Capítulo 4
Espacios vectoriales

Espacios vectoriales:

- Espacios vectoriales y subespacios
- Conjuntos linealmente independientes: bases
- La dimensión de un espacio vectorial
- Rango
- Espacios nulos, espacios columna y transformaciones lineales
- Sistemas de coordenadas
- Cambio de base

Espacios vectoriales y subespacios

Definición 1. (propiedades básicas)

Un espacio vectorial real V es un conjunto de objetos llamados vectores, junto con dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por un escalar que satisfacen los 10 axiomas que a continuación se muestran.

1. Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$, es decir V es cerrado por la suma.

2. Para todos x, y, z en V, $(x + y) + z = x + (y + z)$, ley asociativa de la suma.

3. Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo x $\in V$, $x + 0 = 0 + x = x$, 0 se conoce como el neutro aditivo.

4. Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en V tal que $x + (-x) = 0$, $-x$ se conoce como el inverso aditivo de x.

5. Si x y y están en V, entonces $x + y = y + x$, ley conmutativa de la suma de vectores.

6. Si $x \in V$, y α es un escalar, entonces $\alpha x \in V$, se dice que V es cerrado para la multiplicación escalar.

7. Si x y y están en V y si α es un escalar, entonces $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, primera ley distributiva.

8. Si $x \in V$ y si α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, segunda ley distributiva.

9. Si $x \in V$ y si α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$, ley asociativa de la multiplicación por un escalar.

10. Para todo vector $x \in V$, $1x = x$, al escalar 1 se le conoce como neutro multiplicativo.

Ejemplo 1

Dado un vector en $\mathbb{R}^2$ distinto de cero $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

podemos asociarlo con el segmento de recta en el plano de $(0,0)$ a (x_1, x_2)

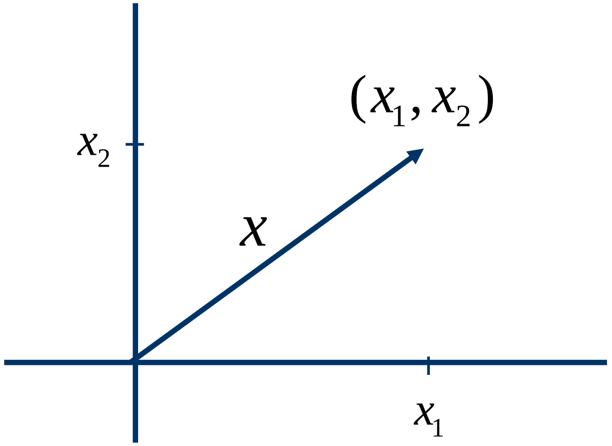


Figura 1

Ahora si igualamos segmentos de recta con la misma longitud y dirección, x se puede representar por cualquier segmento de recta de $(a,\ b)$ a $(a+x_1, b+x_2)$.

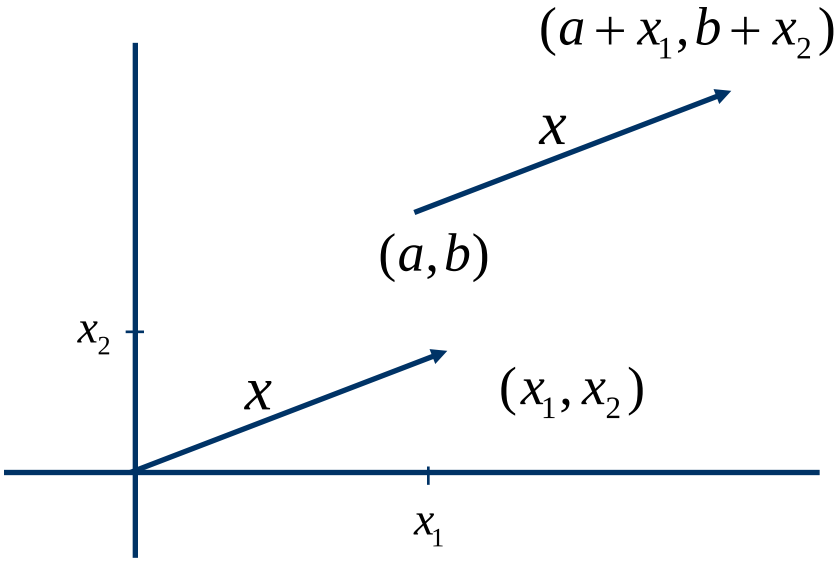


Figura 2

Para cada vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, y cada escalar α,

el producto escalar esta definido por:

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, como se ilustra en la Figura 3, si $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$3x = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad -x = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad -2x = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

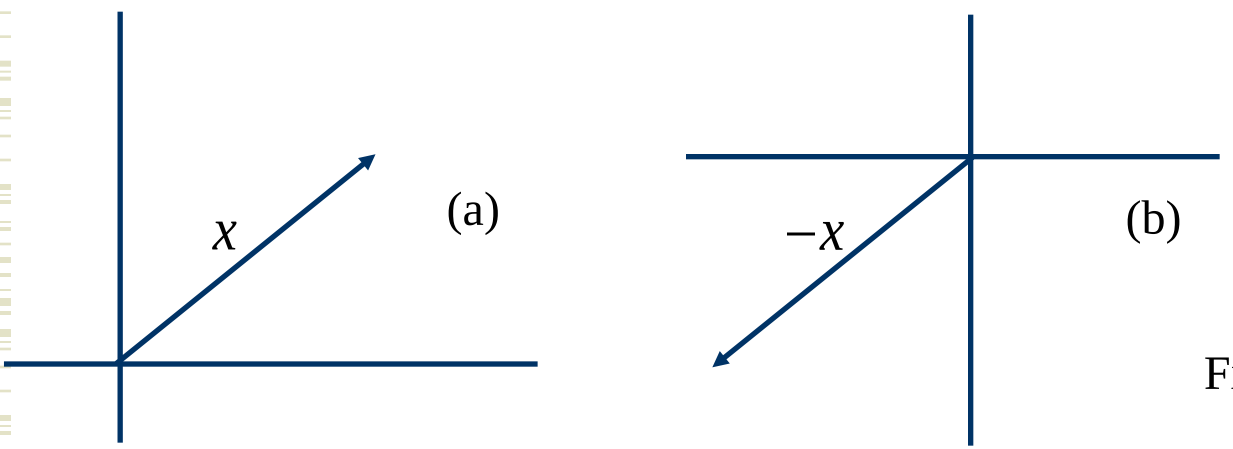
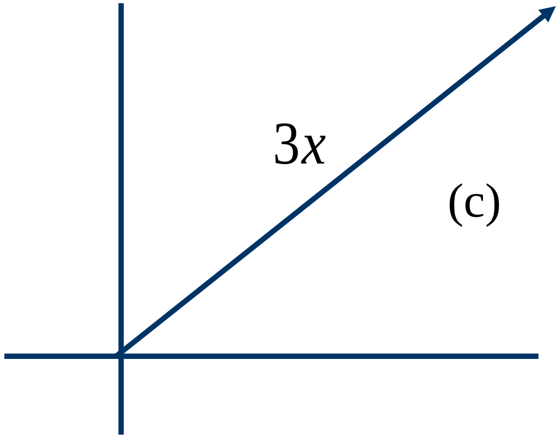


Figura 3



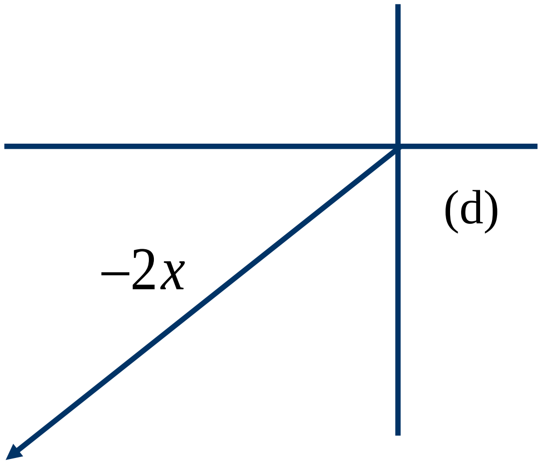


Figura 4

La suma de dos vectores $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ se define como

$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$, mientras que la diferencia u - v esta dada por

$u - v = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix}$, ambas operaciones se definen en la Figura 5.

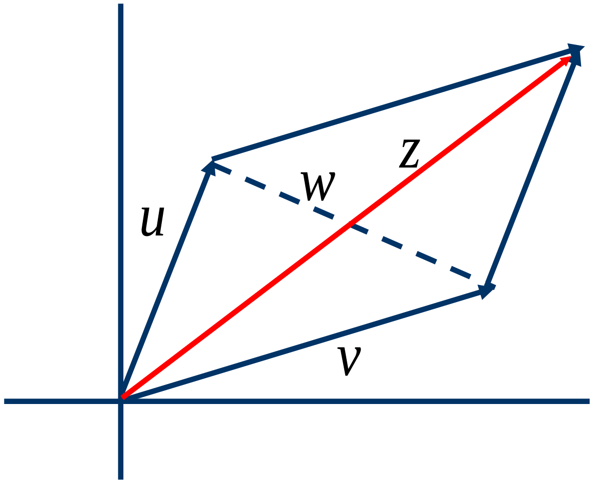


Figura 5

En general, la multiplicación escalar y la adición en $\mathbb{R}^n$ están definidas por

$$\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

El espacio vectorial *C[a,b]*

Sea que $C[a,b]$ denote el conjunto de todas las funciones con valor real, i.e. $C[a,b] \in \mathbb{R}$, y que se definen en el intervalo cerrado $[a,b]$, el conjunto es universal, por lo tanto los vectores son las funciones en $C[a,b]$. La suma $f+g$ de dos funciones en $C[a,b]$ es,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

para toda x en $[a,b]$, $f+g \in C[a,b]$ y es contínua.

Si f es una función en $C[a,b]$ y α es un número real, se define αf como

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

para toda x en $C[a,b]$.

Ejemplo 2. Sea $V=\{(x,y); y=2x+1, x\in\mathbb{R}\}$, esto es,
V es el conjunto de puntos sobre la recta $y=2x+1$.
V no es un espacio vectorial por que la cerradura no se cumple, suponer que (x_1,y_1) y (x_2,y_2) están en V,

$$\Rightarrow (x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

si este vector estuviera en V, se tendría que

$$y_1+y_2=2(x_1+x_2)+1=2x_1+2x_2+1$$

pero $y_1=2x_1+1$ y $y_2=2x_2+1$, así que

$$y_1+y_2=(2x_1+1)+(2x_2+1)=2x_1+2x_2+2$$

De aquí se concluye que

$$(x_1+x_2,y_1+y_2)\notin V \text{ si } (x_{1,}y_1)\in V \text{ y } (x_2,y_2)\in V$$

El espacio vectorial P_n

Sea que P_n defina el conjunto de todos los polinomios de grado menor que n, se definen las operaciones de suma y multiplicación por un escalar como

$$(p+q)(x) = p(x)+q(x)$$

$$(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$$

para todos los números reales x. Se pueden verificar facilmente los demás axiomas definidos para espacios vectoriales (tarea).

Por lo tanto, P_n es un espacio vectorial.

Teorema 1. Si V es un espacio vectorial y x es cualquier elemento de V, entonces

(i) $0x = 0$

(ii) $x + y = 0$ implica que $y = -x$

(iii) (-1)x = -x

Demostración. Se deduce de los axiomas 8 y 10 que

$x = 1x = (1+0)x = 1x + 0x = x + 0x$

Por lo tanto

(de axioma 2) $-x + x = -x + (x + 0x) = (-x + x) + 0x$

(de axiomas 1, 3 y 4) $0 = 0 + 0x = 0x$

Para probar el inciso (ii), suponer que $x+y=0$, entonces

$$-x=-x+0=-x+(x+y)$$

De axiomas (1-4)

$$-x=(-x+x)+y=0+y=y$$

Por último, para probar (iii), de (i) y axioma 8

$$0=0x=(1+(-1))x=1x+(-x)$$

De axioma 10

$$x+(-1)x=0$$

y de (ii) se tiene que

$$(-1)x=-x$$

Definición 2. Subespacios vectoriales

Si S es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V, y S cumple las siguientes condiciones

(*i*) $\alpha x \in S$ siempre que $x \in S$ $\forall$ escalar α

(*ii*) $x + y \in S$ siempre que $x \in S$ y $y \in S$

entonces se dice que S es un subespacio de V.

Comentario. En un espacio vectorial V se puede verificar que $\{0\}$ es un subespacio de V.

Ejemplo 3. Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3)^T, x_1 = x_2\}$

se deduce que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$,

ya que

(i) Si $x = (a, a, b)^T \in S$, entonces

$\alpha x = (\alpha a, \alpha a, \alpha b)^T$

(ii) Si $(a, a, b)^T$ y $(c, c, d)^T$ son elementos de S,

$\Rightarrow \ (a, a, b)^T + (c, c, d)^T = (a + c, a + c, b + d)^T$

Conjuntos linealmente independientes: bases

Definición 3. Dependencia e independencia lineales

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n vectores en un espacio vectorial V.

Se dice que estos vectores son *linealmente dependientes* si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero, tales que

$c_1 v_1 + c_2 v_2, \ldots + c_n v_n = 0$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son *linealmente independientes*. Esto significa que

$c_1 v_1 + c_2 v_2, \ldots + c_n v_n = 0$ sólo se satisface si,

$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$

Teorema 2: Dos vectores en un espacio vectorial son *linealmente dependientes* sí y sólo sí uno es un múltiplo del otro.

Demostración. Suponer que $v_2 = cv_1$, para $c \neq 0$,

$\Rightarrow cv_1 - v_2 = 0$, es decir v_1 y v_2 son linealmente dependientes, esto implica que existen dos ctes.

c_1 y c_2, ninguna cero tales que $c_1 v_1 + c_2 v_1 = 0$,

esto implica que si $\mathrm{c}_1 \neq 0$

$$v_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right) v_2$$

esto es v_1 es un múltiplo escalar de v_2.

Sí $c_1 = 0$, $\Rightarrow \mathrm{c}_2 \neq 0$ por lo tanto $v_2 = 0 = 0v_1$.

Ejemplo 4. Los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$

son linealmente dependientes por que $v_2 = -3v_1$.

Ejemplo 5. Los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

son linealmente independientes, si no lo fueran

tendríamos que $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ 4c \end{pmatrix}$, entonces

$2 = c,\ 5 = 2c\ y\ \ \text{-}3 = 4c$, lo cual es imposible

para cualquier c.

Ejemplo 6. Determinar si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independients.

Solución. suponer que $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, simplificando

da: $\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 \\ -2c_1 - 2c_2 + c_3 \\ 3c_1 + 7c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

equivalente a:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 \qquad\qquad &= 0 \\ -2c_1 - 2c_2 + c_3 &= 0 \qquad\qquad (1) \\ 3c_1 \qquad\quad + 7c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Para determinar si el sistema (1) es linealmente dependiente se requiere que posea soluciones no trviales, esto se puede ver reduciendo el sistema aumentado mediante operaciones con renglones y columnas,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad (2)$$

esto implica que la solución del sistema (2) es $c_1 = c_2 = c_3 = 0,$ lo cual de acuerdo a la Definición 3 implica *independencia lineal*.

Definición 4. Base

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ forma una *base* para V sí

i. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

ii. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera V.

En $\mathbb{R}^n$ todo conjunto de n vectores linealmente independientes es una base en $\mathbb{R}^n$. Para ver esto se define

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ donde los

términos e_i son los vectores columnas de la matriz identidad, se tiene que $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ es linealmente independiente por lo que es una base en $\mathbb{R}^n$ llamada base canónica.

Ejemplo 7. Encontrar una base para el conjunto de vectores

en el plano $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; 2x - y + 3z = 0 \right\}$ (3)

El sistema (3) constituye un espacio vectorial ya que cumple con con los axiomas (i - x). Para hallar una base se puede tomar

cualquier valor para x y y tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi$. Tomando $y = 2x + 3z$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \end{pmatrix},$$ tomando $x = 1$ y $z = 0$ se tiene que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

y tomando $x = 0$ y $z = 1$ se tiene que $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, de manera que v_1 y v_2 generan

π y al ser linealmente independientes forman una base de π.

La dimensión de un espacio vectorial

Definición 5. Dimensión de un espacio vectorial

Si el espacio vectorial V posee una base finita, la dimensión de V es el número de vectores en la base, y V se denomina como el vector de dimensión finita, de lo contrario se denomina de dimensión infinita.

Sí $V = \{0\} \Rightarrow$ se dice que es de dimensión cero.

Ejemplo 8. Como n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base, entonces,

$\dim \mathbb{R}^n = n.$

Ejemplo 9. Los polinomios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ constituyen una base de P_n, entonces

$\dim P_n = 1 + n.$

Definición 6. Imagen o espacio imagen de una matriz

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la imagen de A, denotada por $\operatorname{Imag} A$, está dada por

$$\operatorname{Imag} A = \{y \in \mathbb{R}^m : Ax = y \text{ para } x \in \mathbb{R}^n\} \qquad (4)$$

Rango

Definición 7. Rango de una matriz

Sea A una matriz de $m \times n$. El rango de A, denotado por $\rho(A)$ está dado por

$$\rho(A) = \dim \ \operatorname{Imag} A$$

Ejemplo 10. Determinar el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución. Haciendo una reducción por filas se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

donde B posee dos renglones independientes

$$\rho(B) = \rho(A) = 2$$

Teorema 3. Sea A una matriz de $m \times n$, entonces

Imag A es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$.

Demostración. Suponer que y_1 y y_2 están en Imag A.

Entonces existen vectores x_1, x_2 en $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ tales que $y_1 = Ax_1$,

$y_2 = Ax_2$.

Por lo tanto

$A(\alpha x_1) = A\alpha x_1 = \alpha y_1$ y $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = y_1 + y_2$

así que αy_1 y $y_1 + y_2$, están en la Imag A. De la definición 2

se sigue que Imag A es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$.

Espacios nulos, espacios columnas y transformaciones lineales

Sea A una matriz de $m \times n$, y

$$N_A = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax = 0\} \qquad (5)$$

N_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

Definición 8. (núcleo o kernel y nulidad de una matriz)

N_A se llama núcleo (o kernel) de A, y al número $v(A) = \dim N_A$ se le llama nulidad de A. Sí N_A contiene sólo al vector cero, entonces $v(A) = 0$.

Ejemplo 11. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Que proviene del

espacio solución S del sistema homogéneo:

$x+2y-z=0$

$2x-y+3z=0$

se tiene que A es una matriz de 2×3 y S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$,

reduciendo se encuentra que $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Entonces $y=z$ y $x=-z$, así que todas las soluciones son de la

forma $\begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix}$ $\therefore$ N_A esta generado por $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una base de S y $v(A)\ =1$.

Ejemplo 12. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$. De manera que

haciendo reducciones por renglón al sistema homogéneo se

tiene que $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[A_{1,3}(3)]{A_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ lo cual da la

ecuación única $2x - y + 3z = 0$. El espacio solución S es un plano

y la base N_A esta dada por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y la dimensión $v(A) = 2$.

Teorema 4. Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible sí y solo sí $\nu(A) = 0$.

Demostración. La matriz A es invertible sí y solo sí el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene una solución trivial $x = 0$. De la ecuación (5) esto implica que A es invertible sí y solo sí $N_A = \{0\}$. Entonces, A es invertible sí y solo sí $\nu(A) = \dim N_A = 0$.

Definición 9. Combinación lineal

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores en un espacio vectorial V.

Entonces, toda expresion de la forma

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

en donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares, se llama combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Definición 10. Espacio generado por un conjunto de vectores

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n vectores en un espacio vectorial V.

El espacio generado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es el conjunto de las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Esto es

$$\text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \{v : \ v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n\}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares.

Ejemplo 13. Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Entonces

$H = \text{gen}\{v_1, v_2\} = \left\{v : \ v = a_1 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}_1 + a_2 \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}\right\}$

¿A que corresponde el espacio H ?

Si $v = (x, y, z) \in H$, entonces $x = 2a_1 + 4a_2$, $y = -a_1 + a_2$ y $z = 4a_1 + 6a_2$. Si consideramos que (x, y, z) es fijo, entonces se obtiene el sistema de 3 ecuaciones con 2 incognitas (a_1, a_2)

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x/6 - 2y/3 \\ 0 & 1 & x/6 + y/3 \\ 0 & 0 & -5x/3 + 2y/3 + z \end{array}\right)$$

Por lo tanto el sistema tiene solucion si

$$5x - 2y - 3z = 0$$

Lo cual equivale a un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

Definición 11. Espacios renglones y columnas de una matriz.

Si A es una matriz de $m \times n$, sea $\{r_1, r_{2,} \ldots, r_m\}$ y $\{c_1, c_{2,} \ldots, c_n\}$ los conjuntos de renglones y columnas de A, respectivamente, entonces se define

$$R_A = \text{espacio de renglones de } A = \text{gen}\{r_1, r_{2,} \ldots, r_m\} \quad (6)$$

y

$$C_A = \text{espacio de columnas de } A = \text{gen}\{c_1, c_{2,} \ldots, c_n\} \quad (7)$$

Ejemplo 14. Considerando la matriz del ejemplo 10

Determinar el rango y el espacio de

renglones de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Solución. Haciendo una reducción por filas se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

donde B posee dos renglones independientes

$\rho(B) = \rho(A) = 2$ y $R_A = \text{gen}\{(1,-1,3),(0,1,-1)\}$

Ejemplo 15. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces A es una matriz de 2×3

i. El kernel o núcleo de A es $N_A = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$,

del ejemplo 4 $N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

ii. La nulidad de A es $\nu(A) = \dim N_A = 1$.

iii. La imagen de A es $\text{Imag}\, A = \{y \in \mathbb{R}^2 : Ax = y \text{ para } x \in \mathbb{R}^3\}$.

Sea $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces, si $y \in \text{Imag}\, A$, existe una $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $Ax = y$.

Escribiendo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Reduciendo el sistema por filas se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \dfrac{y_1 + 2y_2}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{2y_1 - y_2}{5} \end{array} \right)$$, asi que eligiendo x_3

se tiene, $x_1 = -x_3 + \dfrac{y_1 + 2y_2}{5}$ y $x_2 = x_3 + \dfrac{2y_1 - y_2}{5}$.

Esto es, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, así pues $\operatorname{Imag} A = \mathbb{R}^2$.

Por ejemplo si $y=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow$ eligiendo $x_3=0$ se tiene que

$$x_1=\frac{2+2(-3)}{5}=-\frac{4}{5}\ ,\ x_2=\frac{2(2)-(-3)}{5}=\frac{7}{5}\ \text{ y}$$

$$Ax=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4/5\\ 7/5\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10/5\\ -15/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=y$$

iv. El rango de A es $\rho(\mathrm{A})=\dim\ \ \mathrm{Imag}\,A=\dim\mathbb{R}^2=2.$

v. El espacio de renglones de A es $R_A=\mathrm{gen}\left\{(1,2,-1),(2,-1,3)\right\}$,

es decir un subespacio bidimensional de $\mathbb{R}^3$.

vi. El espacio de columnas de A es

$$C_A=\mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^2$$

Definición 12. Transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un único vector $Tv \in W$ y que satisface para cada u y v en V y cada escalar α,

$$T(u+v) = Tu + Tv$$

$$T(\alpha v) = \alpha T v$$

$T: V \rightarrow W$ indica que T transforma V en W.

Ejemplo 16. Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}, \text{ por ejemplo } T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix},$$

entonces, $T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ x_1+x_2-y_1-y_2 \\ 3y_1+3y_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$, pero $\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

así $T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, de forma similar

$$T\alpha\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x+\alpha y \\ \alpha x-\alpha y \\ 3\alpha y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 17. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$. Entonces T es el operador de proyección que toma un vector en el espacio y lo proyecta en el plano *xy*.

Sistemas de coordenadas

Cualquier punto en el plano se puede representar por el sistema coordenado (x, y) en $\mathbb{R}^2$, lo cual es equivalente a tener un vector en $\mathbb{R}^2$.

Existen vectores especiales en $\mathbb{R}^2$ que permiten representar otros vectores de forma conveniente:

$i = (1,0)$

$j = (0,1)$

Sí $v = (a,b)$ es otro vector del plano entonces

$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$

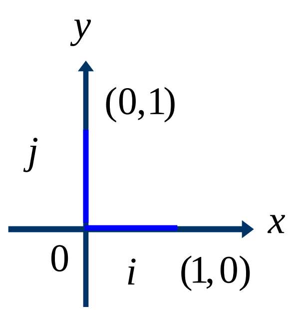
$\Rightarrow v = (a,b) = ai + bj$

continuación (…)

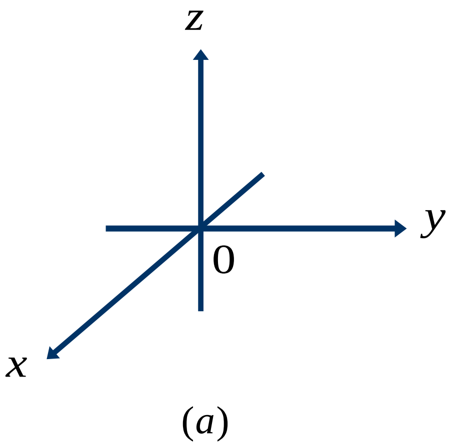
Con esto se dice que v esta representado por sus componentes vertical y horizontal i y j, los cuales tienen las siguientes propiedades:

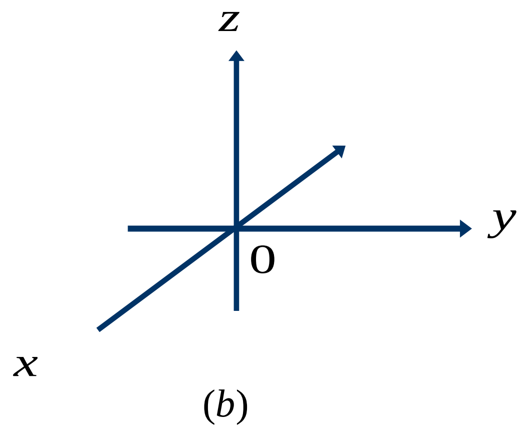
i. Ninguno de ellos es múltiplo del otro, son linealmente independientes.

ii. Cualquier vector v se puede representar en términos de i y j.



Cualquier punto en el espacio se puede representar por una tríada ordenada de números (a,b,c) en $\mathbb{R}^3$.





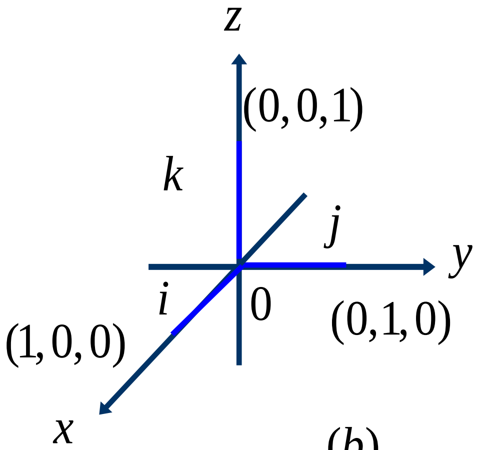
El sistema (a) se denomina de mano derecha y el sistema (b) demano izquierda.

Entonces cualquier punto P en $\mathbb{R}^3$ se puede representar en un sistema coordenado como

$P = (x, y, z)$

el sistema coordenado así representado se denomina sistema rectangular o cartesiano.

En $\mathbb{R}^3$ se tienen los siguientes vectores básicos $i = (1,0,0),\ j = (0,1,0)$ y $k = (0,0,1)$, que son vectores unitarios.



(b)

Sí $v = (x, y, z)$ se puede representar en forma única en términos de estos vectores como

$$v = (x, y, z) = (x,0,0) + (0, y, 0) + (0,0, z)$$
$$= xi + yj + zk$$

Cambio de base

Bases estándar

(i) En $\mathbb{R}^2$ $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) En $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

(iii) En $\mathrm{P_n}$ $\{1, \mathrm{x}, \mathrm{x}^2, \ldots, x^n\}$

Cualquier conjunto de vectores linealmente independientes forma una base, es por eso que cualquier espacio vectorial de dimensión *n* se puede representar en diferentes *bases*.

Ejemplo 18. Sean $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\Rightarrow B_1 = \{u_1, u_2\}$ es la base estándar en $\mathbb{R}^2$.

Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, que son linealmente independientes $\Rightarrow B_2 = \{v_1, v_2\}$ es una segunda base en $\mathbb{R}^2$.

Sea $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tal que se pueda representar

$$x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 u_1 + x_2 u_2 = (x)_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como B_2 es otra base de $\mathbb{R}^2$, $\forall\ c_1, c_2$ tales que

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 \qquad (8)$$

una vez encontrados estos escalares

se tiene $(x)_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, para encontrar c_1 y c_2 se tiene

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}v_1 - \frac{3}{5}v_2$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2$$

$$\Rightarrow x = x_1 u_1 + x_2 u_2 = x_1\left(\frac{2}{5}v_1 - \frac{3}{5}v_2\right) + x_2\left(\frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2\right)$$

$$= \left(\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2\right)v_1 + \left(-\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2\right)v_2$$

De ecuación (8) $c_1 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$ y $c_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$

Es decir: $(x)_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

si se toma que $(x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (x)_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$

La matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ es la matriz de transición de

$B_1 \to B_2$.

Generalización. Sean $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dos bases de dimensión n en V. Sea $x \in V$,

$$\Rightarrow x = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_n u_n$$

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

Se escribe $(x)_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ y $(x)_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Cada u_j en B_1 se puede escribir como una combinación lineal de las v_{i} $\therefore$ existe un conjunto de escalares $a_{1j}, a_{2,j}, \ldots, a_{nj}$ tal que para $j = 1, 2, \ldots, n$

$$(u_j)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Definición 13. Matriz de transición

La matriz A de $n \times n$ con columnas dadas por la ecuación (9)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ se denomina

matriz de *transición* de $B_1 \rightarrow B_2$

Teorema 5. Sean B_1 y B_2 bases para un espacio vectorial V. Sea A la matriz de transición

$$\forall x \in V,\ (x)_{B_2} = A(x)_{B_1}$$

Demostración. Representando el vector x como

$$x = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_n u_n = b_1(a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \ldots a_{n1} v_n) +$$
$$b_2(a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \ldots a_{n2} v_n) + \ldots + b_n(a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \ldots a_{nn} v_n)$$
$$= (a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \ldots a_{1n} b_n) v_1 + (a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \ldots a_{2n} b_n) v_2 +$$
$$(a_{n1} b_1 + a_{n2} b_2 + \ldots a_{nn} b_n) v_n$$
$$= c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n \tag{10}$$

demostración (continuación…)

$$\Rightarrow (x)_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \ldots a_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A(x)_{B_1}$$

Teorema 6. Si A la matriz de transición de B_1 a B_2, entonces A^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1.

Demostración. Sea C la matriz de transición de B_2 a B_1 del Teorema 5 se tiene que

$$(x)_{B_1} = C(x)_{B_2}$$

pero $(x)_{B_2} = A(x)_{B_1}$ tal que

$$(x)_{B_1} = CA(x)_{B_1}$$

Lo que implica que $C = A^{-1}$.

Ejemplo 19. En $\mathbb{R}^3$ sean $B_1 = \{i, j, k\}$ y

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}. \text{ Si } x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

escribir x en términos de B_2.

Solución.

(1) B_2 es una base ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$

(2) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) La matriz de transición C de $B_2 \to B_1$ es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(4) Del Teorema 6 la matriz de transición A de $B_1 \to B_2$ es

$$A = C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sí } (x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (x)_{B_2} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{7}{4}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$