6.3 错误概率和编码方法

1. 前言:

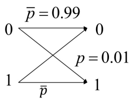
●对于给定信道（统计特性确定），在输入符号概率分布一定时，选择译码规则可使P_E达到最小值。
●一般数字通信系统要求平均错译概率P_E 在10^{-6}到10^{-9}数量级，甚至更低。

●Fano不等式告诉我们，要想进一步降低P_E ，仅仅通过制定译码规则已不够了。
●解决办法：对信道的输入符号进行某种形式的编码！

6.3.1 简单重复编码

1. 引入:

例：假定信源输入等概分布



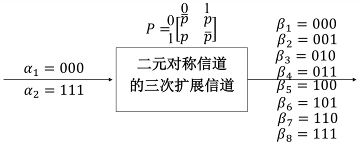
$$P=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & \bar{p} & p \\ 1 & p & \bar{p}\end{array}$$

$$\begin{cases}F(0)=0\\F(1)=1\end{cases}$$

$$P_E=1-\frac{1}{M}\sum_{Y}\sum_{x^*}p(y_i|x_i)=1-\frac{1}{2}(\bar{p}+\bar{p})=10^{-2}$$

- 直观：在发送端把消息多重复几遍，可以使接收端接收消息时错误减小。

$$P=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & \bar{p} & p \\ 1 & p & \bar{p}\end{array}$$



$$P=\begin{array}{c|cccccccc} & 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ \hline 000 & \bar{p}^3 & \bar{p}^2p & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}p^2 & p^3 \\ 111 & p^3 & \bar{p}p^2 & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}^2p & \bar{p}^3\end{array}$$

$(\bar{p}\gg p)$

由最大似然译码规则，可得

$$P=\begin{array}{c|cccccccc} & 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ \hline 000 & \bar{p}^3 & \bar{p}^2p & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}p^2 & p^3 \\ 111 & p^3 & \bar{p}p^2 & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}p^2 & \bar{p}^2p & \bar{p}^2p & \bar{p}^3\end{array}$$

$$\begin{cases}F(000)=F(001)=F(010)=F(100)=\alpha_1=000\\F(011)=F(101)=F(110)=F(111)=\alpha_2=111\end{cases}$$

$$P_E=1-\frac{1}{M}\sum_{Y^3}\sum_{\alpha^*}p(\beta_i|\alpha_i)\approx 3\times10^{-4}$$

$n=5$ $\qquad P_E\approx10^{-5}$

$n=7$ $\qquad P_E\approx10^{-7}$

$n=9$ $\qquad P_E\approx10^{-8}$

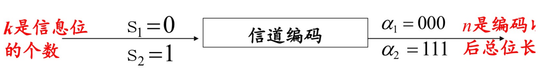
$n=11$ $\qquad P_E\approx10^{-10}$

2. 分析:

- 在输入符号集（M个信源符号）等概的条件下，每个符号平均携带的最大信息量是 $logM$
- 当用n长码元符号来传输信源符号时，每个码符号携带的平均信息量，即（信道）编码信息率/信息传输率：

$$R=\frac{H(S)}{\bar{L}}=\frac{logM}{n}=\frac{log2^k}{n}=\frac{k}{n}\ \text{比特/码元符号}$$

- 不重复编码时(n=k)，R=1（比特/ 码元符号）
- k=1时，重复编码时(n=3), $R=\frac{1}{3}$（比特/ 码元符号）



6.3.2 汉明距离

(1) $\alpha_i = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, $\beta_j = y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_n}$. 表示$n$长二元码符号序列.

汉明距离 $D(\alpha_i,\beta_j) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\oplus y_{jk}$ 异或. 非负，对称，三角不等式

(2) 最小汉明距离:

在二元码C中，任意两个码字之间的汉明距离最小值.

$D_{min} = \min[D(w_i, w_j)]$, $w_i \neq w_j$, $w_i, w_j \in C$

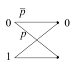
eg.

	C_1	C_2	
α_1	000	000	C_1: $D_{min} = 2$
α_2	011	001	C_2: $D_{min} = 1$
α_3	101	010	
α_4	110	100	

(3) 最小汉明距离准则: MD

设$\alpha_i = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$和$\beta_j = y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_n}$表示表示两个长度为$n$的码符号序列，$\alpha_i$为信道的输入，$\beta_j$为信道的输出。$\alpha_i$和$\beta_j$的汉明距离为D。

对于离散平稳无记忆二元对称信道，$p < \bar{p}$，



$$p(\beta_j|\alpha_i) = p(y_{j_1}y_{j_2}\cdots y_{j_n}|x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = \prod_{k=1}^{n} p(y_{j_k}|x_{i_k}) = (p)^D(\bar{p})^{n-D}$$

极大似然译码准则：$p(\beta_j|\alpha^*) \geq p(\beta_j|\alpha_i) \quad \forall i$

通常情况下，$\boxed{\bar{p} > p}$，D越小，$p(\beta_j|\alpha_i)$就越大。

$\boxed{D(\alpha^*, \beta_j) = D_{min}(\alpha_i, \beta_j)}$