3.3 平均互信息的特性

1. 平均互信息

$$I(X;Y) = E[I(x_i;y_j)]$$

$$= H(X) - H(X|Y)$$

表征信道实际传输的信息量（接收到）

发出

2. 平均互信息的性质：

互信息可负，但平均互信息非负。

(1) 非负性： $I(X;Y) \geq 0$

def: $I(X;Y) = -\sum_i\sum_j p(x_i y_j)\log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}$

$= \sum_i\sum_j p(x_i y_j)\log\frac{p(x_i y_j)}{p(x_i)p(y_j)}$

$-I(X;Y) = \sum_i\sum_j p(x_i y_j)\log\frac{p(x_i)p(y_j)}{p(x_i y_j)} \overset{\text{詹森(二强)}}{\leq} \log\sum_i\sum_j p(x_i)p(y_j) = 0$

$\Rightarrow I(X;Y) \geq 0$

证毕（X、Y独立取等）

(2) 对称性： $I(X;Y) = I(Y;X)$

def: $I(X;Y) = \sum_i\sum_j P_{ij}\, I(x_i;y_j) = \sum_i\sum_j P_{ij}\, I(y_j;x_i) = I(Y;X)$

证毕

(3) 极值性： $I(X;Y) \leq H(X)$

$I(X;Y) \leq H(Y)$

$\Rightarrow I(X;Y) \leq \min\{H(X), H(Y)\}$

(4) 凸性定理：① 固定信道，即 $p(y_j|x_i)$ 固定时，$I(X;Y)$ 是输入信源概率分布的上凸函数。

② 固定信源，即 $p(x_i)$ 分布固定时，$I(X;Y)$ 是信道传递概率 $p(y_j|x_i)$ 的下凸函数。

def①: $p(y_j|x_i)$ 固定，对分布 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$，求证 $P(x) = \theta P_1(x) + \bar{\theta} P_2(x)$ 有：

$$I[P(x);Y] \geq \theta I[P_1(x);Y] + \bar{\theta} I[P_2(x);Y]$$

有： $\theta\cdots + \bar{\theta}\cdots - I\cdots$

$= \theta\sum_i\sum_j p_1(x_i y_j)\log\frac{p(y_j|x_i)}{p_1(y_j)} + \bar{\theta}\cdots - \sum_i\sum_j[\theta p_1(x_i) + \bar{\theta} p_2(x_i)]p(y_j|x_i)\log\frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$

$= \theta\cdots + \bar{\theta} - \theta\sum_i\sum_j p_1(x_i y_j)\cdots - \bar{\theta}\sum_i\sum_j p_2(x_i y_j)\cdots$

$= \theta\sum_i\sum_j p_1(x_i y_j)\log\frac{p(y_j)}{p_1(y_j)} + \bar{\theta}\cdots$

$= \theta\sum_j p_1(y_j)\log\frac{p(y_j)}{p_1(y_j)} + \bar{\theta}\cdots$

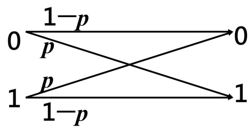
$\overset{\text{詹森}}{\leq} \theta\log\sum_j p(y_j) + \bar{\theta}\cdots = 0+0 = 0$

证毕

def ③： 同①

举例：例3.4：二进制对称信道，输入X概率分布，即信源概率空间为：$\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 1-\omega \end{bmatrix}$

信道如图：

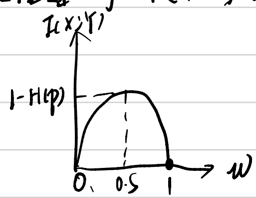


试分析平均互信息与信源概率分布的关系

$p(x) = (w, 1-w)$ $P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$. $P_Y = P_X P_{Y|X} = (w\bar{p} + \bar{w}p,\ wp + \bar{w}\bar{p})$

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(w\bar{p}+\bar{w}p) - \sum_i p(x_i) H(Y|x_i) \\ &= H(w\bar{p}+\bar{w}p) - H(p) \sum_i p(x_i) \\ &= H(w\bar{p}+\bar{w}p) - H(p) \end{aligned}$$

① 固定信道：p 固定．当 $w=\bar{w}=\frac{1}{2}$ 时，$I(X;Y) = H(\frac{1}{2}) - H(p) = 1 - H(p)$．取最大．



② 固定信源：w 固定．当 $p=0$，$I(X;Y) = H(w)$

当 $p=1$，$I(X;Y) = H(w)$ 无噪

当 $p=0.5$，$I(X;Y) = H(\frac{1}{2}) - H(\frac{1}{2}) = 0$. 最差信道．