Capítulo 1
Matrices

Uso de las matrices:

- Realizar cálculos de manera eficiente
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales (sels)
- Representar objetos abstractos como "transformaciones lineales", " cambios de bases", "formas cuadráticas", etc.

1.1. Definiciones

- Matriz A es un arreglo rectangular de escalares

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij} \right]$$

Elemento a_{ij}, ij-ésimo elemento

m renglones, n columnas   tamaño $m \times n$

•Matrices A y B son iguales (A=B) si son del mismo tamaño y los elementos correspondientes son iguales

1.2. Adición de matrices y multiplicación con escalares

Sean $A = \left[a_{ij} \right]$, $B = \left[b_{ij} \right]$ matrices del mismo tamaño

•Suma $A + B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

•Multiplicación por escalar $kA = k\left[a_{ij} \right]$

•Negativa de *A*, $-A = (-1)A$

•Resta $A - B = A + (-B)$

1.3. Multiplicación de Matrices

- Sean $A = \left[a_{ij} \right], \;\; B = \left[b_{ij} \right]$
- Número de columnas de *A* igual al número de renglones de *B* (e.g. *A* es *m p* x y *B* es *p* x *n*)
- *AB* es una matriz *m* x *n* con $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1p} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mp}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c_{11} & \cdots & c_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
 & c_{ij} & \\
\vdots & & \vdots \\
c_{m1} & \cdots & c_{mn}
\end{bmatrix}
$$

- *AB* no está definido si *A* es *m* x *p* y *B* es *q* x *n* y $p \neq q$

1.3. Multiplicación de Matrices

- Multiplicación no es conmutativa, i.e. en general, $AB \neq BA$
- Asociativa, $(AB)C=A(BC)$
- Distributiva por la derecha, $A(B+C)=AB+AC$
- Distributiva por la izquierda, $(B+C)A=BA+CA$
- Multiplicación por escalar conmuta, $k(AB)=(kA)B=AkB$

1.4. Matriz Transpuesta

- La transpuesta de A, A^T, se obtiene escribiendo las columnas de A como renglones.
- Si $A=[a_{ij}]$, tamaño $m \times n$, entonces $A^T=[b_{ij}]$, tamaño $n \times m$, donde $b_{ij}=a_{ji}$

•Algunas propiedades

- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(A^T)^T=A$
- $(kA)^T=kA^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$

1.5. Matriz Cuadrada

- Mismo número de renglones y columnas, n x n (orden n)
- Diagonal (o diagonal principal), conjunto de elementos con mismos índices, i.e. $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$
- Traza de A, $tr(A)$ es la suma de los elementos diagonales

Algunas propiedades:

Sean A, B matrices cuadradas

- $tr(A+B)= tr(A)+ tr(B)$
- $tr(kA)= k\, tr(A)$
- $tr(A^T)= tr(A)$
- $tr(AB)= tr(BA)$

1.6. Matriz Identidad (Unitaria)

- I o I_n : matriz cuadrada con unos en la diagonal
- $AI=IA=A$
- Si B es m x n, entonces $BI_n=I_mB=B$
- Función delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

$$\therefore \text{ Matriz Identidad } \quad I = \left[\delta_{ij} \right]$$

1.7. Matriz Invertible

- Definición

  Matriz cuadrada A es invertible (no singular), si existe matriz *B* (la inversa de *A*, A^{-1}) tal que $AB=BA=I$

•Teorema

Si *B* existe, entonces es única

•Demostración

Sean *B1*, *B2* matrices cuadradas que son inversas de *A*

Entonces $AB_1 = B_1A = I$ y $AB_2 = B_2A = I$

Entonces $B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$

$\therefore B_1 = B_2$

1.7. Matriz Invertible

- Algunas propiedades. A y B invertibles

$$AB \text{ es invertible y } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$\text{En general } (A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

Fórmula para obtener la Inversa de una Matriz de Orden 2

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Buscar 4 escalares x_1, x_2, y_1, y_2 tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo operaciones

$$\begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 &= 1 \\ ax_2 + by_2 &= 0 \\ cx_1 + dy_1 &= 0 \\ cx_2 + dy_2 &= 1 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones lineales

(capítulo 2)

Resolviendo para x_1, x_2, x_3 y x_4

$$x_1 = \frac{d}{ad - bc}; \quad x_2 = \frac{-b}{ad - bc}$$

$$y_1 = \frac{-c}{ad - bc}; \quad y_2 = \frac{a}{ad - bc}$$

$ad - bc$ determinante de A

- Teorema
  - $det(A)=0$ si y solo si A no tiene inversa

- Encontrar la inversa de una matriz de orden n es equivalente a encontrar la solución de un SEL de orden n

- Como encontrar estas soluciones de manera eficiente?
  - Respuesta: parte del material del capítulo 2

1.8. Algunas Matrices Especiales

Matriz cuadrada diagonal $D = \left(d_{ij}\right)$. Elementos no diagonales son cero

$$D = diag(d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn})$$

Matriz cuadrada triangular (superior) $A = \left(a_{ij}\right)$

Elementos por debajo de la diagonal son cero.

Esto es, $a_{ij} = 0$ para $i > j$

Algunas propiedades para $A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right),$ triangulares de orden n

1. $A+b$, kA, AB son triangulares con diagonales

$(a_{11} + b_{11}, \ldots, a_{nn} + b_{nn}), (ka_{11}, \ldots, ka_{nn}), (a_{11}b_{11}, \ldots, a_{nn}b_{nn})$ respectivamente

2. A es invertible si y solo si cada elemento diagonal $a_{ii} \neq 0$. Si A^{-1} existe, entonces es triangular

• Idem para matrices triangulares inferiores

1.8. Algunas Matrices Especiales

- Matriz Simétrica. $A=A^T$.

  Elementos simétricos con respecto a la diagonal son iguales ($a_{ij}=a_{ji}$)

•Matriz antisimétrica. $-A=A^T$.

Elementos simétricos con respecto a la diagonal son los complementos (negativos) ($a_{ij}=-a_{ji}$). Como $a_{ii}=-a_{ii}$, entonces $a_{ii}=0$

1.8. Algunas Matrices Especiales
Matrices Ortogonales

•Matriz cuadrada A es ortogonal si y solo si $A^T=A^{-1}$

Esto es, $AA^T=A^TA=I$

•Porqué ortogonal?

Sean $u_1=(a_1,a_2,a_3), u_2=(b_1,b_2,b_3)$, $u_3=(c_1,c_2,c_3)$ vectores que forman los renglones de A

Entonces $AA^T=I$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo operaciones

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 \quad \rightarrow u_1 \bullet u_1 = 1, \text{ paralelos}$$

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \quad \rightarrow u_1 \bullet u_2 = 0, \text{ ortogonales}$$

$$a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0$$

$$b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 \qquad c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$$

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \qquad a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0$$

$$b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0 \qquad b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0$$

i.e.

$$u_i \bullet u_j = 1 = \delta_{ij} \text{ si } i=j$$

$$u_i \bullet u_j = 0 \qquad \text{si } i \neq j$$

$\therefore$ u1, u2, u3 son vectores unitarios y ortogonales entre si

(conjunto ortonormal de vectores)

1) $AA^T = I = A^T A$

2) $AA^T \rightarrow$ renglones de A es conjunto ortonormal de vectores

3) $A^T A \rightarrow$ columnas de A es conjunto ortonormal de vectores

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. *A* es ortogonal
2. Renglones de *A* son un conjunto ortonormal
3. Columnas de *A* son un conjunto ortonormal

<u>Definición. Matriz Normal</u>

A es normal si conmuta con su transpuesta. Esto es $AA^T = A^T A$

<u>Teorema</u>

Si *A* es simétrica y ortogonal, entonces *A* es normal

Ejemplo matriz normal

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Normal?	si
Simétrica?	no (por inspección)
Ortogonal?	no $\quad A^T \neq A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|A| = ad - bc = 45$$

$$A^{-1} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$