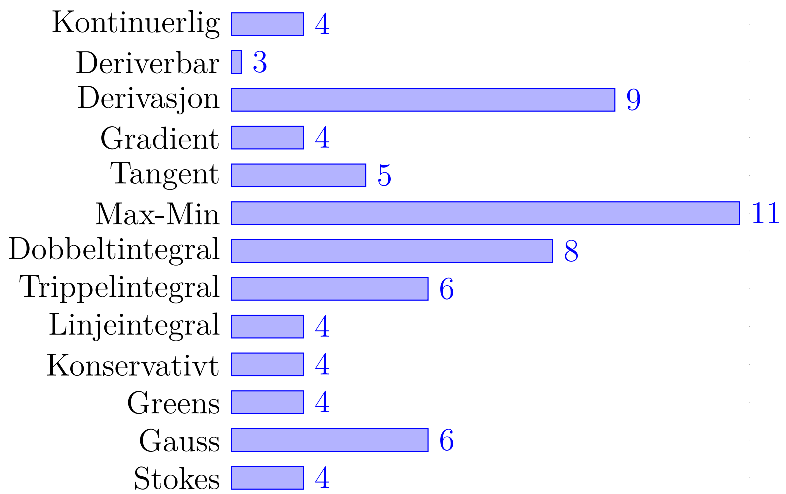
Norges teknisk-vitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1103
Flerdimensjonal analyse
Vår 2018

Grenseverdier.



The total number of chapters is 2, and

1 Grenseverdier

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 1)

La

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Vis at

i) f er kontinuerlig i $(x,y) = (0,0)$,

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer, men f er ikke deriverbar i $(0,0)$.

b) La $g(t) = (at, bt)$ med konstanter a og b ulik 0 og verifiser at

$$(f \circ g)'(0) = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, \qquad \text{men} \qquad \nabla f(0,0) \cdot g'(0) = 0\,.$$

Forklar at dette ikke er i strid med kjerneregelen.

Oppgave 2 (K2016, Oppgave 1)

a) Vis at $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

b) La $f(w,x,y,z) = w - x^2y^3z$. Beregn grenseverdien:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(5,2,1+h,-1) - f(5,2,1,-1)}{h}$$

Oppgave 3 (V2016, Oppgave 1)

La

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Oppgave 4 (K2015, Oppgave 1)

La

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Vis at $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer

b) Vis at f ikke er deriverbar i $(0,0)$ ved å vise at f ikke er kontinuerlig i $(0,0)$.

Oppgave 5 (K2014, Oppgave 3)

Begrunn at funksjonen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

er kontinuerlig.

Oppgave 6 (K2012, Oppgave 5)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

a) Vis at f er kontinuerlig i origo.

b) En kan vise at f ikke er kontinuerlig deriverbar i origo. Vis likevel at den retningsderiverte

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t}$$

eksisterer for alle enhetsvektorer $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$.

Oppgave 7 (V2010, Oppgave 3)

Gitt funksjonen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{Ax^3 + By^3 - xy}{2x^2 + 2y^2} & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Bestem konstanter A og B slik at $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) La nå $A = 6$ og $B = 0$. Er f kontinuerlig i origo for dette valget av konstanter?

2 Kjerneregelen

Oppgave 1 (V2010, Oppgave 3)

The total number of chapters is 2, and 7 and 1