Les jeux transfinis et l'exponentialle sequoïdale

John Gowers

3 novembre 2016

Résumé

Laird [Lai02] introduit la notion d'une *catégorie sequoïdale* – un augmentation d'une catégorie monoïdale par un nouveau connecteur $\oslash$ (le *sequoïde*) dont il y a un modèle naturel construit par utilisation de la sémantique des jeux. On peut utiliser le connecteur sequoïdal dans ce modèle pour présenter le connecteur exponentiel $A \mapsto !A$ de [Hyl97] et [AJM00] comme coalgèbre finale. En supposant des autres hypothèses, on peut démontrer que cette coalgèbre finale $!A$ a la structure d'un comonoïde commutatif libre sur A, et est donc un modèle approprié pour le connecteur exponential de la logique linéaire. Les auteurs de [CLM13] rémarquent que il ne semble pas possible de construire les comonoïdes commutatifs libres en n'utilisant que la théorie axiomatique des catégories sequoïdales. Je montrerai que ceci est en effet impossible, par présenter une catégorie sequoïdale dans laquelle la coalgèbre finale $!A$ n'admet pas la structure d'un comonoïde commutatif libre. Je parlerai des façons dont ce modèle transfini peut inspirer l'étude du modèle finitaire habituel.

1 La sémantique des jeux pour la logique linéaire

Je commence par examiner la sémantique des jeux. Nos jeux seront joués par deux joueurs - la Joueuse (J) et l'Opposant (O). Les jeux qui nous considérons seront très générals : chaque joueur a un ensemble de coups et les deux joueurs prennent des tours en construisant une partie – c'est à dire, une séquence des coups – selon les règles du jeu qui disent quels coups sont authorisés dans une position particulière, et quel joueur a gagné au fin du jeu. Normalement, l'Opposant fait le premier coup.

On peut aussi faire la définition d'une stratégie pour un jeu, pour la Joueuse ou pour l'Opposant.

Nous construisons les nouveaux jeux des vieux selons les *connecteurs* de la sémantique des jeux : le produit tensoriel $\otimes$ et l'implication linéaire $\multimap$. Le jeu $A \otimes B$ se compose d'une copie du jeu A et une copie du jeu B, qui sont joués en parallèle. L'Opposant peut choisir de jouer dans l'un jeu ou dans l'autre, mais il faut que la Joueuse fasse son coup dans le jeu dans lequel l'Opposant vient de jouer.

Le jeu $A \multimap B$ se compose aussi d'une copie du jeu A et d'une copie du jeu B, qui sont joués en parallèle, sauf que dans le jeu A, les joueurs jouent les rôles opposites – c'est à dire, l'Opposant joue comme joueuse et la joueuse joue comme Opposant. Cette fois, c'est la Joueuse qui peut choisir dans quel jeu elle veut jouer, et l'Opposant qui doit suivre dans le même jeu.

On peut maintenant construire une catégorie dont les objets sont les jeux et dont les flèches entre les jeux A et B sont les stratégies pour la Joueuse pour le jeu $A \multimap B$. Il y a un notion naturel de composer une stratégie pour $A \multimap B$ avec une stratégie pour $B \multimap C$, et cette composition est associative.

Ensuite, le connecteur tensoriel nous donne la structure d'une categorie monoiïdale et le connecteur implicative nous donne la structure d'une categorie monoïdale fermée.

On appel cette catégorie $\mathcal{G}$.

Soit A, B des jeux et soit σ une stratégie pour $A \multimap B$. On dit que σ est une stratégie *stricte* si la Joueuse, après le premier coup de l'Opposant dans B, doit faire son premier coup dans A. Alors, si on compose deux stratégies strictes, la composition est stricte aussi, et ça nous donne une autre catégorie $\mathcal{G}_s$.

2 L'exponentielle de Hyland

Je commence par examiner la sémantique des jeux pour le connecteur exponentiel dans la logique linéaire. Il y a plusieurs versions de l'exponentielle dans la sémantique des jeux, mais je vais me concentrer sur l'exponentielle de Hyland et de AJM. À partir d'un jeu A, on forme le jeu $!A$ qui se compose d'une infinité de copies de A - $A_0, A_1, A_2, \ldots,$ jouées en parallèle, et il est inderdit de jouer dans le jeu A_{n+1} si personne n'a pas encore joué dans le jeu A_n.

Pour présenter ce jeu comme modèle pour l'exponentielle, il suffit de montre qu'il a la structure du comonoïde commutatif libre sur A. Le comultiplication

$$!A \to !A \otimes !A$$

est la stratégie «copycat» dans laquelle la Joueuse ouvre une copie de A sur la gauche pour chaque copie de A qui l'Opposant ouvre sur la gauche. À la suite de la restriction sur l'ordre dans lequel on peut ouvrir les copies de A, il n'y a qu'une copie de A sur la gauche que la Joueuse peut choisir ; donc, ce comultiplication est associatif.

Certaines recherches par Melliès, Tabareau et Tasson [MTT09] font construire cette exponentielle, dans un contexte plus général théoriques de catégorie, comme limite du système projectif :

$$1 \leftarrow A \leftarrow \widetilde{\bigotimes_2} A \leftarrow \widetilde{\bigotimes_3} A \leftarrow \cdots$$

où

$$\widetilde{\bigotimes_n} A$$

est le produit tensoriel symmetrisé – le coégaliseur de l'action du groupe S_n sur le produit tensoriel iteré

$$\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n}$$

3 Le connecteur séquoïdal

Je vais examiner une autre approche, lancée par Jim Laird [Lai02]. Au lieu de prendre le coégaliseur du produit tensoriel iteré sous l'action de S_n, on introduit un nouveau connecteur non-standard – le connecteur *séquoïdal* $\oslash$. Ce connecteur

$$A \oslash B \quad \text{«}A \textit{ séquoïde } B\text{»}$$

fonctionne presque exactement comme le produit tensoriel, sauf que l'Opposant doit jouer le premier coup dans le jeu A sur la gauche. Soit $\mathcal{G}$ la catégorie des jeux. Le connecteur séquoïdale donne naissance pas à un foncteur

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

mais à un foncteur

$$\mathcal{G}_s \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}_s$$

Ici, $\mathcal{G}_s$ est la catégorie dont les objets sont les jeux et dont les flèches sont les stratégies *strictes*

$$\sigma\colon A \multimap B$$

dans lesquelles la Joueuse, après le premier coup de l'Opposant dans B, doit faire son premier coup dans A.

Maintenant, soit A un jeu fixe. On arrive à un endofoncteur

$$A \oslash \_ : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

et on récupère l'exponentielle $!A$ comme coalgèbre finale de cet endofoncteur.

4 Les catégories séquoïdales

On veut généraliser tout ça, en présentant la définition d'une catégorie séquoïdale, dont la catégorie des jeux est le prototype. On commence avec l'identité

$$(A \oslash B) \oslash C \cong A \oslash (B \otimes C)$$

qui vaut dans la catégorie des jeux. En fait, c'est un action de la catégorie monoïdale $\mathcal{G}$ sur la catégorie $\mathcal{G}_s$.

On présente la définition : une catégorie séquoïdale se compose d'une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, d'une catégorie $\mathcal{C}_s$ et d'une action à droite de $\mathcal{C}_s$ sur $\mathcal{C}$:

$$\texttt{passoc}\colon (A \oslash B) \oslash C \to A \oslash (B \otimes C)$$

On a besoin aussi d'un foncteur

$$J\colon \mathcal{C}_s \to \mathcal{C}$$

(dans la catéorie de jeux, c'est l'injection canonique. Enfin, on a besoin d'une transformation naturelle

$$\mathrm{wk}\colon J(A) \otimes B \to J(A \oslash B)$$

qui satisfait une condition supplémentaire de compatibilité.

À partir de maintenant, nous considérons que C_s est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, pleine sur les objets, qui contient les isomorphisms monoïdals, que J est l'injection canonique et que J est un foncteur conservatif.

Soit $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \mathcal{C}_s)$ une catégorie séquoïdale. On dit que $\mathcal{C}$ est *Cartésienne* si $\mathcal{C}_s$ a tous les produits et qui J préserve ces produits. En outre, on dit que $\mathcal{C}$ est *décomposable* si on peut décomposer le produit tensoriel comme

$$A \otimes B \cong A \oslash B \times B \oslash A$$

et que $\mathcal{C}$ est *distributive* si le produit distribue sur le séquoïde :

$$(A \times B) \oslash C \cong (A \oslash C) \times (B \oslash C)$$

5 Le comonoïde commutatif libre dans les catégories séquoïdales

Enfin, on suppose que l'endofoncteur

$$A \oslash \_ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

admet une coalgèbre finale, qui nous appelerons $!A$. On veut construire la structure d'un comonoïde commutatif sur $!A$, et montrer que ce comonoïde est le comonoïde commutatif libre sur A.

Il s'avère que si on suppose aussi que la flèche naturelle

$$!A \otimes !B \to !(A \times B)$$

est une isomorphisme, alors on peut construire la structure d'un comonoïde

$$!A \to !A \otimes !A$$

à partir de la flèche diagonale

$$A \xrightarrow{\Delta} A \times A$$

et on peut montrer que ce comonoïde est libre sur A.

Sans cette hypothèse, est-ce qu'on peut construire le comonoïde commutatif libre ?

6 Les jeux transfinis

La réponse est non. J'ai construit une catégorie séquoïdale dont les objets sont les jeux *transfinis*, dans lesquels les parties peuvent posseder une longueur transfinie. Dans ces catégories, on peut construire le foncteur $A \oslash \_$, et ce foncteur admet une coalgèbre finale $!A$, qui peut être construit comme dans le cas finitaire : $!A$ se compose des jeux $A_0, A_1, \ldots$, indexés par l'ordinal ω.

Pourtant, dans les catégories des jeux transfinis, ce jeu n'a pas la structure naturelle d'un comonoïde. Examinez la stratégie pour le jeu

$$!A \multimap !A \otimes !A$$

où la Joueuse essaie à copier les coups de l'Opposant sur la droite dans les copies de A sur la gauche. Supposons que l'Opposant ouvre tous les copies de A dans la copie de $!A$ sur la gauche du produit tensoriel $!A \otimes !A$. Au temps ω, l'Opposant aurait pu ouvert tous ces copies du jeu A.

Ensuite, on dépasse l'ordinal ω, et l'Opposant décide d'ouvrir une copie de A à l'extrême droite. Mais maintenant, il n'y a pas de copies de A sur la gauche pour la Joueuse.

On peut aussi vérifier que l'identité

$$!A \otimes !B \cong !(A \times B)$$

est faux pour les jeux transfinis.

7 Que faire ?

Je veux voir si il y a une autre hypothèse sur les catéories séquoïdales, dans laquelle on peut démonstrer que la coalgèbre finale $!A$ a la structure d'un comonoïde commutatif libre sur A. J'espère que cette hypothèse puisse se présenter en fonction des connecteurs tensoriel $\otimes$ et séquoïdale $\oslash$, et pas sous forme de la coalgèbre finale elle-même.

Bien sûr, cette hypothèse sera nécessairement faux dans les catégories des jeux transinis. J'espère que cela nous aidera à la chercher.

8 La séquence finale

J'ai aussi étudié la séquence finale pour l'endofoncteur $A \oslash \_$. Rappelons que si $\mathcal{C}$ est une catégorie et si $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un endofoncteur, alors on peut counstruire une séquence d'objects de $\mathcal{C}$, indexée par les ordinals, par appliquer cet endofoncteur et prendre les limites.

On construit ainsi un foncteur

$$\mathcal{FS}_{\mathcal{F}}\colon \mathbf{Ord}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$$

Si

Références

[AJM00] Samson Abramsky, Radha Jagadeesan, and Pasquale Malacaria. Full abstraction for PCF. *Information and Computation*, 163(2) :409 – 470, 2000.

[CLM13] Martin Churchill, Jim Laird, and Guy McCusker. Imperative programs as proofs via game semantics. *CoRR*, abs/1307.2004, 2013.

[Hyl97] Martin Hyland. Game semantics. *Semantics and logics of computation*, 14 :131, 1997.

[Lai02] J. Laird. A categorical semantics of higher-order store. In *Proceedings of CTCS '02*, number 69 in ENTCS. Elsevier, 2002.

[MTT09] Paul-André Melliès, Nicolas Tabareau, and Christine Tasson. *An Explicit Formula for the Free Exponential Modality of Linear Logic*, pages 247–260. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.