

1 Grenseverdier

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 1) La

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Vis at

- i) f er kontinuert i $(x, y) = (0, 0)$,
- ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer, men f er ikke deriverbar i $(0, 0)$.

b) La $g(t) = (at, bt)$ med konstanter a og b ulik 0 og verifiser at

$$(f \circ g)'(0) = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \quad \text{men} \quad \nabla f(0, 0) \cdot g'(0) = 0.$$

Forklar at dette ikke er i strid med kjerneregelen.

Oppgave 2 (K2016, Oppgave 1)

a) Vis at $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

b) La $f(w, x, y, z) = w - x^2 y^3 z$. Beregn grenseverdien:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5, 2, 1 + h, -1) - f(5, 2, 1, -1)}{h}.$$

Oppgave 3 (V2016, Oppgave 1) La

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Oppgave 4 (K2015, Oppgave 1) La

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^4}{x^2 + y^2}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- a) Vis at $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer
- b) Vis at f ikke er deriverbar i $(0, 0)$ ved å vise at f ikke er kontinuerlig i $(0, 0)$.

Oppgave 5 (K2014, Oppgave 3) Begrunn at funksjonen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

er kontinuerlig.

Oppgave 6 (K2013, Oppgave 3) Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke eksisterer

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Oppgave 7 (K2012, Oppgave 5) Funksjonen f er gitt ved

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

- a) Vis at f er kontinuerlig i origo.
- b) En kan vise at f ikke er kontinuerlig deriverbar i origo. Vis likevel at den retningsderiverte

$$D_{\mathbf{u}}f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t}$$

eksisterer for alle enhetsvektorer $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$.

Oppgave 8 (V2010, Oppgave 3) Gitt funksjonen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{Ax^3 + By^3 - xy}{2x^2 + 2y^2} & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- a) Bestem konstanter A og B slik at $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 3$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
- b) La nå $A = 6$ og $B = 0$. Er f kontinuerlig i origo for dette valget av konstanter?

2 Gradient

Oppgave 1 (V2015, Oppgave 2)

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er deriverbar. Vi vet også at den retningsderiverte i $(1, 0)$ langs positiv x -akse er 5, og at den retningsderiverte i $(1, 0)$ langs linja $y = x - 1$ i retning av positiv y , er -2 . Hva er gradienten til f i $(1, 0)$?

Oppgave 2 (K2014, Oppgave 5)

Anta at et fjell har form som en elliptisk paraboloid $z = c - ax^2 - by^2$, der a , b og c er positive konstanter, x og y er øst-vest og nord-sør koordinater på kartet, mens z er høyden over havet.

- a) I hvilken retning stiger høyden mest i punktet $(1, 1)$?
- b) Hvis en klinkekule slippes i $(1, 1, c - a - b)$, i hvilken retning vil den begynne å trille?

Oppgave 3 (V2014, Oppgave 2)

La $T(x, y, z) = e^{x+2y+3z}$ være temperaturen i et romlig område om origo.

I hvilke retninger fra $(0, 0, 0)$ vokser og avtar temperaturen mest?

Hva er den retningsderiverte i disse retningene?

Oppgave 4 (V2012, Oppgave 2)

Finn den retningsderiverte av funksjonen $f(x, y, z) = e^{-x^2}y - \log(1 + e^z)$ i punktet $(1, 1, 0)$ i retningen fra $(1, 1, 0)$ til $(-1, 2, 1)$.

3 Epsilon-Delta

Oppgave 1 (V2014, Oppgave 8)

La funksjonen $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ oppfylle

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$$

for alle \mathbf{x} og \mathbf{y} i A for positive konstanter K og α . Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

4 Kjernerregelen

Oppgave 1 (V2016, Oppgave 2) Anta at en flue beveger seg langs en kurve C i \mathbb{R}^3 slik at posisjonen til flue er gitt ved $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ ved tiden $t \in [0, \infty)$.

b) La $T(x, y, z) = x^2 + xz + y$ være temperaturen i punktet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Finn $\frac{dT}{dt}\mathbf{c}(t)$ altså temperaturendringen flua vil oppleve ved tiden $t = 1$.

Oppgave 2 (V2016, Oppgave 6) Med definisjonen $\nabla^2 := \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, kalles en C^2 -funksjon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som tilfredstiller ligningen

$$\nabla^2 f = 0$$

for *harmonisk*. Ved at for et vilkårlig reelt tall k er funksjonen $f(x, y) = e^{kx}(\cos ky)$ harmonisk.

Oppgave 3 (V2015, Oppgave 4) Vis at hvis akselerasjonen $\mathbf{a}(t)$ til en punktmasse alltid er perpendikulær på hastigheten $\mathbf{v}(t)$, så er farten $\|\mathbf{v}\|$ konstant. (Hint: $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.)

Oppgave 4 (K2014, Oppgave 2) Gitt $z = f(x, y)$ der f er en deriverbar funksjon og $x = u^2 - v^2$, $y = v^2 - u^2$. Vis at

$$u \frac{\partial z}{\partial v} + v \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

Oppgave 5 (V2014, Oppgave 1) Gitt $z = f(x, y)$ der f er en deriverbar funksjon, $x = u + v$ og $y = u - v$. Finn $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ og vis at

$$\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2.$$

Oppgave 6 (V2013, Oppgave 1) Fra fysiske lover kan en se at om K er et homogent legeme i \mathbb{R}^3 , så må temperaturen $T = T(x, y, z)$ i K være en løsning til *varmelikningen*

$$k \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

der (x, y, z) er posisjonen i legemet, t er tiden, og k er en materialkonstant.

Vis at $T(x, y, z, t) = 2x - y + z$ er en løsning til varmelikningen.

Oppgave 7 (V2012, Oppgave 4) Vi sier at $f(x, y)$ er harmonisk hvis f er to ganger kontinuerlig deriverbar og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Vis at hvis g er harmonisk så er også $f(x, y) = g(x^2 - y^2, 2xy)$ harmonisk.

5 Taylor-approksimasjon

Oppgave 1 (K2016, Oppgave 3) La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i punktet $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

6 Tangenter

Oppgave 1 (K2016, Oppgave 2) La C være en kurve som er parametrisert ved

$$\mathbf{c}(t) = (t^2, 2t, 4 - t), \quad -2 \leq t \leq 2.$$

- a) Vis at punktet $(0, 0, 4)$ ligger på kurven og finn en tangentvektor til kurven i dette punktet som har lengde 1.
- b) Finn en ligning for tangentplanet som er ortogonalt til kurven i punktet $(0, 0, 4)$.

Oppgave 2 (K2015, Oppgave 3) Finn ligningen for tangentplanet til flaten $x^2 + y^2 - e^{xz} - \sin y = 0$ i punktet $(1, 0, 0)$ og bruk denne til å finne en tilnærmet verdi for x i det punktet på flaten som ligger i nærheten av $(1, 0, 0)$ med $y = z = 1/10$.

Oppgave 3 (V2015, Oppgave 1) Finn en ligning for tangentplanet til ellipsoiden

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$$

i punktet $(1, -1, 2)$.

Oppgave 4 (K2014, Oppgave 1) Finn ligningen for tangentplanet til flaten $x^2 + z^2 - e^{xy} - \sin z = 0$ i punktet $(1, 0, 0)$.

Oppgave 5 (K2013, Oppgave 1) Finn en ligning for tangentplanet til flaten $z^2 = 2x^2 - y^2$ i punktet $(1, -1, 1)$.

Oppgave 6 (V2013, Oppgave 3) En kurve C er parametrisert med

$$\mathbf{c}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (4 - t)\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

- a) Vis at punktet $(1, 2, 3)$ ligger på kurven C , og finn en tangentvektor til kurven i dette punktet, med lengde 1.
- b) Finn en likning for planet som står normalt på kurven i punktet $(1, 2, 3)$.

Oppgave 7 (V2012, Oppgave 1) Finn en parameterfremstilling for den rette linja gjennom $P = (1, 2, 3)$ parallell med vektoren $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

7 Kritiske punkter

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 3)

- a) Finn og klassifiser alle kritiske punkt til $f(x, y) = x^3 - y^2 - 3x - 6y - 1$.
- b) Finn den største og minste verdien til $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ på kvartsirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \geq 0$.

Oppgave 2 (K2016, Oppgave 4) La $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x, y) = e^{xy}$.

- a) Finn og klassifiser alle kritiske punkter til f .
- b) Hvor oppnår f sitt maksimum og minimum når $2x^2 + y^2 = 1$?

Oppgave 3 (V2016, Oppgave 3)

- a) Finn og klassifiser alle kritiske punkter av $f(x, y) = 2x^2 + 4xy + y^4$.
- b) Hvor oppnår $f(x, y) = (x - y)^2$ sitt maksimum og minimum når $x^2 + y^2 = 2$?

Oppgave 4 (K2015, Oppgave 4) Funksjonen f er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$.

- a) Finn alle kritiske punkter til f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddepunkter.
- b) Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

Oppgave 5 (V2015, Oppgave 3) Bestem den største og minste verdien som funksjonen $f(x, y) = xy$ oppnår i området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leq 3\}.$$

Oppgave 6 (K2014, Oppgave 6) La $f(x, y) = 3x^2y - y^3 + x^4$.

- a) Finn alle kritiske punkt til f og klassifiser disse som lokale maksimum, lokale minimum eller saddepunkt.
- b) Har f et globalt (absolutt) maksimum? Et globalt (absolutt) minimum?

Oppgave 7 (K2013, Oppgave 3) Finn og klassifiser alle de kritiske punktene til

$$f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

Oppgave 8 (V2013, Oppgave 4) Vi lar funksjonen $f(x, y) = x^3 - xy^2 - 2x^2 + y^2$ ha hele planet som definisjonsområdet.

- a) Finn alle kritiske punkt til f og klassifiser disse som lokale maksimum, lokale minimum eller saddepunkt.
- b) Har f globale maksimum eller minimum? Finn i så fall disse.

Oppgave 9 (K2012, Oppgave 2) Finn største og minste verdi til funksjonen $f(x, y, z) = z$ langs skjæringskurven mellom flatene $x^2 + 2y^2 = 1$ og $z = x - 4y$.

Oppgave 10 (V2012, Oppgave 3) Finn maximumsverdien av funksjonen

$$f(x, y) = 2x + y - x^2 - 2y^2 + 3.$$

Oppgave 11 (V2012, Oppgave 6) Finn minimumsverdien av funksjonen $f(x, y) = xy$ på ellipsen $g(x, y) = x^2 + 2y^2$.

8 Optimering

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 2) La t betegne tiden. Banen til romskip A er gitt ved

$$\mathbf{r}_A(t) = (t, t^2, t^2 - t)$$

og banen til romskip B er gitt ved

$$\mathbf{r}_B(t) = (8 - t, t^2 - 4, t^2 - 2t).$$

Ved hvilken tid $t \geq 0$ er det minst avstand mellom skipene?

Oppgave 2 (K2014, Oppgave 7) Finn punktene på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som er nærmeste og lengst fra punktet $(2, 2, 1)$.

Oppgave 3 (K2013, Oppgave 5) Finn det punktet på planet $3x - 2y + z = 7$ som ligger nærmest origo.

Oppgave 4 (V2013, Oppgave 2) I USA definerer postverket “størrelsen” (“size”) til en pakke som summen av lengde (length) og “girth”, der “girth” er omkretsen normal på lengden. “Størrelsen”/“size” kan ikke være mer enn 130 tommer.

Hva er største volum (i kubikktommer) en rektangulær pakke kan ha?

9 Linjeintegral

Oppgave 1 (K2016, Oppgave 5) La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$.

a) Hva er verdien av integralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der C er en sirkel med radius $a > 0$?

Oppgave 2 (V2016, Oppgave 2) Anta at en flue beveger seg langs en kurve C i \mathbb{R}^3 slik at posisjonen til flue er gitt ved $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ ved tiden $t \in [0, \infty)$.

a) Dersom flue starter med å fly ved $t = 0$ og farten er gitt i meter per sekund, hvor mange meter tilbakelegger flue i løpet av 10 sekunder?

Oppgave 3 (K2015, Oppgave 2) Finn buelengden til kurven med parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad \text{for } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

10 Konservative vektorfelt

Oppgave 1 (V2016, Oppgave 5) La $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Beregn linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

- a) C er kurven parametrisert ved $\mathbf{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + (\sin t)^2\mathbf{k}$.
- b) C er en vilkårlig glatt kurve med startpunkt $(0, 0, 0)$ og endepunkt $(1, -2, \sqrt{2})$.

Oppgave 2 (K2015, Oppgave 6) La $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$. Verifiser at $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ og finn en funksjon f slik at $\mathbf{F} = \text{grad } f$.

Oppgave 3 (V2015, Oppgave 8) La $\mathbf{F}(x, y, z)$ være et vektorfelt i \mathbb{R}^3 gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når C er kurven med parametrisering $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi/4$.

Oppgave 4 (V2014, Oppgave 6) Gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (2x^2 - z^2)\mathbf{k}$.

- a) Finn $\text{curl } \mathbf{F}$ og $\text{div } \mathbf{F}$.
- b) Grunngi at \mathbf{F} hverken er gradienten til en C^2 -funksjon, eller curl til et C^2 -vektorfelt.

Oppgave 5 (K2013, Oppgave 2) Vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ er definert for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ i rommet.

- a) Vis at \mathbf{F} er et konservativt vektorfelt.
- b) La C være kurven i rommet med parametrisering $\mathbf{c}(t) = t^3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (1+t^2)\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.
Finn

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Oppgave 6 (V2013, Oppgave 4) Vis sier at en funksjonen er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\text{curl } \nabla f = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2 . Dette viser med andre ord at et konservativt vektorfelt $\mathbf{F} = \nabla f$ er *rotasjonsfritt*.

Oppgave 7 (K2012, Oppgave 1) La $\mathbf{F}(x, y, z)$ være definert for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz\mathbf{i} + z(x^2 - 4yz^2)\mathbf{j} + y(x^2 - 6yz^2)\mathbf{k}.$$

a) Vis at \mathbf{F} er et konservativt felt.

b) Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er kurven i rommet gitt ved $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

Oppgave 8 (V2012, Oppgave 7) Finn arbeidet utført av kraften $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ på en partikkel som beveger seg på kurven $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ i tidsintervallet $t \in [0, 1]$.

11 Dobbelintegraler

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 4)

a) Beregn dobbelintegralet $\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2} d(x, y)$, der R er gitt ved $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 1$ og $y \geq 1$.

Oppgave 2 (V2016, Oppgave 4) La D være området i første kvadrant ($x \geq 0, y \geq 0$) begrenset av $x = 0$, $y = 0$ og $y = \sqrt{1 - x^2}$. Beregn integralet av $f(x, y) = x^2 + y^2$ over D .

Oppgave 3 (V2016, Oppgave 4) Beregn dobbelintegralet

$$\iint_D (2x + y^2) d(x, y)$$

når D er alle punkter i første kvadrant som ligger inni sirkelskiven $x^2 + y^2 \leq 4$, men utenfor enhetskvadratet $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Oppgave 4 (V2015, Oppgave 5) Gitt $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9 \text{ og } -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$$

og $g(x, y) = 1 + y^2/2x$.

a) Finn volumet av området $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \text{ og } 0 \leq z \leq g(x, y)\}$.

Oppgave 5 (K2014, Oppgave 4) Bruk dobbelintegral til å finne arealet omsluttet av kurven $r = 1 + \sin \theta$ (i polarkoordinater).

Oppgave 6 (K2012, Oppgave 3) La R være området i xy -planet som er avgrenset av de to kurvene

$$3x^2 - y^2 = 3 \quad \text{for } x \geq 1 \quad \text{og} \quad x + y^2 = 11.$$

Skissér de to kurvene og beregn integralet $\iint_R x \, dA$.

Oppgave 7 (V2012, Oppgave 8) Finn integralet $\iint_D (x^2 + y^2)^7 \, dx \, dy$ hvor D er sirkelen $x^2 + y^2 \leq 4$.

12 Integrasjonsrekkefølge

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 3)

c) Skisser integrasjonsområdet for

$$\int_0^1 \int_0^x f(x, y) \, dy \, dx ,$$

og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx \, dy$.

Oppgave 2 (K2016, Oppgave 5) Beregn dobbelintegralet

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} \, dx \, dy .$$

Oppgave 3 (V2014, Oppgave 4) Regn ut integralet

$$\int_0^2 \int_x^2 e^{y^2} \, dy \, dx ,$$

ved å bytte om integrasjonsrekkefølgen.

13 Greens teorem

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 6)

- b) Bruk Greens's teorem og et passende vektorfelt \mathbf{F} til å beregne arealet av den elliptiske skiven begrenset av kurven C som er parametrisert ved

$$\mathbf{c}(t) = 3(\cos t + \sin t)\mathbf{i} + 2(\sin t - \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Oppgave 2 (V2014, Oppgave 5) Regn ut integralet

$$\int_C (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy$$

der C er en sirkel med radius 2 og sentrum i (a, b) . Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Oppgave 3 (K2013, Oppgave 6) La C være randen til trekanten i xy -planet med hjørner i $(0, 0)$, $(0, 1)$ og $(1, 1)$. Finn

$$\int_C e^{y^2-x^2}(\cos 2xy) dx + e^{y^2-x^2}(\sin 2xy) dy.$$

Oppgave 4 (V2012, Oppgave 9) Finn integralet

$$\int_C (e^{x^2} + y) dx + (2x - e^{y^2}) dy$$

lans sirkelen $x^2 + y^2 = 4$. Spesifiser om du regner ut integralet med eller mot klokken.

14 Trippelintegral

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 4)

- b) Beregn trippelintegralet $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} d(x, y, z)$, der D er gitt ved $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ og $z \geq 0$.

Oppgave 2 (K2013, Oppgave 7) La T være legemet gitt ved $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. La S være overflaten til T orientert med enhetsnormal som peker ut av legemet T .

- a) Finn $\iiint_T z(x^2 + y^2) dV$.

Oppgave 3 (V2013, Oppgave 6) I denne oppgaven er

- S sfæren (kuleoverflaten) med sentrum i $(0, 0, 3)$ og radius 5, orientert slik at normalvektoren peker ut av kula.
- S^+ den delen av S som ligger over xy -planet, med samme orientering som S .
- T området avgrenset av S^+ og xy -planet.

a) Finn volumet til området T .

Oppgave 4 (K2012, Oppgave 6) Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$.

a) Finn volumet til T .

15 Divergensteoremet

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 5)

a) La T være flata gitt ved $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ og } 0 \leq z \leq 1\}$ og \mathbf{F} være vektorfeltet

$$\mathbf{F} = (x + \sin(z^2 y), x^2 + z, 1 - z)$$

Regn ut $\operatorname{div} \mathbf{F}$ og finn

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

der normalvektoren \mathbf{n} peker ut av T .

Oppgave 2 (K2016, Oppgave 7)

La $\mathbf{F}(x, y, z) = (bxy, bx^2y, (x^2 + y^2)z^2)$ og $W \subset \mathbb{R}^3$ være sylinderen

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, z \in [0, b]\}$$

der $a, b > 0$. Bruk Gauss' teorem til å finne $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

Oppgave 3 (V2016, Oppgave 7)

La $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ være en skalar C^2 -funksjon og $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et C^1 -vektorfelt. La $W \subset \mathbb{R}^3$ være et området der Gauss' (divergensteoremet) gjelder og ∂W overflata til W .

- a) Vis at $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$ og derfor

$$\iint_{\partial W} f\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_W f \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV + \iiint_W \nabla f \cdot \mathbf{F} \, dV$$

- b) Anta at

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x, y, z) &= 0 & \text{når} & \quad (x, y, z) \in W \\ f(x, y, z) &= 0 & \text{når} & \quad (x, y, z) \in \partial W. \end{aligned}$$

Vis at $f(x, y, z) = 0$ for alle $(x, y, z) \in W$.

Oppgave 4 (K2015, Oppgave 7)

La S være delen av flata $z = 1 + x^2 + y^2$ som ligger inne i sylindren $x^2 + y^2 = 1$, og la T være legemet begrenset av S og planet $z = 2$.

- a) Gitt vektorfeltet $\mathbf{F} = f(x, y)\mathbf{i} + xg(x, y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, der f og g har kontinuerlige partiell-deriverte som oppfyller

$$\frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

for alle x, y .

Finn flateintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, der enhetsnormalvektoren til S har *negativ* \mathbf{k} komponent.

Oppgave 5 (V2014, Oppgave 7)

La W være området i \mathbb{R}^3 gitt ved

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \text{ og } x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

med rand S orientert slik at normalvektorene peker ut av W . La \mathbf{F} være vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x^2, xz)$. Bestem

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Oppgave 6 (K2013, Oppgave 7) La T være legemet gitt ved $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. La S være overflaten til T orientert med enhetsnormal som peker ut av legemet T .

- b) Finn $(x + \cos y, y + \sin z, z + e^x) \cdot d\mathbf{S}$

Oppgave 7 (K2012, Oppgave 6) Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la \mathbf{n} være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . La videre \mathbf{F} være vektorfeltet definert ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$$

b) Regn ut $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$.

Oppgave 8 (V2012, Oppgave 5) Finn fluksen av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin y)^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

16 Stokes' teorem

Oppgave 1 (V2017, Oppgave 5)

b) La S være ei kuleflate i \mathbb{R}^3 og $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett glatt vektorfelt. Vis at

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Oppgave 2 (V2015, Oppgave 9)

La S være sylinderflata $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Finn

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

når $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ er et C^2 -vektorfelt i \mathbb{R}^3 der v_1 og v_2 ikke avhenger av z .

Oppgave 3 (K2014)

I denne oppgaven studerer vi de to flatene

$$S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 1\}$$

$$S_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1, z \geq 1\}$$

som berre er orientert slik at normalvektoren til S_1 i $(0, 0, 1)$ og S_2 i $(0, 0, 2)$ er \mathbf{k} .

a) Begrunn at hvis \mathbf{F} er et C^1 vektorfelt i \mathbb{R}^3 , så er

$$\iint_{S_1} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

b) Finn verdien av integralene når $\mathbf{F}(x, y, z) = -2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + e^{x^2+z}\mathbf{k}$.

Oppgave 4 (V2013, Oppgave 6) I denne oppgaven er

- S sfæren (kuleoverflaten) med sentrum i $(0, 0, 3)$ og radius 5, orientert slik at normalvektoren peker ut av kula.
 - S^+ den delen av S som ligger over xy -planet, med samme orientering som S .
 - C er randen til S^+ , med positiv orientering i samsvar med orienteringen til S^+ .
 - $\mathbf{F}(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}$.
- a) Finn en parametrisering for kurven C (husk orienteringen). Lag en skisse som viser S^+ , C og T . Merk på orienteringene til S^+ og C .
- c) Finn fluksen til $\text{curl } \mathbf{F}$ gjennom flaten S^+ . Altså beregn $\int_{S^+} \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

Oppgave 5 (K2012, Oppgave 6) Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la \mathbf{n} være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . La videre $\mathbf{F}(x, y, z)$ være vektorfeltet definert ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}.$$

- c) Regn ut $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$.

Oppgave 6 (V2012, Oppgave 5) La S være halvkula $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ med $z \leq 0$ orientert nedover. La $\mathbf{F}(x, y, z) = x \tan(z/4)\mathbf{i} + xe^{e^{z^4}}\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$. Finn integralet $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

Grenseverdier:	8
Gradient:	4
Epsilon-Delta:	1
Kjerneregelen:	7
Taylor-approksimasjon:	1
Tangenter:	7
Kritiske punkter:	11
Optimering:	4
Linjeintegral:	3
Konservative vektorfelt:	8
Dobbelintegraler:	7
Integrasjonsrekkefølge:	3
Greens teorem:	4
Trippelintegral:	4
Divergensteoremet:	8
Stokes' teorem:	6

Grenseverdier	8
Gradient	4
Epsilon-Delta	1
Kjerneregelen	7
Taylor-approximasjon	1
Tangenter	7
Kritiske punkter	11
Optimering	4
Linjeintegral	3
Konservative vektorfelt	8
Dobbelintegraler	7
Integrasjonsrekkefølge	3
Greens teorem	4
Trippelintegral	4
Divergensteoremet	8
Stokes teorem	6