1 Grenseverdier

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 1) La

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Vis at

   i) f er kontinuerlig i $(x,y) = (0,0)$,

   ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer, men f er ikke deriverbar i $(0,0)$.

b) La $g(t) = (at, bt)$ med konstanter a og b ulik 0 og verifiser at

$$(f \circ g)'(0) = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, \qquad \text{men} \qquad \nabla f(0,0) \cdot g'(0) = 0\,.$$

Forklar at dette ikke er i strid med kjerneregelen.

Oppgave 2 (K2016, Oppgave 1)

a) Vis at $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

b) La $f(w,x,y,z) = w - x^2y^3z$. Beregn grenseverdien:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(5,2,1+h,-1) - f(5,2,1,-1)}{h}.$$

Oppgave 3 (V2016, Oppgave 1) La

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Oppgave 4 (K2015, Oppgave 1) La

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Vis at $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer

b) Vis at f ikke er deriverbar i $(0,0)$ ved å vise at f ikke er kontinuerlig i $(0,0)$.

Oppgave 5 (K2014, Oppgave 3) Begrunn at funksjonen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

er kontinuerlig.

Oppgave 6 (K2013, Oppgave 3) Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke eksisterer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Oppgave 7 (K2012, Oppgave 5) Funksjonen f er gitt ved

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

a) Vis at f er kontinuerlig i origo.

b) En kan vise at f ikke er kontinuerlig deriverbar i origo. Vis likevel at den retningsderiverte

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t}$$

eksisterer for alle enhetsvektorer $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$.

Oppgave 8 (V2010, Oppgave 3) Gitt funksjonen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{Ax^3+By^3-xy}{2x^2+2y^2} & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Bestem konstanter A og B slik at $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) La nå $A = 6$ og $B = 0$. Er f kontinuerlig i origo for dette valget av konstanter?

2 Gradient

Oppgave 1 (V2015, Oppgave 2)
Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er deriverbar. Vi vet også at den retningsderiverte i $(1,0)$ langs positiv x-akse er 5, og at den retningsderiverte i $(1,0)$ langs linja $y = x - 1$ i retning av positiv y, er -2. Hva er gradienten til f i $(1,0)$?

Oppgave 2 (K2014, Oppgave 5)
Anta at et fjell har form som en elliptisk paraboloide $z = c - ax^2 - by^2$, der a, b og c er positive konstanter, x og y er øst–vest og nord–sør koordinater på kartet, mens z er høyden over havet.

a) I hvilken retning stiger høyden mest i punktet $(1,1)$?

b) Hvis en klinkekule slippes i $(1,1,c-a-b)$, i hvilken retning vil den begynne å trille?

Oppgave 3 (V2014, Oppgave 2)
La $T(x,y,z) = e^{x+2y+3z}$ være temperaturen i et romlig område om origo.

I hvilke retninger fra $(0,0,0)$ vokser og avtar temperaturen mest?

Hva er den retningsderiverte i disse retningene?

Oppgave 4 (V2012, Oppgave 2) Finn den retningsderiverte av funksjonen $f(x,y,z) = e^{-x^2}y - \log(1+e^z)$ i punktet $(1,1,0)$ i retningen fra $(1,1,0)$ til $(-1,2,1)$.

3 Epsilon-Delta

Oppgave 1 (V2014, Oppgave 8) La funksjonen $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oppfylle

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$$

for alle $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ i A for positive konstanter K og α. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

4 Kjerneregelen

Oppgave 1 (V2016, Oppgave 2) Anta at en flue beveger seg langs en kurve C i $\mathbb{R}^3$ slik at posisjonen til flue er gitt ved $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ ved tiden $t \subset [0, \infty)$.

b) La $T(x, y, z) = x^2 + xz + y$ være temperaturen i punktet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Finn $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\mathbf{c}(t)$ altså temperaturendringen flua vil oppleve ved tiden $t = 1$.

Oppgave 2 (V2016, Oppgave 6) Med definisjonen $\nabla^2 := \nabla \cdot \nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, kalles en C^2-funksjon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som tilfredstiller ligningen

$$\nabla^2 f = 0$$

for *harmonisk*. Ved at for et vilkårlig reelt tall k er funksjonen $f(x, y) = e^{kx}(\cos ky)$ harmonisk.

Oppgave 3 (V2015, Oppgave 4) Vis at hvis akselerasjonen $\mathbf{a}(t)$ til en punktmasse alltid er perpendikulær på hastigheten $\mathbf{v}(t)$, så er farten $\|\mathbf{v}\|$ konstant. (Hint: $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

Oppgave 4 (K2014, Oppgave 2) Gitt $z = f(x, y)$ der f er en deriverbar funksjon og $x = u^2 - v^2$, $y = v^2 - u^2$. Vis at

$$u\frac{\partial z}{\partial v} + v\frac{\partial z}{\partial u} = 0\,.$$

Oppgave 5 (V2014, Oppgave 1) Gitt $z = f(x, y)$ der f er en deriverbar funksjon, $x = u + v$ og $y = u - v$. Finn $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ og vis at

$$\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Oppgave 6 (V2013, Oppgave 1) Fra fysiske lover kan en se at om K er et homogent legeme i $\mathbb{R}^3$, så må temperaturen $T = T(x, y, z)$ i K være en løsning til *varmelikningen*

$$k\left(\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

der (x, y, z) er posisjonen i legemet, t er tiden, og k er en materialkonstant.

Vis at $T(x, y, z, t) = 2x - y + z$ er en løsning til varmelikningen.

Oppgave 7 (V2012, Oppgave 4) Vi sier at $f(x, y)$ er harmonisk hvis f er to ganger kontinuerlig deriverbar og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Vis at hvis g er harmonisk så er også $f(x, y) = g(x^2 - y^2, 2xy)$ harmonisk.

5 Taylor-approksimasjon

Oppgave 1 (K2016, Oppgave 3) La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i punktet $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

6 Tangenter

Oppgave 1 (K2016, Oppgave 2) La C være en kurve som er parametrisert ved

$$\mathbf{c}(t) = (t^2, 2t, 4 - t), \qquad -2 \leq t \leq 2.$$

a) Vis at punktet $(0, 0, 4)$ ligger på kurven og finn en tangentvektor til kurven i dette punktet som har lengde 1.

b) Finn en ligning for tangentplanet som er ortogonalt til kurven i punktet $(0, 0, 4)$.

Oppgave 2 (K2015, Oppgave 3) Finn ligningen for tangentplanet til flaten $x^2 + y^2 - e^{xz} - \sin y = 0$ i punktet $(1, 0, 0)$ og bruk denne til å finne en tilnærmet verdi for x i det punktet på flaten som ligger i nærheten av $(1, 0, 0)$ med $y = z = 1/10$.

Oppgave 3 (V2015, Oppgave 1) Finn en ligning for tangentplanet til ellipsoiden

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$$

i punktet $(1, -1, 2)$.

Oppgave 4 (K2014, Oppgave 1) Finn ligningen for tangentplanet til flaten $x^2 + z^2 - e^{xy} - \sin z = 0$ i punktet $(1, 0, 0)$.

Oppgave 5 (K2013, Oppgave 1) Finn en ligning for tangentplanet til flaten $z^2 = 2x^2 - y^2$ i punktet $(1, -1, 1)$.

Oppgave 6 (V2013, Oppgave 3) En kurve C er parametrisert med

$$\mathbf{c}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (4-t)\mathbf{k}, \qquad -2 \le t \le 2\,.$$

a) Vis at punktet $(1, 2, 3)$ ligger på kurven C, og finn en tangentvektor til kurven i dette punktet, med lengde 1.

b) Finn en likning for planet som står normalt på kurven i punktet $(1, 2, 3)$.

Oppgave 7 (V2012, Oppgave 1) Finn en parameterfremstilling for den rette linja gjennom $P = (1, 2, 3)$ parallell med vektoren $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

7 Kritiske punkter

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 3)

a) Finn og klassifiser alle kritiske punkt til $f(x, y) = x^3 - y^2 - 3x - 6y - 1$.

b) Finn den største og minste verdien til $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ på kvartsirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \ge 0$.

Oppgave 2 (K2016, Oppgave 4) La $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x, y) = e^{xy}$.

a) Finn og klassifiser alle kritiske punkter til f.

b) Hvor oppnår f sitt maksimum og minimum når $2x^2 + y^2 = 1$?

Oppgave 3 (V2016, Oppgave 3)

a) Finn og klassifiser alle kritiske punkter av $f(x, y) = 2x^2 + 4xy + y^4$.

b) Hvor oppnår $f(x, y) = (x - y)^2$ sitt maksimum og minimum når $x^2 + y^2 = 2$?

Oppgave 4 (K2015, Oppgave 4) Funksjonen f er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$.

a) Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

b) Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

Oppgave 5 (V2015, Oppgave 3) Bestem den største og minste verdien som funksjonen $f(x, y) = xy$ oppnår i området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leq 3\}.$$

Oppgave 6 (K2014, Oppgave 6) La $f(x, y) = 3x^2y - y^3 + x^4$.

a) Finn alle kritiske punkt til f og klassifiser disse som lokale maksimum, lokale minimum eller saddelpunkt.

b) Har f et globalt (absolutt) maksimum? Et globalt (absolutt) minimum?

Oppgave 7 (K2013, Oppgave 3) Finn og klassifiser alle de kritiske punktene til

$$f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

Oppgave 8 (V2013, Oppgave 4) Vi lar funksjonen $f(x, y) = x^3 - xy^2 - 2x^2 + y^2$ ha hele planet som definisjonsområdet.

a) Finn alle kritiske punkt til f og klassifiser disse som lokale maksimum, lokale minimum eller saddelpunkt.

b) Har f globale maksimum eller minimum? Finn i så fall disse.

Oppgave 9 (K2012, Oppgave 2) Finn største og minste verdi til funksjonen $f(x, y, z) = z$ langs skjæringskurven mellom flatene $x^2 + 2y^2 = 1$ og $z = x - 4y$.

Oppgave 10 (V2012, Oppgave 3) Finn maximumsverdien av funksjonen

$$f(x, y) = 2x + y - x^2 - 2y^2 + 3.$$

Oppgave 11 (V2012, Oppgave 6) Finn minimumsverdien av funksjonen $f(x, y) = xy$ på ellipsen $g(x, y) = x^2 + 2y^2$.

8 Optimering

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 2) La t betegne tiden. Banen til romskip A er gitt ved

$$\mathbf{r}_A(t) = (t, t^2, t^2 - t)$$

og banen til romskip B er gitt ved

$$\mathbf{r}_B(t) = (8 - t, t^2 - 4, t^2 - 2t).$$

Ved hvilken tid $t \geq 0$ er det minst avstand mellom skipene?

Oppgave 2 (K2014, Oppgave 7) Finn punktene på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som er nærmeste og lengst fra punktet $(2, 2, 1)$.

Oppgave 3 (K2013, Oppgave 5) Finn det punktet på planet $3x - 2y + z = 7$ som ligger nærmest origo.

Oppgave 4 (V2013, Oppgave 2) I USA definerer postverket "størrelsen" ("size") til en pakke som summen av lengde (length) og "girth", der "girth" er omkretsen normal på lengden. "Størrelsen"/"size" kan ikke være mer enn 130 tommer.

Hva er største volum (i kubikktommer) en rektangulær pakke kan ha?

9 Linjeintegral

Oppgave 1 (K2016, Oppgave 5) La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$.

a) Hva er verdien av integralet $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, der C er en sirkel med radius $a > 0$?

Oppgave 2 (V2016, Oppgave 2) Anta at en flue beveger seg langs en kurve C i $\mathbb{R}^3$ slik at posisjonen til flue er gitt ved $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ ved tiden $t \subset [0, \infty)$.

a) Dersom flue starter med å fly ved $t = 0$ og farten er gitt i meter per sekund, hvor mange meter tilbakelegger flue i løpet av 10 sekunder?

Oppgave 3 (K2015, Oppgave 2) Finn buelengden til kurven med parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \qquad \text{for } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

10 Konservative vektorfelt

Oppgave 1 (V2016, Oppgave 5) La $\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Beregn linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r},$$

a) C er kurven parametrisert ved $\mathbf{r}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + (\sin t)^2\mathbf{k}$.

b) C er en vilkårlig glatt kurve med startpunkt $(0,0,0)$ og endepunkt $(1, -2, \sqrt{2})$.

Oppgave 2 (K2015, Oppgave 6) La $\mathbf{F}(x,y,z) = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$. Verifiser at $\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0$ og finn en funksjon f slik at $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$.

Oppgave 3 (V2015, Oppgave 8) La $\mathbf{F}(x,y,z)$ være et vektorfelt i $\mathbb{R}^3$ gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

når C er kurven med parametrisering $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)J + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi/4$.

Oppgave 4 (V2014, Oppgave 6) Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2 I + xy\mathbf{j} + (2x^2 - z^2)K$.

a) Finn $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ og $\operatorname{div}\mathbf{F}$.

b) Grunngi at $\mathbf{F}$ hverken er gradienten til en C^2-funksjon, eller curl til et C^2-vektorfelt.

Oppgave 5 (K2013, Oppgave 2) Vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ er definert for alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ i rommet.

a) Vis at $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt.

b) La C være kurven i rommet med parametrisering $\mathbf{c}(t) = t^3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (1+t^2)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$. Finn

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Oppgave 6 (V2013, Oppgave 4) Vis sier at en funksjonen er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}\nabla f = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2. Dette viser med andre ord at et konservativt vektorfelt $\mathbf{F} = \nabla f$ er *rotasjonsfritt*.

Oppgave 7 (K2012, Oppgave 1) La $\mathbf{F}(x, y, z)$ være definert for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz\mathbf{i} + z(x^2 - 4yz^2)\mathbf{j} + y(x^2 - 6yz^2)\mathbf{k}.$$

a) Vis at $\mathbf{F}$ er et konservativt felt.

b) Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

der C er kurven i rommet gitt ved $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

Oppgave 8 (V2012, Oppgave 7) Finn arbeidet utført av kraften $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ på en partikkel som beveger seg på kurven $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ i tidsintervalet $t \in [0, 1]$.

11 Dobbelintegraler

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 4)

a) Beregn dobbelintegralet $\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}(x, y)$, der R er gitt ved $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 1$ og $y \geq 1$.

Oppgave 2 (V2016, Oppgave 4) La D være området i første kvadrant $(x \geq 0, y \geq 0)$ begrenset av $x = 0$, $y = 0$ og $y = \sqrt{1 - x^2}$. Beregn integralet av $f(x, y) = x^2 + y^2$ over D.

Oppgave 3 (V2016, Oppgave 4) Beregn dobbelintegralet

$$\iint_D (2x + y^2)\, \mathrm{d}(x, y)$$

når D er alle punkter i første kvadrant som ligger inni sirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 4$, men utenfor enhetskvadratet $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Oppgave 4 (V2015, Oppgave 5) Gitt $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9 \text{ og } -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$$

og $g(x, y) = 1 + y^2/2x$.

a) Finn volumet av området $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \text{ og } 0 \leq z \leq g(x, y)\}$.

Oppgave 5 (K2014, Oppgave 4) Bruk dobbelintegral til å finne arealet omsluttet av kurven $r = 1 + \sin\theta$ (i polarkoordinater).

Oppgave 6 (K2012, Oppgave 3) La R være området i xy-planet som er avgrenset av de to kurvene

$$3x^2 - y^2 = 3 \quad \text{for } x \geq 1 \qquad \text{og} \qquad x + y^2 = 11.$$

Skissèr de to kurvene og beregn integralet $\iint_R x\,\mathrm{d}A$.

Oppgave 7 (V2012, Oppgave 8) Finn integralet $\iint_D (x^2+y^2)^7\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ hvor D er sirkelen $x^2 + y^2 \leq 4$.

12 Integrasjonsrekkefølge

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 3)

c) Skisser integrasjonsområdet for

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,,$$

og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Oppgave 2 (K2016, Oppgave 5) Beregn dobbelintegralet

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ .$$

Oppgave 3 (V2014, Oppgave 4) Regn ut integralet

$$\int_0^2 \int_x^2 e^{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,,$$

ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.

13 Greens teorem

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 6)

b) Bruk Greens's teorem og et passende vektorfelt $\mathbf{F}$ til å beregne arealet av den elliptiske skiven begrenset av kurven C som er parametrisert ved

$$\mathbf{c}(t) = 3(\cos t + \sin t)\mathbf{i} + 2(\sin t - \cos t)\mathbf{j}, \qquad 0 \le t < 2\pi.$$

Oppgave 2 (V2014, Oppgave 5) Regn ut integralet

$$\int_C \Big(5y - e^{\sin x}\Big)\,\mathrm{d}x + \Big(10x - \sin(y^3 + 8y)\Big)\,\mathrm{d}y$$

der C er en sirkel med radius 2 og sentrum i (a, b). Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Oppgave 3 (K2013, Oppgave 6) La C være randen til trekanten i xy-planet med hjørner i $(0, 0)$, $(0, 1)$ og $(1, 1)$. Finn

$$\int_C e^{y^2 - x^2}(\cos 2xy)\,\mathrm{d}x + e^{y^2 - x^2}(\sin 2xy)\,\mathrm{d}y\ .$$

Oppgave 4 (V2012, Oppgave 9) Finn integralet

$$\int_C \Big(e^{x^2} + y\Big)\,\mathrm{d}x + \Big(2x - e^{y^2}\Big)\,\mathrm{d}y$$

lans sirkelen $x^2 + y^2 = 4$. Spesifiser om du regner ut integralet med eller mot klokken.

14 Trippelintegral

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 4)

b) Beregn trippelintegralet $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}(x, y, z)$, der D er gitt ved $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ og $z \ge 0$.

Oppgave 2 (K2013, Oppgave 7) La T være legemet gitt ved $x \ge 0,$, $y \ge 0$ og $0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. La S være overflaten til T orientert med enhetsnormal som peker ut av legemet T.

a) Finn $\iiint_T z\Big(x^2 + y^2\Big)\,\mathrm{d}V$.

Oppgave 3 (V2013, Oppgave 6) I denne oppgaven er

- S sfæren (kuleoverflaten) med sentrum i $(0, 0, 3)$ og radius 5, orientert slik at normalvektoren peker ut av kula.
- S^+ den delen av S som ligger over xy-planet, med samme orientering som S.
- T området avgrenset av S^+ og xy-planet.

a) Finn volumet til området T.

Oppgave 4 (K2012, Oppgave 6) Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$.

a) Finn volumet til T.

15 Divergensteoremet

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 5)

a) La T være flata gitt ved $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ og } 0 \leq z \leq 1\}$ og $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F} = (x + \sin(z^2 y), x^2 + z, 1 - z)$$

Regn ut $\operatorname{div} \mathbf{F}$ og finn

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$$

der normalvektoren $\mathbf{n}$ peker ut av T.

Oppgave 2 (K2016, Oppgave 7) La $\mathbf{F}(x, y, z) = (bxy, bx^2 y, (x^2 + y^2)z^2)$ og $W \subset \mathbb{R}^3$ være sylinderen

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, z \in [0, b]\}$$

der $a, b > 0$. Bruk Gauss' teorem til å finne $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.

Oppgave 3 (V2016, Oppgave 7) La $f\colon \mathbb{R}^3 \to R$ være en skalar C^2-funksjon og $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to R^3$ et C^1-vektorfelt. La $W \subset \mathbb{R}^3$ være et området der Gauss' (divergensteoremet) gjelder og ∂W overflata til W.

a) Vis at $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div}\mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$ og derfor

$$\iint_{\partial W} f\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iint_W f \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V + \iint_W \nabla f \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}V$$

b) Anta at

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x,y,z) &= 0 \qquad \text{når} \qquad (x,y,z) \in W \\ f(x,y,z) &= 0 \qquad \text{når} \qquad (x,y,z) \in \partial W. \end{aligned}$$

Vis at $f(x,y,z) = 0$ for alle $(x,y,z) \in W$.

Oppgave 4 (K2015, Oppgave 7) La S være delen av flata $z = 1 + x^2 + y^2$ som ligger inne i sylinderen $x^2 + y^2 = 1$, og la T være legemet begrenset av S og planet $z = 2$.

a) Gitt vektorfeltet $\mathbf{F} = f(x,y)\mathbf{i} + xg(x,y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, der f og g har kontinuerlige partiellderiverte som oppfyller

$$\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

for alle x, y.

Finn flateintegralet $\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, der enhetsnormalvektoren til S har *negativ* $\mathbf{k}$ komponent.

Oppgave 5 (V2014, Oppgave 7) La W være området i $\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$W := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le y \text{ og } x^2 + y^2 \le z \le 1\}$$

med rand S orientert slik at normalvektorene peker ut av W. La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, x^2, xz)$. Bestem

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Oppgave 6 (K2013, Oppgave 7) La T være legemet gitt ved $x \ge 0,$, $y \ge 0$ og $0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. La S være overflaten til T orientert med enhetsnormal som peker ut av legemet T.

b) Finn $\displaystyle\iint_S (x + \cos y, y + \sin z, z + e^x)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$

Oppgave 7 (K2012, Oppgave 6) Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T. La videre $\mathbf{F}$ være vektorfeltet definert ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$$

b) Regn ut $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$.

Oppgave 8 (V2012, Oppgave 5) Finn fluksen av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin y)^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

16 Stokes' teorem

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 5)

b) La S være ei kuleflate i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ett glatt vektorfelt. Vis at

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Oppgave 2 (V2015, Oppgave 9)
La S være sylinderflata $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{og } 0 \le z \le 1\}$. Finn

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

når $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ er et C^2-vektofelt i $\mathbb{R}^3$ der v_1 og v_2 ikke avhenger av z.

Oppgave 3 (K2014)
I denne oppgaven studerer vi de to flatene

$$S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 1\}$$
$$S_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1,\ z \ge 1\}$$

som berre er orientert slik at normalvektoren til S_1 i $(0, 0, 1)$ og S_2 i $(0, 0, 2)$ er $\mathbf{k}$.

a) Begrunn at hvis $\mathbf{F}$ er et C^1 vektorfelt i $\mathbb{R}^3$, så er

$$\iint_{S_1} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{S_2} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\ .$$

b) Finn verdien av integralene når $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + e^{x^2+z}\mathbf{k}$.

Oppgave 4 (V2013, Oppgave 6) I denne oppgaven er

- S sfæren (kuleoverflaten) med sentrum i $(0, 0, 3)$ og radius 5, orientert slik at normalvektoren peker ut av kula.
- S^+ den delen av S som ligger over xy-planet, med samme orientering som S.
- C er randen til S^+, med positiv orientering i samsvar med orienteringen til S^+.
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}$.

a) Finn en parametrisering for kurven C (husk orienteringen). Lag en skisse som viser S^+, C og T. Merk på orienteringene til S^+ og C.

c) Finn fluksen til $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ gjennom flaten S^+. Altså beregn $\int_{S^+} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.

Oppgave 5 (K2012, Oppgave 6) Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2+4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T. La videre $\mathbf{F}(x, y, z)$ være vektorfeltet definert ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}.$$

c) Regn ut $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$.

Oppgave 6 (V2012, Oppgave 5) La S være halvkula $x^2+y^2+z^2 = 4$ med $z \leq 0$ orientert nedover. La $\mathbf{F}(x, y, z) = x \tan(z/4)\mathbf{i} + xe^{e^{z^4}}\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$. Finn integralet $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$.

Grenseverdier: 8

Gradient: 4

Epsilon-Delta: 1

Kjerneregelen: 7

Taylor-approksimasjon: 1

Tangenter: 7

Kritiske punkter: 11

Optimering: 4

Linjeintegral: 3

Konservative vektorfelt: 8

Dobbelintegraler: 7

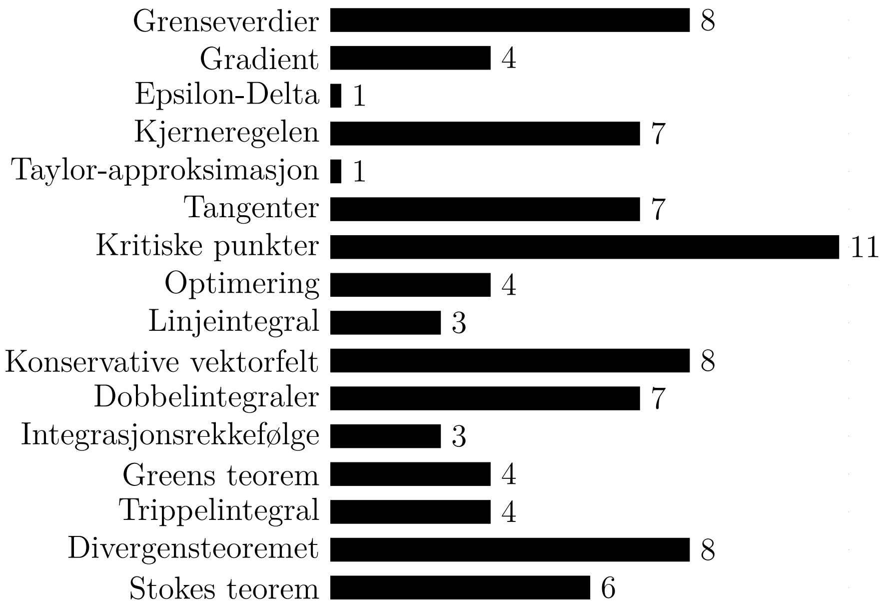
Integrasjonsrekkefølge: 3

Greens teorem: 4

Trippelintegral: 4

Divergensteoremet: 8

Stokes' teorem: 6


Grenseverdier 8
Gradient 4
Epsilon-Delta 1
Kjerneregelen 7
Taylor-approksimasjon 1
Tangenter 7
Kritiske punkter 11
Optimering 4
Linjeintegral 3
Konservative vektorfelt 8
Dobbelintegraler 7
Integrasjonsrekkefølge 3
Greens teorem 4
Trippelintegral 4
Divergensteoremet 8
Stokes teorem 6