ヒューマノイドロボット　改訂2版　参照

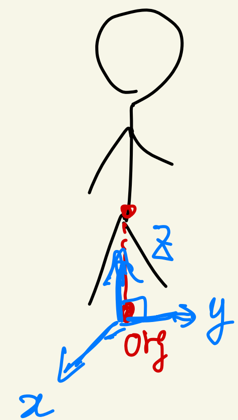
梶田秀司　編著

運動学

運動学…ロボットを構成するリンクの位置・姿勢と関節角度との関係を分析する理論

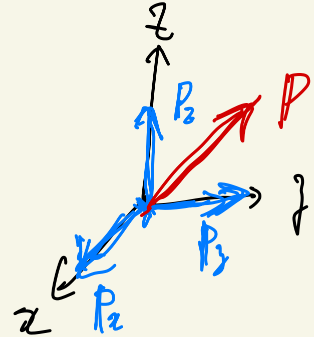
・座標変換について

初期状態のロボットの真下(腰リンクのローカル座標系の原点から床に下ろした垂線の足)を原点とし、前方にx軸、左方向にy軸、上方向にz軸をとり、この座標系をΣ_wと名付ける。これを<u>ワールド座標系</u>と呼ぶ。



ワールド座標系で表した位置を絶対位置と呼び、次のように表す。

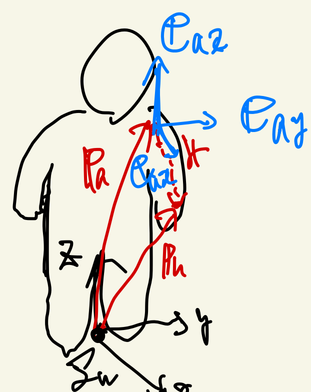
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$



あるロボットハンドの手先位置を $\mathbf{p}_h$、左肩の位置を $\mathbf{p}_a$、肩から手先を指すベクトルを $\mathbf{r}$ とすると、

$$\mathbf{p}_h = \mathbf{p}_a + \mathbf{r}$$

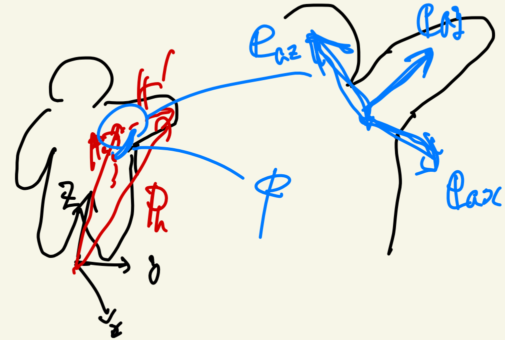
となる。



腕をφだけ開いた新たな r' を用いると、

$$p_h = p_a + r'$$

p_a は一定のまま、ベクトル r が r' へ回転するので
手先が動く



腕(肩)に固定されたローカル座標系 Σ_a について考える。

↳ 地面に固定されたワールド座標系と異なり、
ロボットの動きに応じて変化する「動く座標系」である

Σ_a の単位ベクトル e_{ax}, e_{ay}, e_{az} はワールド座標系 Σ_w に平行になるよう初期設定されているとすると、ロボットの腕が開くと Σ_a は e_{ax} 軸を中心としてφだけ回転する。

腕の回転角ϕとΣ_aの関係は以下のようになる.

$$\boldsymbol{e}_{ax} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{ay} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{az} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \\ \leftarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \end{array}$$

三つのベクトルをまとめて 3×3 の行列 $\boldsymbol{R}_a$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{R}_a \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{ax} & \boldsymbol{e}_{ay} & \boldsymbol{e}_{az} \end{bmatrix}$$

これを用いると, $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ の関係を次式で表せる.

$$\underline{\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}_a \boldsymbol{r}}$$

回転行列

ローカル座標系Σ_aを基準にして見た手先位置を${}^aP_h$とする。　　基準点 $P_{次の点}$

このとき、${}^aP_h = r$となる。今回の状況の場合、Σ_aと

ロボットの左腕はひとかたまりで回転するので${}^aP_h$は一定である。

Σ_nで見た手先位置はP_hなので、これまでの関係は

$$P_h = P_a + R_a {}^aP_h$$

と表せる。

これは、

$$\begin{bmatrix} P_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & P_a \\ 0\,0\,0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^aP_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

としても表せる。（両式の等化のつじつま合わせのために行列に0と1が追加されている）

ここで、右辺の4×4行列は腕の位置と回転（P_a, R_a）をまとめたものとなっている。

これを

$$\boxed{T_a = \begin{bmatrix} R_a & P_a \\ 0\,0\,0 & 1 \end{bmatrix}}$$

と置くことにする。

同次変換行列

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a & \mathbf{P}_a \\ 0\,0\,0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^a\mathbf{P}_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

a部分について、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_a & \mathbf{P}_a \\ 0\,0\,0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^a\mathbf{P}_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a\,{}^a\mathbf{P}_h + \mathbf{P}_a \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^a\mathbf{P}_{hx} \\ {}^a\mathbf{P}_{hy} \\ {}^a\mathbf{P}_{hz} \end{bmatrix} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a\,{}^a\mathbf{P}_h + \mathbf{P}_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

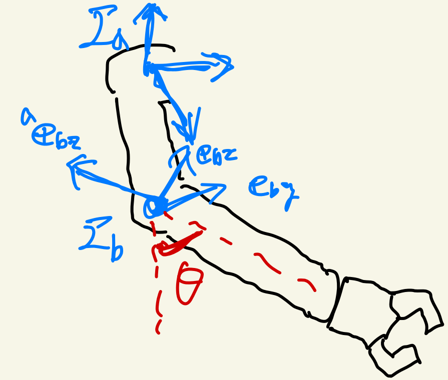
$$\therefore \quad \underline{\mathbf{P}_h = \mathbf{P}_a + \mathbf{R}_a\,{}^a\mathbf{P}_h}$$

同次変換行列T_aは腕のローカル座標系で表された点の座標をワールド座標系に変換する。

$$\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = T_a \begin{bmatrix} {}^{a}p \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここで、${}^{a}p$として左腕上の任意の点をとれるから、腕の位置と姿勢の情報は同次変換行列T_aに含まれている。すなわち、同次変換行列そのものが腕の位置と姿勢を表していると見なせる。

ローカル座標系に対するローカル座標系



右図のようにΣ_aを基準にしたΣ_bについて考える。
Σ_bは前腕部と一緒に運動するローカル座標系であり、肘をまっすぐ伸ばした状態で座標軸がΣ_aと平行になるよう設定されている。Σ_bのx・y・z方向の単位ベクトルは次のようになる。

$$
{}^a e_{bx} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad
{}^a e_{by} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad
{}^a e_{bz} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix}
$$

三つの単位ベクトルをまとめた行列 ${}^{a}R_{b}$ を次のように定義する.

$$ {}^{a}R_{b} \equiv \begin{bmatrix} {}^{a}e_{bx} & {}^{a}e_{by} & {}^{a}e_{bz} \end{bmatrix} $$

Σ_b から見た手先位置 ${}^{b}P_{h}$ を Σ_a から見た ${}^{a}P_{h}$ に変換する式は

$$ \begin{bmatrix} {}^{a}P_{h} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{a}T_{b} \begin{bmatrix} {}^{b}P_{h} \\ 1 \end{bmatrix} $$ となる.

ここで, ${}^{a}T_{b}$ は $$ {}^{a}T_{b} \equiv \begin{bmatrix} {}^{a}R_{b} & {}^{a}P_{b} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} $$ である. (${}^{a}P_{b}$ は Σ_a から見た Σ_b の原点)

$$\begin{bmatrix} {}^{a}P_h \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{a}T_b \begin{bmatrix} {}^{b}P_h \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & P_a \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{a}P_h \\ 1 \end{bmatrix}$$ より。

$$\begin{bmatrix} P_h \\ 1 \end{bmatrix} = T_a {}^{a}T_b \begin{bmatrix} {}^{b}P_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

$T_b = T_a {}^{a}T_b$ とすると、行列 T_b は Σ_b をワールド座標系で表した同次変換行列となり、前腕部の位置と姿勢を表している。

同次変換行列のチェーンルール

$$T_N = T_1 {}^{1}T_2 {}^{2}T_3 \cdots {}^{N-1}T_N$$

（右から掛けること）

ロール・ピッチ・ヨー表現

↳ x軸に関する回転：ロール ϕ
y軸 〃 ：ピッチ θ
z軸 〃 ：ヨー ψ

それぞれ次のような回転行列を用いる。

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

原点を中心として、ある点$\mathbb{P}$をロール、ピッチ、ヨーの順に回転させると、

$$\mathbb{P}' = \mathbb{R}_z(\psi)\mathbb{R}_y(\theta)\mathbb{R}_x(\phi)\mathbb{P}$$

の位置に移動する。これを

$$\mathbb{P}' = \mathbb{R}_{rpy}(\phi, \theta, \psi)\mathbb{P}$$

と書き直す。

これにより、行列$\mathbb{R}_{rpy}(\phi, \theta, \psi)$はやはり回転行列となり、これによって3次元空間における任意の姿勢に到達できることが知られている。よって任意の姿勢は(ϕ, θ, ψ)の三つの数値で表すことができ、これをロール・ピッチ・ヨー表現、あるいはZ-Y-Xオイラー角と呼ぶ。

既に見てきたように、回転行列 R は以下の2種類の意味をもつと解釈ができる。

- ベクトルを回転させるオペレータ
- ローカル座標系の姿勢

回転行列の逆行列について

ある座標軸を構成する単位ベクトルを e_x、e_y、e_z とする。これらは互いに直交するので、

$$e_i^T e_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

ここで、転置行列 R^T と R の積を計算し、上の関係を適用すると、

$$R^T R = \begin{bmatrix} e_x^T \\ e_y^T \\ e_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x^T e_x & e_x^T e_y & e_x^T e_z \\ e_y^T e_x & e_y^T e_y & e_y^T e_z \\ e_z^T e_x & e_z^T e_y & e_z^T e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= E$$

よって $R^T R = E$ である。これに右側から R^{-1} を乗ずると、

$$R^T = R^{-1}$$

すなわち、回転行列を転置すると逆行列になることがわかる。

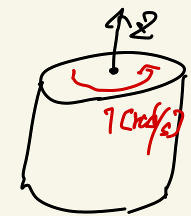
このような性質をもつ行列を直交行列とよぶ。

角速度ベクトル

次に3次元空間における物体の回転速度を表す方法を定義する。

最も簡単な例として右図のような円筒がz軸周りに

1 rad のスピードで回転している場合を考える。



このとき、円筒がもつ回転速度を次のような3次元ベクトルで

表現し、これを角速度ベクトルと呼ぶ。

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [\mathrm{rad/s}]$$

角速度ベクトルの性質

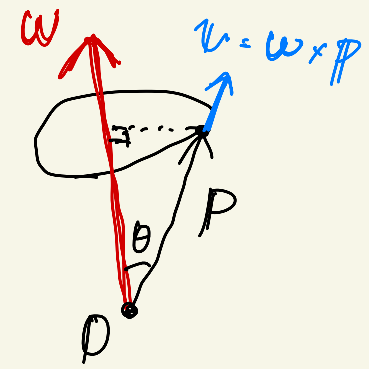
[1] $\boldsymbol{\omega}$は「単位ベクトル × スカラー」で得られる

回転軸の向きに一致する単位ベクトルを$\boldsymbol{a}$、回転速度を$\dot{\theta}$（スカラー）とすると、
回転によって作り出される角速度ベクトルはベクトルのスカラー倍で与えられる。

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{a}\dot{\theta}$$

[2] $\boldsymbol{\omega}$は回転する物体上の各点への速度を与える

$\boldsymbol{\omega}$で回転する物体上の点の速度は$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{p}$で与えられる。
ここで、$\boldsymbol{p}$は回転軸上の任意の点を出発点とした位置ベクトル、
$\times$は外積を表す。



与えられた2本のベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{p}$ をもとに、以下の性質をもつ新たな3次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を決定する。

$$|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{p}| \sin\theta$$

$$(\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{\omega}) \wedge (\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{p})$$

これを満足するベクトルは2本あるので、$\boldsymbol{\omega}$ から $\boldsymbol{p}$ へ右ねじを回したときに進む向きと一致するものを選ぶ。このとき $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{p}$ と表記し、

「ベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{p}$ の外積である」という。

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y p_z - \omega_z p_y \\ \omega_z p_x - \omega_x p_z \\ \omega_x p_y - \omega_y p_x \end{bmatrix}$$

これより、(頂点の速度) $= \boldsymbol{\omega} \times$ (頂点の位置) といえる。

図 ω 自体を回転できる

$\omega = a i$ の両辺に適当な回転行列 R をかける.

$$R\omega = Rai$$

ここで, $\omega' = R\omega$, $a' = Ra$ とおけば,

$$\omega' = a' i$$ が成り立つ.

これより, ω' は新たな回転軸 a' 周りの角速度であることがわかる.

故に, 角速度ベクトルは R によって直接回転あるいは座標変換できる.

また, 角速度ベクトル, 位置ベクトル, 速度ベクトルの三つを R で回転させるとき,

$$\omega' = R\omega, \quad P' = RP, \quad v' = Rv \text{ より,}$$

$$v = \omega \times P, \quad v' = \omega' \times P'$$

ここから次式が導かれる.

$$\boxed{R(\omega \times P) = (R\omega) \times (RP)}$$

回転行列の微分と角速度ベクトル

回転行列は物体頂点のローカル座標とワールド座標の関係を与える。

$$p = R\bar{p}$$

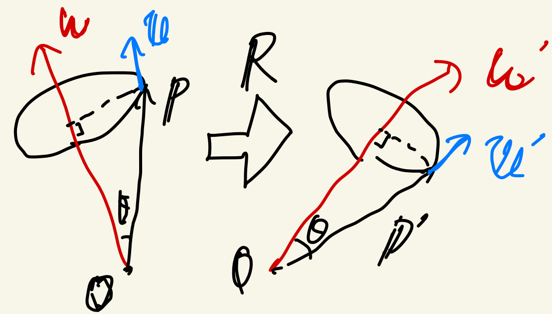
これを時間で微分すればワールド座標系における速度を得る。

ローカル座標系で見た物体上の点の座標 $\bar{p}$ は時間で変化しないから

$$\dot{p} = \dot{R}\bar{p}$$

$p = R\bar{p}$ より、$\bar{p} = R^T p$ なので、

$$\dot{p} = \dot{R}R^T p$$



これはワールド座標系において、物体の頂点位置から速度を計算する式になっている。

一方、$\dot{p} = \omega \times p$ であるから、($\dot{p} = \omega \times p$) 次式が成り立つ。

$$\omega \times p = \dot{R} R^T p$$

$$\omega \times p = \begin{bmatrix} \omega_y p_z - \omega_z p_y \\ \omega_z p_x - \omega_x p_z \\ \omega_x p_y - \omega_y p_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \equiv S p$$

と書きかえる。

ここで新たに定義した S は、その要素配置により転置すると符号が反転する性質をもつ。このような行列をひずみ対称行列と呼ぶ。

$$\boxed{S^T = -S}$$