $\{a_n\}$ について、

(1) 第何項が初めて負となるか．

(2) 初項から第 n 項までの和が最大となるか．また、そのときの和を求めよ．

指数関数の最大値 ～ 逆数の対称式 ～

指数対数
典型

問．関数

$$y = \left(2^x + 2^{-x}\right) - 2\left(4^x + 4^{-x}\right)$$

の最大値を求めよ．

$\sin 36^\circ$ の値

三角関数
典型

問．$\theta = 36^\circ$ のとき，
$\sin 3\theta = \sin 2\theta$ を示し，
$\sin 36^\circ$ の値を求めよ．

和積公式の利用

三角関数
典型

問．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の方程式を求めよ．

$$\sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$$

三角方程式の解の個数

三角関数
典型

問. $\sin^2\theta - \cos\theta + a = 0 \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

(1) この方程式が解をもつための a の条件を求めよ.

(2) この方程式の解の個数を a の値の範囲によって調べよ.

対数関数の最大値 〜 対数の 2 次式 〜

指数対数
典型

問．次の関数の $1 \leqq x \leqq 16$ における最大値と最小値を求めよ．

$$y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 3$$

対数関数の最大値 ～ 真数が 2 次式 ～

指数対数
典型

問．関数

$$y = \log_2 x + \log_2 (16 - x)$$

の最大値を求めよ．

対数方程式・不等式 ～ 中級 ～

指数対数
典型

問. 次の方程式・不等式を解け.

(1) $\log_2 x + \log_2 (x-7) = 3$

(2) $2\log_2 (2-x) \leqq \log_2 x$

等差数列をなす３数の和と積から

数Ｂ数列
典型

問．等差数列をなす３数があって，その和が 27，積が 693 である．この３数を求めよ．

等差数列であることの証明

数B数列
典型

問. (1) 一般項が $a_n = 3n - 4$ で表される数列 $\{a_n\}$ が等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ.

(2) (1) の数列 $\{a_n\}$ の項を一つおきに取り出して並べた数列 a_1, a_3, a_5, $\cdots$ が等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ.

小数首位 ～ 常用対数の利用 ～

指数対数
典型

問．$\left(\dfrac{1}{30}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

指数対数
典型

桁数と最高位の数字 ～ 常用対数 ～

問. $\log_{10} 2 = 0.3010$,

$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

(1) 12^{80} は何桁の整数か.

(2) 12^{80} の最高位の数字を求めよ.

対数方程式・不等式 〜 初級 〜

指数対数
典型

問. 次の方程式・不等式を解け.

(1) $\log_2 x = 3$

(2) $\log_2 x < 3$

(3) $\log_{\frac{1}{3}} (x-1) \leqq 2$

指数対数
典型

指数に対数を含む数

問．次の式の値を求めよ．

(1) $10^{\log_{10} 3}$

(2) $81^{\log_3 10}$

対数を利用した等式の証明

指数対数
典型

問．$xyz \neq 0$，$2^x = 3^y = 6^z$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

対数を他の対数で表す

指数対数
典型

問. $a = \log_2 3$, $b = \log_3 7$ のとき, $\log_{42} 56$ を a, b を用いて表せ.

底の変換公式

指数対数
典型

問．次の式を簡単にせよ．

(1) $\log_4 8$

(2) $\log_2 3 \cdot \log_3 8$

(3) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

対数の基本性質

指数対数
典型

問. 次の式を簡単にせよ.

(1) $\log_6 4 + \log_6 9$

(2) $4\log_2\sqrt{3} - \log_2 18$

対数の定義

指数対数
典型

問．次の対数の値を求めよ．

(1) $\log_7 49$　(2) $\log_2 64$

(3) $\log_5 5$　(4) $\log_4 1$

(5) $\log_2 \dfrac{1}{81}$　(6) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{125}$

指数関数の最大値 ～2 次関数に帰着～

指数対数
典型

問．次の関数の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

$$y = 4^x - 2^{x+2} + 1 \ (-1 \leqq x \leqq 2)$$

三角関数の最大値 ～ sin と cos の対称式 ～

三角関数
典型

問．次の関数の最大値と最小値を求めよ．

$$y = 2\sin x\cos x + \sin x + \cos x$$

$$(0 \leqq x < 2\pi)$$

指数方程式・不等式 ～中級～

指数対数
典型

次の方程式・不等式を解け.

(1) $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 = 0$

(2) $4^x + 2^x - 20 > 0$

指数方程式・不等式 〜 初級 〜

指数対数
典型

問．次の方程式・不等式を解け．

(1) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = 3$ (2) $4^x < 8^{x-1}$

(3) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \leqq \dfrac{1}{125}$

指数計算 〜 逆数の対称式 〜

指数対数
典型

問．$a > 0$のとする．$a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}} = 4$のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $a + a^{-1}$

(2) $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}$

三角関数の最大 〜 sin と cos の 2 次式 〜

三角関数
典型

問．次の関数の最大値と最小値およびそのときの x の値を求めよ．

$$y = \sin^2 x + 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x$$

$$(0 \leqq x < 2\pi)$$

三角関数の最大 ～ 合成 ～

問．次の関数の最大値と最小値およびそのときの x の値を求めよ．

$$y = \sin x + \cos x$$

$$(0 \leqq x \leqq \pi)$$

三角方程式・不等式 ～合成～

三角関数
典型

問． $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け．

(1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$

(2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 1$

三角関数の合成

問．次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ．

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

(2) $\sin\theta-\cos\theta$

2倍角を含む方程式･不等式

三角関数
典型

問. $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式･不等式を解け.

(1) $\sin 2x = \sin x$

(2) $\cos 2\theta \leqq 3\sin x - 1$

加法定理を用いた点の回転移動

三角関数
典型

問. 点 P $(3,\ 2)$ を原点 O を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点 Q の座標を求めよ.

2直線のなす鋭角 θ

三角関数
典型

問．2直線 $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ y = \dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases}$ のなす鋭角 θ を求めよ．

2 次関数の最大最小に帰着

三角関数
典型

問．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，
関数 $y = \sin^2\theta - \cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

三角方程式・不等式 ～2 次方程式に帰着～

三角関数
典型

問．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け．

(1) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$

(2) $2\cos^2\theta \leqq 3\sin\theta$

三角方程式・不等式 ～中級～

三角関数
典型

問．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け．

(1) $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

三角関数の相互関係

三角関数
典型

問. (1) $\sin\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき,

$\cos\theta,\ \tan\theta$ の値を求めよ.

(2) $\tan\theta = 3$ のとき,

$\sin\theta,\ \cos\theta$ の値を求めよ.

平面の方程式

空間ベクトル
典型

問．次のような平面の方程式を求めよ．

(1)　点　A $(1,\ 2,\ 2)$　を 通 り，$\vec{n}$　$=$
$(2,\ -2,\ 4)$ に垂直

(2) 3 点 A $(0,\ 1,\ 1)$，B $(1,\ 0,\ 2)$，C $(-$
を通る

空間内の直線の方程式

空間ベクトル
典型

問．次の直線の媒介変数表示と，直線の方程式を求めよ．

(1) 点 A $(4,\ 5,\ 3)$ を通り，$\vec{d} = (3,\ 2,\ -4)$ に平行な直線

(2) 2 点 A $(1,\ 2,\ 3)$，B $(2,\ -1,\ 5)$ を通る直線

空間ベクトルの和の等式

空間ベクトル
典型

問．四面体 ABCD において等式

$$\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{CP} + 5\overrightarrow{DP} = \vec{0}$$

を満たす点 P はどのような点か．

空間ベクトルの大きさの最小

空間ベクトル
典型

問．原点Oと3点P(1, 2, 1)，Q(2, 1,
について

$$\left|x\overrightarrow{\mathrm{OP}}+y\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|$$

の最小値と，そのときの実数 x，y の値を求めよ．

正四面体の第四の点の座標

空間ベクトル
典型

問．３点Ａ (6，0，0)，Ｂ (0,
に対して，正四面体ＡＢＣＤ
の頂点Ｄの座標を求めよ．

線形計画法

図形と方程式
典型

問. $\begin{cases} 3x + y \geqq 6 \\ x + 3y \geqq 6 \\ x + y \leqq 6 \end{cases}$ のとき,

$x + 2y$ の最大値と最小値を求めよ.

不等式の表す領域

図形と方程式
典型

問．次の不等式が表す領域を図示せよ．

(1) $y > x^2 + 1$　　(2) $3x - 2y - 2 \geqq 0$

(3) $x \leqq 2$　　(4) $(x+2)^2 + y^2 < 1$

(5) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 \geqq 0$

(6) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ y < 3x - 5 \end{cases}$

(7) $(x - y)(x + y - 2) < 0$

内心の位置ベクトル

平面ベクトル
典型

問. $\angle A = 60^\circ$, $\mathrm{AB} = 8$, $\mathrm{AC} = 5$ である三角形 ABC の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

ベクトルによる三角形の面積公式

平面ベクトル
典型

問．平面上の 4 点 O，A，B，C に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{OC}=\sqrt{2}$ のとき，

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(2) 三角形 OAB の面積を求めよ．

平面に下ろした垂線の足の座標

空間ベクトル
典型

問. A (2, 0, 0), B (0, 3, 0), C
の定める平面 ABC に原点 O から
下ろした垂線を OH とするとき,
点 H の座標を求めよ.

三角形の重心の軌跡

図形と方程式
典型

問．2点 O (0, 0)，A (1, 0) と
円 $x^2+y^2=9$ 上を動く点 Q
を頂点とする三角形 OAQ の
重心 P の軌跡を求めよ．

軌跡～初級～

図形と方程式
典型

問．２点 A $(-3,\ 0)$，B $(2,\ 0)$ からの距離の比が３：２であるような点Ｐの軌跡を求めよ．

円に内接・外接する円

図形と方程式
典型

問. 中心が$(4,\ 3)$で
円$x^2+y^2=1$に接する
円の方程式を求めよ.

空間における点の一致の証明

空間ベクトル
典型

問．四面体 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA，AC，BD の中点をそれぞれ K，L，M，N，Q
とするとき，線分 KM，LN，QR の中点は一致することを証明

空間における三角形の面積

空間ベクトル
典型

問．３点 $A(3,\ 2,\ 4)$，$B(3,$
を頂点とする三角形 ABC の
面積を求めよ．

円に引いた接線の方程式

図形と方程式
典型

問. 点 $(1,\ 3)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式を求めよ.

空間図形の垂直証明

空間ベクトル
典型

問．正四面体 ABCD において，三角形 BCD の重心を G とするとき，AG と BC が垂直であることを証明せよ．

円と直線が接する条件

図形と方程式
典型

問. 円 $x^2 + y^2 = 10$ と直線 $y = 2x + m$ が接するとき, 定数 m の値を求めよ.

4 点が同一平面上にある条件

空間ベクトル
典型

問．４点 A $(3,\ 1,\ 2)$，B $(4,\ 2,\ 3)$
が同一平面上にあるとき，z の値を
求めよ．

3点が同一直線上にある条件

空間ベクトル
典型

問．3点A(2, −1, 5)，B(3

が一直線上にあるとき，y，z

の値を求めよ．

円と直線が共有点をもつ条件

図形と方程式
典型

問．円 $x^2+y^2=8$ と

直線 $y=x+m$

が共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

円と直線の共有点

図形と方程式
典型

問．円 $x^2 + y^2 = 5$ と次の直線の共有点の座標を求めよ．

(1) $y = x - 1$

(2) $y = 2x + 5$

円のベクトル方程式

平面ベクトル
典型

問．平面上の異なる 2 定点 A，B に対して，等式 $\left|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=6$ をみたす動点 P はどのような図形を描くか．

平面 ABC と直線の交点

空間ベクトル
典型

問．右の図の直方体において，対角線 OF と平面 ABC の交点を P とする．OP : OF を求めよ．

ベクトル方程式 ～ 円の方程式 ～

平面ベクトル
典型

問．次のような円の方程式を求めよ．

(1) 中心が原点 O (0, 0) で，半径が 2 の円

(2) 中心が A (1, 5) で，点 B (2, 2) を通る円

(3) A (5, 0)，B (9, 4) を直径の両端とする円

空間における垂直条件

空間ベクトル
典型

問．$\vec{a} = (2,\ -1,\ 0)$，$\vec{b} = (6,\ -2,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが 3 である $\vec{p}$ を求めよ．

法線ベクトル ～2 直線のなす鋭角～

平面ベクトル
典型

問. 2 直線 $x + \sqrt{3}y - 5 = 0$, $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$ がなす鋭角 θ を求めよ.

法線ベクトル

問．点 A $(3,\ 4)$ を通り，$\vec{n}=(2,\ 1)$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

ベクトルの終点の存在範囲 Lv.2

平面ベクトル
典型

問．三角形 OAB において，次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s + t = 2$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s + t = \dfrac{1}{3}$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$

ベクトルの終点の存在範囲 Lv.1

平面ベクトル
典型

問．三角形 OAB において，次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $s+t=2$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $s+t=\dfrac{1}{3}$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$

3点を通る円の方程式

図形と方程式
典型

問. 3点 A$(2, 1)$, B$(6, 3)$, C$(-1, 2)$ がある.

(1) 3点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ.

(2) 三角形 ABC の外心の座標と, 外接円の半径を求めよ.

垂心の位置ベクトル

平面ベクトル
典型

問．$OA = 2\sqrt{2}$, $OB = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積が 2 である三角形 OAB の垂心 H に対して，$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ

内積を利用した図形証明

平面ベクトル
典型

問．三角形 ABC において，辺 BC の中点を M とするとき，等式

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\left(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2\right)$$

が成立することを示せ．

交点の位置ベクトル Lv.2

平面ベクトル
典型

問. 三角形 OAB において, 辺 OA を 2: 1 に内分する点を C, 辺 OB の中点を D とする.

(1) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

(2) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ.

交点の位置ベクトル Lv.1

平面ベクトル
典型

問. 三角形 OAB において, 辺 OA を 2: 1 に内分する点を C, 辺 OB の中点を D とする.

(1) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.

(2) 直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき, $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ.

3 点が一直線上にあることの証明

問．平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 2: 1 に内分する点を E，対角線 BD を 3: 1 に内分する点を F とする．3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ．

点が一致することの証明

平面ベクトル
典型

問．三角形 ABC において，辺 BC，CA，A
を 3：1 に内分する点を，それぞれ
P，Q，R，三角形 PQR の重心を G′，三
角形 ABC の重心を G とする．このとき，
G と G' は一致することを証明せよ．

解の配置 ～ 解と係数の関係 ～

複素数と方程式
典型

問．2 次方程式 $x^2-2(m-2)x-m+14=0$ が次のようなことなる 2 つの解を持つとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(1) ともに正の解 (2) ともに負の解

(3) 符号が異なる解　(4) ともに 1 より大きい

平面ベクトルの和の等式

平面ベクトル
典型

問．三角形ABCに対して，次の式を満たす点Pの位置を求めよ．

$$2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

ベクトルのなす角

平面ベクトル
典型

問. $\vec{a} = (7, -1)$ と 45° の角をなし, 大きさが 10 である $\vec{b}$ を求めよ.

2 直線の平行・垂直条件

図形と方程式
典型

問．2 直線 $\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ x + (a-1)\,y = 3 \end{cases}$

が次の条件を満たすとき，定数 a の値を求めよ．(1) 平行　(2) 垂直

ベクトルの内積計算 Lv.2

平面ベクトル
典型

問. $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 1$ で, $\vec{a} + \vec{b}$ と $2\vec{a} - 5\vec{b}$ が垂直であるとする.

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.

(2) 大きさ $\left|\vec{a} - 2\vec{b}\right|$ を求めよ.

2重解をもつ3次方程式

複素数と方程式
典型

問．3次方程式

$$x^3 + (a-4)x - 2a = 0$$

が2重解をもつとき，

実数 a の値を求めよ．

ベクトルの大きさの最小

平面ベクトル
典型

問. $\vec{a} = (3,\ 1)$, $\vec{b} = (1,\ 2)$ と実数 t に対して, $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$ の大きさ $|\vec{c}|$ の最小値を求めよ.

1 次不定方程式の整数解 ～ すべて ～

整数
典型

問．$29x + 42y = 4$ の整数解をすべて求めよ．

1 次不定方程式の整数解 〜1 組〜

整数
典型

問．$29x + 42y = 4$ の整数解を１組求めよ．

常に単調増加する３次関数

数Ⅱ微積
典型

問．x の３次関数

$$f(x) = x^3 + 3kx^2 - kx - 1$$

が常に単調増加するような定数 k の値の範囲を求めよ．

極値から係数決定

数Ⅱ微積
典型

問．関数

$$f(x) = x^3 + ax^2 - bx + c$$

が、$x = -1$ で極大値 5 をとり、$x = 1$ で極小となるとき、定数 a, b, c の値を求めよ．

n を含む数列の和

数B数列
典型

問．次の数列 $\{a_n\}$ の和 S を求めよ．

$$1\cdot(2n-1)\,,\ 3\cdot(2n-3)\,,\ 5\cdot(2n-5)\,,$$

$$\cdots\,,\ (2n-1)\cdot 1$$

数列の和の和

数B数列
典型

問．次の数列 $\{a_n\}$ の和 S を求めよ．

$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \cdots,\ 1+2+\cdots+n$$

等比数列の和の扱い

数B数列
典型

問．初項から第 10 項までの和が 6，初項から第 20 項までの和が 24 である等比数列 $\{a_n\}$ の，初項から第 30 項までの和 S を求めよ．