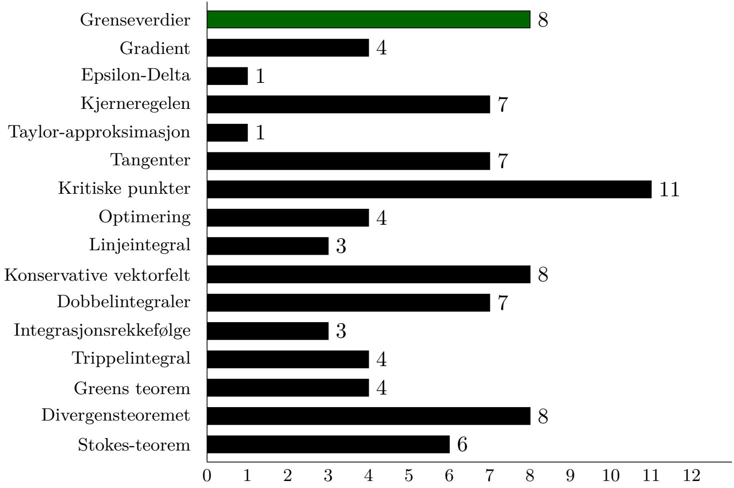
Flerdimhistorien på 90 minutter

tinyurl.com/flerdim2020

Øistein Søvik

Mai 2020



Plan:

1. Før pausen: Derivasjon 7 temaer
2. Etter pausen: Integrasjon 7 temaer
3. Hvert tema har inneholder introduksjon/intuisjon, oppgaveløsning.

Flerdimhistorien på 90 minutter

tinyurl.com/flerdim2020

Øistein Søvik

Mai 2020

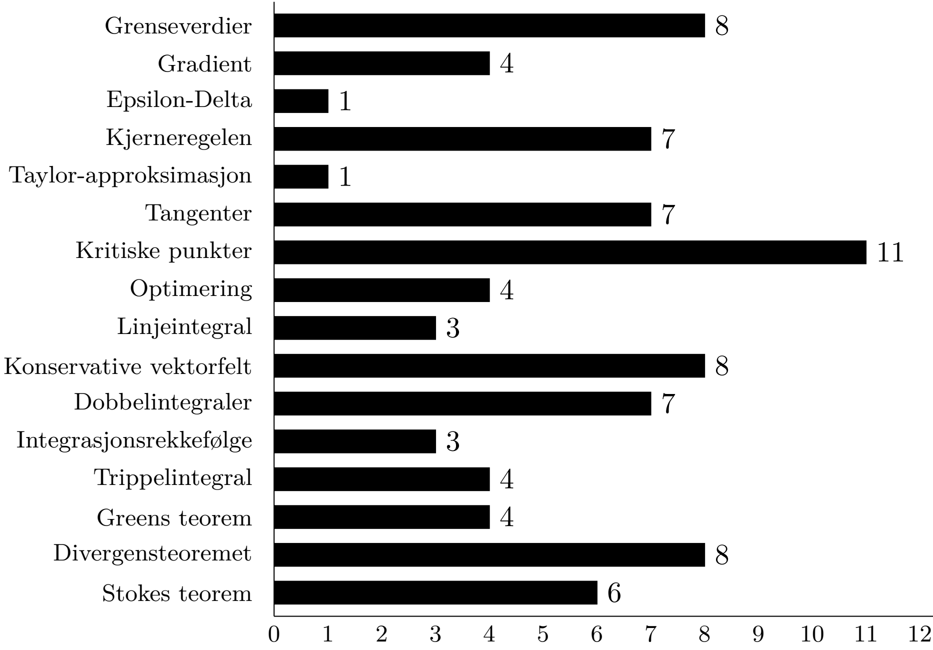
Innholdsfortegnelse

Før eksamen

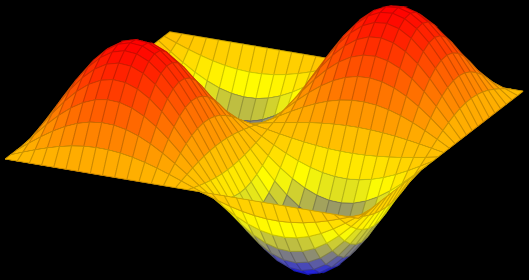
- Introduksjon av 3Blue1Brown
  `https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus`
- Dypere innsikt: `http://mathinsight.org/thread/multivar`
- Matte 2: Oppgaveløsning på video.
  `https://wiki.math.ntnu.no/tma4105/2020v/tema/start`
- Lag en frekvenstabell over tidligere gitte eksamensoppgaver
- Matte 2 eksamener er 99% likt Ma1103, regn de og!

Før eksamen

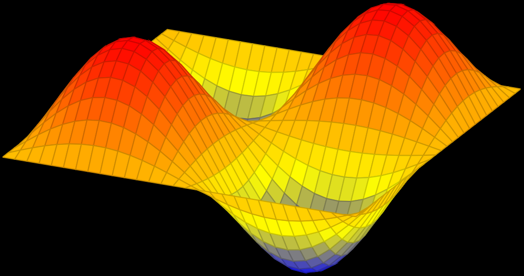
1. **Alltid** ny deloppgave på ny side
2. Tegn store figurer
3. Stor frokost + rask mat under eksamen
4. Slapp av! Selv om eksamen ikke går helt som planlagt har du fortsatt Spanskrøret.

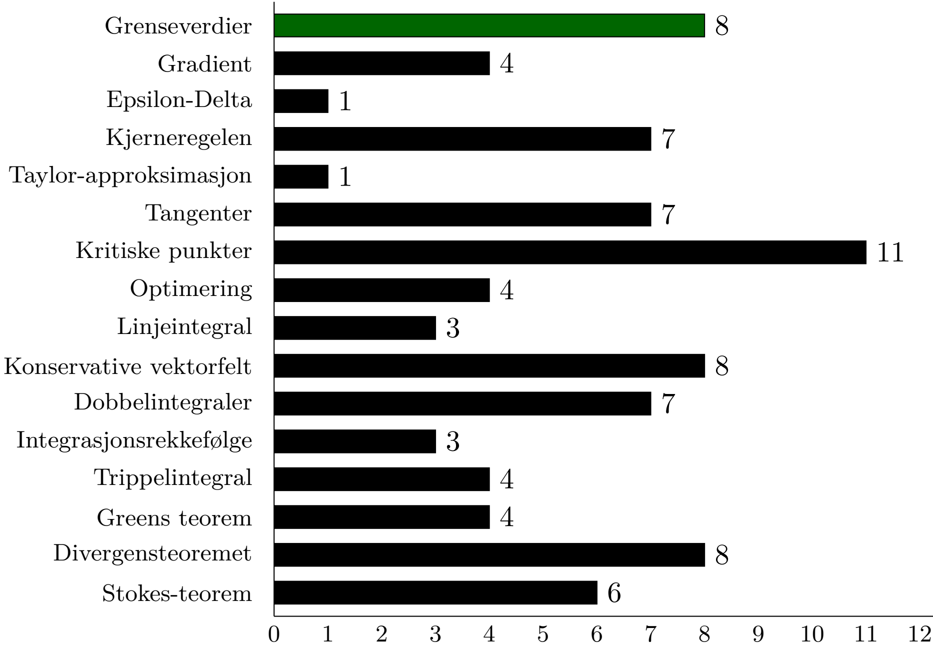

Grenseverdier
8
Gradient
4
Epsilon-Delta
1
Kjerneregelen
7
Taylor-approksimasjon
1
Tangenter
7
Kritiske punkter
11
Optimering
4
Linjeintegral
3
Konservative vektorfelt
8
Dobbelintegraler
7
Integrasjonsrekkefølge
3
Trippelintegral
4
Greens teorem
4
Divergensteoremet
8
Stokes teorem
6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Derivasjon



Derivasjon




Grenseverdier 8
Gradient 4
Epsilon-Delta 1
Kjerneregelen 7
Taylor-approksimasjon 1
Tangenter 7
Kritiske punkter 11
Optimering 4
Linjeintegral 3
Konservative vektorfelt 8
Dobbelintegraler 7
Integrasjonsrekkefølge 3
Trippelintegral 4
Greens teorem 4
Divergensteoremet 8
Stokes-teorem 6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Grenseverdier

En funksjon $f(x,y)$ er kontinuerlig i $(0,0)$ dersom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)\,,$$

uavhengig av hvilken retning du nærmer deg origo.

Grenseverdier

En funksjon $f(x,y)$ er kontinuerlig i $(0,0)$ dersom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)\,,$$

uavhengig av hvilken retning du nærmer deg origo. Anta du ønsker å undersøke om en funksjon på formen

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{g(x,y)}{h(x,y)}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

er kontinuerlig.

- Forenkle $f(x, ax^b)$ mest mulig. Eksisterer a og b slik at $\lim_{x\to 0} f(x, ax^b) \neq f(0,0)$? Da er funksjonen *ikke* kontinuerlig.
- Inneholder $h(x,y)$ uttrykket $x^2 + y^2$? Forenkle $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Undersøk om $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$ for *alle* vinkler, altså θ.

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Steg 1: Forenkle $f(x, ax^b)$ mest mulig.

$$f(x, ax^b) = \frac{ax^b x^3}{3(ax^b)^2 + x^6}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Steg 1: Forenkle $f(x, ax^b)$ mest mulig.

$$f(x, ax^b) = \frac{ax^{3+b}}{3a^2x^{2b} + x^6}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Steg 1: Forenkle $f(x, ax^b)$ mest mulig.

$$f(x, ax^b) = \frac{a}{3a^2x^{2b-(3+b)} + x^{6-(3+b)}}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Steg 1: Forenkle $f(x, ax^b)$ mest mulig.

$$f(x, ax^b) = \frac{a}{3a^2x^{b-3} + x^{3-b}}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Steg 2: Eksisterer det nå en a og b slik at $\lim_{x\to 0} f(x, ax^b) \neq f(0,0) = 0$?

$$f(x, ax^b) = \frac{a}{3a^2x^{b-3} + x^{3-b}}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Steg 2: Eksisterer det nå en a og b slik at $\lim_{x\to 0} f(x, ax^b) \neq f(0,0) = 0$?

$$\lim_{x\to 0} f(x, ax^3) = \lim_{x\to 0} \frac{a}{3a^2x^{3-3} + x^{3-3}}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Steg 2: Eksisterer det nå en a og b slik at $\lim_{x\to 0} f(x, ax^b) \neq f(0,0) = 0$?

$$\lim_{x\to 0} f(x, ax^3) = \frac{a}{3a^2+1}$$

Følger vi $y = ax^3$ nærmer vi oss en verdi forskjellig fra $f(0,0)$ når vi nærmer oss origo. Siden f ikke er kontinuerlig kan den naturlig nok heller ikke være deriverbar! *Pssst: Husk å vise figur her Øistein!*

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

- Notasjonen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ betyr *ikke* den deriverte med hensyn på x i origo!
- Den partiellderiverte er den *retningsderiverte* av f i retning $(1,0)$ altså langs x-aksen. Tilsvarende for $\partial f/\partial y(0,0)$.
- At funksjonen ikke er deriverbar betyr at det eksisterer en retning mot origo hvor den retningsderiverte ikke har et klart definert stigningstall. De retningsderiverte i x og y retningen kan såklart likevell eksistere.

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Den *retningsderiverte* til f i punktet $\mathbf{a} = (0,0)$ og *retning* $\mathbf{r}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(1,0)) - f(0,0)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(0,1)) - f(0,0)}{h} \end{aligned}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Den *retningsderiverte* til f i punktet $\mathbf{a} = (0,0)$ og *retning* $\mathbf{r}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \end{aligned}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Den *retningsderiverte* til f i punktet $\mathbf{a} = (0,0)$ og *retning* $\mathbf{r}$ er gitt ved

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\cdot h^3}{3\cdot 0^2+h^6} - 0}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0^3}{3h^2+0^6} - 0}{h}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{yx^3}{3y^2+x^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Er f kontinuerlig? Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partiellderiverte $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Den *retningsderiverte* til f i punktet $\mathbf{a} = (0,0)$ og *retning* $\mathbf{r}$ er gitt ved

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

K2013, Oppgave 3

Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Steg 1: Uttrykket inneholder x^2+y^2 så vi forenkler $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$\frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}} \qquad \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}$$

K2013, Oppgave 3

Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Steg 1: Uttrykket inneholder x^2+y^2 så vi forenkler $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$\frac{r^2(\cos\theta)(\sin\theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}} \qquad \frac{r^2(\cos\theta)(\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$

K2013, Oppgave 3

Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Steg 1: Uttrykket inneholder x^2+y^2 så vi forenkler $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2}}(\cos\theta)(\sin\theta) \qquad \frac{r^2}{r^2}(\cos\theta)(\sin\theta)$$

K2013, Oppgave 3

Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Steg 1: Uttrykket inneholder $x^2 + y^2$ så vi forenkler $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$r(\cos\theta)(\sin\theta) \qquad (\cos\theta)(\sin\theta)$$

K2013, Oppgave 3

Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Steg 2: Undersøker om $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ er uavhengig av θ.

$$\lim_{r\to 0} r(\cos\theta)(\sin\theta) \qquad \lim_{r\to 0} (\cos\theta)(\sin\theta)$$

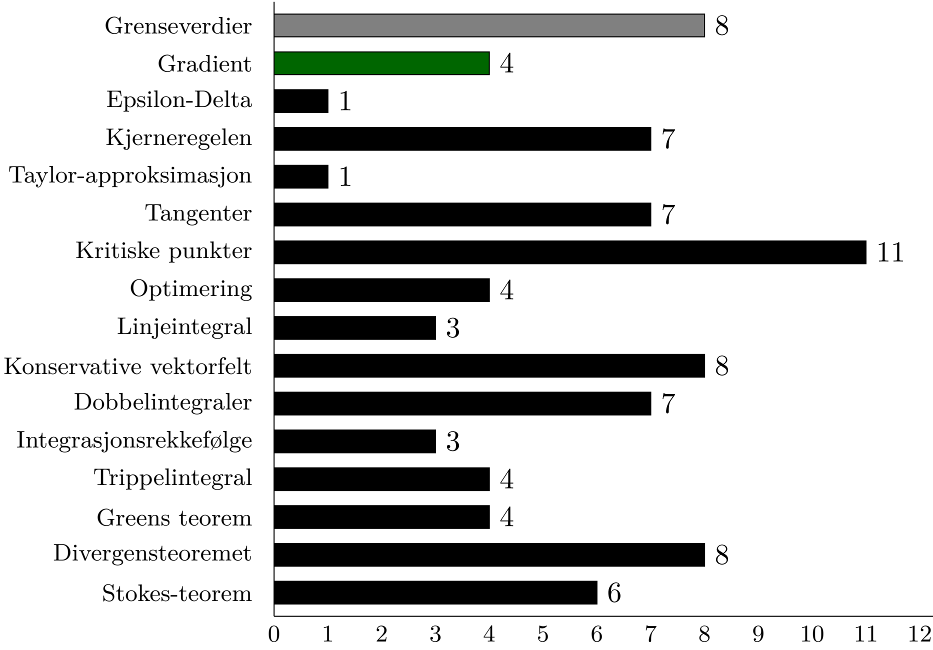
K2013, Oppgave 3

Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Steg 2: Undersøker om $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ er uavhengig av θ.

$$\underbrace{\lim_{r\to 0} r(\cos\theta)(\sin\theta)}_{\text{Ja, 0 for alle }\theta} \qquad \underbrace{\lim_{r\to 0} (\cos\theta)(\sin\theta)}_{\text{Nei, }\theta=0\to 0,\ \theta=\pi/4\to 1/2.}$$


Grenseverdier 8
Gradient 4
Epsilon-Delta 1
Kjerneregelen 7
Taylor-approksimasjon 1
Tangenter 7
Kritiske punkter 11
Optimering 4
Linjeintegral 3
Konservative vektorfelt 8
Dobbelintegraler 7
Integrasjonsrekkefølge 3
Trippelintegral 4
Greens teorem 4
Divergensteoremet 8
Stokes-teorem 6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Gradient

Gradienten til et skalarfelt er et vektorfelt som i hvert punkt peker i retningen til den største økningen i skalarfeltet.

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big)$$
$$\nabla f(\rho,\theta,z) = \Big(\frac{\partial f}{\partial \rho},\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big)$$
$$\nabla f(r,\theta,\phi) = \Big(\frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta},\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}\Big)$$

V2016, Oppgave 1

Anta at et fjell har form som en elliptisk paraboloide $z = c - ax^2 - by^2$, der a, b og c er positive konstanter, x og y er øst–vest og nord–sør koordinater på kartet, mens z er høyden over havet.

1. I hvilken retning stiger høyden mest i punktet $(1, 1)$?
2. Hvis en klinkekule slippes i $(1, 1, c - a - b)$, i hvilken retning vil den begynne å trille?

V2016, Oppgave 1

Anta at et fjell har form som en elliptisk paraboloide $z = c - ax^2 - by^2$, der a, b og c er positive konstanter, x og y er øst–vest og nord–sør koordinater på kartet, mens z er høyden over havet.

1. I hvilken retning stiger høyden mest i punktet $(1, 1)$?
2. Hvis en klinkekule slippes i $(1, 1, c - a - b)$, i hvilken retning vil den begynne å trille?

1. Høyden til z stiger mest i retningen til gradienten $\nabla z(1, 1)$ i $(1, 1)$.

V2016, Oppgave 1

Anta at et fjell har form som en elliptisk paraboloide $z = c - ax^2 - by^2$, der a, b og c er positive konstanter, x og y er øst–vest og nord–sør koordinater på kartet, mens z er høyden over havet.

1. I hvilken retning stiger høyden mest i punktet $(1, 1)$?
2. Hvis en klinkekule slippes i $(1, 1, c - a - b)$, i hvilken retning vil den begynne å trille?

1. Høyden til z stiger mest i retningen til gradienten $\nabla z(1, 1)$ i $(1, 1)$.

$$\nabla z(1,1) = (-2ax, -2by)\,|_{(1,1)} = 2(-a, -b)$$

Slik at høyden stiger mest i retning $(-a, -b)$.

V2016, Oppgave 1

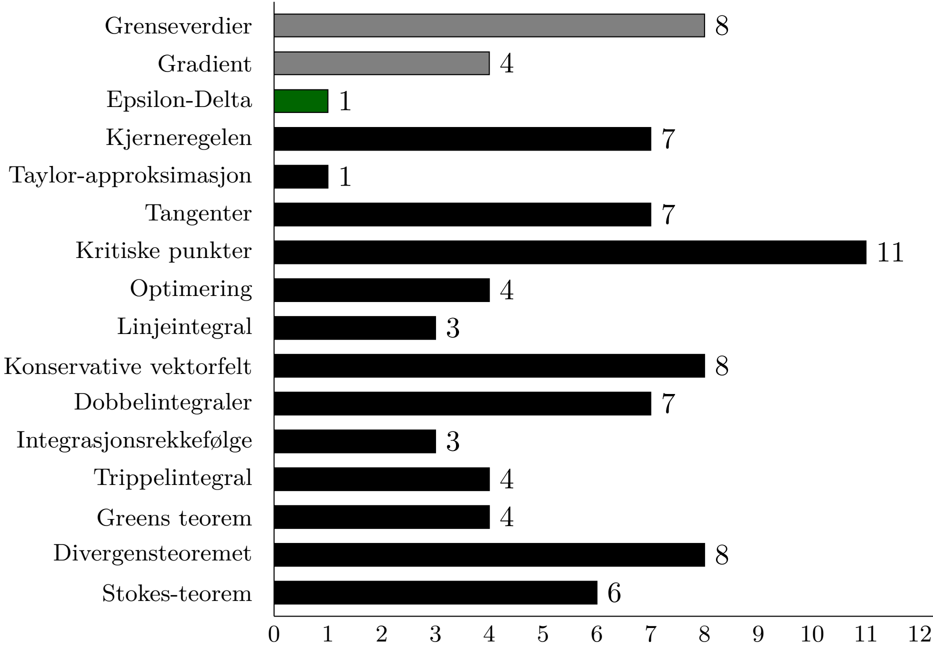
Anta at et fjell har form som en elliptisk paraboloide $z = c - ax^2 - by^2$, der a, b og c er positive konstanter, x og y er øst–vest og nord–sør koordinater på kartet, mens z er høyden over havet.

1. I hvilken retning stiger høyden mest i punktet $(1, 1)$?
2. Hvis en klinkekule slippes i $(1, 1, c - a - b)$, i hvilken retning vil den begynne å trille?

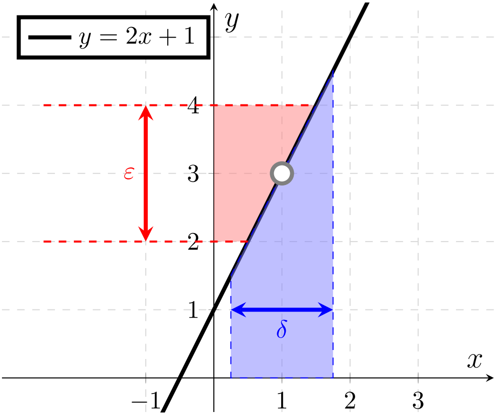
1. Høyden til z stiger mest i retningen til gradienten $\nabla z(1, 1)$ i $(1, 1)$.

$$\nabla z(1,1) = (-2ax, -2by)\,|_{(1,1)} = 2(-a, -b)$$

   Slik at høyden stiger mest i retning $(-a, -b)$.
2. Klinkekulen vil trille i den retningen høyden avtar raskest, altså i retning $-\nabla z(1, 1)$ med andre ord (a, b).

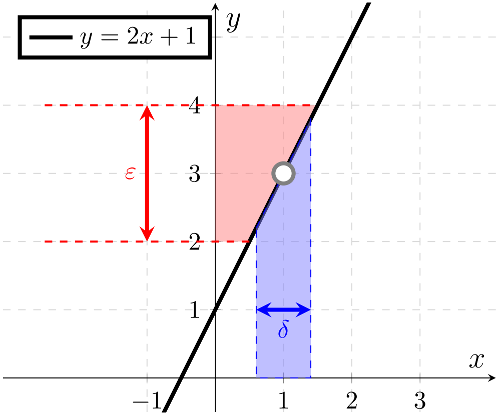

Grenseverdier 8
Gradient 4
Epsilon-Delta 1
Kjerneregelen 7
Taylor-approksimasjon 1
Tangenter 7
Kritiske punkter 11
Optimering 4
Linjeintegral 3
Konservative vektorfelt 8
Dobbelintegraler 7
Integrasjonsrekkefølge 3
Trippelintegral 4
Greens teorem 4
Divergensteoremet 8
Stokes-teorem 6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Epsilon-Delta



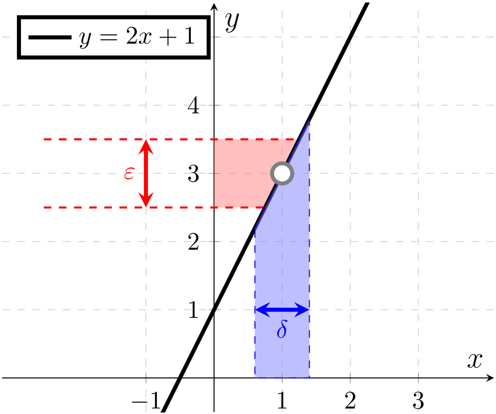
[Vi sier at f er *kontinuerlig* i **a** dersom det for alle<4>*alle* $\varepsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ når $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.]
Intuisjon: uansett hvor nærme vi er **a** kan vi alltid komme *litt* nærmere.

Epsilon-Delta



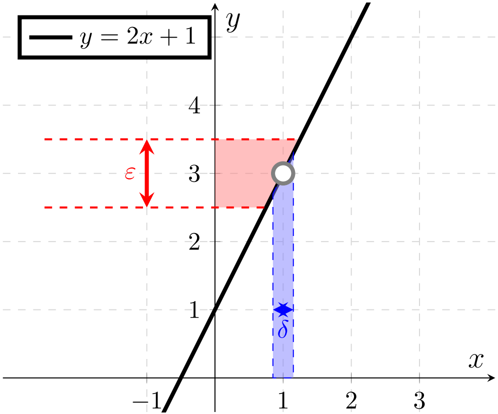
[Vi sier at f er *kontinuerlig* i **a** dersom det for alle<4>*alle* $\varepsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ når $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.]
Intuisjon: uansett hvor nærme vi er **a** kan vi alltid komme *litt* nærmere.

Epsilon-Delta



[Vi sier at f er *kontinuerlig* i $\mathbf{a}$ dersom det for alle<4>*alle* $\varepsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ når $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.]
Intuisjon: uansett hvor nærme vi er $\mathbf{a}$ kan vi alltid komme *litt* nærmere.

Epsilon-Delta



[Vi sier at f er *kontinuerlig* i $\mathbf{a}$ dersom det for <4>*alle* $\varepsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ når $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.]
Intuisjon: uansett hvor nærme vi er $\mathbf{a}$ kan vi alltid komme *litt* nærmere.

Epsilon-Delta

- Kladd: Forenkle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|$ til du oppnår ulikheten $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.
- Bevis: Skriv opp definisjonen "ønsker å vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at"

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon.$$

- Bevis: Velg $\delta = \varepsilon/K$. Da er

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < K\delta \leq K(\varepsilon/K) = \varepsilon$$

- Litt som induksjon vi antar at $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ stemmer (induksjonshypotesen).

V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

Kladd: Antagelsen er at $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Slik at

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha < K\delta^\alpha$$

Vi ønsker å bestemme δ slik at $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$. Fra uttrykket over ønsker vi altså

$$K\delta^\alpha < \varepsilon$$

Ved å løse likningen med hensyn på δ får vi $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$.

V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

Bevis.

Ønsker å vise at f er kontinuerlig, med andre ord ønsker å vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon.$$

$\square$

V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

Bevis.

Ønsker å vise at f er kontinuerlig, med andre ord ønsker å vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon.$$

Velg $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$ da er

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$$

□

V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

Bevis.

Ønsker å vise at f er kontinuerlig, med andre ord ønsker å vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon.$$

Velg $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$ da er

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha < K\delta^\alpha$$

$\square$

V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

Bevis.

Ønsker å vise at f er kontinuerlig, med andre ord ønsker å vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon.$$

Velg $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$ da er

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha < K\delta^\alpha = K\left(\frac{\varepsilon^{1/\alpha}}{K^{1/\alpha}}\right)^\alpha = \varepsilon$$

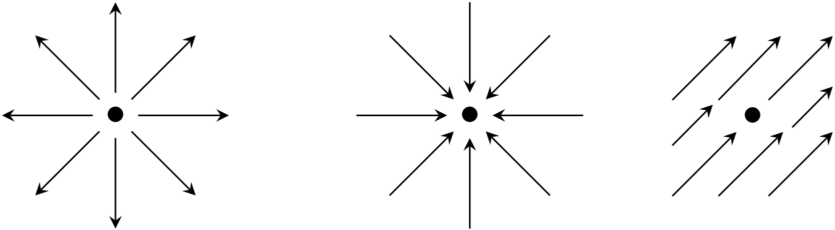
som var det vi ønsket å vise. □

Divergens

- Et vektorfelt kan betraktes som bevegelse av væsker eller gasser
- Divergens er *endring* i fluks. Altså en operator som tar inn et vektorfelt, og gir ut en skalar som viser hvor mye væsketettheten endrer seg i ett punkt.
- Formelen for divergens er

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \cdots$$

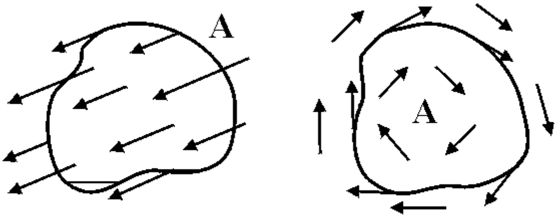
Hvor $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ er komponentene til $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.



$\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$ $\qquad$ $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$ $\qquad$ $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$

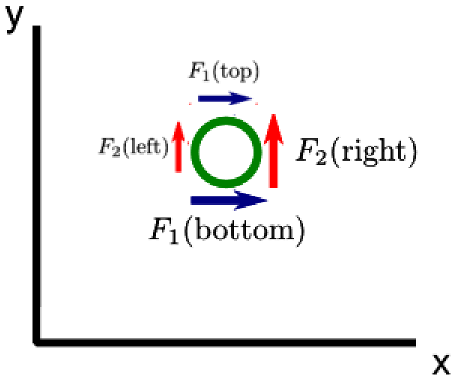
Curl

- Curlen viser hvor mye og i hvilken retning et vektorfelt “roterer”.
- Curlen er en vektor som peker i rotasjonsaksen og er proposjonal med rotasjonshastigheten.
- Dersom vektorfeltet roterer mot klokken sier vi at kurlen er positiv, mot klokken er den negativ, mens dersom vektorfeltet er rotasjonsfritt er kurlen null.
- $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$ og 2d-curl $\mathbf{F} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$.

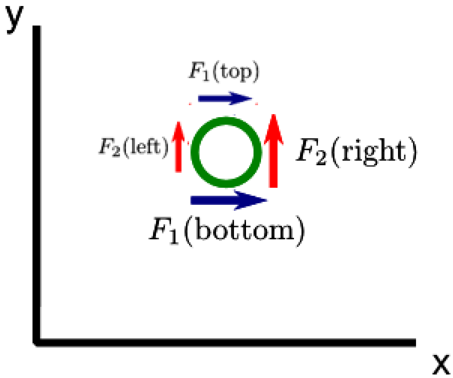


$\nabla \times \mathbf{A} = 0$ $\qquad$ $\nabla \times \mathbf{A} < 0$

Curl

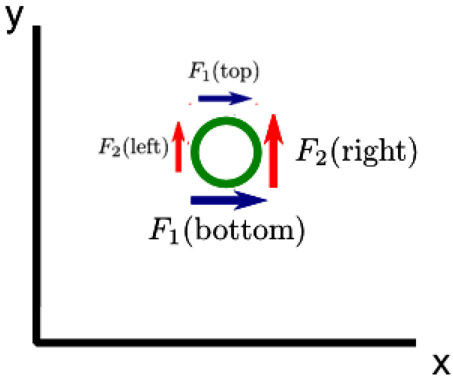


Curl



$$\text{2d-curl}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Curl



$$\text{2d-curl}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \qquad \text{og} \qquad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & & \\ & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} & \mathbf{j} & \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} & & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\operatorname{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}(\nabla f) &= \mathbf{i}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}(\nabla f) &= \mathbf{i}\left(\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial}{\partial z}\tfrac{\partial f}{\partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial f}{\partial z} - \tfrac{\partial}{\partial z}\tfrac{\partial f}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial f}{\partial y} - \tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= \mathbf{i}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \tfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \tfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)
\end{aligned}$$

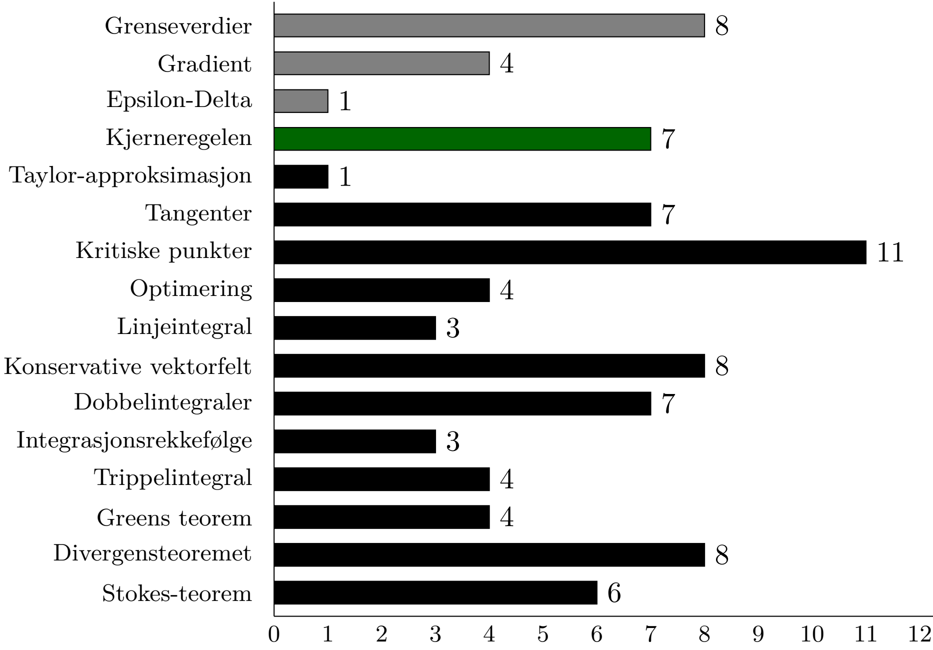
V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}(\nabla f) &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)
\end{aligned}$$

Siden funksjonen er C^2 er alle de kryss-partiellderiverte like slik at

$$= \mathbf{i}0 - \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0 = \mathbf{0}$$


Grenseverdier
8
Gradient
4
Epsilon-Delta
1
Kjerneregelen
7
Taylor-approksimasjon
1
Tangenter
7
Kritiske punkter
11
Optimering
4
Linjeintegral
3
Konservative vektorfelt
8
Dobbelintegraler
7
Integrasjonsrekkefølge
3
Trippelintegral
4
Greens teorem
4
Divergensteoremet
8
Stokes-teorem
6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Kjerneregelen

Anta vi skal derivere følgende funksjon

$$f(x,y) = \sin(x^2 - y^2) + \cos(y^2 - x^2)$$

og ønsker å regne ut $x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sin(x^2 - y^2)\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos(y^2 - y^2)\Big) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\sin(x^2 - y^2)\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos(y^2 - x^2)\Big)
\end{aligned}$$

Kjerneregelen

Anta vi skal derivere følgende funksjon

$$f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) + \cos(y^2 - x^2)$$

og ønsker å regne ut $x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2\right)\cos(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 - x^2\right)\sin(y^2 - x^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y^2\right)\cos(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 - x^2\right)\sin(y^2 - x^2)$$

Kjerneregelen

Anta vi skal derivere følgende funksjon

$$f(x,y) = \sin(x^2 - y^2) + \cos(y^2 - x^2)$$

og ønsker å regne ut $x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \quad 2x\cos(x^2 + y^2) + 2x\sin(y^2 - x^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y\cos(x^2 + y^2) - 2y\sin(x^2 - y^2)\end{aligned}$$

Ved inspeksjon ser vi at $x\frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Men gjelder dette alltid?

K2014, Oppgave 2

Gitt $z = f(x, y)$ der f er en deriverbar funksjon og $x = u^2 - v^2$, $y = v^2 - u^2$. Vis at

$$u\frac{\partial z}{\partial v} + v\frac{\partial z}{\partial u} = 0\,.$$

Bruker kjerneregelen på $z = f(x, y) = f(u^2 - v^2, v^2 - u^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(f(x(u, v), y(u, v))\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(f(x(u, v), y(u, v))\right)$$

K2014, Oppgave 2

Gitt $z = f(x, y)$ der f er en deriverbar funksjon og $x = u^2 - v^2$, $y = v^2 - u^2$. Vis at

$$u\frac{\partial z}{\partial v} + v\frac{\partial z}{\partial u} = 0\,.$$

Bruker kjerneregelen på $z = f(x, y) = f(u^2 - v^2, v^2 - u^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}$$

K2014, Oppgave 2

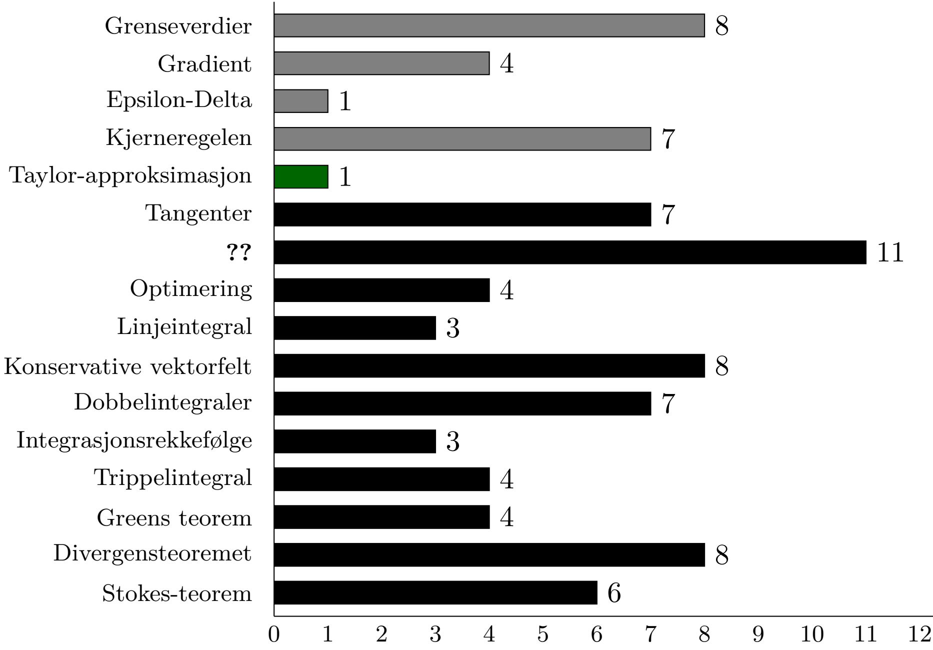
Gitt $z = f(x, y)$ der f er en deriverbar funksjon og $x = u^2 - v^2$, $y = v^2 - u^2$. Vis at

$$u\frac{\partial z}{\partial v} + v\frac{\partial z}{\partial u} = 0\,.$$

Bruker kjerneregelen på $z = f(x, y) = f(u^2 - v^2, v^2 - u^2)$.

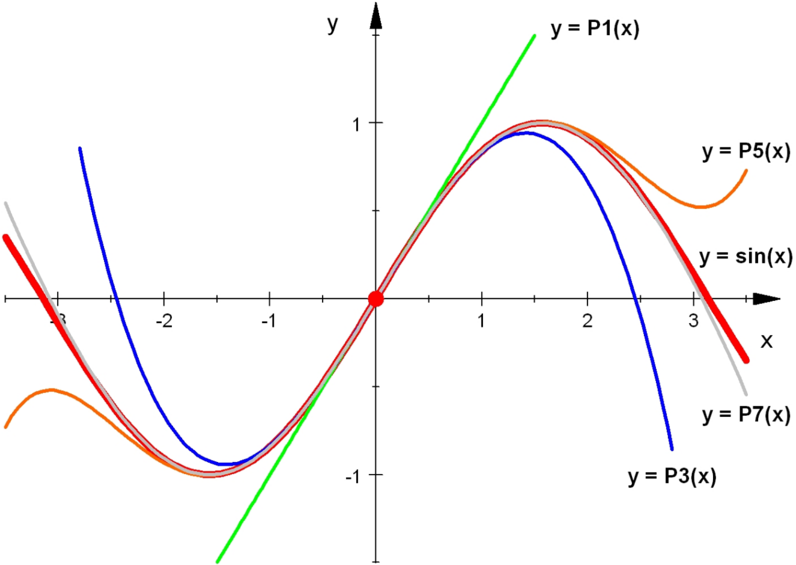
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \quad 2u\frac{\partial f}{\partial x} - 2u\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= -2v\frac{\partial f}{\partial x} + 2v\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

Ved inspeksjon ser vi at $u\frac{\partial f}{\partial v} + v\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ for alle deriverbare funksjoner $z = f(x, y)$.



Grenseverdier
8
Gradient
4
Epsilon-Delta
1
Kjerneregelen
7
Taylor-approksimasjon
1
Tangenter
7
??
11
Optimering
4
Linjeintegral
3
Konservative vektorfelt
8
Dobbelintegraler
7
Integrasjonsrekkefølge
3
Trippelintegral
4
Greens teorem
4
Divergensteoremet
8
Stokes-teorem
6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Taylor-approksimasjon



K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 1: Regn ut de partiellderiverte

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 4x^3 + 3x^2 + y && \Rightarrow && f_x(1,2) = 9\\
f_{xx}(x,y) &= 12x^2 + 6x && \Rightarrow && f_{xx}(1,2) = 18\\
f_y(x,y) &= 2y + x && \Rightarrow && f_y(1,2) = 5\\
f_{yy}(x,y) &= 2 && \Rightarrow && f_{yy}(1,2) = 2\\
f_{xy}(x,y) &= 1 && \Rightarrow && f_{xy}(x,y) = 1\\
f_{yx}(x,y) &= 1 && \Rightarrow && f_{yx}(x,y) = 1
\end{aligned}
$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x,y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x,y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x,y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$(1) \mid f(\mathbf{x}^0) = f(1,2)$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x,y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$= (8)$$

$$(1) \mid f(\mathbf{x}^0) = 8$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$= (8)$$

$$(2) \left| \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0) \right.$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$= (8)$$

$$(2) \left| \sum_{i=1}^{2} f_{x_i}(1,2)(x_i - x_i^0) \right.$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x,y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$= (8)$$

$$(2)\ \Bigg|\ \sum_{i=1}^{2} f_{x_i}(1,2)(x_i - x_i^0) = f_x(1,2)\cdot(x-1) + f_y(1,2)\cdot(y-2)$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$= (8)$$

$$(2) \left| \sum_{i=1}^{2} f_{x_i}(1,2)(x_i - x_i^0) \right. = 9(x-1) + 5(y-2)$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$= (8) + (9x + 5y - 19)$$

$$(2) \left| \sum_{i=1}^{2} f_{x_i}(1,2)(x_i - x_i^0) \right. = 9x + 5y - 19$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$= (8) + (9x + 5y - 19)$$

$$(3) \left| \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f_{x_i x_j}(1, 2)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \right.$$

$$= \frac{1}{2} f_{xx}(1, 2)(x - 1)^2 + \frac{1}{2} f_{xy}(1, 2)(x - 1)(y - 2) +$$
$$\frac{1}{2} f_{yx}(1, 2)(y - 2)(x - 1) + \frac{1}{2} f_{yy}(1, 2)(y - 2)^2$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$= (8) + (9x + 5y - 19)$$

$$(3) \left| \; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f_{x_i x_j}(1,2)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \right.$$

$$= \frac{1}{2} f_{xx}(1,2)(x-1)^2 + f_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) + \frac{1}{2} f_{yy}(1,2)(y-2)^2$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x,y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$= (8) + (9x + 5y - 19)$$

$$(3)\;\left|\;\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f_{x_i x_j}(1,2)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)\right.$$

$$= \frac{18}{2}(x-1) + 1\cdot(x-1)(y-2) + \frac{2}{2}(y-2)^2$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x,y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$= (8) + (9x + 5y - 19) + (9x^2 + xy - 20x + y^2 - 5y + 15)$$

$$(3) \left| \; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f_{x_i x_j}(1,2)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \right.$$

$$= 9x^2 + xy - 20x + y^2 - 5y + 15$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x,y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1,2)$.

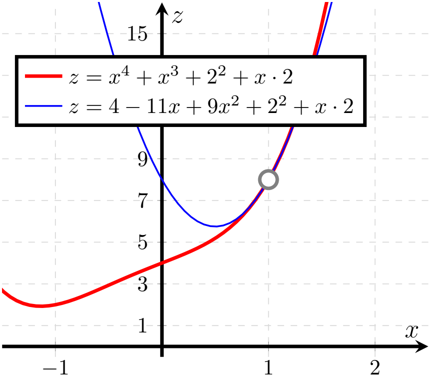
Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1,2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x, y)$ i formel.

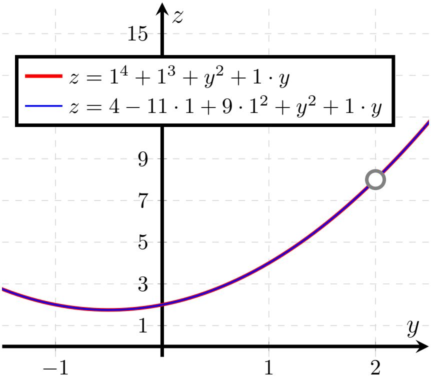
$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

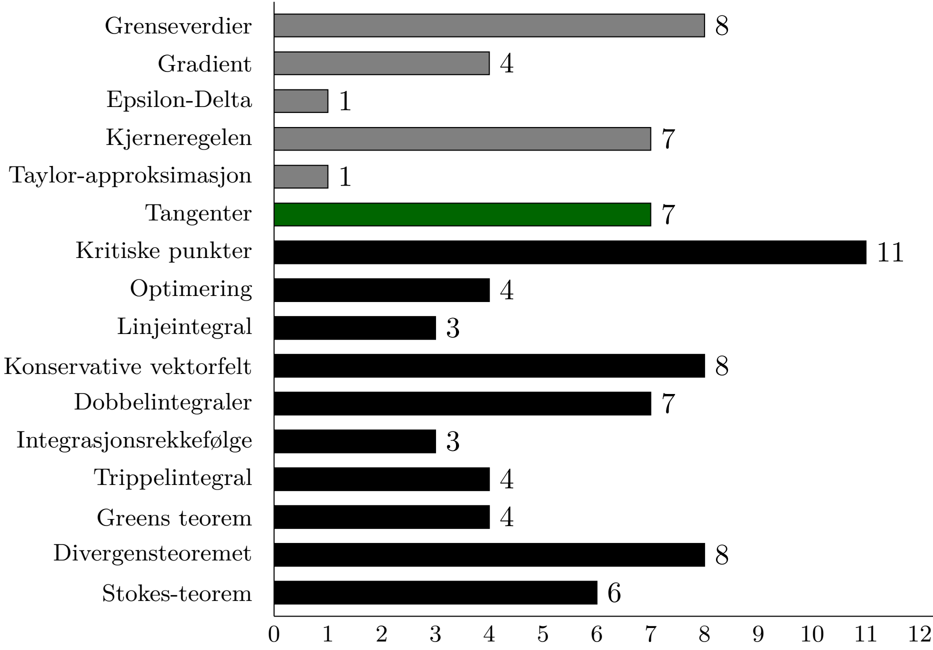
$$= 4 - 11x + 9x^2 + y^2 + xy$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.






Grenseverdier
8
Gradient
4
Epsilon-Delta
1
Kjerneregelen
7
Taylor-approksimasjon
1
Tangenter
7
Kritiske punkter
11
Optimering
4
Linjeintegral
3
Konservative vektorfelt
8
Dobbelintegraler
7
Integrasjonsrekkefølge
3
Trippelintegral
4
Greens teorem
4
Divergensteoremet
8
Stokes-teorem
6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Tangenter

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x,y)$ i punktet $(2,2,4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x,y,z) = f(x,y) - z$.

Intuisjon

If you are standing on a level set and want to walk some small distance d and get as far as possible from the level set, you want to walk along the normal. Otherwise, if the path you take has a tangent component, it will tend to keep you closer to the level set if d is small enough compared to the size of the level set. Furthermore, getting as far as possible from your level set is approximately the same as walking to the highest/lowest level curve in range, with the approximation improving as d shrinks.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x,y)$ i punktet $(2,2,4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x,y,z) = f(x,y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x,y,z) = (\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y^3 - 3xy - z\right), \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x,y)$ i punktet $(2,2,4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x,y,z) = f(x,y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x,y,z) = (3x^2 - 3y, \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + y^3 - 3xy - z\right), \frac{\partial g}{\partial z})$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x,y)$ i punktet $(2,2,4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x,y,z) = f(x,y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x,y,z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, \frac{\partial g}{\partial z})$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x,y)$ i punktet $(2,2,4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x,y,z) = f(x,y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x,y,z) = \left(3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, \frac{\partial}{\partial z}\Big(x^3 + y^3 - 3xy - z\Big)\right)$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x,y)$ i punktet $(2,2,4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x,y,z) = f(x,y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x,y,z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

   Siden gradienten peker i samme retning som normalvektoren setter vi $\mathbf{n} = \nabla g(2,2,4) = (6,6,-1)$.

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
   Hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (2, 2, 4)$ og $\mathbf{n} = (6, 6, -1)$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
   Hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (2, 2, 4)$ og $\mathbf{n} = (6, 6, -1)$

$$(6, 6, -1) \cdot ((x - 2, y - 2, z - 4) = 0$$

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x,y)$ i punktet $(2,2,4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x,y,z) = f(x,y) - z$. Gradienten er gitt som
$$\nabla g(x,y,z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$
2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
Hvor $\mathbf{r} = (x,y,z)$, $\mathbf{r}_0 = (2,2,4)$ og $\mathbf{n} = (6,6,-1)$
$$6(x-2) + 6(y-2) - (z-4) = 0$$

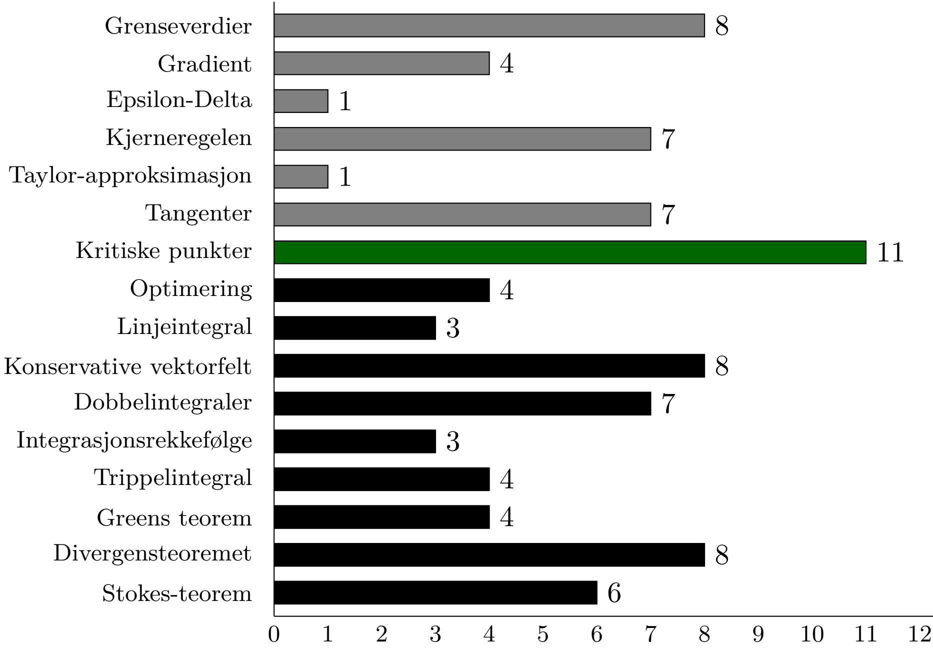
Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som
$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
Hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (2, 2, 4)$ og $\mathbf{n} = (6, 6, -1)$
$$z = 6x + 6y - 20.$$


Grenseverdier 8
Gradient 4
Epsilon-Delta 1
Kjerneregelen 7
Taylor-approksimasjon 1
Tangenter 7
Kritiske punkter 11
Optimering 4
Linjeintegral 3
Konservative vektorfelt 8
Dobbelintegraler 7
Integrasjonsrekkefølge 3
Trippelintegral 4
Greens teorem 4
Divergensteoremet 8
Stokes-teorem 6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Kritiske punkter

Kritiske punkter kommer i tre typer: maksimum, minimum og saddelpunkter. Disse kan igjen enten være globale, eller lokale. Kritiske punkter kan oppstå tre ulike plasser

1. Hvor $f' = 0$
2. Randpunktene til f.
3. (Skjøtepunktene til f. For eksempel: $|x|$)

Eksempel

Dersom $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ så er randpunktene til f $x = 0$ og $x = 1$.

Eksempel

Tilsvarende om $f\colon \mathbb{D}^1 \to \mathbb{R}$ der $\mathbb{D}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ så er randpunktene alle punkter slik at $x^2 + y^2 = 1$. (Området er en disk, randen er en sirkel.)

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La $\mathbf{a}$ *være et punkt kritisk punkt* $(\nabla f(\mathbf{a}) = 0)$ *for en funksjon* $f(x, y)$ *med kontinuerlige annenordens partiellderiverte. Definer* $D(x, y)$ *som*

$$D(x,y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_{A}\,\underbrace{f_{yy}}_{B} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{C}$$

1. *Hvis* $D < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et saddelpunkt.*
2. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} > 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt minimum.*
3. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt maksimum.*

Hvis $D = 0$ *gir testen ingen konklusjon.*

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La **a** *være et punkt kritisk punkt* ($\nabla f(\mathbf{a}) = 0$) *for en funksjon* $f(x,y)$ *med kontinuerlige annenordens partiellderiverte. Definer* $D(x,y)$ *som*

$$D(x,y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_{A}\,\underbrace{f_{yy}}_{B} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{C}$$

1. *Hvis* $D < 0$, *så er* **a** *et saddelpunkt.*
2. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} > 0$, *så er* **a** *et lokalt minimum.*
3. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} < 0$, *så er* **a** *et lokalt maksimum.*

Hvis $D = 0$ *gir testen ingen konklusjon.*

Intuisjon

Anta $f_{xx} f_{yy} < 0$. Enten $f_{xx} < 0$ og $f_{yy} > 0$ eller $f_{yy} < 0$ og $f_{xx} > 0$ uansett så har funksjonen positiv krumning $\cup$ i den ene retningen og negativ krumning i den andre $\cap \Rightarrow$ åpenbart saddelpunkt (pringles).

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La $\mathbf{a}$ *være et punkt kritisk punkt* ($\nabla f(\mathbf{a}) = 0$) *for en funksjon* $f(x, y)$ *med kontinuerlige annenordens partiellderiverte. Definer* $D(x, y)$ *som*

$$D(x,y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_{A}\underbrace{f_{yy}}_{B} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{C}$$

1. *Hvis* $D < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et saddelpunkt.*
2. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} > 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt minimum.*
3. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt maksimum.*

Hvis $D = 0$ *gir testen ingen konklusjon.*

Intuisjon

Anta $f_{xx}f_{yy} > 0$. Hvis $f_{xx} > 0$ og $f_{yy} > 0$ så har f positiv krumning $\cup$ omkring $\mathbf{a}$ $\Rightarrow$ minimum. (bolle) Hvis $f_{xx} < 0$ og $f_{yy} < 0$ så har f negativ krumning $\cap$ omkring A omkring $\mathbf{a}$ $\Rightarrow$ maksimum. (øvre halvkule)

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La $\mathbf{a}$ *være et punkt kritisk punkt* ($\nabla f(\mathbf{a}) = 0$) *for en funksjon* $f(x, y)$ *med kontinuerlige annenordens partiellderiverte. Definer* $D(x, y)$ *som*

$$D(x,y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_{A}\,\underbrace{f_{yy}}_{B} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{C}$$

1. *Hvis* $D < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et saddelpunkt.*
2. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} > 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt minimum.*
3. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt maksimum.*

Hvis $D = 0$ *gir testen ingen konklusjon.*

Intuisjon

Tilfellet $f_{xx}f_{yy} = 0$ behandles av leddet f_{xy}^2. Ligner funksjonen f mer på en (pringles) eller en (bolle/øvre halvkule)?

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x, y) := f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$.

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x^2 - x^4 + y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2x^2 - x^4 + y^2) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(2x^2 - x^4 + y^2)$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x - 4x^2)\frac{\partial}{\partial y}(2y) - \frac{\partial}{\partial x}(2y)$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x,y) = 8(1-3x^2)$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x,y) = 8(1-3x^2)$$

Innsetning gir

$$D(0,0) = 8,\ f_{xx}(0,0) = 4 \ \text{ og } \ D(\pm 1, 0) = -16,\ f_{xx}(\pm 1, 0) = -8$$

slik at $(0,0)$ er ett _______________ og $(\pm 1, 0)$ er _______________.

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x,y) = 8(1-3x^2)$$

Innsetning gir

$$D(0,0) > 0,\ f_{xx}(0,0) > 0 \ \text{ og } \ D(\pm 1,0) < 0,\ f_{xx}(\pm 1, 0) < 0$$

slik at $(0,0)$ er ett lokalt minimum og $(\pm 1, 0)$ er saddelpunkter.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} =?$, $f_{\max} =?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y - \lambda 2y \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\text{min}} =?$, $f_{\text{max}} =?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Fra $\mathscr{L}_y = 2y(1-\lambda) = 0$ får vi at enten $y = 0$ eller $\lambda = 1$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} =?$, $f_{\max} =?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\underline{y = 0\text{:}}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 - 4$$

Slik at $x^4 = 4 \Rightarrow x^2 = 2$ og $f = 2x^2 - x^4 + y^2$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = ?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\underline{y = 0:}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 - 4$$

Slik at $x^4 = 4 \Rightarrow x^2 = 2$ og $f = 2 \cdot 2 - 4 + 0^2 = 0$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = ?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

<u>$\lambda = 1$:</u>

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} =?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

<u>$\lambda = 1$:</u>

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1 - 2x^2), \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Når $x = 0$ så gir $\mathscr{L}_\lambda$, $y^2 = 4$ slik at $f = 2x^2 - x^3 + y^2$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 4$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\underline{\lambda = 1:}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-2x^2), \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Når $x = 0$ så gir $\mathscr{L}_\lambda$, $y^2 = 4$ slik at $f = 2 \cdot 0^2 - 0^3 + 4 = 4$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 4$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\underline{\lambda = 1:}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-2x^2), \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Når $x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{4}$ og $y^2 = 4 - x^4$ så $f = 2x^2 - x^4 + y^2$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

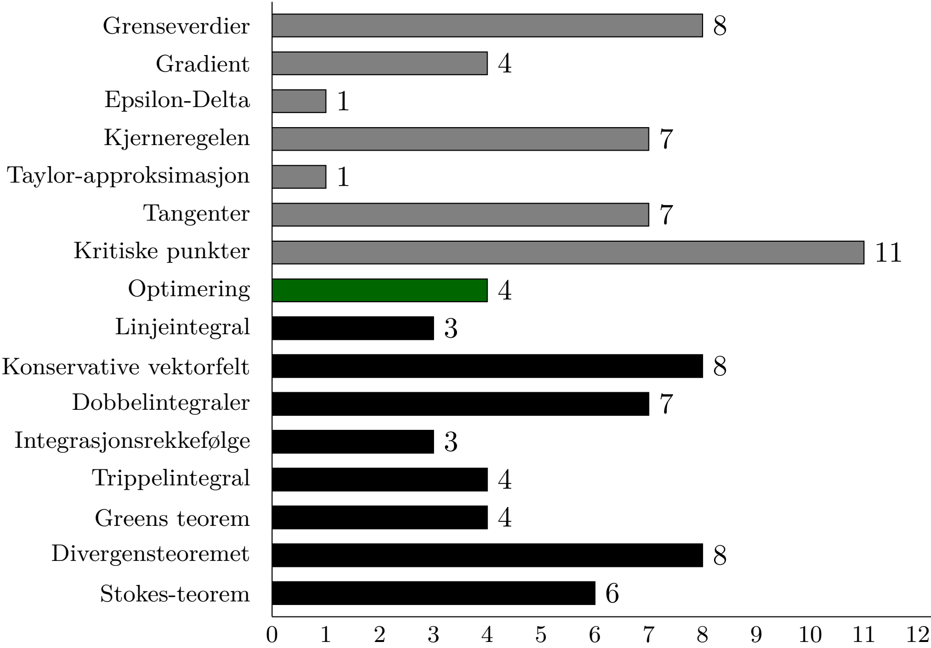
$f_{\min} = 0,\ f_{\max} = 4 + \frac{1}{2}$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\underline{\lambda = 1:}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-2x^2), \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Når $x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{4}$ og $y^2 = 4 - x^4$ så $f = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 4 - \frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{2}$.


Grenseverdier
8
Gradient
4
Epsilon-Delta
1
Kjerneregelen
7
Taylor-approksimasjon
1
Tangenter
7
Kritiske punkter
11
Optimering
4
Linjeintegral
3
Konservative vektorfelt
8
Dobbelintegraler
7
Integrasjonsrekkefølge
3
Trippelintegral
4
Greens teorem
4
Divergensteoremet
8
Stokes-teorem
6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Optimering

K2015, Oppgave 4a

Finn punktene på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som er nærmeste og lengst fra punktet $(2, 2, 1)$.

Avstanden mellom punktet (x, y, z) og $(2, 2, 1)$ er

$$f(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2$$

Vi ønsker å optimalisere denne avstanden under bi-bibetingelsen om at punktet vårt ligger på kuleflaten. Altså $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$.

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Leftrightarrow 2(x - 2, y - 2, z - 1) = 2\lambda(x, y, z)$$

Optimering

K2015, Oppgave 4a

Finn punktene på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som er nærmeste og lengst fra punktet $(2, 2, 1)$.

Avstanden mellom punktet (x, y, z) og $(2, 2, 1)$ er

$$f(x, y, z) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2$$

Vi ønsker å optimalisere denne avstanden under bi-bibetingelsen om at punktet vårt ligger på kuleflaten. Altså $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$.

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Leftrightarrow 2(x-2, y-2, z-1) = 2\lambda(x, y, z)$$

Her har vi altså tre likninger med tre ukjente. Med løsning

$$x = \frac{2}{1-\lambda} = y \quad \text{og} \quad z = \frac{1}{1-\lambda}$$

Optimering

K2015, Oppgave 4a

Finn punktene på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som er nærmeste og lengst fra punktet $(2, 2, 1)$.

Avstanden mellom punktet (x, y, z) og $(2, 2, 1)$ er

$$f(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2$$

Vi ønsker å optimalisere denne avstanden under bi-bibetingelsen om at punktet vårt ligger på kuleflaten. Altså $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$.

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Leftrightarrow 2(x - 2, y - 2, z - 1) = 2\lambda(x, y, z)$$

Innsatt i $g(x, y, z)$ får vi da

$$\left(\frac{1}{1 - \lambda}\right)^2 (2^2 + 2^2 + 1) = 4 \Rightarrow \frac{1}{1 - \lambda} = \pm\frac{2}{3}$$

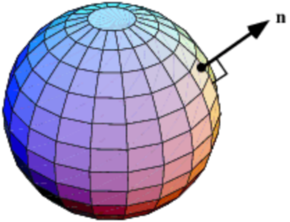
slik at $x = y = \pm 4/3$, $z = \pm 2/3$ punktene $(4, 4, 2)/3$ og $(-4, -4, -2)/3$ som

Optimering

K2015, Oppgave 4a

Finn punktene på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som er nærmeste og lengst fra punktet $(2, 2, 1)$.

For å reise raskest mulig bort fra kulen må vi reise normalt bort fra den. Dette er retningen til normalvektoren $\mathbf{n} = (2, 2, 1)$.

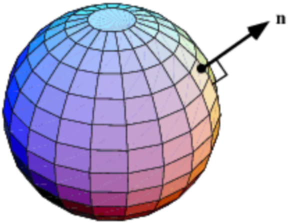


Optimering

K2015, Oppgave 4a

Finn punktene på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som er nærmeste og lengst fra punktet $(2, 2, 1)$.

For å reise raskest mulig bort fra kulen må vi reise normalt bort fra den. Dette er retningen til normalvektoren $\mathbf{n} = (2, 2, 1)$.



Finner skjæringspunktet mellom

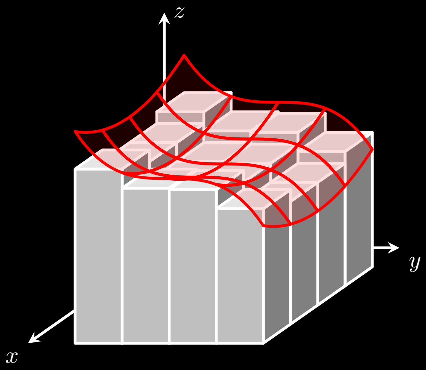
$$\ell(t) = (0, 0, 0) + t(2, 2, 1) = t(2, 2, 1)$$

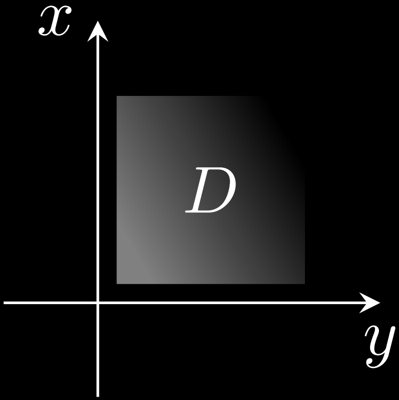
og kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
Dette gir

$$(2t)^2 + (2t)^2 + (t)^2 = 4 \Rightarrow t = \pm\frac{2}{3}$$

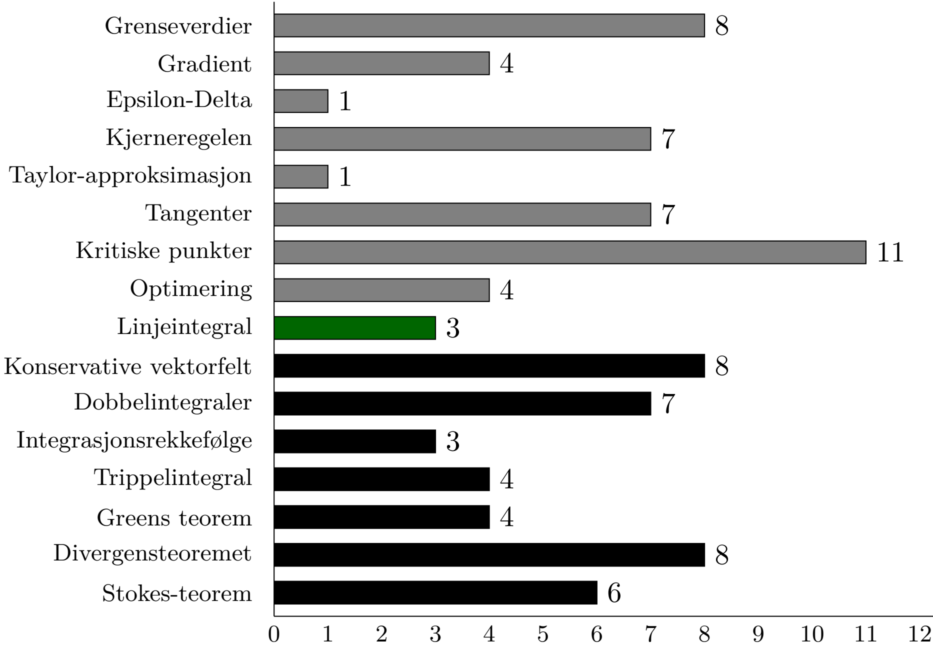
Leser kan selv teste at en får samme punkter ved å sette t inn i ℓ.

Integrasjon

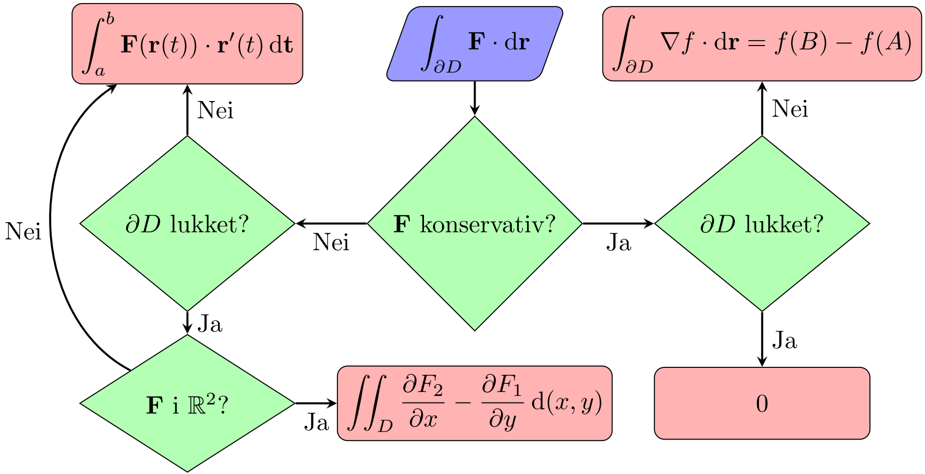




$$\iint_D \int_0^{f(x,y)} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}(x,y) \quad = \quad \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

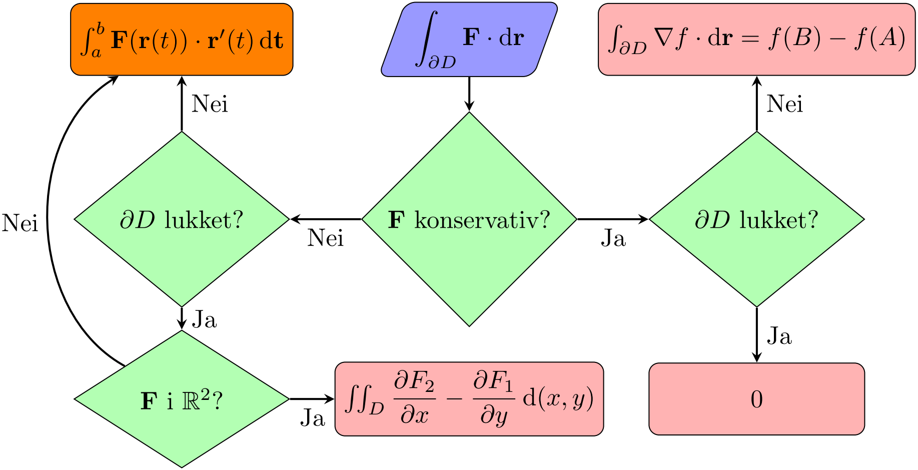

Grenseverdier
8
Gradient
4
Epsilon-Delta
1
Kjerneregelen
7
Taylor-approksimasjon
1
Tangenter
7
Kritiske punkter
11
Optimering
4
Linjeintegral
3
Konservative vektorfelt
8
Dobbelintegraler
7
Integrasjonsrekkefølge
3
Trippelintegral
4
Greens teorem
4
Divergensteoremet
8
Stokes-teorem
6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Linjeintegral



∂D er en kurve slik at $\partial D\colon \mathbf{r}(t),\ a \le t \le b$ med $\mathbf{r}(a) = A$ og $\mathbf{r}(b) = B$.
D er området avgrenset av ∂D. Dersom $\mathbf{F}$ er konservativ er $\nabla f = \mathbf{F}$.

Linjeintegral



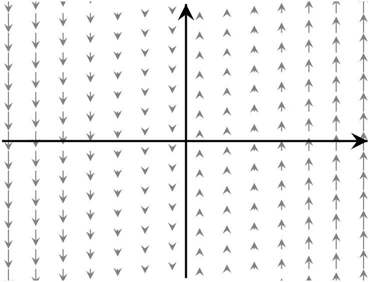
∂D er en kurve slik at $\partial D\colon \mathbf{r}(t),\ a \le t \le b$ med $\mathbf{r}(a) = A$ og $\mathbf{r}(b) = B$. D er området avgrenset av ∂D. Dersom $\mathbf{F}$ er konservativ er $\nabla f = \mathbf{F}$.

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



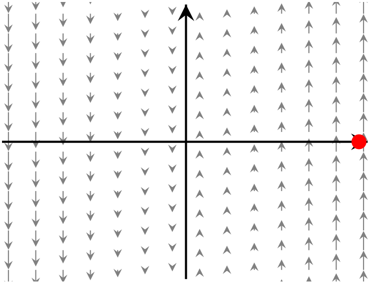
$$\mathbf{r}\,(\theta) = (x_0 + a\cos\theta)\mathbf{i} + (y_0 + a\sin\theta)\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



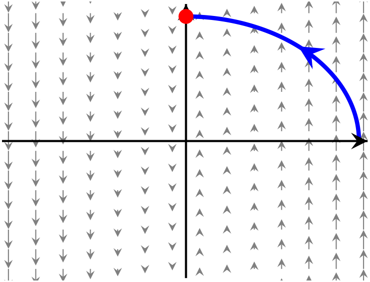
$$\mathbf{r}\ (\theta) = (x_0 + a\cos 0)\mathbf{i} + (y_0 + a\sin 0)\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



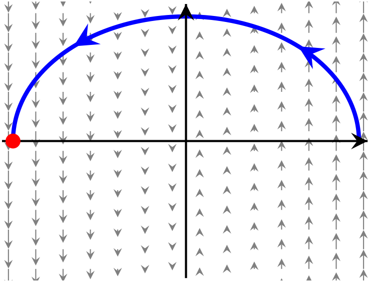
$$\mathbf{r}\ (\theta) = (x_0 + a\cos\frac{\pi}{2})\mathbf{i} + (y_0 + a\sin\frac{\pi}{2})\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x,y) = (0,x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



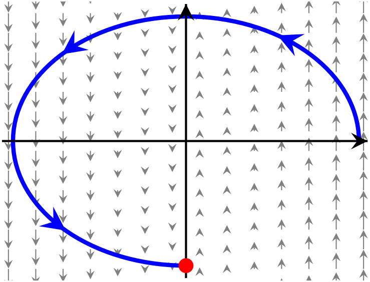
$$\mathbf{r}\ (\theta) = (x_0 + a\cos\pi)\mathbf{i} + (y_0 + a\sin\pi)\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



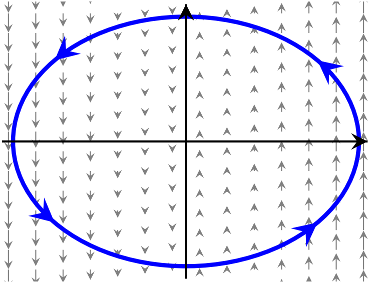
$$\mathbf{r}\ (\theta) = (x_0 + a\cos\frac{3\pi}{2})\mathbf{i} + (y_0 + a\sin\frac{3\pi}{2})\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



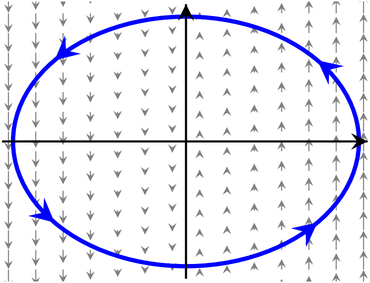
$$\mathbf{r}\,(\theta) = (x_0 + a\cos\theta)\mathbf{i} + (y_0 + a\sin\theta)\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x,y) = (0,x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



$$\mathbf{r}\ (\theta) = (x_0 + a\cos\theta)\mathbf{i} + (y_0 + a\sin\theta)\mathbf{j}$$

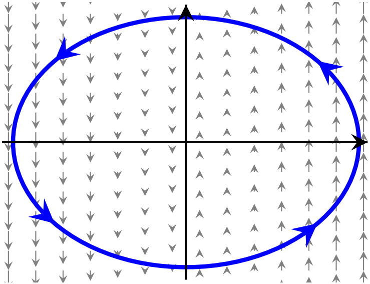
$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(\theta)\big)\mathbf{r}'(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x,y) = (0,x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



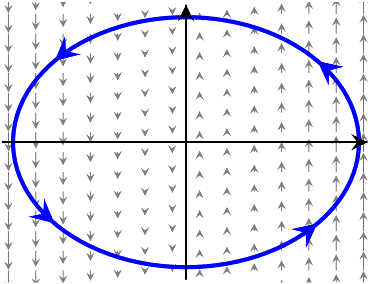
$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\,(\theta) &= (x_0 + a\cos\theta)\mathbf{i} + (y_0 + a\sin\theta)\mathbf{j} \\
\mathbf{r}'(\theta) &= \quad -a\sin\theta\ \mathbf{i} + \quad (a\cos\theta)\mathbf{j} \\
\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(\theta)\big) &= \quad 0\ \mathbf{i} + (x_0 + a\cos\theta)\mathbf{j} \\
\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(\theta)\big)\mathbf{r}'(\theta)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



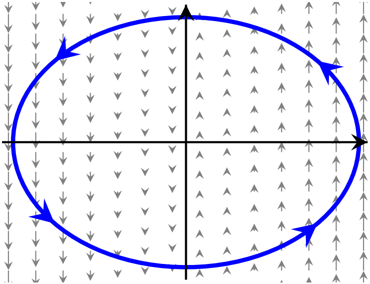
$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\,(\theta) &= (x_0 + a\cos\theta)\mathbf{i} + (y_0 + a\sin\theta)\mathbf{j} \\
\mathbf{r}'(\theta) &= -a\sin\theta\ \mathbf{i} + (a\cos\theta)\mathbf{j} \\
\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(\theta)\big) &= 0\ \mathbf{i} + (x_0 + a\cos\theta)\mathbf{j} \\
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(\theta)\big)\mathbf{r}'(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} a x_0(\cos\theta) + a^2(\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

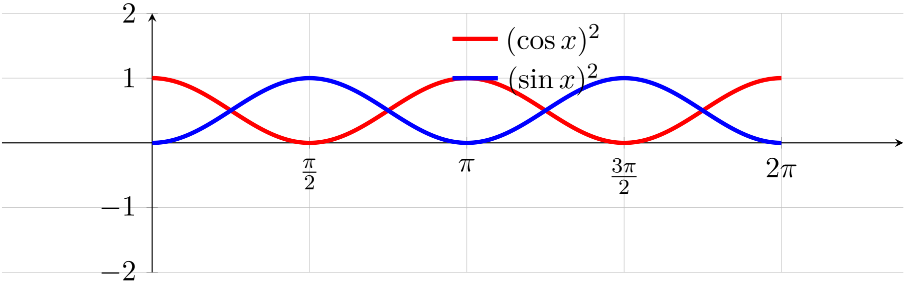
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\,(\theta) &= (x_0 + a\cos\theta)\mathbf{i} + (y_0 + a\sin\theta)\mathbf{j} \\
\mathbf{r}'(\theta) &= \quad -a\sin\theta\ \mathbf{i} + \quad (a\cos\theta)\mathbf{j} \\
\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(\theta)\big) &= \quad 0\ \mathbf{i} + (x_0 + a\cos\theta)\mathbf{j} \\
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(\theta)\big)\mathbf{r}'(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} a x_0(\cos\theta) + a^2(\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \;= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\,\mathrm{d}\theta = \pi a^2
\end{aligned}$$

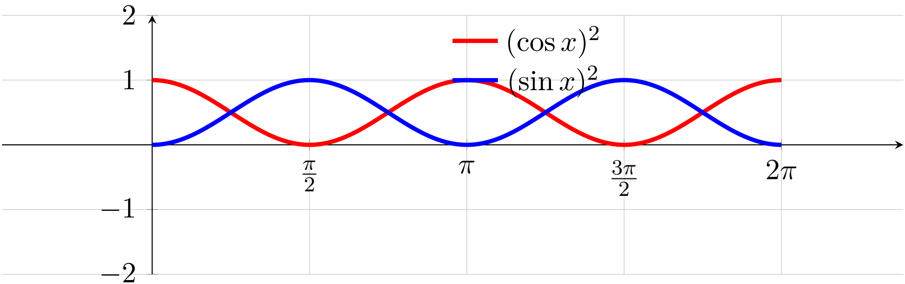
Trigonometri: like funksjoner



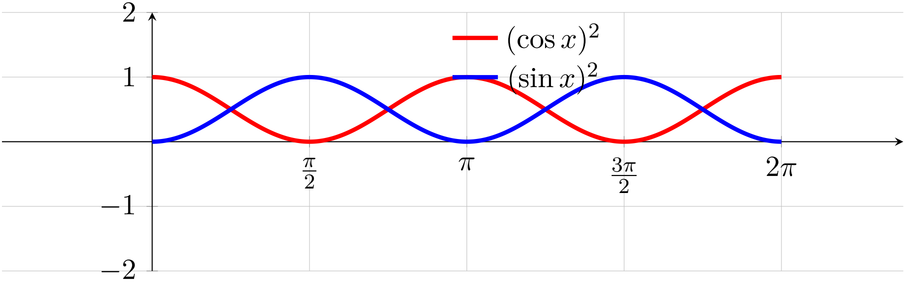
Theorem

Det å integrere $(\cos x)^2$ *eller* $(\sin x)^2$ *over intervaler som er multiplum av* $\pi/2$ *er det samme som å integrere* $1/2$ *over samme intervalet:*

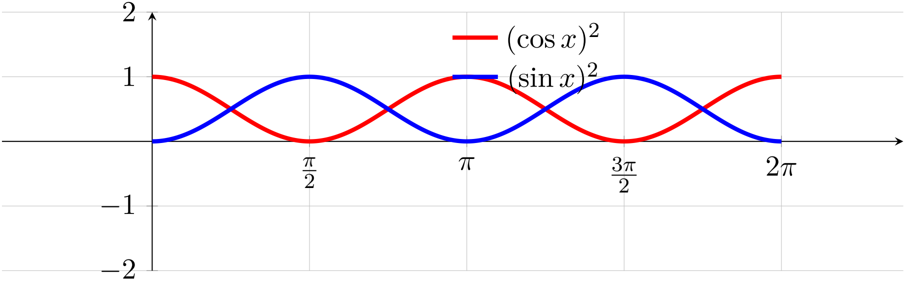
$$\int_{m\pi/2}^{n\pi/2} (\sin x)^2 \mathrm{d}x = \int_{m\pi/2}^{n\pi/2} (\cos x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{m\pi/2}^{n\pi/2} \mathrm{d}x \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$



$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x \overset{u \mapsto x - \pi/2}{=} -\int_{\pi/2}^{0} (\sin(\pi/2 - u))^2 \,\mathrm{d}u \tag{2}$$



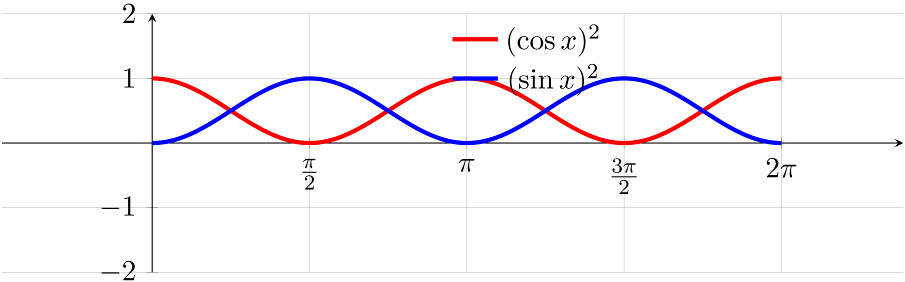
$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 \,\mathrm{d}x \tag{2}$$



$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 \,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

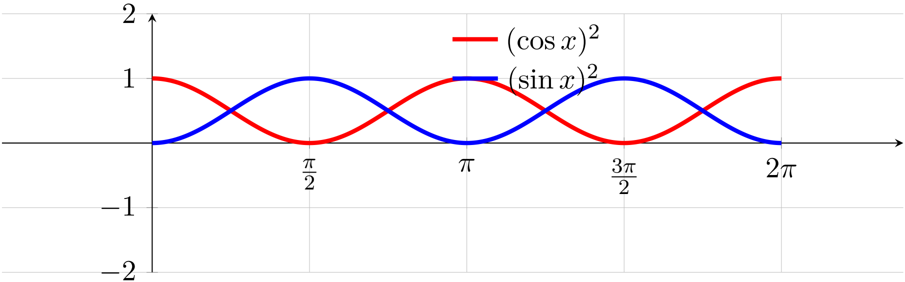
$$\tag{3}$$



$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 \,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 + (\cos x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}x$$

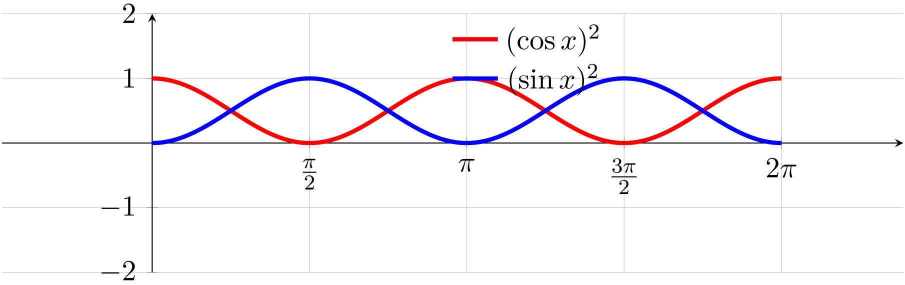
$$\tag{3}$$



$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 \,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}x$$

(3)

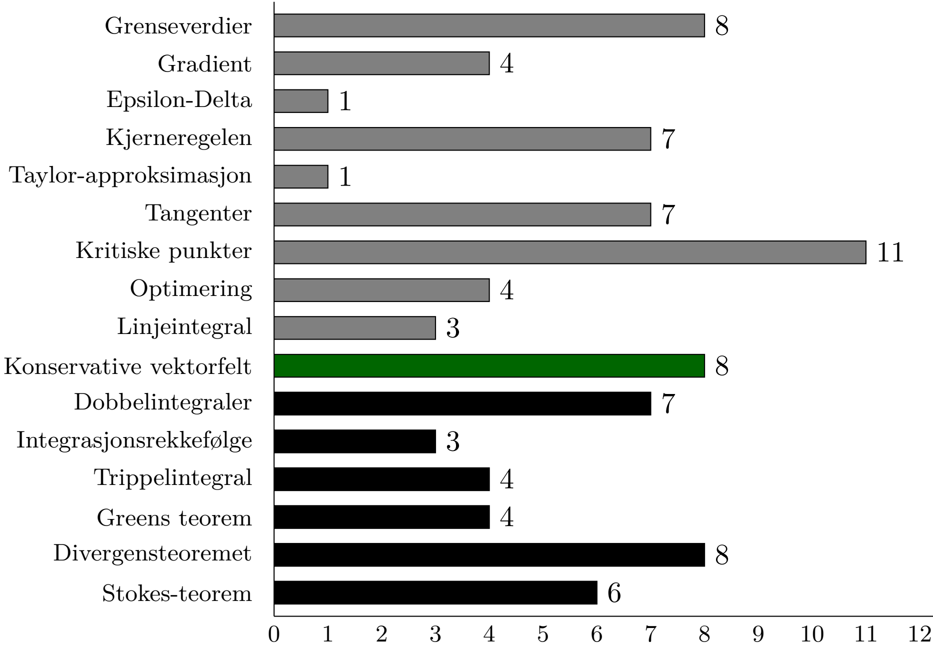


$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

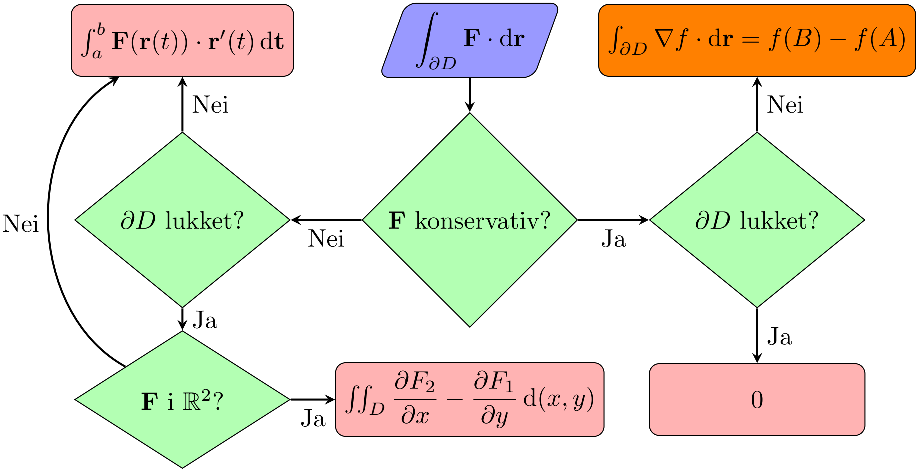
$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 1 \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2} \tag{3}$$


Grenseverdier 8
Gradient 4
Epsilon-Delta 1
Kjerneregelen 7
Taylor-approksimasjon 1
Tangenter 7
Kritiske punkter 11
Optimering 4
Linjeintegral 3
Konservative vektorfelt 8
Dobbelintegraler 7
Integrasjonsrekkefølge 3
Trippelintegral 4
Greens teorem 4
Divergensteoremet 8
Stokes-teorem 6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Konservative vektorfelt



Konservative vektorfelt

Definisjon

Et vektorfelt $\mathbf{F}\colon A \to \mathbb{R}^n$, hvor $A \subset \mathbb{R}^m$ er *konservativt* dersom det eksisterer et skalarfelt f med kontinuerlige partiellderiverte på A slik at $\nabla f = (\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}) = (F_1, F_2) = \mathbf{F}$.

Theorem

- $\mathbf{F}$ *konservativt* $\implies \operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$
- *Dersom følgende krav holder*
  - $\mathbf{F}$ *er definert på et enkeltsammenhengende området* D
  - $\mathbf{F}$ *har kontinuerlige partiellderiverte på hele* D
  - $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$

Så har vi $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0 \implies \mathbf{F}$ *konservativt.*

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

$\mathbf{F}$ er definert på hele $\mathbb{R}^3$ (enkeltsammenhengende) og har kontinuerlige partiellderiverte. Dersom $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ så er $\mathbf{F}$ et konservativ felt.

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t < \pi/4$.

$\mathbf{F}$ er definert på hele $\mathbb{R}^3$ (enkeltsammenhengende) og har kontinuerlige partiellderiverte. Dersom $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ så er $\mathbf{F}$ et konservativ felt.

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$$

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

$\mathbf{F}$ er definert på hele $\mathbb{R}^3$ (enkeltsammenhengende) og har kontinuerlige partiellderiverte. Dersom $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ så er $\mathbf{F}$ et konservativ felt.

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right)$$

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t < \pi/4$.

$\mathbf{F}$ er definert på hele $\mathbb{R}^3$ (enkeltsammenhengende) og har kontinuerlige partiellderiverte. Dersom $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ så er $\mathbf{F}$ et konservativ felt.

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right) \\
&= \mathbf{i}\,(x - x) - \mathbf{j}\,(y - y) + \mathbf{k}\,(z - z) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

Siden $\mathbf{F}$ er et konservativt felt eksisterer det et skalarfelt (potensial) f slik at $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (yz, xz, xy) = \mathbf{F}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz \Rightarrow f = xyz + C(y,z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz \Rightarrow f = xyz + D(x,z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy \Rightarrow f = xyz + E(x,y)$$

Velger $C(y,z) = D(x,z) = E(x,y) = 0$ slik at $f(x,y,z) = xyz$.

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t < \pi/4$.

Siden $f = xyz$, $\nabla f = \mathbf{F}$ og $\mathbf{F}$ er konservativt bruker vi formelen

$$\int_C \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

hvor B og A er henholdsvis start og sluttpunktet til kurven C.

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

Siden $f = xyz$, $\nabla f = \mathbf{F}$ og $\mathbf{F}$ er konservativt bruker vi formelen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f\big(\mathbf{r}(\pi/4)\big) - f\big(\mathbf{r}(0)\big)$$

hvor B og A er henholdsvis start og sluttpunktet til kurven C.

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

Siden $f = xyz$, $\nabla f = \mathbf{F}$ og $\mathbf{F}$ er konservativt bruker vi formelen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f\left(\cos\tfrac{\pi}{4}, \sin\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right) - f\left(\cos 0, \sin 0, 0\right)$$

hvor B og A er henholdsvis start og sluttpunktet til kurven C.

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

Siden $f = xyz$, $\nabla f = \mathbf{F}$ og $\mathbf{F}$ er konservativt bruker vi formelen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{\pi}{4}) - f(1,0,0)$$

hvor B og A er henholdsvis start og sluttpunktet til kurven C.

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

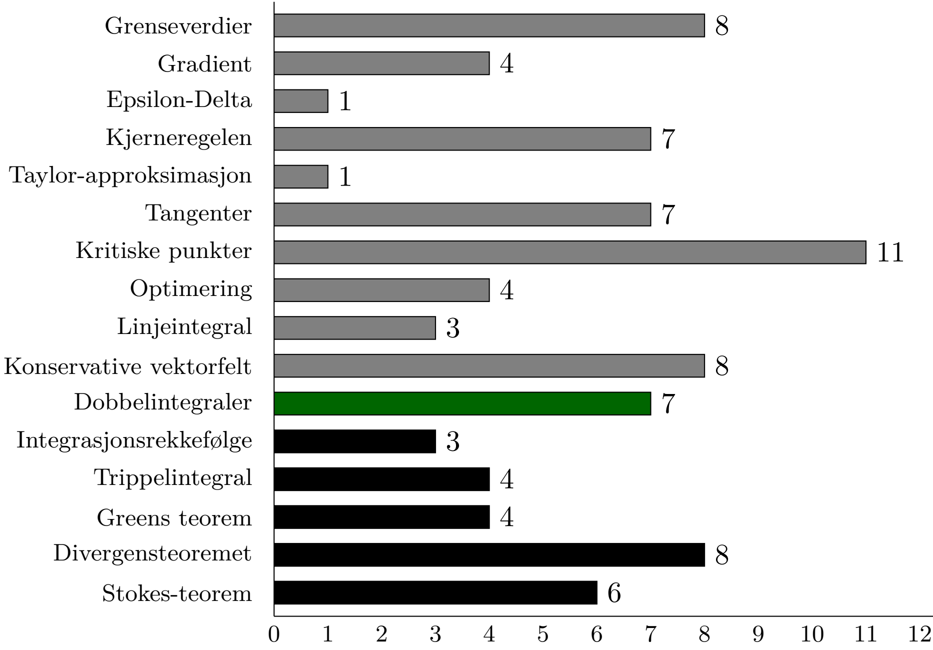
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

Siden $f = xyz$, $\nabla f = \mathbf{F}$ og $\mathbf{F}$ er konservativt bruker vi formelen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\pi}{8}$$

hvor B og A er henholdsvis start og sluttpunktet til kurven C.


Grenseverdier 8
Gradient 4
Epsilon-Delta 1
Kjerneregelen 7
Taylor-approksimasjon 1
Tangenter 7
Kritiske punkter 11
Optimering 4
Linjeintegral 3
Konservative vektorfelt 8
Dobbelintegraler 7
Integrasjonsrekkefølge 3
Trippelintegral 4
Greens teorem 4
Divergensteoremet 8
Stokes-teorem 6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Dobbelintegraler

1. Integralet av en odde funksjon omkring et symmetrisk området er null

$$\int_{-a}^{a} x \,\mathrm{d}x = 0$$

2. Dersom integralet inneholder $x^2 + y^2$ bytt til polarkoordinater

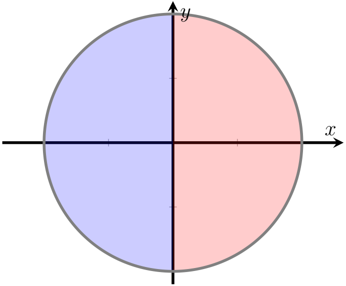
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Dobbelintegraler

1. Integralet av en odde funksjon omkring et symmetrisk området er null
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
Hvor $f(-x) = -f(x)$.
2. Dersom integralet inneholder $x^2 + y^2$ bytt til polarkoordinater
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

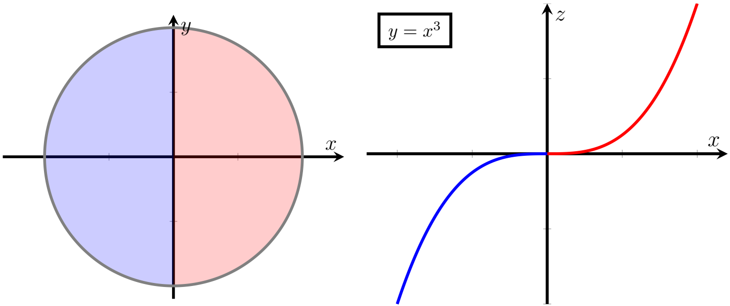
V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.



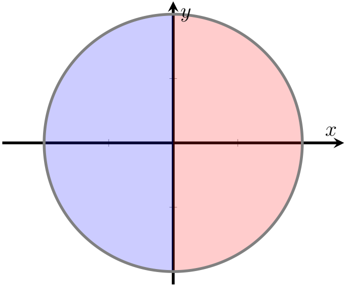
V2017, Oppgave 4

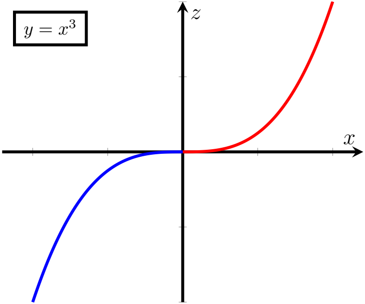
Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

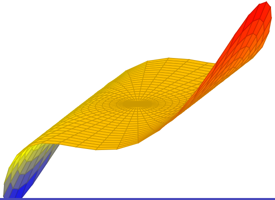


V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, \mathrm{d}(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

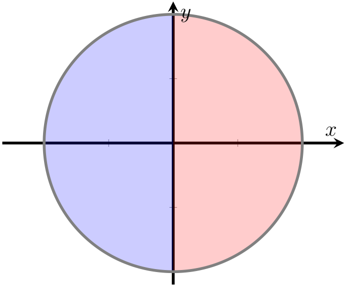


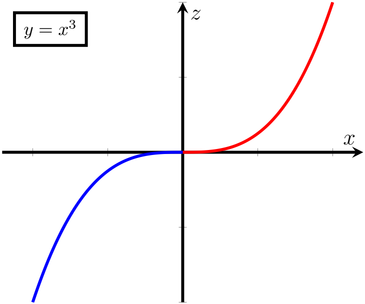




V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, \mathrm{d}(x,y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

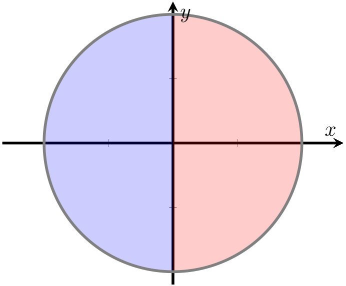


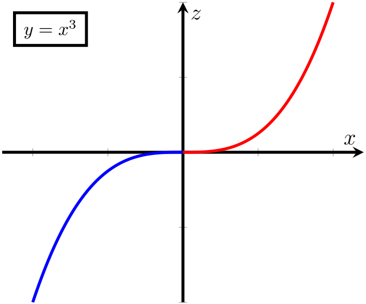


$$\iint_D 3 + x^3 \, \mathrm{d}(x,y)$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, \mathrm{d}(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

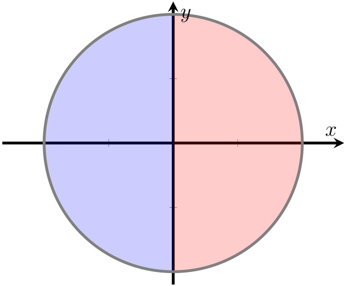


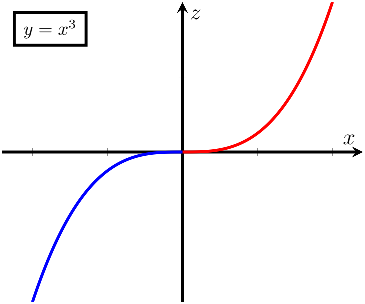


$$\iint_D 3 + x^3 \, \mathrm{d}(x, y)$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

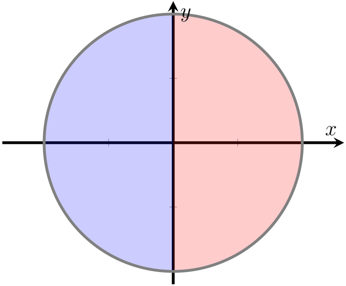


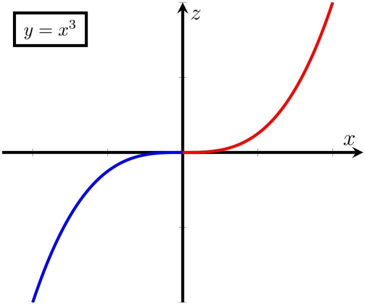


$$\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x, y) = 3 \iint_D \mathrm{d}(x, y) + \iint_D x^3 \,\mathrm{d}(x, y)$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x,y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.





$$\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x,y) = 3 \underbrace{\iint_D \mathrm{d}(x,y)}_{\pi a^2} + \underbrace{\iint_D x^3 \,\mathrm{d}(x,y)}_{0} = 3\pi a^2$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x,y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}
\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r\cos\theta)^3) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[3r + r^4 (\cos\theta) \,\mathrm{d}r \Big]_0^a \,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, \mathrm{d}(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}\iint_D 3 + x^3 \, \mathrm{d}(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r\cos\theta)^3) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos\theta)^3 \right]_0^a \mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, \mathrm{d}(x,y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}
\iint_D 3 + x^3 \, \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r\cos\theta)^3) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos\theta)^3 \right]_0^a \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos\theta)^3 \, \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \le a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$
\begin{aligned}
\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r\cos\theta)^3) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos\theta)^3\right]_0^a \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos\theta)^3 \,\mathrm{d}\theta \\
&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2 \cos\theta \,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}
\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r\cos\theta)^3) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos\theta)^3\right]_0^a \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos\theta)^3 \,\mathrm{d}\theta \\
&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin\theta)^2) \cos\theta \,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x,y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}
\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r\cos\theta)^3) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos\theta)^3 \right]_0^a \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos\theta)^3 \,\mathrm{d}\theta \\
&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin\theta)^2) \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \left[\int 1 - u^2 \,\mathrm{d}u \right]_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, \mathrm{d}(x,y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$
\begin{aligned}
\iint_D 3 + x^3 \, \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r\cos\theta)^3) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos\theta)^3 \right]_0^a \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos\theta)^3 \, \mathrm{d}\theta \\
&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin\theta)^2) \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \left[u - \frac{1}{3} u^3 \right]_0^{2\pi}
\end{aligned}
$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x,y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

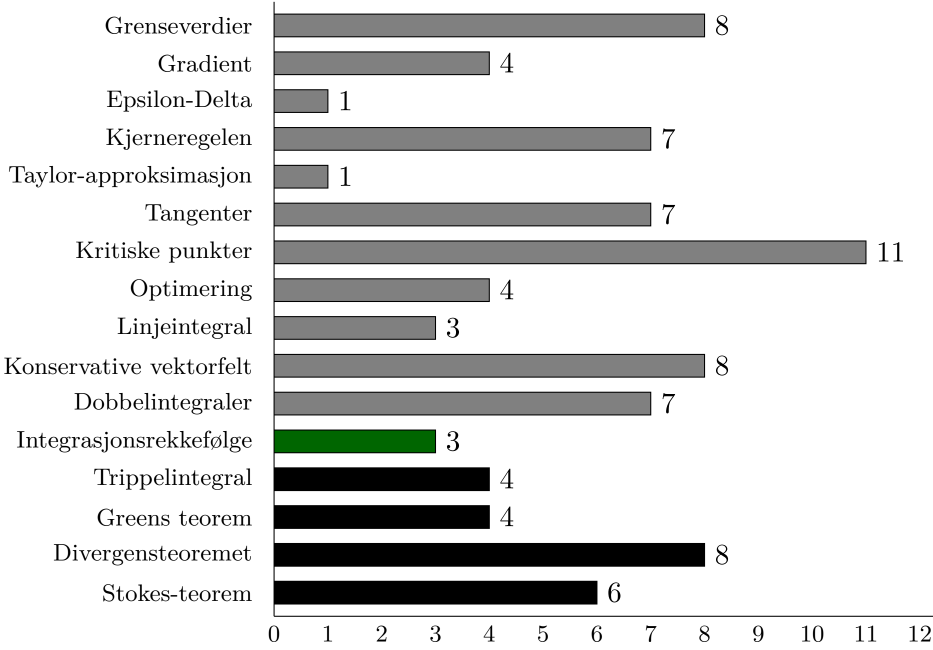
$$\begin{aligned}
\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r\cos\theta)^3) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos\theta)^3\right]_0^a \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos\theta)^3 \,\mathrm{d}\theta \\
&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin\theta)^2) \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \left[\sin x - \frac{1}{3} (\sin x)^3\right]_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x,y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

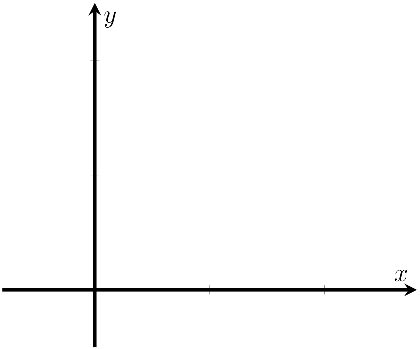
Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}
\iint_D 3 + x^3 \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r\cos\theta)^3) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos\theta)^3\right]_0^a \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos\theta)^3 \,\mathrm{d}\theta \\
&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin\theta)^2) \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \left[\sin x - \frac{1}{3} (\sin x)^3\right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2
\end{aligned}$$


Grenseverdier
8
Gradient
4
Epsilon-Delta
1
Kjerneregelen
7
Taylor-approksimasjon
1
Tangenter
7
Kritiske punkter
11
Optimering
4
Linjeintegral
3
Konservative vektorfelt
8
Dobbelintegraler
7
Integrasjonsrekkefølge
3
Trippelintegral
4
Greens teorem
4
Divergensteoremet
8
Stokes-teorem
6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

V2017, Oppgave 3

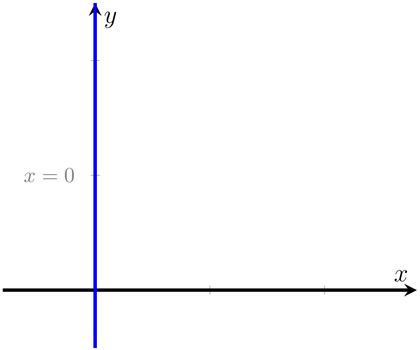
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

V2017, Oppgave 3

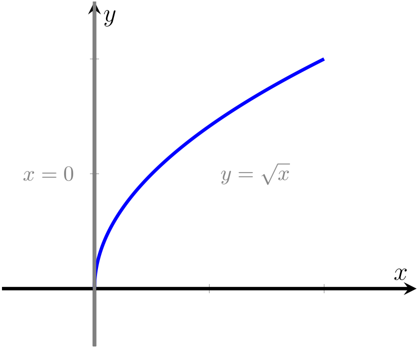
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

V2017, Oppgave 3

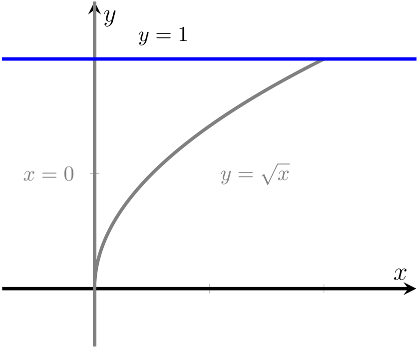
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=1} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

V2017, Oppgave 3

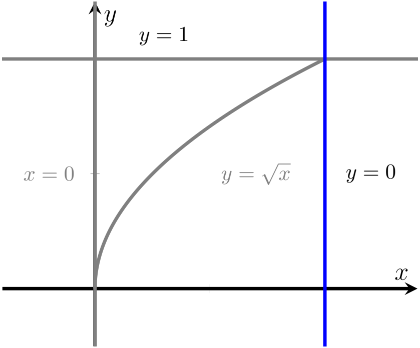
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

V2017, Oppgave 3

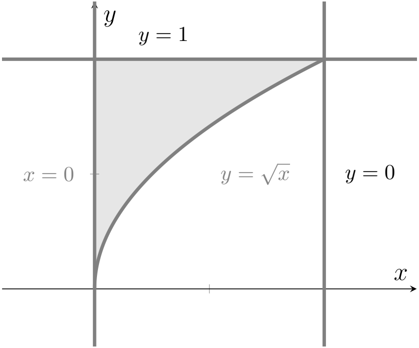
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

V2017, Oppgave 3

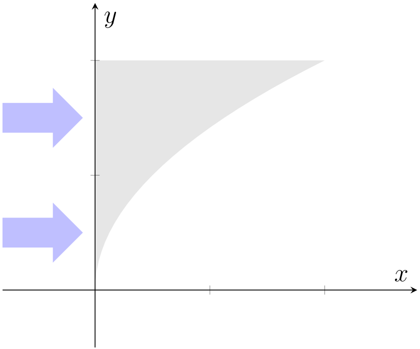
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

V2017, Oppgave 3

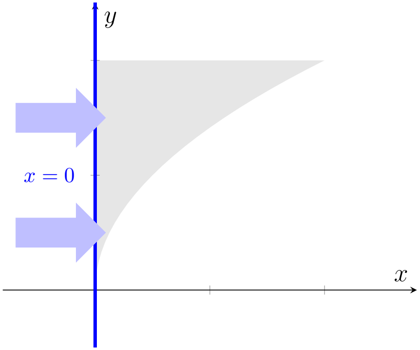
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_?^? \int_?^? f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

V2017, Oppgave 3

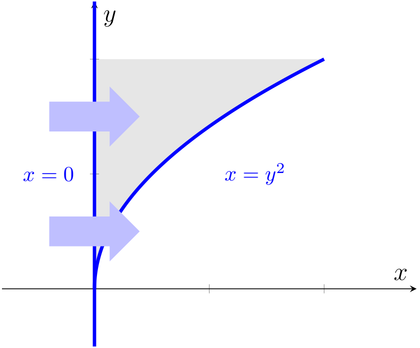
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_?^? \int_{x=0}^? f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

V2017, Oppgave 3

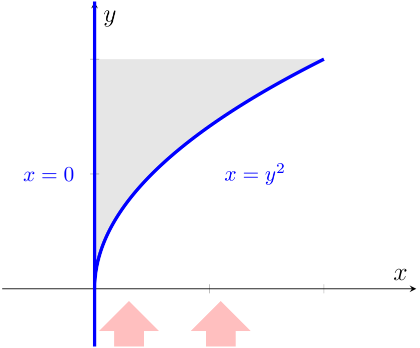
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_?^? \int_0^{x=y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

V2017, Oppgave 3

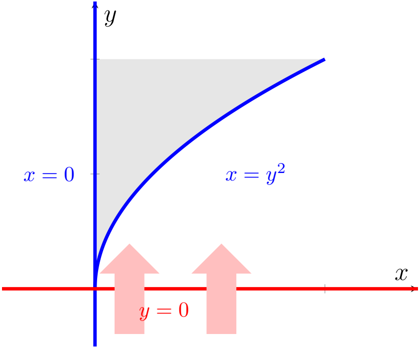
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_?^? \int_0^{y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

V2017, Oppgave 3

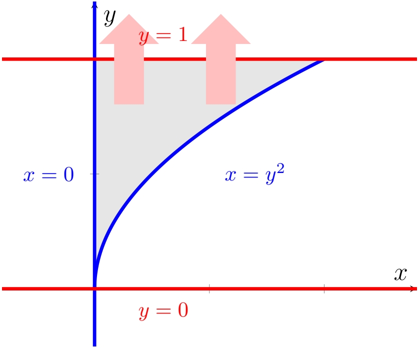
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{?} \int_0^{y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

V2017, Oppgave 3

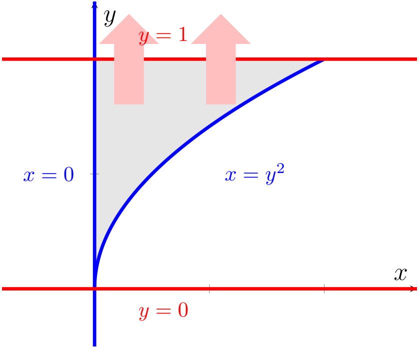
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{y=1} \int_0^{y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

V2017, Oppgave 3

Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

V2017, Oppgave 3

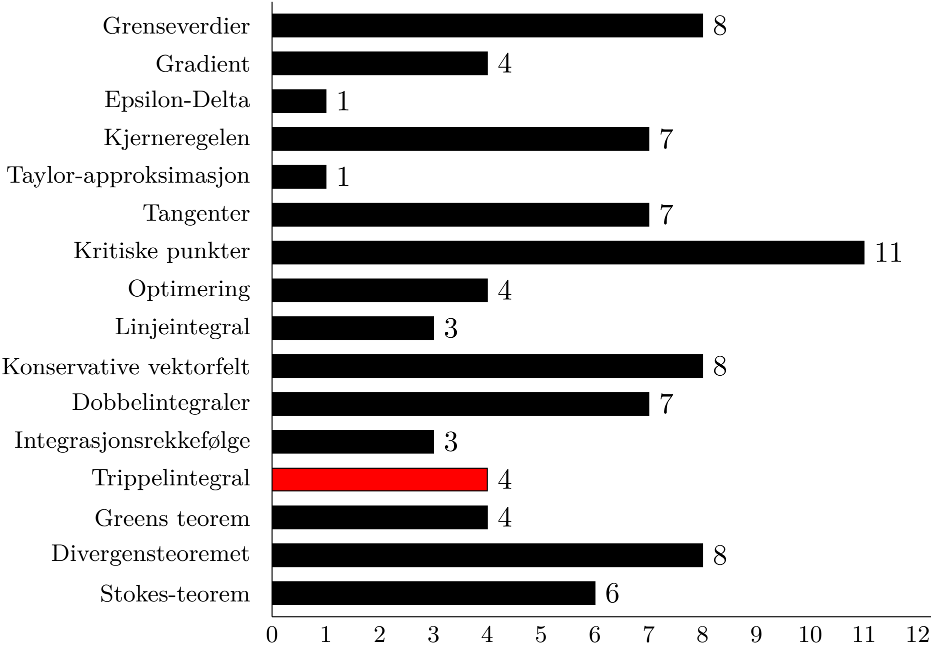
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Har at $0 \leq x \leq 1$ og $\sqrt{x} \leq y \leq 1$. Dette fører til at

$$\sqrt{0} \leq y \leq 1$$

Ved å kvadrere $\sqrt{x} \leq y \leq 1$ får vi $x \leq y^2 \leq 1$. Videre vet vi at $0 \leq x$ slik at

$$0 \leq x \leq y^2$$

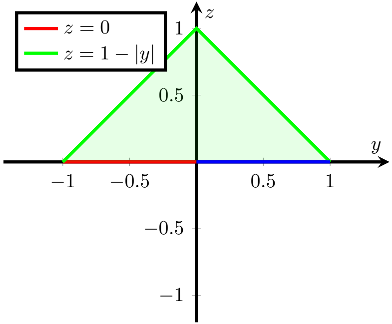

Grenseverdier
8
Gradient
4
Epsilon-Delta
1
Kjerneregelen
7
Taylor-approksimasjon
1
Tangenter
7
Kritiske punkter
11
Optimering
4
Linjeintegral
3
Konservative vektorfelt
8
Dobbelintegraler
7
Integrasjonsrekkefølge
3
Trippelintegral
4
Greens teorem
4
Divergensteoremet
8
Stokes-teorem
6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

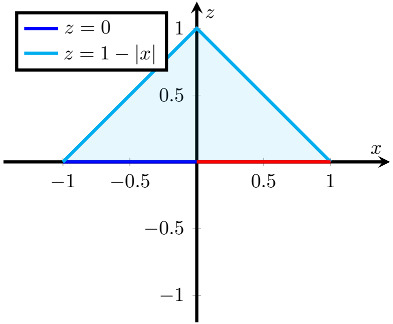
Trippelintegral

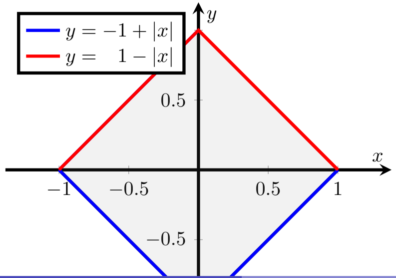
1. Tegn integrasjonsområdet i xy, xz og yz-planet
2. Bestem grensene
3. Gjør forenklinger med hensyn på symmetri
4. Beregn trippelintegralet og bytt grenser om nødvendig

Bestem volumet til $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x,y,z) = xy + z^2$.

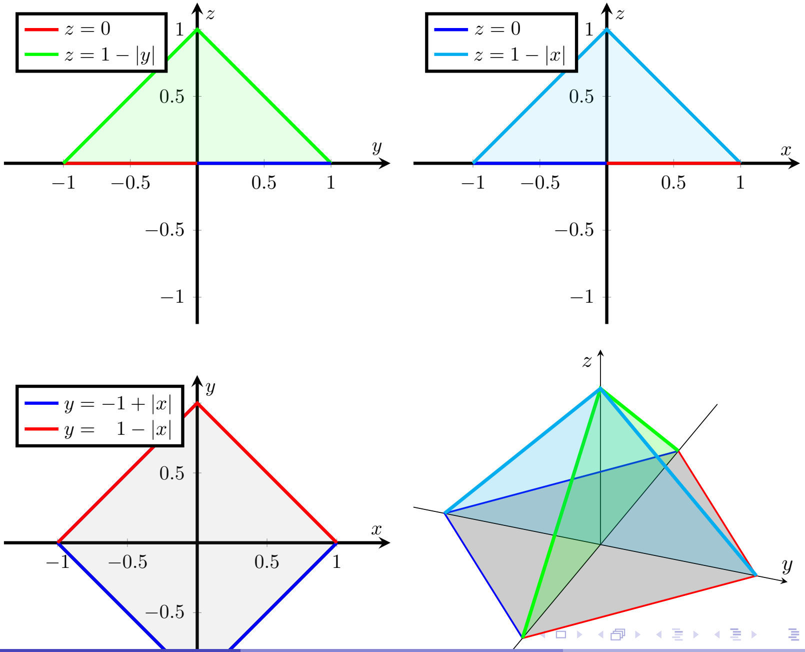
Viser området avgrenset av $0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|$ for ulike plan.







Viser området avgrenset av $0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|$ for ulike plan.



Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy\,\mathrm{d}V = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$M = \iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \iiint_R z^n\,\mathrm{d}V$$

Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy\,\mathrm{d}V = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$M = \iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \iiint_R z^n\,\mathrm{d}V$$
$$= \int_{x=?}^{x=?} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \int_{z=u(x,y)}^{z=v(x,y)} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy\,\mathrm{d}V = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \iiint_R z^n\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-1+|x|}^{y=1-|x|} \int_{z=0}^{z=1-|x|-|y|} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Bestem volumet til $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x,y,z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

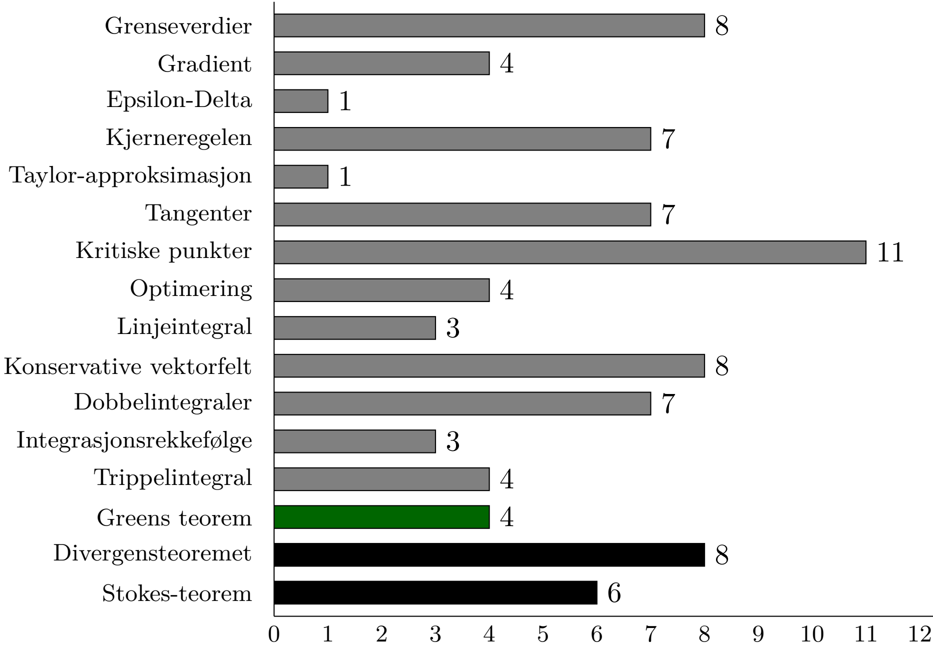
Siden $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy\,\mathrm{d}V = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

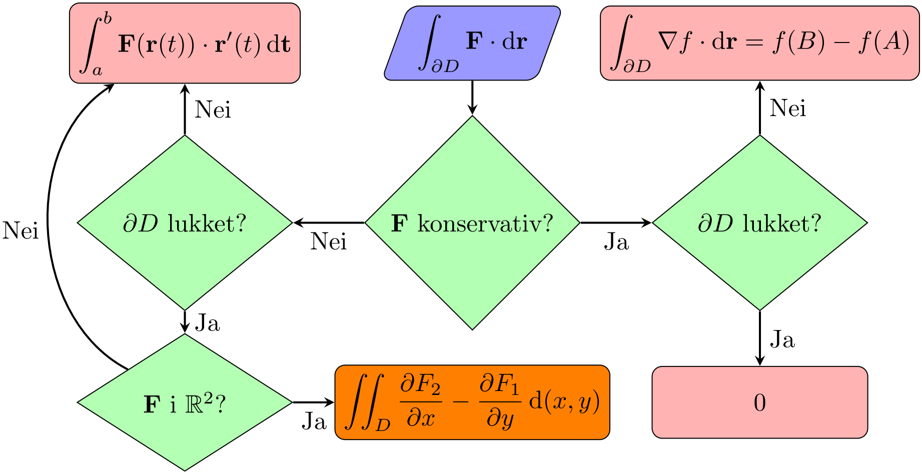
$$
\begin{aligned}
M &= \iiint_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_R z^n\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-1+|x|}^{y=1-|x|} \int_{z=0}^{z=1-|x|-|y|} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy\,\mathrm{d}V = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \iiint_R z^n\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-1+|x|}^{y=1-|x|} \int_{z=0}^{z=1-|x|-|y|} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 4 \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$


Grenseverdier 8
Gradient 4
Epsilon-Delta 1
Kjerneregelen 7
Taylor-approksimasjon 1
Tangenter 7
Kritiske punkter 11
Optimering 4
Linjeintegral 3
Konservative vektorfelt 8
Dobbelintegraler 7
Integrasjonsrekkefølge 3
Trippelintegral 4
Greens teorem 4
Divergensteoremet 8
Stokes-teorem 6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



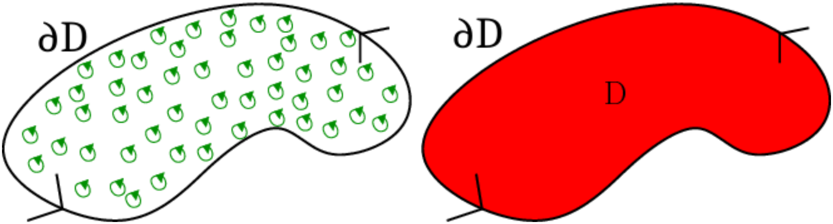
∂D er en kurve slik at $\partial D\colon \mathbf{r}(t),\ a \le t \le b$ med $\mathbf{r}(a) = A$ og $\mathbf{r}(b) = B$. D er området avgrenset av ∂D. Dersom $\mathbf{F}$ er konservativ er $\nabla f = \mathbf{F}$.

Greens teorem

Theorem (Greens theorem)

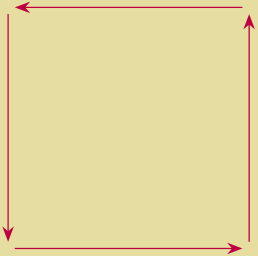
La ∂D være en positivt orientert, stykkevis glatt, enkel, lukket kurve og la D være området innelukket av ∂D. Dersom $\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ og $\mathbf{F}$ har kontinuerlige partiellderiverte på hele D så er

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\partial D} F_1 \,\mathrm{d}x + F_2 \,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}(x,y).$$



Greens teorem

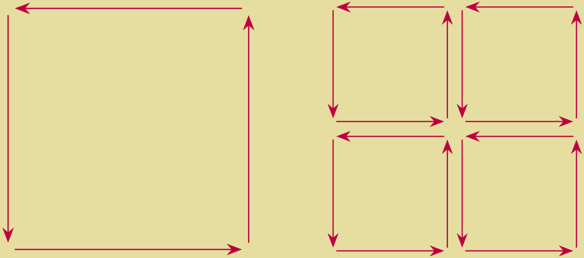
Intuisjon



$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Greens teorem

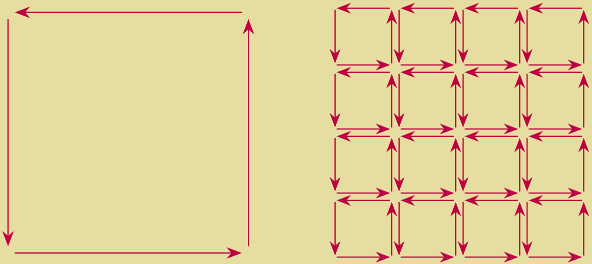
Intuisjon



$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \qquad = \qquad \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Greens teorem

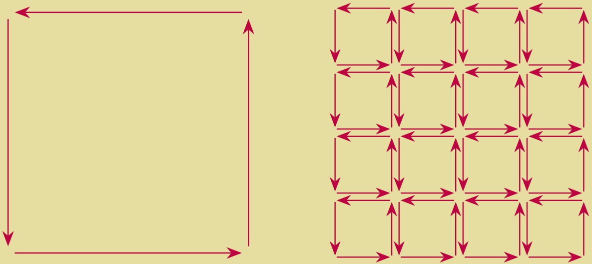
Intuisjon



$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \qquad = \qquad \int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Greens teorem

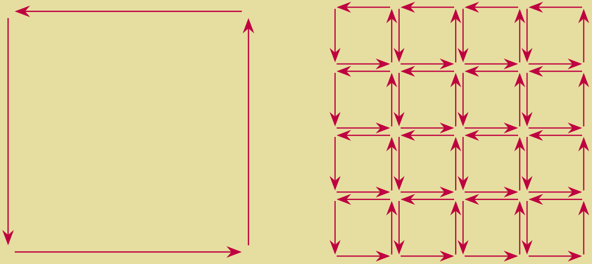
Intuisjon



$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \quad = \quad \iint_D \text{2d-curl}\, \mathbf{F} \,\mathrm{d}(x, y)$$

Greens teorem

Intuisjon



$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \qquad = \qquad \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}(x, y)$$

Med andre ord kanseleres alle de mikroskopiske sirkulasjonene slik at en står igjen med den makroskopiske sirkulasjonen, altså linjeintegralet.

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y$ der ∂D er en sirkel med radus 2 og sentrum (a, b). Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y$ der ∂D er en sirkel med radus 2 og sentrum (a, b). Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 1: Siden linjeintegralet vårt er på formen $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ og vi integrerer over en lukket kurve er det logisk å tenke Greens.

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\, \mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\, \mathrm{d}y$ der ∂D er en sirkel med radus 2 og sentrum (a, b). Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 1: Siden linjeintegralet vårt er på formen $\int_C P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y$ og vi integrerer over en lukket kurve er det logisk å tenke Greens.

Steg 2: Sjekker om vilkårene for å bruke Greens er oppfylt:

- Kurven ∂D er lukket, glatt og enkel.
- Da alle polynomer, eksponensialfunksjoner og sinus/cosinus er deriverbare, har $\mathbf{F}$ kontinuerlige partiellderiverte.

Merk: For at for å bruke Green's må ∂D orienteres *mot-klokken*.

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y$ der ∂D er en sirkel med radus 2 og sentrum (a, b). Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

$$I = \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Greens teorem}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big(10x - \sin(y^3 + 8y)\Big) - \frac{\partial}{\partial y} \Big(5y - e^{\sin x}\Big) \right) \mathrm{d}(x, y)$$

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y$ der ∂D er en sirkel med radus 2 og sentrum (a, b). Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Greens teorem}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(10x - \sin(y^3 + 8y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(5y - e^{\sin x}\right)\right) \mathrm{d}(x, y) \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(10x - 0) - \frac{\partial}{\partial y}(5y - 0)\right) \mathrm{d}(x, y)
\end{aligned}
$$

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y$ der ∂D er en sirkel med radus 2 og sentrum (a, b). Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Greens teorem}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big(10x - \sin(y^3 + 8y)\Big) - \frac{\partial}{\partial y} \Big(5y - e^{\sin x}\Big) \right) \mathrm{d}(x, y) \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - 0) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - 0) \right) \mathrm{d}(x, y) \\
&= \iint_D (10 - 5)\,\mathrm{d}(x, y)
\end{aligned}
$$

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y$ der ∂D er en sirkel med radus 2 og sentrum (a, b). Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Greens teorem}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\Big(10x - \sin(y^3 + 8y)\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(5y - e^{\sin x}\Big) \right) \mathrm{d}(x, y) \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(10x - 0) - \frac{\partial}{\partial y}(5y - 0) \right) \mathrm{d}(x, y) \\
&= 5 \iint_D \mathrm{d}(x, y)
\end{aligned}
$$

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y$ der ∂D er en sirkel med radus 2 og sentrum (a, b). Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Greens teorem}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big(10x - \sin(y^3 + 8y)\Big) - \frac{\partial}{\partial y} \Big(5y - e^{\sin x}\Big) \right) \mathrm{d}(x, y) \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - 0) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - 0) \right) \mathrm{d}(x, y) \\
&= 5 \iint_D \mathrm{d}(x, y) = 5\mathrm{Areal}(D)
\end{aligned}
$$

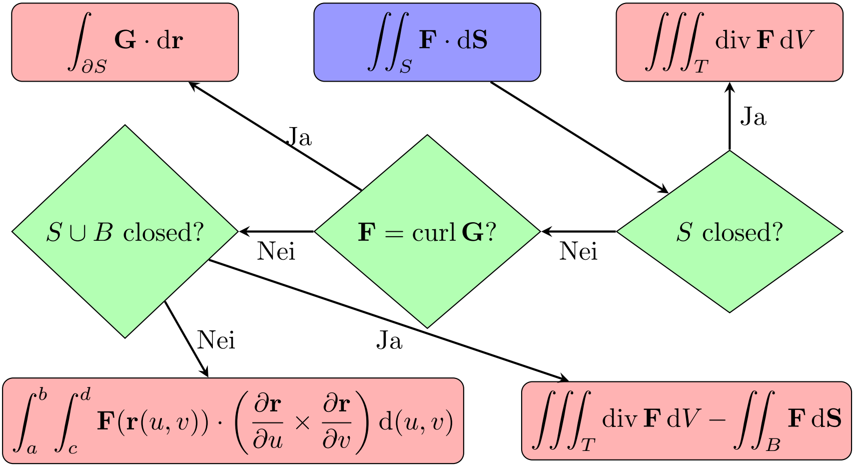
V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y$ der ∂D er en sirkel med radus 2 og sentrum (a, b). Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

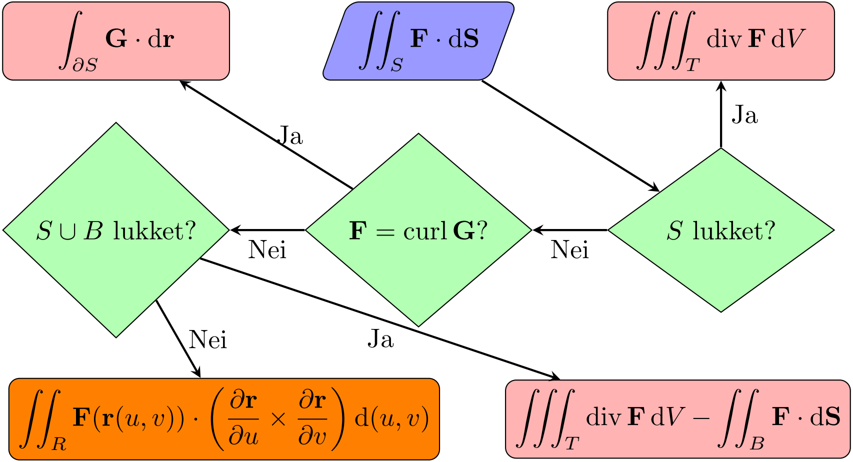
$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x})\,\mathrm{d}x + (10x - \sin(y^3 + 8y))\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Greens teorem}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \Big(10x - \sin(y^3 + 8y)\Big) - \frac{\partial}{\partial y} \Big(5y - e^{\sin x}\Big) \right) \mathrm{d}(x, y) \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - 0) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - 0) \right) \mathrm{d}(x, y) \\
&= 5 \iint_D \mathrm{d}(x, y) = 5\text{Areal}(D) = 5(\pi \cdot 2^2) = 20\pi
\end{aligned}
$$

Overflateintegral



S er en parametrisert flate $S\colon \mathbf{r}(u,v), (u,v) \in R \subseteq \mathbb{R}^2$ med rand ∂S.
T er volumet med overflate S. B er en tiltenkt flate (lokk til S).

Overflateintegral



S er en parametrisert flate $S\colon \mathbf{r}(u,v), (u,v) \in R \subseteq \mathbb{R}^2$ med rand ∂S.
T er volumet med overflate S. B er en tiltenkt flate (lokk til S).

1. Tegn integrasjonsområdet og bestem integrasjonsgrensene
2. Bestem parametriseringen $\mathbf{r}(u,v)\colon (u,v)\in R$ og $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.
3. Dersom $\mathbf{F}(x,y)$ er et vektorfelt blir fluksen ut av oveflaten

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}S = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\mathrm{d}(x,y)\,.$$

   Dersom $z=g(x,y)$ så er $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,g(x,y))$, $(x,y)\in R$ og

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}S = \iint_R (F_1,F_2,F_3)\cdot(-g_x,-g_y,1)\,\mathrm{d}(x,y).$$

4. Dersom $g(x,y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$A=\iint_S \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|\mathrm{d}(u,v)\,,$$

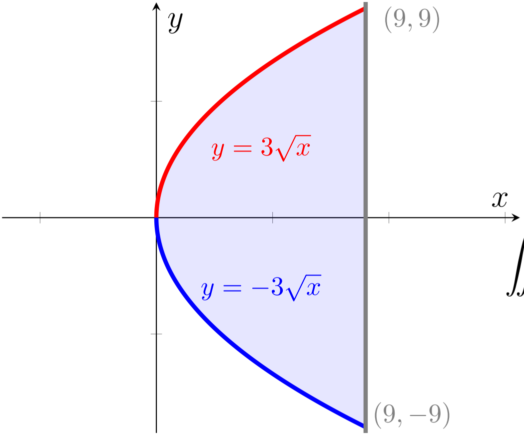
   I spesialtilfelle $z=g(x,y)$ er $\mathbf{r}(u,v)=(x,y,g(x,y))$ og

$$A=\iint_T \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\,\mathrm{d}(x,y).$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$
bestem arealet av flaten $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(z,y), (x,y) \in D\}$.

1. Tegn integrasjonsområdet og bestem integrasjonsgrensene



$$1 \leq x \leq 9$$
$$-3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}$$
$$\Downarrow$$
$$\iint_D \mathrm{d}(x,y) = \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(z,y), (x,y) \in D\}$.

2. Bestem parametriseringen $\mathbf{r}(u,v)\colon (u,v) \in R$ og $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.

Parametriseringen vil være: $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, g(x,y))$, $(x,y) \in D$ Slik at $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, g_x(x,y))$, og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 1, g_y(x,y))$. Så,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \tag{4}$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(z,y), (x,y) \in D\}$.

3. Dersom $g(x,y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$A = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| \mathrm{d}(x,y)$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(z,y), (x,y) \in D\}$.

3. Dersom $g(x,y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$A = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_D \left\| \left(-\frac{\partial g}{\partial y}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \right\| \mathrm{d}(x,y)$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(z,y), (x,y) \in D\}$.

3. Dersom $g(x,y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$A = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Intuisjon

Fra Analyse I husker vi at lengden av en funksjon var gitt som

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Altså ser vi at et overflateintegral kan betraktes som et to-dimensjonalt buelengdeintegral dersom $z = g(x,y)$.

V2015, Oppgave 5b

La $g(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 9, -3\sqrt{x} \le y \le 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(z,y), (x,y) \in D\}$.

3. Dersom $g(x,y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$A = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}(x,y)$$

$$= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{1 + \left(-\frac{y^2}{2x^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(z,y), (x,y) \in D\}$.

3. Dersom $g(x,y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$A = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}(x,y)$$

$$= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{y^2}{2x^2} + \left(\frac{y^2}{2x^2}\right)^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

$[a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2]$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(z,y), (x,y) \in D\}$.

3. Dersom $g(x,y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$
\begin{aligned}
A = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{2x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^9 \left[y + \frac{y^3}{6x^2} \right]_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(z,y), (x,y) \in D\}$.

3. Dersom $g(x,y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$
\begin{aligned}
A = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{2x^2}\right)^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= \int_1^9 6\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(z,y), (x,y) \in D\}$.

3. Dersom $g(x,y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$A = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}(x,y)$$

$$= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{2x^2}\right)^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

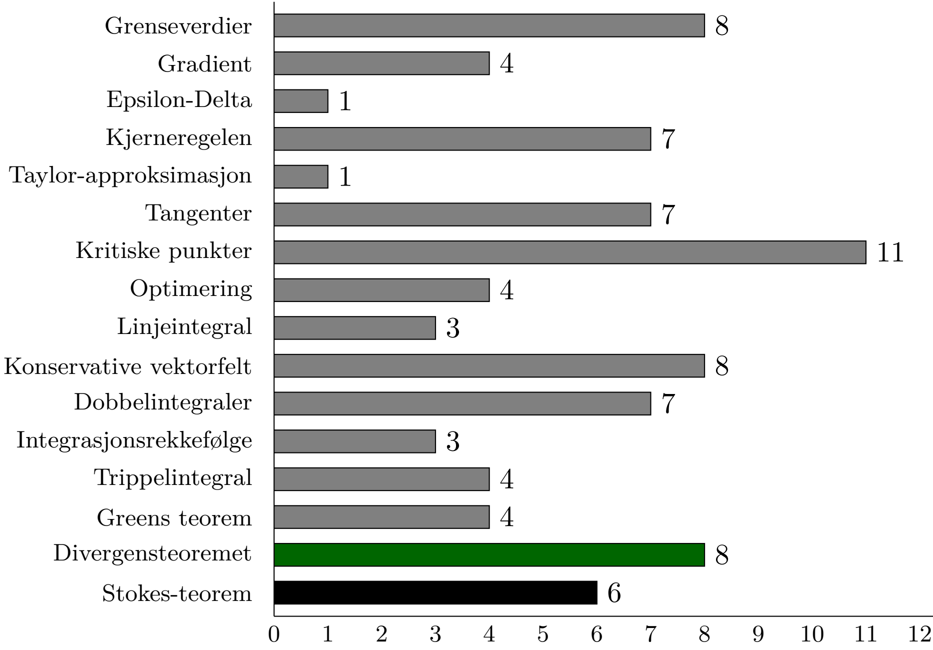
$$= \left[4x^{3/2} + 18x^{1/2}\right]_1^9$$

V2015, Oppgave 5b

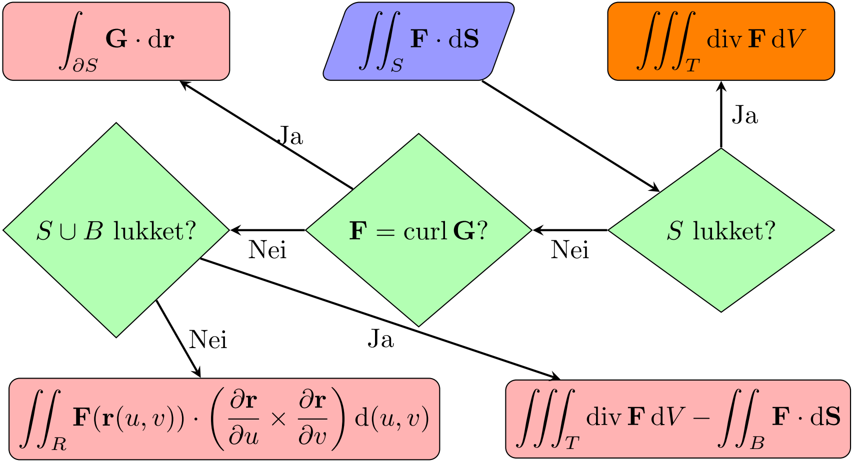
La $g(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g\colon D \to \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(z,y), (x,y) \in D\}$.

3. Dersom $g(x,y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$
\begin{aligned}
A = \iint_S \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{2x^2}\right)^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&= 140
\end{aligned}
$$


Grenseverdier 8
Gradient 4
Epsilon-Delta 1
Kjerneregelen 7
Taylor-approksimasjon 1
Tangenter 7
Kritiske punkter 11
Optimering 4
Linjeintegral 3
Konservative vektorfelt 8
Dobbelintegraler 7
Integrasjonsrekkefølge 3
Trippelintegral 4
Greens teorem 4
Divergensteoremet 8
Stokes-teorem 6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Divergensteoremet



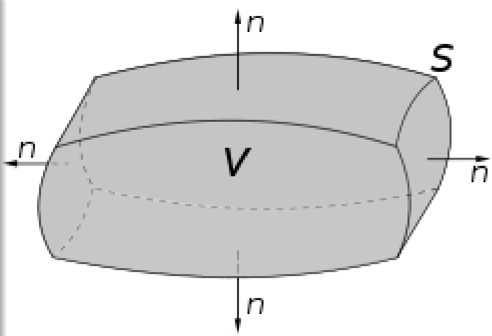
Theorem (Divergensteoremet)

La V være et lukket volum i rommet som har en parametriserbar overflate S, og la enhetsnormalen $\mathbf{n}$ peke ut av V. Dersom $\mathbf{F}$ er et vektorfelt som har kontinuerlige partiellderiverte på V da er

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V$$

Intuisjon

Anta du har en *full* bolle med vann, og heller på mer vann. Hva skjer? Jo det renner vann ut av overflaten til bollen. Med andre ord er summen av endring i vesketetthet ($\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V$) lik hvor mye væske som forlater overflaten ($\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$).



V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x, y, z) = (\sin y)2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x, y, z) = (\sin y)2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

To krav:

1. Er flaten V avgrenset av randen S lukket og enkeltsammenhengende? Ja, enhetskula er åpenbart lukket og enkeltsammenhengdende.
2. Har vektor feltet F kontinuerlige partiellderiverte definert på W. Ja, alle polynomer og $\sin x$ er deriverbare.

V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x, y, z) = (\sin y)2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

To krav:

1. Er flaten V avgrenset av randen S lukket og enkeltsammenhengende? Ja, enhetskula er åpenbart lukket og enkeltsammenhengdende.
2. Har vektor feltet F kontinuerlige partiellderiverte definert på W. Ja, alle polynomer og $\sin x$ er deriverbare.

Har at normalvektoren er $-\mathbf{n}$ siden den skulle peke *inn* i kula.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}) \, \mathrm{d}S &= -\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \overset{\text{Gauss}}{=} -\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V \\ &= -\iiint_V 0 + 0 + x \, \mathrm{d}V = -\iiint_V x \, \mathrm{d}V\end{aligned}$$

V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x, y, z) = (\sin y)2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

To krav:

1. Er flaten V avgrenset av randen S lukket og enkeltsammenhengende? Ja, enhetskula er åpenbart lukket og enkeltsammenhengdende.
2. Har vektor feltet F kontinuerlige partiellderiverte definert på W. Ja, alle polynomer og $\sin x$ er deriverbare.

Har at normalvektoren er $-\mathbf{n}$ siden den skulle peke *inn* i kula.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}) \, \mathrm{d}S &= -\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \overset{\text{Gauss}}{=} -\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V \\ &= -\iiint_V 0 + 0 + x \, \mathrm{d}V = -\iiint_V x \, \mathrm{d}V\end{aligned}$$

V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x, y, z) = (\sin y)2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

To krav:

1. Er flaten V avgrenset av randen S lukket og enkeltsammenhengende? Ja, enhetskula er åpenbart lukket og enkeltsammenhengdende.
2. Har vektor feltet F kontinuerlige partiellderiverte definert på W. Ja, alle polynomer og $\sin x$ er deriverbare.

Har at normalvektoren er $-\mathbf{n}$ siden den skulle peke *inn* i kula.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{n})\,\mathrm{d}S &= -\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauss}}{=} -\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V \\ &= -\iiint_V 0+0+x\,\mathrm{d}V = -\iiint_V x\,\mathrm{d}V = 0\end{aligned}$$

V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x,y,z) = (\sin y)2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

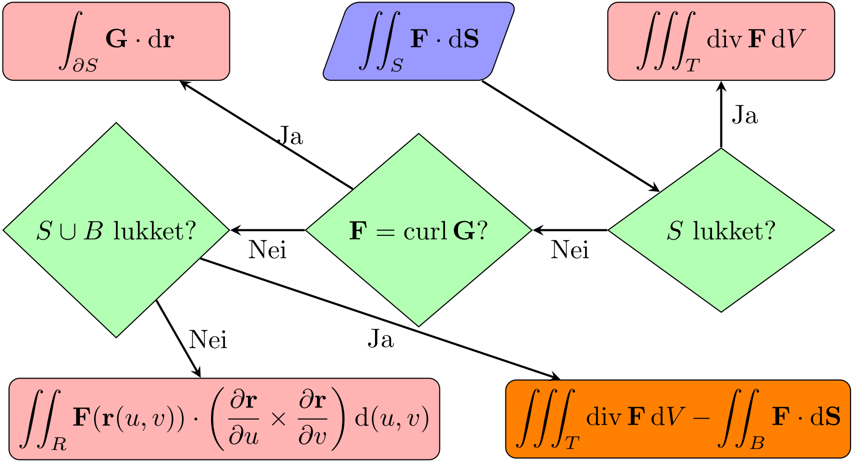
To krav:

1. Er flaten V avgrenset av randen S lukket og enkeltsammenhengende? Ja, enhetskula er åpenbart lukket og enkeltsammenhengdende.
2. Har vektor feltet F kontinuerlige partiellderiverte definert på W. Ja, alle polynomer og $\sin x$ er deriverbare.

Har at normalvektoren er $-\mathbf{n}$ siden den skulle peke *inn* i kula.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{n})\,\mathrm{d}S &= -\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauss}}{=} -\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V \\ &= -\iiint_V 0+0+3\,\mathrm{d}V = -\iiint_V 3\,\mathrm{d}V = ?\end{aligned}$$

Divergensteoremet



Eksempel

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$ Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$ der $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent.

1. Divergens:
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x(z + z^2)) - \frac{\partial}{\partial y}(yz^2 + xe^y) + \frac{\partial}{\partial z}(xze^y + 1)$$
2. Bruke divergensteoremet på *hele* overflaten til T
3. Finne fluksen ut av S.

Eksempel

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$ Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$ der $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent.

1. Divergens: div $\mathbf{F} = (z + z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y$
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x(z + z^2)) - \frac{\partial}{\partial y}(yz^2 + xe^y) + \frac{\partial}{\partial z}(xze^y + 1)$$
2. Bruke divergensteoremet på *hele* overflaten til T
3. Finne fluksen ut av S.

Eksempel

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$ Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$ der $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent.

1. Divergens: $\operatorname{div} \mathbf{F} = (z + z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y = z$
2. Bruke divergensteoremet på *hele* overflaten til T
$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V$$
3. Finne fluksen ut av S.

Eksempel

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$ Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$ der $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent.

1. Divergens: div $\mathbf{F} = (z + z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y = z$
2. Bruke divergensteoremet på *hele* overflaten til T

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_V z \, \mathrm{d}V$$

3. Finne fluksen ut av S.

Eksempel

Halvkulen T er bestemt av $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$ Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x(z+z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ der $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent.

1. Divergens: div $\mathbf{F} = (z+z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y = z$
2. Bruke divergensteoremet på *hele* overflaten til T

$$\iint_T \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_V z\,\mathrm{d}V = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\cos\varphi(\rho^2\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

3. Finne fluksen ut av S.

Eksempel

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$ Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$ der $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent.

1. Divergens: div $\mathbf{F} = (z + z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y = z$
2. Bruke divergensteoremet på *hele* overflaten til T

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_V z\, \mathrm{d}V = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left[-\frac{(\cos\varphi)^2}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

3. Finne fluksen ut av S.

Eksempel

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$ Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T. Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

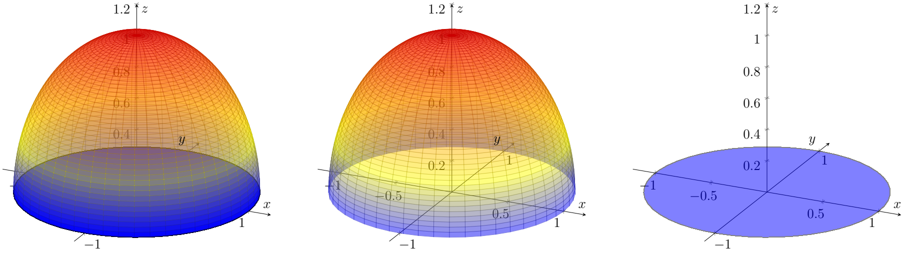
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S$ der $\mathbf{n}$ har positiv z-komponent.

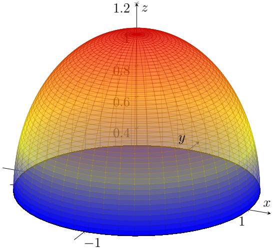
1. Divergens: div $\mathbf{F} = (z + z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y = z$
2. Bruke divergensteoremet på *hele* overflaten til T

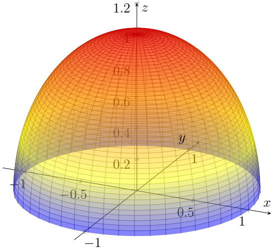
$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \overset{\text{Gauss}}{=} \iiint_V z\, \mathrm{d}V = 2\pi \left[\frac{1}{4} - 0\right] \left[\frac{1^2}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{4}$$

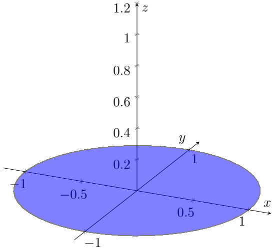
3. Finne fluksen ut av S.



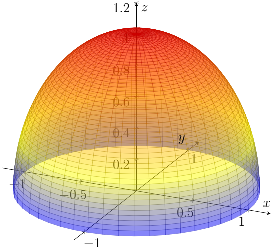
$$\iint_T \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \quad = \quad \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \quad + \quad \iint_B \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

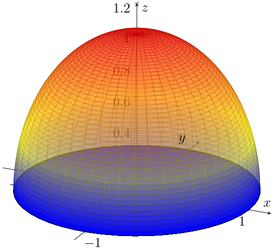


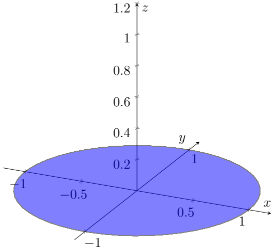




$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V \quad = \quad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \quad + \quad \iint_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$$







$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \quad = \quad \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V \quad - \quad \iint_B \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

Reminder: $\mathbf{F}(x,y,z) = x(z+z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$

Beregner overflateintegralet *ut* av bunnen. Siden normalvektoren må peke ut av flaten får vi $\mathbf{n} = (0,0,-1)$ Så

$$\begin{aligned}\iint_B \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S &= \iint_B \mathbf{F}\cdot(0,0-1)\,\mathrm{d}S \\ &= -\iint_B (x\cdot z\cdot e^y + 1)\,\mathrm{d}S\end{aligned}$$

Reminder: $\mathbf{F}(x,y,z) = x(z+z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$

Beregner overflateintegralet *ut* av bunnen. Siden normalvektoren må peke ut av flaten får vi $\mathbf{n} = (0,0,-1)$ Så

$$\begin{aligned}\iint_B \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S &= \iint_B \mathbf{F}\cdot(0,0-1)\,\mathrm{d}S \\ &= -\iint_B (x\cdot 0\cdot e^y + 1)\,\mathrm{d}S = -\iint_B 1\,\mathrm{d}S = -\pi\end{aligned}$$

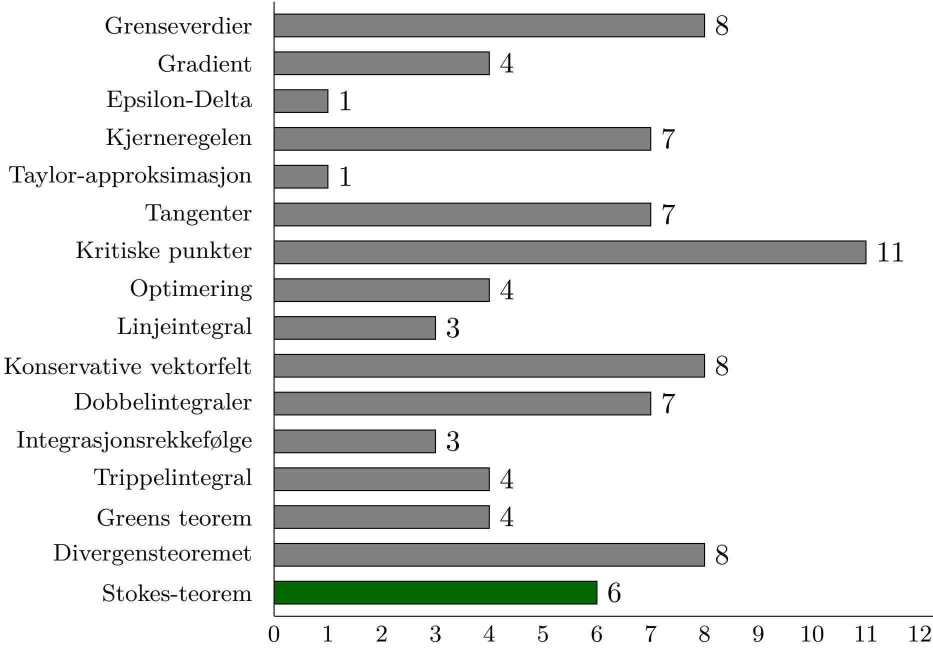
Reminder: $\mathbf{F}(x,y,z) = x(z+z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$

Beregner overflateintegralet *ut* av bunnen. Siden normalvektoren må peke ut av flaten får vi $\mathbf{n} = (0,0,-1)$ Så

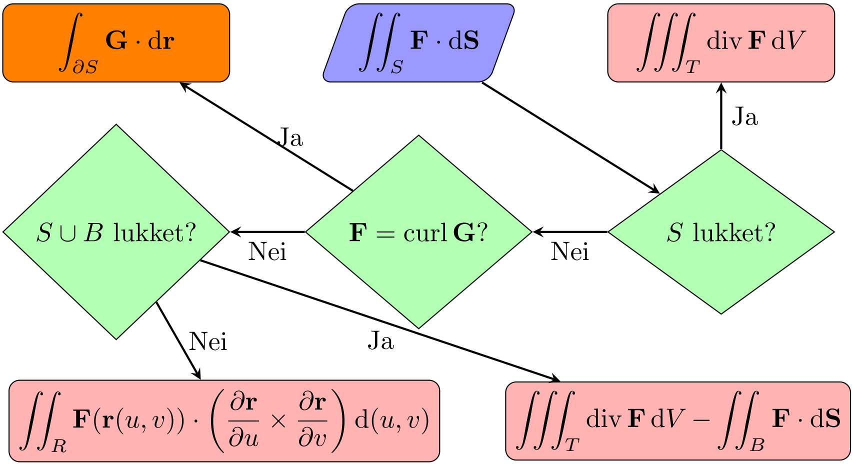
$$\begin{aligned}\iint_B \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S &= \iint_B \mathbf{F}\cdot(0,0-1)\,\mathrm{d}S \\ &= -\iint_B (x\cdot 0\cdot e^y + 1)\,\mathrm{d}S = -\iint_B 1\,\mathrm{d}S = -\pi\end{aligned}$$

Siden $z = 0$ og B er en sirkel med radius 1. Oppsumert har vi altså

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S &= \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V - \iint_B \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{\pi}{4} - (-\pi) \\ &= \frac{5\pi}{4}\end{aligned}$$


Grenseverdier
8
Gradient
4
Epsilon-Delta
1
Kjerneregelen
7
Taylor-approksimasjon
1
Tangenter
7
Kritiske punkter
11
Optimering
4
Linjeintegral
3
Konservative vektorfelt
8
Dobbelintegraler
7
Integrasjonsrekkefølge
3
Trippelintegral
4
Greens teorem
4
Divergensteoremet
8
Stokes-teorem
6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

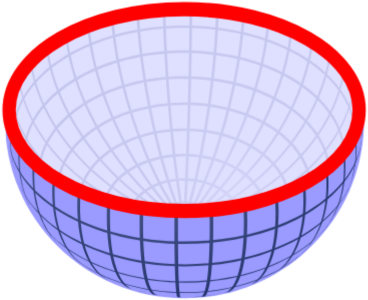
Stokes-teorem



Theorem (Stokes' teorem)

La S være en orienterbar glatt overflate som er begrenset av en enkel, lukket stykkevis-glatt randkurve C med positiv orientasjon. Dersom $\mathbf{F}$ *er et vektorfelt med kontinuerlige partiellderiverte på S så er*

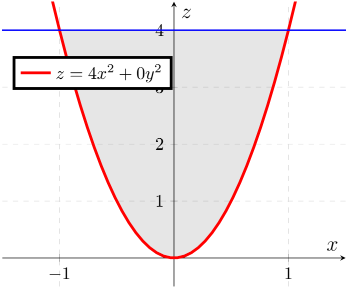
$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \,.$$

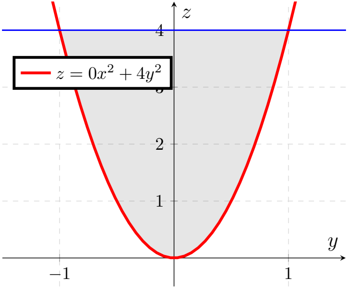


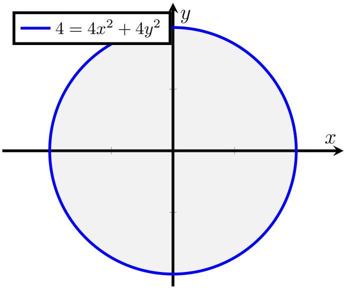
K2012, Oppgave 6c

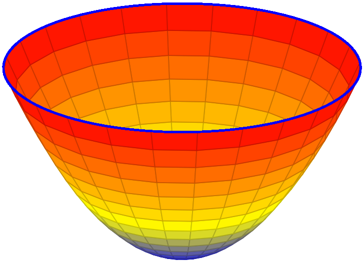
Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \,.$$


z
4
$z = 4x^2 + 0y^2$
2
1
x
-1
1


z
4
$z = 0x^2 + 4y^2$
2
1
y
-1
1


y
$4 = 4x^2 + 4y^2$
x



K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}S\,.$$

Flatene $z = 4x^2 + 4z^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$.

K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S\,.$$

Flatene $z = 4x^2 + 4z^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C. Vi ønsker å beregne fluxen ut av det røde området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med*-klokken og ikke mot som vanlig.

$$\mathbf{r}(\theta) = (\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \, .$$

Flatene $z = 4x^2 + 4z^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C. Vi ønsker å beregne fluxen ut av det røde området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med*-klokken og ikke mot som vanlig.

$$\mathbf{r}(\theta) = (\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{4(\cos t)}{8\pi}, -\frac{\sin t}{2\pi}, 1\right)(\cos t, -\sin t, 0) \, \mathrm{d}t$$

K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \, .$$

Flatene $z = 4x^2 + 4z^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C. Vi ønsker å beregne fluxen ut av det røde området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med*-klokken og ikke mot som vanlig.

$$\mathbf{r}(\theta) = (\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t)^2 + (\sin t)^2 \, \mathrm{d}t$$

K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \, .$$

Flatene $z = 4x^2 + 4z^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C. Vi ønsker å beregne fluxen ut av det røde området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med*-klokken og ikke mot som vanlig.

$$\mathbf{r}(\theta) = (\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t)^2 + (\sin t)^2 \, \mathrm{d}t \; = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t$$

K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S\,.$$

Flatene $z = 4x^2 + 4z^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C. Vi ønsker å beregne fluxen ut av det røde området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med*-klokken og ikke mot som vanlig.

$$\mathbf{r}(\theta) = (\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos t)^2 + (\sin t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 1$$

K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \, .$$

Flatene $z = 4x^2 + 4z^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C. Vi ønsker å beregne fluxen ut av det røde området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med*-klokken og ikke mot som vanlig.

$$\mathbf{r}(\theta) = (\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$
$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 1$$