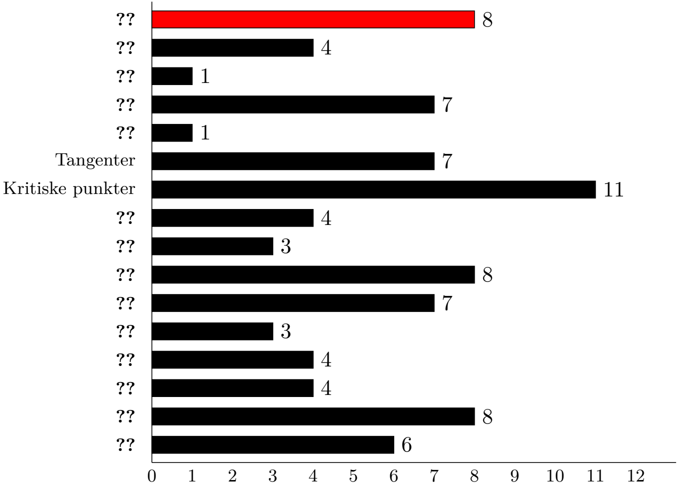
Flerdimhistorien på 90 minutter

s.ntnu.no/MA1103

Øistein Søvik

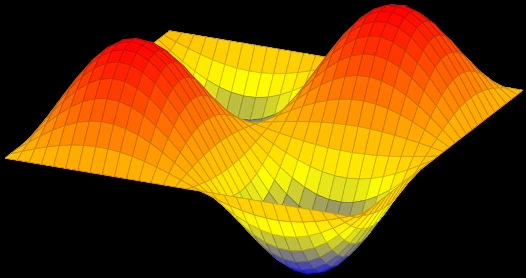
Mai 2018



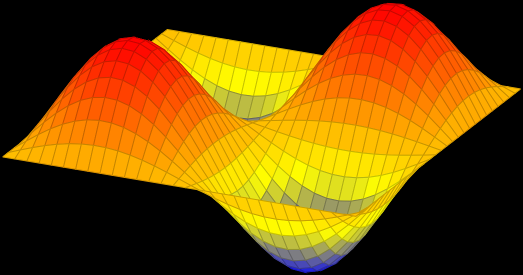
Plan:

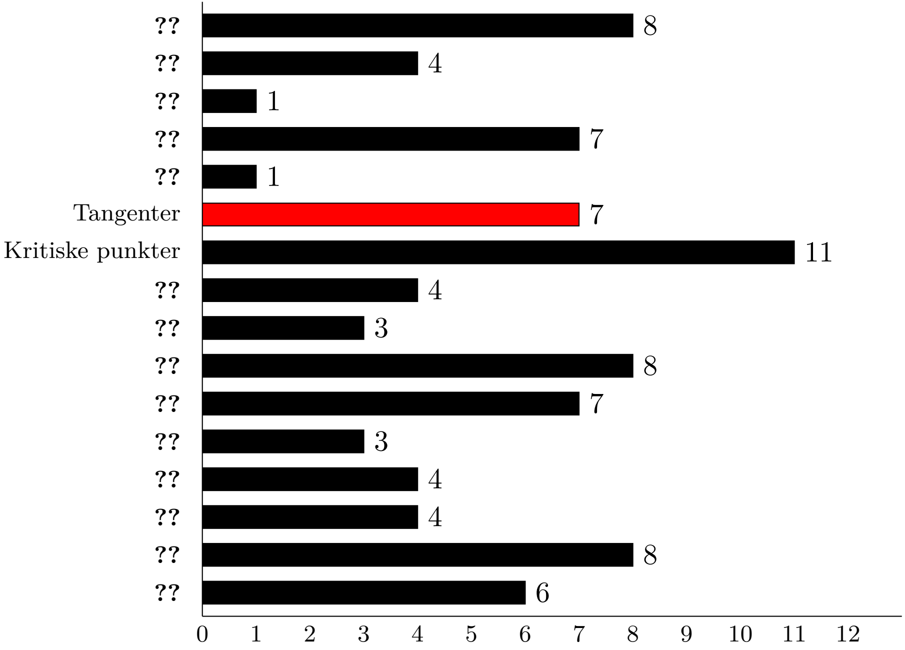
1. Før pausen: Derivasjon 7 temaer
2. Etter pausen: Integrasjon 7 temaer
3. Hvert tema har inneholder introduksjon/intuisjon, oppgaveløsning.

Derivasjon



Derivasjon




??
??
??
??
??
Tangenter
Kritiske punkter
??
??
??
??
??
??
??
??
??
8
4
1
7
1
7
11
4
3
8
7
3
4
4
8
6
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Tangenter

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y^3 - 3xy - z\right), \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x,y)$ i punktet $(2,2,4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x,y,z) = f(x,y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x,y,z) = (3x^2 - 3y, \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + y^3 - 3xy - z\right), \frac{\partial g}{\partial z})$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x,y)$ i punktet $(2,2,4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x,y,z) = f(x,y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x,y,z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, \frac{\partial g}{\partial z})$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x,y)$ i punktet $(2,2,4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x,y,z) = f(x,y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x,y,z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, \frac{\partial}{\partial z}\Big(x^3 + y^3 - 3xy - z\Big))$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

   Siden gradienten peker i samme retning som normalvektoren setter vi $\mathbf{n} = \nabla g(2, 2, 4) = (6, 6, -1)$.

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x,y)$ i punktet $(2,2,4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x,y,z) = f(x,y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x,y,z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
   Hvor $\mathbf{r} = (x,y,z)$, $\mathbf{r}_0 = (2,2,4)$ og $\mathbf{n} = (6,6,-1)$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
   Hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (2, 2, 4)$ og $\mathbf{n} = (6, 6, -1)$

$$(6, 6, -1) \cdot ((x - 2, y - 2, z - 4) = 0$$

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
   Hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (2, 2, 4)$ og $\mathbf{n} = (6, 6, -1)$

$$6(x - 2) + 6(y - 2) - (z - 4) = 0$$

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

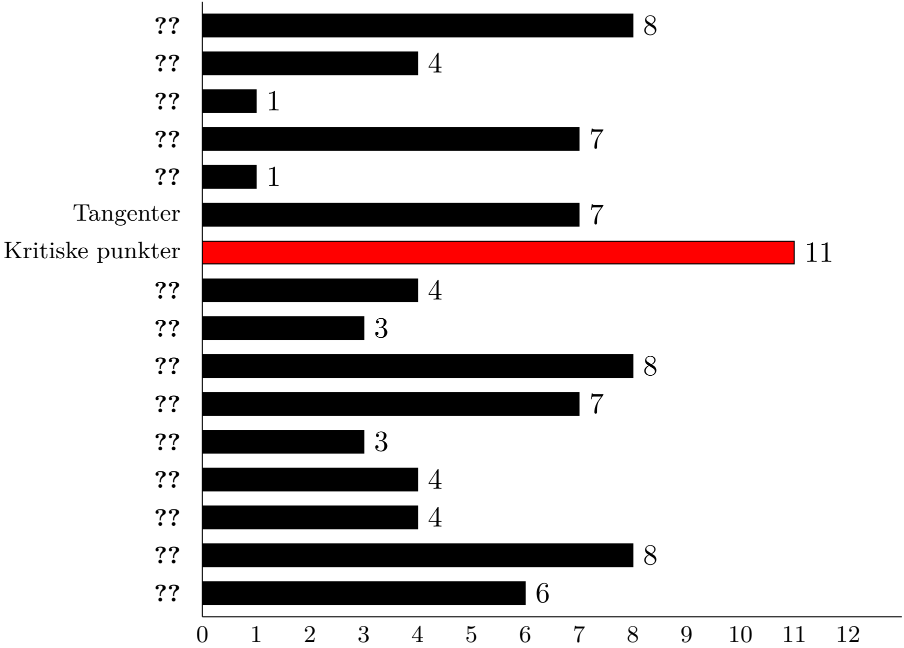
Plan:

1. Finne normalvektor ved hjelp av gradienten $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

2. Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
   Hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (2, 2, 4)$ og $\mathbf{n} = (6, 6, -1)$

$$z = 6x + 6y - 20.$$


??
8
??
4
??
1
??
7
??
1
Tangenter
7
Kritiske punkter
11
??
4
??
3
??
8
??
7
??
3
??
4
??
4
??
8
??
6
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Kritiske punkter

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La $\mathbf{a}$ *være et punkt kritisk punkt* ($\nabla f(\mathbf{a}) = 0$) *for en funksjon* $f(x, y)$ *med kontinuerlige annenordens partiellderiverte. Definer* $D(x, y)$ *som*

$$D(x,y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_{A}\,\underbrace{f_{yy}}_{B} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{C}$$

1. *Hvis* $D < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et saddelpunkt.*
2. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} > 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt minimum.*
3. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt maksimum.*

Hvis $D = 0$ *gir testen ingen konklusjon.*

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La $\mathbf{a}$ *være et punkt kritisk punkt* ($\nabla f(\mathbf{a}) = 0$) *for en funksjon* $f(x, y)$ *med kontinuerlige annenordens partiellderiverte. Definer* $D(x, y)$ *som*

$$D(x,y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_{A}\,\underbrace{f_{yy}}_{B} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{C}$$

1. *Hvis* $D < 0$*, så er* $\mathbf{a}$ *et saddelpunkt.*
2. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} > 0$*, så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt minimum.*
3. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} < 0$*, så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt maksimum.*

Hvis $D = 0$ *gir testen ingen konklusjon.*

Intuisjon

Anta $f_{xx} f_{yy} < 0$. Enten $f_{xx} < 0$ og $f_{yy} > 0$ eller $f_{yy} < 0$ og $f_{xx} > 0$ uansett så har funksjonen positiv krumning $\cup$ i den ene retningen og negativ krumning i den andre $\cap \Rightarrow$ åpenbart saddelpunkt (pringles).

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La $\mathbf{a}$ *være et punkt kritisk punkt* $(\nabla f(\mathbf{a}) = 0)$ *for en funksjon* $f(x, y)$ *med kontinuerlige annenordens partiellderiverte. Definer* $D(x, y)$ *som*

$$D(x,y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_{A}\,\underbrace{f_{yy}}_{B} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{C}$$

1. *Hvis* $D < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et saddelpunkt.*
2. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} > 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt minimum.*
3. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt maksimum.*

Hvis $D = 0$ *gir testen ingen konklusjon.*

Intuisjon

Anta $f_{xx} f_{yy} > 0$. Hvis $f_{xx} > 0$ og $f_{yy} > 0$ så har f positiv krumning $\cup$ omkring $\mathbf{a}$ $\Rightarrow$ minimum. (bolle) Hvis $f_{xx} < 0$ og $f_{yy} < 0$ så har f negativ krumning $\cap$ omkring A omkring $\mathbf{a}$ $\Rightarrow$ maksimum. (øvre halvkule)

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La $\mathbf{a}$ *være et punkt kritisk punkt* ($\nabla f(\mathbf{a}) = 0$) *for en funksjon* $f(x, y)$ *med kontinuerlige annenordens partiellderiverte. Definer* $D(x, y)$ *som*

$$D(x,y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_{A}\underbrace{f_{yy}}_{B} - \underbrace{(f_{xy})^2}_{C}$$

1. *Hvis* $D < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et saddelpunkt.*
2. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} > 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt minimum.*
3. *Hvis* $D > 0$ *og* $f_{xx} < 0$, *så er* $\mathbf{a}$ *et lokalt maksimum.*

Hvis $D = 0$ *gir testen ingen konklusjon.*

Intuisjon

Tilfellet $f_{xx}f_{yy} = 0$ behandles av leddet f_{xy}^2. Ligner funksjonen f mer på en (pringles) eller en (bolle/øvre halvkule)?

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathcal{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$.

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Diskriminanten

$$D(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Diskriminanten

$$D(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x^2 - x^4 + y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2x^2 - x^4 + y^2) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(2x^2 - x^4 + y^2)$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Diskriminanten

$$D(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x - 4x^2)\frac{\partial}{\partial y}(2y) - \frac{\partial}{\partial x}(2y)$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1 - x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Diskriminanten

$$D(x,y) = 8(1 - 3x^2)$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Diskriminanten

$$D(x,y) = 8(1-3x^2)$$

Innsetning gir

$$D(0,0) = 8,\ f_{xx}(0,0) = 4 \quad \text{og} \quad D(\pm 1,0) = -16,\ f_{xx}(\pm 1,0) = -8$$

slik at $(0,0)$ er ett ________________ og $(\pm 1, 0)$ er ________________.

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f, og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelpunkter.

$$\mathscr{L}(x,y) := f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathscr{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0,0)$ og $(\pm 1, 0)$. Diskriminanten

$$D(x,y) = 8(1-3x^2)$$

Innsetning gir

$$D(0,0) > 0,\ f_{xx}(0,0) > 0 \ \text{ og } \ D(\pm 1,0) < 0,\ f_{xx}(\pm 1,0) < 0$$

slik at $(0,0)$ er ett lokalt minimum og $(\pm 1, 0)$ er saddelpunkter.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\text{min}} =?$, $f_{\text{max}} =?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y - \lambda 2y \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\text{min}} =?$, $f_{\text{max}} =?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Fra $\mathscr{L}_y = 2y(1-\lambda) = 0$ får vi at enten $y = 0$ eller $\lambda = 1$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} =?$, $f_{\max} =?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\underline{y = 0:}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 - 4$$

Slik at $x^4 = 4 \Rightarrow x^2 = 2$ og $f = 2x^2 - x^4 + y^2$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} =?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\underline{y = 0:}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 - 4$$

Slik at $x^4 = 4 \Rightarrow x^2 = 2$ og $f = 2 \cdot 2 - 4 + 0^2 = 0$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = ?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\underline{\lambda = 1:}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = ?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

<u>$\lambda = 1$:</u>

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-2x^2), \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Når $x = 0$ så gir $\mathscr{L}_\lambda$, $y^2 = 4$ slik at $f = 2x^2 - x^3 + y^2$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 4$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\underline{\lambda = 1:}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1-2x^2), \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Når $x = 0$ så gir $\mathscr{L}_\lambda$, $y^2 = 4$ slik at $f = 2 \cdot 0^2 - 0^3 + 4 = 4$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 4$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\underline{\lambda = 1:}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1 - 2x^2), \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Når $x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{4}$ og $y^2 = 4 - x^4$ så $f = 2x^2 - x^4 + y^2$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathscr{L}(x,y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 4 + \frac{1}{2}$. De partiellderiverte blir

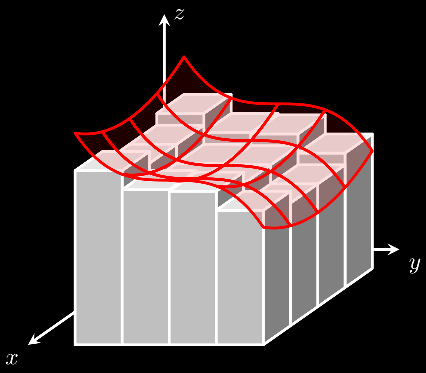
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 2y(1-\lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

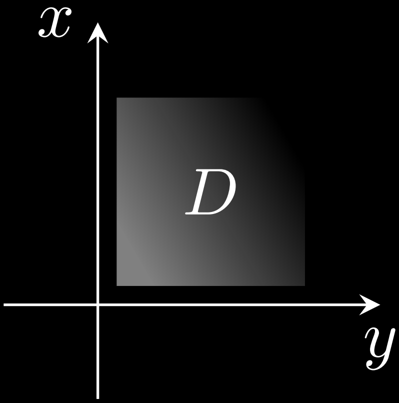
$\underline{\lambda = 1:}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 4x(1 - 2x^2), \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Når $x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{4}$ og $y^2 = 4 - x^4$ så $f = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 4 - \frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{2}$.

Integrasjon





$$\iint_D \int_0^{f(x,y)} 1 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}(x,y) \qquad = \qquad \iint_D f(x,y) \, \mathrm{d}(x,y)$$