Capítulo 2:
Sistemas de Ecuaciones Lineales

- En muchos de los problemas de álgebra lineal, es necesario resolver un sistema de ecuaciones lineales.
- Por lo tanto, es útil estudiar su estructura y propiedades.

2.1 Sistemas Lineales

- Forma estándar de una ecuación lineal en variables $x_1,\ x_2, \ldots\ x_n$ es

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

donde

$a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes

a_k es el coeficiente de x_k

b es el término constante.

- Una solución para la ecuación (1) es un vector en k^n

$u = (k_1,\ k_2, \ldots\ k_n)$ tal que

$x_1 = k_1\ ,\ x_2 = k_2\ , \ldots x_n = k_n$ y

$a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n = b$ es verdadero

Entonces se dice que u satisface a (1).

Sistema de Ecuaciones Lineales

- Un sistema de ecuaciones lineales es una lista de ecuaciones lineales con las mismas variables.

En particular, un sistema de *m* ecuaciones

$L_1,\ L_2,\ \ldots\ L_m$ en *n* variables $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$

se puede escribir en forma estándar:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad (2)$$

a_{ij} es el coeficiente de la variable x_j en la ecuación L_i

b_i es la constante de la ecuación L_i .

(2) se identifica como un sistema $m \times n$.

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
\qquad (2)
$$

- $m = n \longleftrightarrow$ el sistema es cuadrado.
- $b_i = 0$, $i = 1,\ldots m$ el sistema es homogéneo

- Solución (particular) de (2) es un vector en k^n que es solución a cada ecuación del sistema.
- Solución general del sistema: conjunto de todas las soluciones del sistema

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

- Se dice que (2) es consistente si tiene al menos una solución.
- Si el campo *k* es infinito entonces

$$
\text{Sistema}\begin{cases}
\text{inconsistente}\left\{\text{no solucion}\right. \\
\\
\text{consistente}\begin{cases}\text{una solucion} \\ \text{numero infinito de soluciones}\end{cases}
\end{cases}
$$

representación geométrica para sistemas de orden 2 en un par de secciones más.

Matrices asociadas al sistema (2)

$$M = [A, B]$$ donde B es el vector columna de constantes

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$ matriz aumentada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$ matriz de coeficientes

- M determina un sistema de ecuaciones lineales
  - cada renglón, una ecuación
  - cada columna, los coeficientes de la variable desconocida excepto columna B, que son las constantes del sistema

Ecuaciones Degeneradas

Una ecuación es degenerada si todos sus coeficientes son cero,

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b_n$$

Solución depende de b

Si $b \neq 0$, entonces ecn. no tiene solucion

Si $b = 0$, entonces cualquier vector $v = (k_1, \ldots, k_n) \in K^n$ es solucion

Extendiendo lo anterior a un sistema ℓ con una ecuación degenerada L con constante b

- Si $b \neq 0$, ℓ no tiene solucion
- Si $b = 0$, la ecuacion se puede eliminar del sistema.

2.2 Operaciones Elementales y Sistemas Equivalentes

Sea el sistema (2)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Multiplicamos cada ecuación i por una constante c_i y reacomodamos:

$$
\begin{aligned}
&(c_1a_{11} + c_2a_{21} + \ldots + c_ma_{m1})x_1 + \\
&(c_1a_{12} + c_2a_{22} + \ldots + c_ma_{m2})x_2 + \\
&(c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \ldots + c_ma_{mn})x_n = \\
&c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_mb_m
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

<u>Afirmación</u>

- Cualquier solución del sistema (2) es solución de la combinación lineal L (3)
- Sistema (2) es equivalente a sistema(3)

Corroborando la afirmación anterior

Supongamos que el vector

$u = \left(k_1, k_2, \cdots, k_n\right)$

es una solución de (2)

Entonces

$$a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \cdots + a_{in}k_n = b_i$$

para $i = 1 \ldots m$

Sustituyendo u en (3) izq.

$$(c_1a_{11} + c_2a_{21} + \ldots + c_ma_{m1})k_1 +$$
$$(c_1a_{12} + c_2a_{22} + \ldots + c_ma_{m2})k_2 +$$
$$(c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \ldots + c_ma_{mn})k_n$$

Reacomodando

$$c_1(a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1n}k_n)$$
$$+ c_2(a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{2n}k_n)$$
$$+ \ldots$$
$$+ c_m(\underbrace{a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \ldots + a_{mn}k_n}_{b_m})$$
$$= c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_mb_m$$

que es el lado derecho de (3)

$\therefore$ u es una solucion de (3)

Si lo que queremos es encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales,

entonces haces operaciones sobre las ecuaciones lineales

(i.e. encontrar combinaciones lineales)

(i.e. encontrar un sistema de ecuaciones equivalentes)

que nos hagan más fácil el encontrar la solución

Ejemplo

$$L_1: \quad x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5$$
$$L_2: \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$$
$$L_3: \quad x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3$$

Sistema 3×4

3 ecuaciones

4 incognitas

solucion particular (-8, 6, 1, 1)

De acuerdo al resultado anterior nosotros podemos:

- cambiar de lugar ecuaciones
- multiplicarlas por constantes
- sumarles a una ecuacion multiplos de otra

Todo lo anterior es encontrar combinaciones lineales de ecuaciones del sistema original por ejemplo:

$$\begin{array}{rl}
3L_1: & 3x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 9x_4 = 15 \\
-2L_2: & -4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -2 \\
4L_3: & \underline{4x_1 + 8x_2 - 20x_3 + 16x_4 = 12} \\
 & 3x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 29x_4 = 25
\end{array}$$

es (-8, 6, 1, 1) solucion

-24 + 30 - 10 + 29 = 25 O.K.

Si lo que queremos es encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, entonces haces operaciones sobre las ecuaciones lineales

(i.e. encontrar combinaciones lineales)

(i.e. encontrar un sistema de ecuaciones equivalentes)

que nos hagan más fácil el encontrar la solución

Técnicas mecanizadas (y automatizables) para encontrar la solución
Algoritmos de Gauss, Gauss-Jordan, Factorización LU y otros.

Pero antes de repasar esos algoritmos, formalizar lo anterior

Teorema

•Dos sistemas de ecuaciones lineales tienen las mismas soluciones si y solo si cada ecuación en un sistema es una combinación lineal de ecuaciones en el otro.

Demostración

Ver 4 filminas atrás

Operaciones Elementales

E1: Intercambiar 2 ecuaciones

$$"L_i \leftrightarrow L_j"$$

E2: Reemplazar una ecuación por un múltiplo de ella misma

$$"kL_i \to L_i"$$

E3: Reemplazar una ecuación por la suma de un múltiplo de otra ecuación y ella misma

$$"kL_i + L_j \to L_j"$$

Con frecuencia E2 y E3 se aplican juntos

E : Reemplazar L_j por la suma de kL_i y $k'L_j'$ $(k' \neq 0)$

$$"kL_i + k'L_j \to L_j"$$

2.3.- Sistemas Cuadrados de Orden 1 y 2

- Soluciones se pueden describir geométricamente de manera sencilla.
- Propiedades motivan el método de solución para el caso general que puede ser mecanizado y automatizado

2.3.- Sistemas Cuadrados de Orden 1 y 2

Ecuación lineal con una variable $ax = b$

Teorema

Sea ecuación $ax = b$

1) Si $a \neq 0$, entonces $x = b/a$ es una solución única de $ax = b$

2) Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $ax = b$ no tiene solución

3) Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces cualquier escalar k es una solución de $ax = b$.

Demostración parte 1)

Hipótesis: sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$

- Entonces escalar b/a existe
- Sustituyendo $x=b/a$ en $ax=b$ resulta que $a(b/a)=b$ ó $b=b$

- Por lo tanto, b/a es una solución.
- Como a y b están definidos, entonces b/a es único.

$\therefore$ b/a es solución única de $ax=b$

Demostración parte 2)

Hipótesis: sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a = 0$ y $b \neq 0$

- Para cualquier escalar k, $ak=0k=0$.
- Si $b \neq 0$ entonces $ak \neq b$
- Por lo tanto k no es una solución de $ax = b$

$\therefore$ Como k es cualquier escalar, entonces no existe solución.

Demostración parte 3)

Hipótesis: sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a = 0$ y $b = 0$

- Si $b = 0$, entonces $ak = 0 = b$
- Por lo tanto cualquier k es solución de $ax = b$

$\therefore$ Existen múltiples soluciones.

Sistemas de 2 ecuaciones con 2 incognitas

(soluciones se pueden dibujar en el plano $\mathbb{R}^2$)

Sea sistema de 2 ecuaciones no degeneradas con 2 incógnitas en forma estándar

$$A_1x + B_1y = C_1 \qquad (1)$$

$$A_2x + B_2y = C_2 \qquad (2)$$

donde $A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$,

El sistema puede tener

1. una sola solución
2. no solución
3. múltiples soluciones

Encontrar condiciones para lo anterior

Sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

$$A_1 x + B_1 y = \mathrm{C}_1$$
$$A_2 x + B_2 y = \mathrm{C}_2$$

$A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R},$

1) El sistema tiene una solución

De (1) y (2) despejando para x

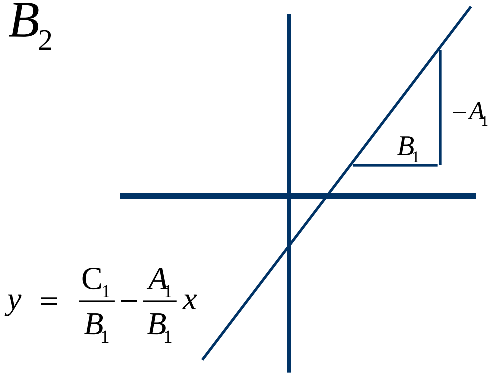
$$\underbrace{(B_2 A_1 - B_1 A_2)}_{\text{det orden 2}} x = C_1 B_2 - B_1 C_2$$

Mismo que caso anterior con ecuación de una variable

$$B_2 A_1 - B_1 A_2 \neq 0$$

$$B_2 A_1 \neq B_1 A_2$$

$$\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}$$



2) Sistema sin solución

Como en caso de una variable

$$B_2A_1 - B_1A_2 = 0$$

$$C_1B_2 - B_1C_2 \neq 0$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \qquad \frac{C_1}{B_1} \neq \frac{C_2}{B_2}$$

Líneas paralelas i.e. misma pendiente pero diferente intercepto en *y*.

3) Sistemas con múltiples soluciones

$$B_2A_1 - B_1A_2 = 0$$

$$C_1B_2 - B_1C_2 = 0$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \qquad \frac{C_1}{B_1} = \frac{C_2}{B_2} \qquad \frac{B_2}{B_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{C_2}{C_1}$$

Líneas con misma pendiente y mismo intercepto en *y*.

∴ Sistema tiene una solución si el determinante de sus coeficientes es diferente de cero. (Cap. 3: Determinantes)

De hecho, esto es cierto para cualquier sistema cuadrado.

- Para sistema de 2 ecuaciones no degeneradas en dos incógnitas, sabemos
  - encontrar sistemas equivalentes (que faciliten solución)
  - condiciones para determinar existencia de una solución

A continuación, sistematización de la obtención de la solución de un sel con dos ecuaciones no degeneradas en dos incógnitas y con una sola solución.

Algoritmo

Parte A. Eliminación hacia delante

1. Multiplicar cada ecuación por una constante de tal forma que los coeficientes resultantes de una de las incógnitas son mutuamente negativas.
2. Sumar ambas ecuaciones para obtener una nueva ecuación *L* con una sola incógnita.
3. Determinar si el sistema tiene solución. No $\rightarrow$ fin.

   Si $\rightarrow$ ejecutar parte B.

Parte B. Sustitución hacia atrás

1. Resolver para la incógnita en *L*.
2. Sustituir valor en una de las ecuaciones originales.
3. Resolver para la otra incógnita

Ejemplo

$$L_1: \quad x - 3y = 4$$
$$L_2: \quad \text{-}2x + 6y = 5$$

<u>Parte A. Eliminación hacia delante</u>

Paso 1. Multiplicar L_1 por 2:

Paso 2. Sumar L_1 a L_2 para obtener L:

$$\begin{array}{ll} L_1: & 2x - 6y = 8 \\ L_2: & \underline{\text{-}2x + 6y = 5} \\ L: & 0x + 0y = 13 \\ & b = 13 \end{array}$$

Paso 3. El sistema no tiene solución porque $b=13$

2.4 Sistemas triangulares y escalonados

Considerar 2 tipos simples de sistemas de ecuaciones lineales: triangulares y escalonados (que es más general).

Forma Triangular

$$
\begin{aligned}
L_1 &: \quad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 9 \\
L_2 &: \quad 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\
L_3 &: \quad 7x_3 - x_4 = 3 \\
L_4 &: \quad 2x_4 = 8
\end{aligned}
$$

Este sistema triangular (sistema cuadrado) tiene una solución.

Obtención con Parte B "Sustitución hacia atrás" de nuestro algoritmo.

1. Resolver L_4 para x_4 , x_4=4
2. Sustituir x_4 en L_3 y resolver para x_3, x_3=1

etc.,

x_2=-2 , x_1=3.

Forma escalonada, pivotes y variables libres

Sistema en forma escalonada

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 7 \\
x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 5 \\
3x_4 - 9x_5 &= 6
\end{aligned}
$$

- No ecuación degenerada.
- Incógnitas x_1, x_3, x_4 variables pivote

  x_2, x_5 variables libres

Teorema:

Sea un sistema en forma escalonada con r ecuaciones y n incógnitas

1) Para $r=n$ (forma triangular), el sistema tiene una sola solución.

2) Para $r<n$ (más incógnitas que ecuaciones), podemos asignar valores arbitrarios a n-r variables libres y resolver el sistema resultante para r variables pivote.

3. Si $r<n$ y el campo K es infinito entonces podemos decir que el sistema tiene un número infinito de soluciones, ya que cada una de las n-r variables libres puede tomar cualquier valor.

Otras formas de describir esta solución: "paramétrica" o "en variables libres".

Paramétrica

Asignar valores arbitrarios llamados parámetros, a las variables libres. Luego usar sustitución hacia atrás para obtener valores de variables pivote.

ejemplo en sistemas anteriores: $x_2=a,\ x_5=b$

en L_3: $3x_4 - 9b = 6$ $\quad\therefore\ x_4 = 2+3b$

en L_2: $x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 5$

$x_3 + 2(2+3b) + 2b = 5$ $\quad\therefore\ x_3 = 1-8b$

en L_1: $2x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 7$

$2x_1 + 6a - (1-8b) + 4(2+3b) - 2b = 7$ $\quad\therefore\ x_1 = 4-3a-9b$

$$\therefore\ x_1 = 4-3a-9b,\quad x_2 = a,\quad x_3 = 1-8b,\quad x_4 = 2+3b,\quad x_5 = b$$

donde a y b son numeros arbitrarios.

En variables libres

Utilizar sustitución hacia atrás para resolver para las variables pivote en términos de las variables libres.

2.5. Eliminación Gaussiana

Abstrayendo el algoritmo de sección 2.4 para la solución de un sistema de 2x2

Parte A: Eliminación hacia adelante

Reducción paso a paso del sistema hasta encontrar

- sistema equivalente más sencillo en forma triangular o escalonada
- ecuación degenerada (i.e. no solución)

Parte B: Sustitución hacia atrás

Sustitución paso a paso para encontrar solución del sistema

(esta es la que vimos en Sección 2.4, para un sistema 2x2)

Generalizando algoritmo…

Sea un sistema *mxn* de ecuaciones lineales.

<u>Paso A. Eliminación hacia adelante</u>

1. Encontrar la primera incógnita del sistema con coeficiente diferente de cero (x_1)
2. Arreglar el sistema tal que $a_{11} \neq 0$.
3. Hacer para *j=1* hasta *n (esto es, repetir par cada subsistema m*x*(n-j+1))*

   Usar a_{j1} como pivote para eliminar x_j de todas las ecuaciones excepto en ecuación *j*. Esto es, para $i>1$

   3.1 Hacer $f = -a_{i1}/a_{11}$

   3.2 Reemplazar L_i por fL_1+L_i

   ó L_i por $-a_{i1}L_1+a_{11}L_i$ (para evitar fracciones)

3.3. Analizar cada ecuación resultante

3.3.1 Si $L: \quad 0x_1 + \ldots + 0x_n = b \quad$ y $\quad b \neq 0$

entonces el sistema es inconsistente y por lo tanto no tiene solución.

Terminar

3.3.2 Si $L: \quad 0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$ ó si L es múltiplo de otra ecuación

entonces borrar ecuación del sistema.

Punto 3 es repetir paso de eliminación con cada subsistema formado eliminando la ecuación superior.

Resultado: sistema escalonado o triangular o ecuación degenerada sin solución indicando sistema inconsistente.

Paso A indica si el sistema tiene solucion

$\therefore$ Paso B no es necesario aplicarlo si no hay solucion.

<u>Paso B</u>: idem que en caso anterior

Ejemplo de algoritmo de Gauss

$$L_1: \quad x-3y-2z=6$$
$$L_2: \quad 2x-4y-3z=8$$
$$L_3: \quad -3x+6y+8z=-5$$

Parte A

coeficiente $a_{11}=1$

- Reemplazar L_2 por $-2L_1+L_2$
- Reemplazar L_3 por $3L_1+L_3$

$$\begin{array}{ll} (-2)L_1: & -2x+6y+4z=-12 \\ +\ L_2: & \underline{2x-4y-3z=\ 8} \\ & 2y+\ z=-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (3)L_1: & 3x-9y-6z=18 \\ +\ L_3: & \underline{-3x+6y+8z=-5} \\ & -3y+2z=13 \end{array}$$

$$L_1: \quad x-3y-2z=6$$
$$L_2: \quad 2y+\ z=-4$$
$$L_3: \quad -3y+2z=13$$

L_2, L_3 subsistema 2x2

coeficiente $a_{22}=2$

- Reemplazar L_3 por $3L_2+2L_3$

$$\begin{array}{ll} 3L_2: & 6y+3z=-12 \\ 2\ L_3: & \underline{-6y+4z=\ 26} \\ & 7z=14 \end{array}$$

Fin parte A. Sistema en forma triangular

$$L_1: \quad x-3y-2z=6$$
$$L_2: \quad 2y+\ z=-4$$
$$L_3: \quad 7z=14$$

$$
\begin{aligned}
L_1 :&\quad x - 3y - 2z = 6\\
L_2 :&\quad 2y + z = -4\\
L_3 :&\quad 7z = 14
\end{aligned}
$$

Parte B. Sustitución hacia atrás.

1. Resolver para z en L_3. $z=2$
2. Sustituir $z=2$ en L_2 y resolver para y. $y=-3$
3. Sustituir $y=-3$, $z=2$ en L_1 y resolver para x. $x=1$

Solución $u=(1, -3, 2)$

2.6.- Representación matricial de la eliminación gaussiana

Si son más de 4 ecuaciones es mejor emplear la representación matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada

1. Elemento lider no cero en un renglón (pivote) es el primer elemento en dicho renglón.

2. Los renglones cero, si existen, se encuentran al fondo de la matriz

3. Todo elemento lider no cero (pivote) en un renglón se encuentra a la derecha del elemento lider del renglón precedente.

Esto es, $A=(a_{ij})$ es una matriz escalonada si existen elementos no cero

$$\underbrace{a_{1j_1},\ a_{2j_2},\ a_{3j_3},\ \ldots,\ a_{rj_r}}_{\text{pivotes de la matriz escalar}} \quad , \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_r$$

Con la siguiente propiedad

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} i \le r\ ,\ \ j < j_i & \text{(parte triangular inferior con ceros)} \\ i > r & \text{(renglones de puros ceros)} \end{cases}$$

En el ejemplo anterior:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a_{1j_1} = 2\ ,\ a_{2j_2} = 3\ ,\ a_{3j_3} = 5\ ,\ r = 3$$

Forma canónica en renglones

Este tipo de matriz hace más fácil encontrar la solución para un sistema de ecuaciones lineales

Matriz canónica es una matriz escalonada con las siguientes propiedades:

4) Cada pivote es igual a 1.

5) El pivote es el único elemento diferente de cero en esa columna.

En otras palabras,

- debe haber ceros abajo de los pivotes (matriz escalonada)
- cada pivote es igual a uno
- debe haber ceros arriba de los pivotes } matriz canonica en renglones

Ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ forma escalonada, no es canonica (no cumple 5)

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forma escalonada y canónica

Operaciones elementales en renglones

Sea A, matriz con renglones R_1, R_2, …, R_m las siguientes son operaciones elementales:

$[E_1]$ Intercambio de renglones R_i y R_j, $R_i \leftrightarrow R_j$

$[E_2]$ Escalamiento de renglon $kR_i \rightarrow R_i$ donde $k \neq 0$

$[E_3]$ Adicion de renglones. Reemplazar R_j por la suma de un multiplo kR_i de renglon R_i y ella misma, $kR_i + R_j \rightarrow R_j$

Para evitar la aparición de fracciones (cuando todos los escalares que manejamos son enteros) se puede aplicar E_2 y E_3 en un solo paso.

Esto es

[E] Reemplazar R_j por la suma de un múltiplo de kR_i del renglón R_i y un múltiplo diferente de cero $k'R_j$.

"$kR_i + k'R_j \rightarrow R_j$"

Equivalencia por renglones.

A, B matrices son equivalentes por renglones (A ~ B) cuando

B se puede obtener a partir de A por medio de la aplicación de una secuencia de operaciones elementales.

Intuitivamente, si A ~ B entonces B ~ A porque toda operación elemental tiene su inversa

Por ejemplo: inversa de reemplazar R_j por $kR_j + k'R_i \quad (k \neq 0)$

$\longrightarrow$ regresamos a R_j original primero restando $k'R_i$

luego dividiendo entre $1/k$

También A ~ A para toda A

De hecho ~ es una relación de equivalencia

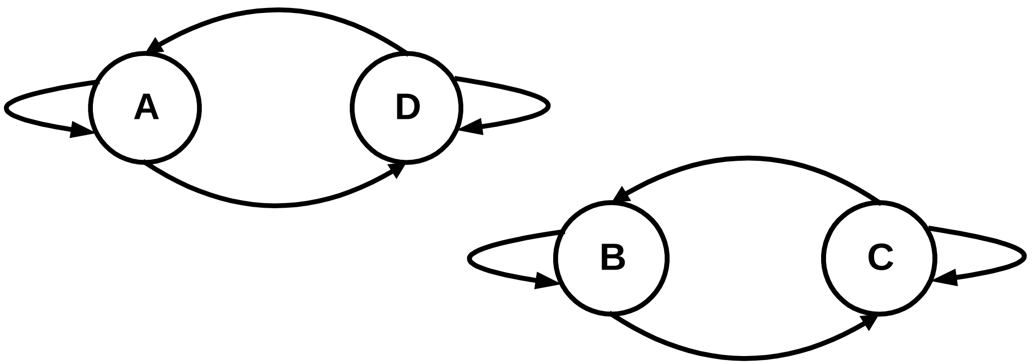
- Reflexiva: A ~ A
- Simétrica: Si A ~ B, entonces B ~ A
- Transitiva: Si A ~ B y B ~ C entonces A ~ C

Por ejemplo:

$$X = \{A,\ B,\ C,\ D\}$$

$$R = \{(A,A),\ (B,B),\ (C,C),\ (D,D),\ (A,D),\ (B,C)\}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



A continuación, 2 algoritmos

1) Algoritmo para transformar matriz A a forma escalonada
2) Algoritmo para transformar forma escalonada a canónica por renglones.

Mismos algoritmos vistos anteriormente pero con lenguaje de matrices.

Algoritmo 1. Eliminación hacia adelante

(pone ceros abajo de cada pivote, trabajando de arriba hacia abajo)

Paso 1. Encontrar primer columna con elemento no cero, sea j_1 esta columna.

Paso 2. Arreglar (intercambiar) renglones para que el elemento no cero aparezca en el primer renglón de la columna j_1. Esto es, hacer $a_{1j_1} \neq 0.$

Paso 3. Utilizar a_{1j_1} como pivote para obtener ceros debajo de a_{1j_1}

Esto es, para $i > 1$,

hacer $m = \dfrac{-a_{ij_1}}{a_{1j_1}}$

reemplazar R_i por mR_1+R_i

alternativamente R_i por $-a_{ij_1}R_1 + a_{1j_1}R_i$ (si son enteros, para no dejar fracciones)

Paso 4. Repetir pasos 1 a 3 con la submatriz obtenida al eliminar el renglón procesado. Hacer $k > 1$ y utilizar j_k

Terminar cuando no existan más renglones y r, número de renglones no cero en la matriz escalonada.

Ojo: este algoritmo no esta pensado para implementación

Algoritmo 2. Sustitución hacia atrás

(poner ceros arriba de todos los pivotes en matriz escalonada)

Paso 1. Hacer pivotes en R_j igual a 1 (i. e. multiplicar renglon R_j por $\frac{1}{a_{rj_r}}$

Paso 2.

Utilizar $a_{rj_r} = 1$ para obtener ceros arriba del pivote. Hacer para $i = r-1,\ r-2,\ \ldots,\ 1$

* m=-a_{ij_r}

* Reemplazar R_i por $mR_r + R_i$

Paso 3. Repetir paso 1 y 2 para renglones $R_{r-1}, \ldots, R_2$

Paso 4. Hacer pivote en R_1 igual a 1.

Algoritmo alternativo, trabajar por renglones en vez de columnas

Resolución por renglones es lo que normalmente hacemos cuando resolvemos manualmente un sistema de ecuaciones lineales. i.e. vamos resolviendo para cada una de las incógnitas.

Algoritmo Gauss-Jordan: Pone ceros arriba y abajo de los pivotes a medida que avanza en las filas.

Más facil de entender.
Menos eficiente.

Ejemplo:

Algoritmo 1. Eliminación hacia adelante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & -6 & 9 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ forma escalonada

a_{11}=1 como pivote

a_{23}=2 como pivote

Operaciones R_2 por $-2R_1 + R_2$

R_3 por $-3R_1 + R_3$

R_3 por $\frac{-3}{2}R_2 + R_3$

Algoritmo 2. Sustitución hacia atrás

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ forma canonica por rengl.

Hacer pivote $a_{35}=1$

Reemplazar

R_2 por $-6R_3+R_2$

R_1 por $-2R_3+R_1$

Hacer pivote $a_{23}=1$

y reemplazar R_1 por $3R_2+R_1$

2.7 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

- Para resolver un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial trabajar con la matriz aumentada.

Ejemplo (sistema con múltiples soluciones)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 5\\
2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 3\\
3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

Algoritmo 1. Eliminación hacia adelante

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3\\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7\\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{escalonada}
$$

renglon no aporta a la solucion

$\therefore$ eliminar

Algoritmo 2. Eliminación hacia atrás

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{canonica por renglones}$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 - 10x_4 = -9$$

$$x_3 - 7x_4 = -7$$

tomando variables basicas $(x_1,\ x_3)$

$$x_1 = -x_2 + 10x_4 - 9$$

$$x_3 = 7x_4 - 7 \qquad\qquad x_2,\ \ x_4 \ \text{ variables libres}$$

Otro ejemplo (sistema sin solución)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\
2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\
5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 &= 5
\end{aligned}
$$

Algoritmo 1. Eliminación hacia adelante

$$
M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{pmatrix} \quad a_{11} \text{ pivote}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad a_{22} \text{ pivote}
$$

$\therefore$ no tiene solución.

2.8. Condiciones de existencia y unicidad de soluciones en un sistema de ecuaciones lineales en representaciones matriciales usando noción de rango.

(con matrices, demostraciones de estos teoremas se hacen sencillos)

•Definición: Rango de una matriz *A*

- Dimensión del espacio de columnas de la matriz *A*
- # de vectores de una base del subespacio de las columnas de *A*
- # de columnas pivote de *A*

Teorema

Sea un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas y matriz aumentada $M=[A,B]$:

1. El sistema tiene solución si y solo si rango (A) = rango (M)

2. El sistema tiene solución única si y solo si rango (A) = rango (M) = n

Si borramos el vector columna B, se obtiene (la forma escalonada o canónica de) A

Demostración

Sea $M = [A, B]$ en forma escalonada o canónica

→ Hipótesis: el sistema de ecuaciones lineales tiene solución.

- Entonces M no tiene renglones de la forma (0, 0, 0, …, 0, b) donde $b \neq 0$
- Si esto fuera el caso, b sería un pivote de M y por lo tanto $r(M)>r(A)$
- Como no es el caso, y como A es M sin B entonces A y M tienen los mismos pivotes.

Por lo tanto $r(M) = r(A)$

← Hipótesis: $r(M) = r(A)$

- Como A es M sin B entonces A y M tienen los mismos pivotes
- Entonces no ecuación de la forma (0, 0, 0, 0, b) con $b \neq 0$

Por lo tanto, el sistema tiene solución

Prueba de 2

$\longrightarrow$ Hipótesis: el sistema tiene solución única

- Entonces la forma escalonada no tiene variables libres

- Entonces existe un pivote para cada variable

Por lo tanto rango *(A)* = *n* = rango *(B)*

$\longleftarrow$ idem.

2.9 Representación general de un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial

$$\text{matriz de coeficientes } \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{o } AX = B \text{ o } Ax = b$$

$\uparrow$ $\nwarrow$ vector columna de constantes

vector columna $\uparrow$ de incognitas

Representación conveniente para explorar propiedades del sistema. Por ejemplo:

Teorema. Sea el sistema $Ax=B$. Si $k \in K$ campo infinito, entonces $Ax = B$ tiene

a) número infinito de soluciones

b) una solución única

c) no solución

Demostración de existencia de infinitas soluciones

Idea: Encontrar una manera de representar múltiples soluciones del sistema de ecuaciones lineales.

Sean u y v soluciones distintas del sistema $Ax=B$ (i.e. $Au=B$ y $Av=B$)

y sea $k \in \mathbb{R}$ tal que $u+k(u-v)$ representa diferentes vectores para diferentes valores de k.

Suponer $u+k_1(u-v)=u+k_2(u-v)$ i.e. iguales

Esto es $k_1(u-v)=k_2(u-v)$ o

$$k_1(u-v)-k_2(u-v)=0$$

$$(k_1-k_2)(u-v)=0$$

Como $u-v \neq 0$

Entonces $k_1-k_2=0$

Entonces $k_1=k_2$

$\therefore$ si $k_1 \neq k_2$ con u y v diferentes, efectivamente $u+k_1(u-v_1) \neq u+k_2(u-v)$

Ahora

$$A(u+k(u-v))=$$

$$=Au-kA(u-v)$$

$$=B-k(B-B)$$

$$=B$$

$\therefore\quad u+k(u-v)$ solucion para $k\in\mathbb{R}$

como todos los k son distintos

entonces un numero infinito de soluciones.

Otro ejemplo

Teorema. Un sistema cuadrado $AX=B$ de ecuaciones lineales tiene una solución única si y solo si A es invertible. La solución es $A^{-1}B$

Demostración

Hipótesis: A es invertible

Proponer solución $x=v$ tal que $Av=B$

Entonces $v = Iv$

$$=(A^{-1}A)v$$

$$=A^{-1}(Av)$$

$$=A^{-1}B$$

$$\therefore \upsilon \text{ es solución de } Ax = B$$

Ojo, este teorema no nos sirve para encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales.

Calcular la inversa es costoso computacionalmente

Tarea: Hacer la demostración para el otro lado

Ejercicio

Determinar existencia y unicidad de soluciones de

$$\begin{aligned}
3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5\\
3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9\\
3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15
\end{aligned}$$

Solución. Forma escalonada de matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15\\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

•No existe ninguna ecuación degenerada, por lo tanto sistema es consistente (existe al menos una solución)

•Existen variables libres, por lo tanto existen soluciones múltiples

•Variables libres x_3 y x_4