空間ベクトルの基礎

ベクトルの最大の強みは「次元に依らない表現ができる」という点です．空間ベクトルの重要な 6 つのテーマについて，その一番基本となる形の問題を並べました．

大橋

1 **直線に下ろした垂線の長さ**

空間内の 3 点 A(1, 1, 1)，B(0, 1, 2)，C(3, 3, 0) について，点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さ CH を求めよ．

2 **点の一致**

4 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) を頂点とする四面体において，△BCD の重心を $\mathrm{G_1}(\vec{g}_1)$ とし，線分 $\mathrm{AG_1}$ を 3 : 1 に内分する点を G($\vec{g}$) とする．

(1) G の位置ベクトル $\vec{g}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ．

(2) 4 つの頂点と対面の重心を結んだ線分は 1 点で交わることを示せ．

3 **等式を満たす点の位置**

四面体 ABCD の内部にある点 P が

$$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}+5\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$$

を満たすとき，四面体 BCDP，ACDP，ABDP，ABCP の体積比を求めよ．

4 **直線と平面の垂直条件**

1 辺の長さが a の正四面体 ABCD について，次の命題をそれぞれ示せ．

(1) 対辺 AB と CD は垂直である．

(2) 底面 △BCD の重心を G とすると，直線 AG は底面に垂直である．

5 **平面上と直線の交点**

平行六面体 OADB-CEGF において，辺 GD の中点を H とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．

(1) 直線 OH と平面 ABC の交点を L とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) 直線 OH と平面 AFC の交点を M とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

6 **四面体の体積**

空間内の 4 点 A(1, 1, 1)，B(0, 1, 2)，C(3, 3, 0)，D(2, 3, 4) について，次の各問いに答えよ．

(1) △ABC の面積を求めよ．

(2) 四面体 ABCD の体積を求めよ．

空間内の直線，平面，球面の扱い

空間内の直線，平面，球面の典型的なテーマを 6 つ挙げ，その基本となる問題を並べました． 大橋

1 **共通垂線**

座標空間で点 $(3,\ 4,\ 0)$ を通りベクトル $\overrightarrow{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を l，点 $(2,\ -1,\ 0)$ を通りベクトル $\overrightarrow{b}=(1,\ -2,\ 0)$ に平行な直線を m とする．点 P は直線 l 上を，点 Q は直線 m 上をそれぞれ勝手に動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

(2007 京大・文系)

2 **直線，平面のなす角**

(1) 平面 $\alpha : x-2y-z=0$ と平面 $\beta : x+y+2z=1$ のなす鋭角を求めよ．

(2) 直線 $l : \dfrac{1-x}{5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{4}$ と平面 $\alpha : 5x+4y-3z=12$ のなす鋭角を求めよ．

3 **点と平面の距離公式**

(1) 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ と直線 $l : ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられることを示せ． (2013 阪大・文系)

(2) 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $\alpha : ax+by+cz+d=0$ の距離 h は

$$h=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

で与えられることを示せ．

4 **平行六面体の体積**

空間内にの 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(2,\ -4,\ 2)$，$\mathrm{D}(0,\ 3,\ 4)$ に対して，AB，AC，AD を隣り合う 3 辺とする平行六面体 T がある．

(1) 平面 ABC の方程式を求めよ．

(2) 平行六面体 T の体積 V を求めよ．

5 **2 つの球の外接**

球面 $S_1 : (x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$ に $x>0$，$y>0$，$z>0$ の領域で外接し，3 つの座標平面に接する球面の中心と半径を求めよ．

6 **球面と平面の交円**

(1) 中心が点 $(a,\ 2,\ 1)$，半径が 5 の球面が，yz 平面と交わってできる円の半径が 3 であるという．a の値を求めよ．

(2) 球面 $T : x^2+y^2+z^2-10x-10z+25=0$ と平面 $\alpha : 2x-2y+z-6=0$ が交わってできる円の中心 H の座標と半径 r を求めよ．