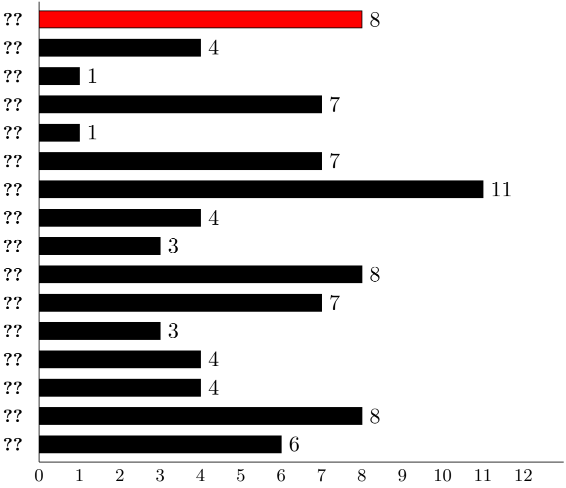
Flerdimhistorien på 90 minutter

s.ntnu.no/MA1103

Øistein Søvik

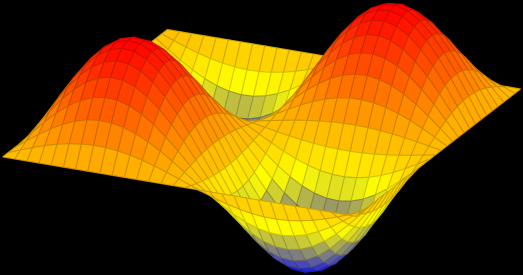
Mai 2018



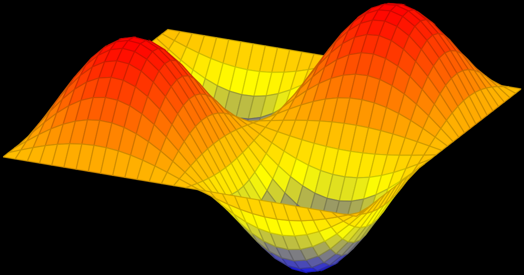
Plan:

1. Før pausen: Derivasjon 7 temaer
2. Etter pausen: Integrasjon 7 temaer
3. Hvert tema har inneholder introduksjon/intuisjon, oppgaveløsning.

Derivasjon



Derivasjon

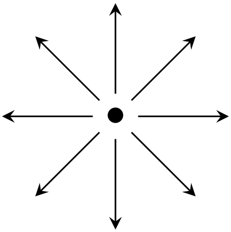


Divergens

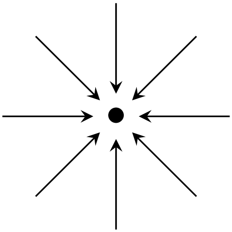
- Et vektorfelt kan betraktes som bevegelse av væsker eller gasser
- Divergens er *endring* i fluks. Altså en operator som tar inn et vektorfelt, og gir ut en skalar som viser hvor mye væsketettheten endrer seg i ett punkt.
- Formelen for divergens er

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \cdots$$

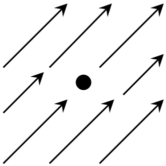
Hvor $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ er komponentene til $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.



$\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$



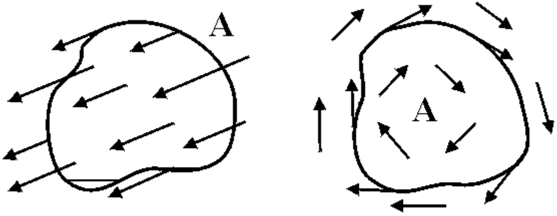
$\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$



$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$

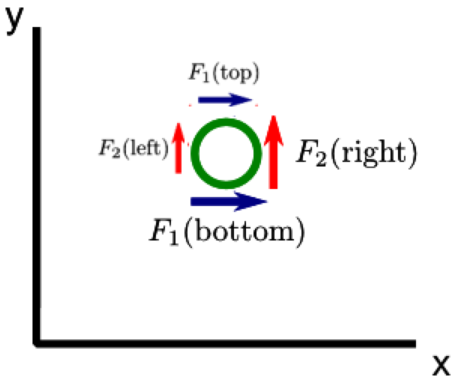
Curl

- Curlen viser hvor mye og i hvilken retning et vektorfelt “roterer”.
- Curlen er en vektor som peker i rotasjonsaksen og er proposjonal med rotasjonshastigheten.
- Dersom vektorfeltet roterer mot klokken sier vi at kurlen er positiv, mot klokken er den negativ, mens dersom vektorfeltet er rotasjonsfritt er kurlen null.
- $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$ og 2d-curl $\mathbf{F} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$.

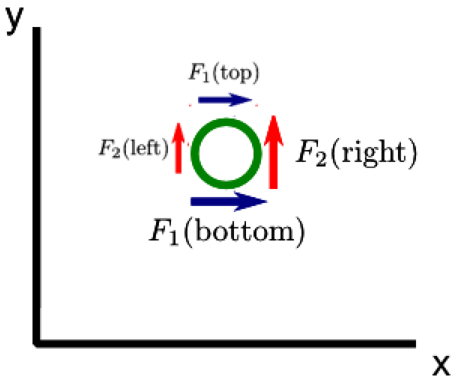


$\nabla \times \mathbf{A} = 0$ $\nabla \times \mathbf{A} < 0$

Curl

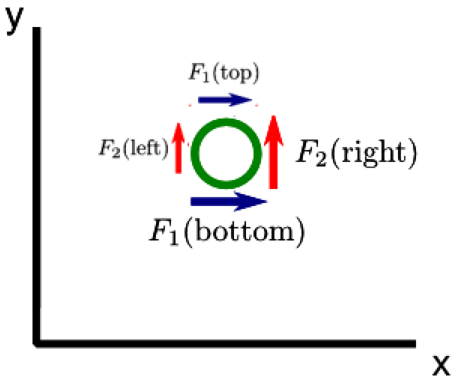


Curl



$$\text{2d-curl}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Curl



$$\text{2d-curl}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \qquad \text{og} \qquad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & & \\ & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\mathrm{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\mathrm{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} & \mathbf{j} & \\ \frac{\partial}{\partial x} & & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} & & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{curl}(\nabla f) &= \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}(\nabla f) &= \mathbf{i}\left(\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial}{\partial z}\tfrac{\partial f}{\partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial}{\partial z}\tfrac{\partial f}{\partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial}{\partial z}\tfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \mathbf{i}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \tfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \tfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \tfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)
\end{aligned}$$

V2013, Oppgave 4

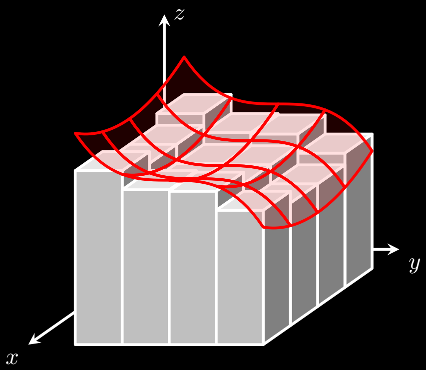
Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

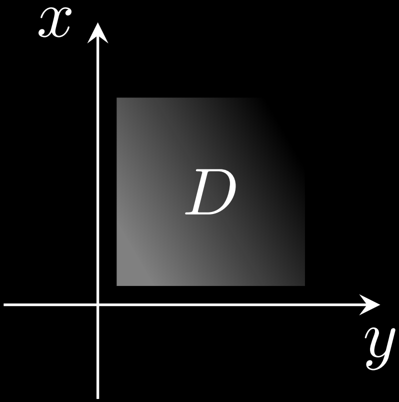
$$\begin{aligned}\operatorname{curl}(\nabla f) &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\end{aligned}$$

Siden funksjonen er C^2 er alle de kryss-partiellderiverte like slik at

$$= \mathbf{i}0 - \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0 = \mathbf{0}$$

Integrasjon





$$\iint_D \int_0^{f(x,y)} 1 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}(x,y) \qquad = \qquad \iint_D f(x,y) \, \mathrm{d}(x,y)$$