Capítulo 3
Determinantes

Determinantes y uso de los determinantes:

- Determinantes y sus propiedades
- Determinantes e inversas
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales (sels), regla de Cramer
- Aplicaciones del determinante

3.1 Introducción a los determinantes

- Hipótesis: Todas las matrices consideradas son cuadradas, i.e. n x n
- A cada matriz cuadrada corresponde un **número** llamado **determinante de A**, denotado por **det A** o $|A|$

Definición 1: $A = [a_{11}] \quad \rightarrow \quad \det A = |A| = a_{11}$ (1)

Definición 2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (2)

Definición 3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Ejemplos:

Ejemplo 1.- $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ de (2) se tiene que

$$\det A = |A| = (2)(-4) - (5)(3) = -8 - 15 = -23$$

Ejemplo 2.- $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 \\ 2 & 6 & 7 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ de (3) se tiene que

$$\det A = |A| = 3\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (-9)\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 3\left[(6)(1) - (7)(8)\right] - 8\left[(2)(1) - (7)(-4)\right] - 9\left[(2)(8) - (6)(-4)\right]$$

$$= 3(-50) - 8(30) - 9(40) = -150 - 240 - 360 = -750$$

Definición 4 (Menor): Sea A una matriz de n x n y sea M_{ij} la matriz de $(n-1)$ x $(n-1)$ obtenida a partir de A, al eliminar el $i-$ésimo renglón y la $j-$ésima columna de A. M_{ij} es el $ij-$ésimo menor de A.

Ejemplo 3: $A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 \\ 2 & 6 & 7 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ obtener M_{13} y M_{32}

$$M_{13}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M_{32}=\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Observación:

- De la ecuación (3)

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Por lo tanto usando la definición de los menores se tiene que

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} |M_{11}| - a_{12} |M_{12}| + a_{13} |M_{13}| \qquad (4)$$

Definición 5 (Cofactor): Sea A una matriz de n x n.

El $ij-$ésimo cofactor de A, denotado por A_{ij}, es

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right| \qquad (5)$$

con M_{ij} el $ij-$ésimo menor de A.

Nota: $(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$

Ejemplo 4: $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 \\ 2 & 6 & 7 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ obtener A_{13} y A_{32}

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = (1)\left[(2)(8)-(6)(-4)\right] = 40$$

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\left[(3)(7)-(-9)(2)\right] = -39$$

Observación:

1.- La asignación de signo debida a $(-1)^{i+j}$ asemeja a un tablero de ajedrez

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

2.- De (4) y considerando la definición (5) se tiene que

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad (6)$$

Definición 6 (Determinante de n x n): Sea A una matriz de n x n. Entonces el determinante $\det A = |A|$ esta dado por

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \qquad (7)$$

La ec. (7) se conoce como "desarrollo por cofactores" según el primer renglón

Ejemplo 5.- $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ de (7) se tiene que

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (5)(-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\left[(2)(4) - (3)(2)\right] - 5\left[(4)(4) - (3)(-1)\right] + 2\left[(4)(2) - (2)(-1)\right] = -69$$

Ejemplo 6.- $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ de (7) se tiene que

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} + (0)(-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[(8)(5)-(-1)(-7)\right] = 66$$

Ejemplo 7.- $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ de (7) se tiene que

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\left[(0)(-2)-(0)(4)\right] + \left[(1)(-2)-(0)(2)\right] + 5\left[(1)(4)-(0)(2)\right] = 18$$

Observación:

Considere:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{(7)} \det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

por lo que se tiene que

$$\begin{aligned}
\det A = |A| &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\left[a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right] - a_{12}\left[a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right] + a_{13}\left[a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right] \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{31}\left[a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right] - a_{32}\left[a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}\right] + a_{33}\left[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right] \\
&= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}
\end{aligned}$$

Teorema 1 (Determinante de n x n): Sea A una matriz de n x n. Entonces el determinante $\det A = |A|$ esta dado por

$$\det A = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (8)$$

para $i = 1, \ldots, n$

Más aún:

$$\det A = |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad (9)$$

Ejemplo 8.- Considere la matriz del ejemplo 7; esto es

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

donde se obtuvo que $\det A = |A| = 18$

Considerando el desarrollo por el segundo renglón se obtiene que

$$\det A = |A| = (1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}A_{22} + 0(-1)^{2+3}A_{23}$$

$$= (-1)\left[(-1)(-2)-(5)(4)\right] = -1(-18) = 18$$

Definición 7 (matrices triangulares): Sea A una matriz de n x n dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se dice que A es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$

Se dice que A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$

Se dice que A es diagonal si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$

Ejemplo 9.-

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 2: Sea A una matriz de n x n triangular superior o inferior, entonces

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (10)$$

Prueba: Sea A la matrix triangular inferior dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{B} + \sum_{k=2}^{n} 0A_{1k}$$

$$= a_{11}\left\{ a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{k=2}^{n-1} 0B_{1k} \right\} = \cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

3.2 Propiedades de los determinantes

P1 : Si cualquier renglón o columna de A es el vector cero, entonces $\det A = |A| = 0$

Prueba: Desarrollando el determinante según el $i-$ésimo renglón correspondiente al vector cero, de (8) se tiene que

$$\det A = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

Ejemplo 10.- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, determinar $\det A$

$$\det A = |A| = 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

P2 : Si el $i-$ésimo renglón o la $j-$ésima columna de A se multiplican por una constante c, entonces el determinante de A, $\det A$, se multiplica por c, i.e.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces $\det B = c \det A$

Prueba: Desarrollando el determinante según el $i-$ésimo renglón correspondiente al multiplicado por c, se obtiene que

$$\begin{aligned} \det B &= ca_{i1}A_{i1} + ca_{i2}A_{i2} + \ldots + ca_{in}A_{in} \\ &= c\left[a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}\right] = c \det A \end{aligned}$$

Ejemplo 11.- Sean $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 12 & 4 & 16\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$,

determinar $\det A$ y $\det B$

$$\det A=|A|=1\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}+(-1)(-1)\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=16$$

$$\det B=|B|=1\begin{vmatrix}4 & 16\\ -2 & 5\end{vmatrix}+(-1)(-1)\begin{vmatrix}12 & 16\\ 0 & 5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}12 & 4\\ 0 & -2\end{vmatrix}=64$$

$$\therefore \qquad \det B=4\det A$$

P3 : Sean A, B, C matrices de n x n, tal que son idénticas excepto por la $j-$ésima columna, y la $j-$ésima columna de C es la suma de las $j-$ésimas columnas de A y B, i.e.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} + \alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} + \alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} + \alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces $\det C = \det A + \det B$

Prueba: Desarrollando el determinante según la $j-$ésima columna, de (9) se obtiene que

$$\det C = \left(a_{1j} + \alpha_{1j}\right) A_{1j} + \left(a_{2j} + \alpha_{2j}\right) A_{2j} + \ldots + \left(a_{nj} + \alpha_{nj}\right) A_{nj}$$

$$= \left\{a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj}\right\} + \left\{\alpha_{1j} A_{1j} + \alpha_{2j} A_{2j} + \ldots + \alpha_{nj} A_{nj}\right\}$$

$$= \det A + \det B$$

Ejemplo 12.- Sean A, B y C las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

determinar $\det A$, $\det B$ y $\det C$

$$\det A = \left|A\right| = 1(13) + 1(15) + 2(-6) = 16$$

$$\det B = \left|B\right| = 1(-6) + 6(15) + 2(12) = 108$$

$$\det C = \left|C\right| = 1(7) + 7(15) + 2(6) = 124 = \det A + \det B$$

P4 : Sea B la matriz obtenida a partir de A por intercambio de dos renglones o columnas, entonces

$$\det B = -\det A$$

Prueba: Intercambiar dos renglones adyacentes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

desarrollando para el i-ésimo renglón de A y el j-ésimo renglón de B se obtiene que

Prueba (continuación):

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
$$\det B = a_{i1}B_{i+1,1} + a_{i2}A_{i+1,2} + \ldots + a_{in}B_{i+1,n}$$

pero: $B_{i+1,j} = (-1)^{i+1+j}\left|M_{ij}\right| = -(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right| = -A_{ij}$

por lo tanto: $\det B = -\det A$

En general el intercambio de renglones del $i-$ésimo al $j-$ésimo requiere $(j-i)+(j-i-1) = 2j-2i-1$ intercambios, el cual es impar. Por lo tanto el $\det A$ se multiplica por -1 un número impar de veces.

Ejemplo 13.- Sean A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinar $\det A$, $\det B$

$$\det A = |A| = 1(13) + 1(15) + 2(-6) = 16$$

$$\det B = |B| = 2(2) + 5(-4) = -16$$

$$\therefore \qquad \det B = -\det A$$

P5 : Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces

$$\det A = 0$$

Prueba: Supongamos que $i-$ésimo y el $j-$ésimo renglón de A son iguales. Si intercambiamos estos dos renglones y llamamos B a la nueva matriz, tenemos que por la propiedad 4

$$\det B = -\det A$$

Pero puesto que ambos renglones son iguales, se tiene que $B = A$, por lo tanto $\det B = \det A.$

Lo anterior implicaria una contradicción a menos que

$$\det A = 0$$

Ejemplo 14.- Sea A la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinar $\det A$

$$\det A=|A|=1(17)+1(7)+2(-12)=24-24=0$$

Ejemplo 15.- Sea A la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar $\det A$

$$\det A=|A|=3(-7)+4(0)+3(7)=-21+21=0$$

P6 : Si un renglón (columna) de A es un múltiplo constante de otro renglón (columna), entonces

$$\det A = 0$$

Prueba: Sigue de las propiedades P2 y P5.

Ejemplo 16.- Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$

i.e. $\mathrm{A}_3 = -2A_1$

determinar $\det A$

$$\det A = |A| = 2(-70-12)+3(-10+8)+5(6+28) = -164-6+170 = 0$$

P7 : Si un múltiplo de un renglón (columna) de A se suma a otro renglón (columna) de A, el determinante $\det A$ no cambia.

Prueba: Sigue de las propiedades P3 y P6.

Ejemplo 17.- Sean A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 24 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

i.e. $B_2 = A_2 + 4A_3$

determinar $\det A$ y $\det B$

$$\det A = |A| = 1(13) + 1(15) + 2(-6) = 16$$

$$\det B = |B| = 1(-35+48) + 1(15) + 2(-6) = 1(13) + 1(15) + 2(-6) = 16$$

Teorema 3: Sea A una matriz de n x n, entonces si $i \neq j$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad (11)$$

Ejemplo 18.- Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

determinar $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$ para $i = 1$, $j = 2$

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left[(-1)(5) - (2)(-2)\right] + 1\left[(1)(5) - (2)(0)\right] + 2\left[(1)(-2) - (-1)(0)\right]$$

$$= 1\left[-5 + 4\right] + 1\left[5\right] + 2\left[-2\right]$$

$$= -1 + 5 - 4 = 0$$

Teorema 4: Sea A una matriz de n x n, entonces

$$\det A = \det A^T \qquad (12)$$

Ejemplo 19.- Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

determinar $\det A$ y $\det A^T$

$$\det A = |A| = 1(13) + 1(15) + 2(-6) = 16$$

$$\det A^T = |A^T| = 1(13) - 3(-1) + 0(-6) = 13 + 3 = 16$$

Teorema 5: Sean A y B matrices de n x n, entonces

$$\det AB = \det A \det B \qquad (13)$$

Ejemplo 20.- Sean A, B y C las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = AB = \begin{pmatrix} -1 & 13 & 4 \\ 11 & 43 & 6 \\ -11 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

determinar $\det A$, $\det B$ y $\det C$

$$\det A = |A| = 1(13) + 1(15) + 2(-6) = 16$$

$$\det B = |B| = 4(12) - 5(9) - 2(22) = -41$$

$$\det C = |C| = -1(513) - 13(231) + 4(715) = -656 = \det A \det B$$

3.3 Determinantes e inversas

Teorema 6: Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ y

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \qquad (14)$$

Prueba:

$$1 = \det I = \det AA^{-1} \overset{\text{ec. (13)}}{=} \det A \det A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Definición 8 (Adjunta): Sea A una matriz de n x n y sea B la matriz formada por sus cofactores ($A_{ij} = (-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$), i.e.

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces la matriz adjunta de A denotada como $\operatorname{adj} A$, es la transpuesta de la matriz B, i.e.

$$\operatorname{adj} A = B^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

Ejemplo 21.- Determinar $\operatorname{adj} A$ de la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12,\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3,\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -13,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{adj} A = B^T = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema 7: Sea A una matriz de n x n, entonces

$$(A)(\operatorname{adj} A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I \qquad (16)$$

Prueba: sea $C = \left(c_{ij}\right) = (A)(\operatorname{adj} A)$, entonces

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow c_{ij} = (i-\text{ésimo renglón de } A)(j-\text{ésima columna de } \operatorname{adj} A)$$

$$= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}$$

y de las ecuaciones (8) y (11), se obtiene que $c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Teorema 8: Sea A una matriz de n x n, entonces A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$. Si $\det A \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A \qquad (17)$$

Prueba: de la ec. (16) se tiene que

$$(\det A)I = (A)(\operatorname{adj} A)$$

por lo tanto

$$I = \frac{(A)(\operatorname{adj} A)}{\det A}$$

de lo que sigue que

$$A^{-1} = \frac{(A^{-1}A)(\operatorname{adj} A)}{\det A} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$$

Ejemplo 22.- Sea A la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

determinar A^{-1}

$$\det A = 5 - 12 = -7 \neq 0 \Rightarrow \ A \text{ es invertible}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(5) & (-1)^{2+1}(3) \\ (-1)^{1+2}(4) & (-1)^{2+2}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-5}{7} & \dfrac{3}{7} \\ \dfrac{4}{7} & \dfrac{-1}{7} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 23.- Sea A la matriz dada por

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

determinar A^{-1}

$$\det A = 2(7+5)-4(0+3)+3(0-3)=3\neq 0 \Rightarrow \ A \text{ es invertible}$$

$$\operatorname{adj} A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj} A}{\det A}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & \frac{-13}{3} & \frac{-7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3.4 Regla de Cramer y aplicaciones de determinantes

Sea un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

entonces el sistema de ecuaciones puede escribirse como

$$Ax = b$$

si $\det A \neq 0$ entonces $Ax = b$ tiene una solución única dada por

$$x = A^{-1}b$$

Problema: Calcular la solución x sin calcular A^{-1}

Teorema 9 (Regla de Cramer): Sea A la matriz de n x n correspondiente al sistema $Ax = b$, y suponga que $\det A \neq 0$. Defina n matrices nuevas como

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \cdots; A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

y defina los determinantes

$$D = \det A; \quad D_1 = \det A_1; \ \cdots; \quad D_n = \det D_n$$

Entonces la solución única para el sistema $Ax = b$ esta dada por

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \ \cdots; \ x_n = \frac{D_n}{D} \qquad (18)$$

Prueba: La solución de $Ax = b$ es $x = A^{-1}b$. Pero de (17)

$$A^{-1}b = \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A)(b) = \frac{1}{D}\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{c}$$

tal que el $j-$ésimo componente del vector columna c esta dado por

$$c_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj}$$

Y expandiendo el determinante de A_j en su $j-$ésima columna (ec. (9))

$$D_j = b_1(\text{cofactor de } b_1) + b_2(\text{cofactor de } b_2) + \ldots + b_n(\text{cofactor de } b_n)$$

Pero: cofactor de b_i en $A_j = A_{ij} \quad \Rightarrow \quad D_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_n A_{nj}$

Prueba (continuación): por lo tanto

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A)(b) = \frac{1}{D}c = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 / D \\ D_2 / D \\ \vdots \\ D_n / D \end{pmatrix}$$

Ejemplo 24.- Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

tal que $D = \det A = 6 \neq 0$. Por otro lado se tienen las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \; A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

por lo que $D_1 = \det A_1 = 24$, $D_2 = \det A_2 = -12$, y $D_3 = \det A_3 = 18$

Por lo tanto, usando la regla de Cramer se obtiene que

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{6} = 4, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-12}{6} = -2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{18}{6} = 3$$

Área y el determinante

Considere el paralelogramo de la figura 1, de geometría básica se tiene que su área A_p esta dada por $A_p = ab$

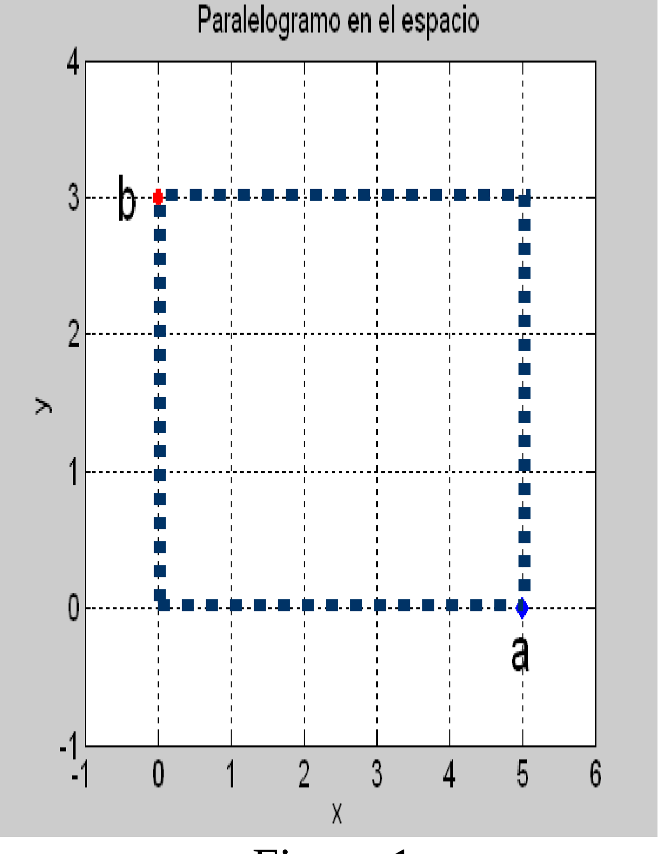

Figura 1

Pero por otro lado se pueden definir los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix}$$
$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix}$$

tal que el valor absoluto del determinante de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

corresponde al área del paralelogramo, i.e.

$$|\det A| = |ab| = ab$$

Dados 3 puntos en el espacio, estos definen un paralelogramo. Si se trasaladan los 3 puntos tal que uno de ellos (cualquiera) coincida con el origen, entonces el área del paralelograma A_p corresponde al valor absoluto del determinante de la matriz formada por los 2 puntos fuera del origen.

Ejemplo 25.- Considere los puntos $P_1 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $P_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}$. Trasladando los 3 puntos tal que P_1 coincida con el origen resulta en $\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \end{pmatrix}$ y $\vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \end{pmatrix}$, tal que

$$A_p = \left|\det A\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|-30\right| = 30$$

Figura 2

Volumen y el determinante

Considere el paralelepípedo de la figura 3, de geometría básica se tiene que su volumen V_p esta dado por $V_p = abc$

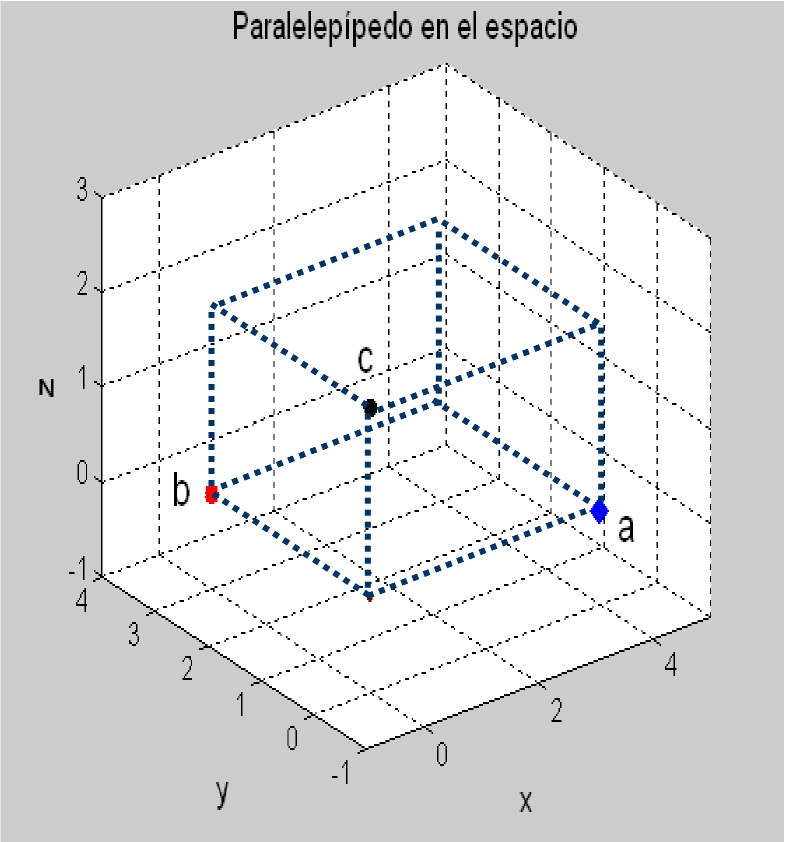

Figura 3

Pero por otro lado se pueden definir los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

tal que el valor absoluto del determinante de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

corresponde al volumen de paralelepípedo, i.e.

$$|\det A| = |abc| = abc$$

Dados 4 puntos en el espacio, estos definen un paralelepípedo. Si se trasaladan los 4 puntos tal que uno de ellos (cualquiera) coincida con el origen, entonces el volumen del paralelepípedo V_p corresponde al valor absoluto del determinante de la matriz formada por los 3 puntos fuera del origen.

Ejemplo 26.- Considere los puntos $P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ $P_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $P_4 = (-2 \quad 1 \quad 5)$. Trasladando los 4 puntos tal que P_1 coincida con el origen resulta en $\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \end{pmatrix}$, $\vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{P}_4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, tal que

$$V_p = \left|\det A\right| = \left|\det \begin{pmatrix} \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \\ \vec{P}_4 \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left|-4\left[(3)(-2) - (-8)(-3)\right] + 0 + 2\left[(1)(-3) - (3)(2)\right]\right| = \left|-4(-30) + 2(-9)\right| = 102$$