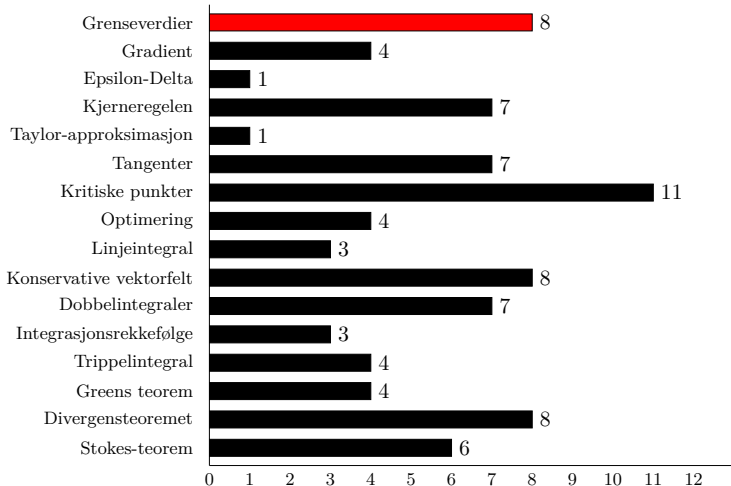


Flerdimhistorien på 90 minutter

s.ntnu.no/MA1103

Øistein Søvik

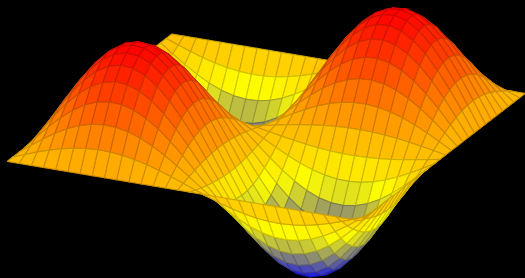
Mai 2018



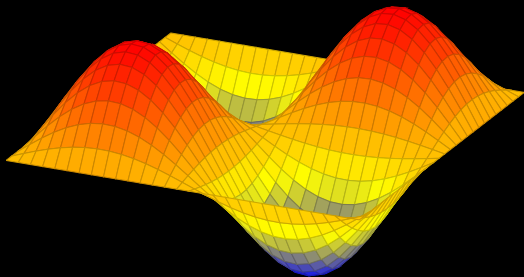
Plan:

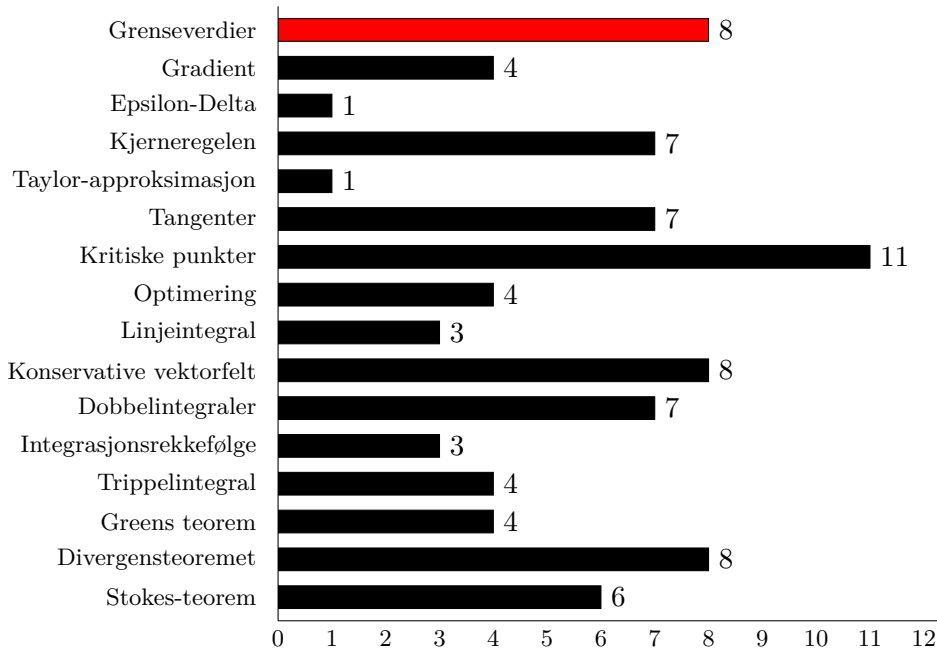
- 1 Før pausen: Derivasjon 7 temaer
- 2 Etter pausen: Integrasjon 7 temaer
- 3 Hvert tema har inneholder introduksjon/intuisjon, oppgaveløsning.

Derivasjon



Derivasjon





Grenseverdier

En funksjon $f(x, y)$ er kontinuert i $(0, 0)$ dersom

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) ,$$

uavhengig av hvilken retning du nærmer deg origo.

Grenseverdier

En funksjon $f(x, y)$ er kontinuert i $(0, 0)$ dersom

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) ,$$

uavhengig av hvilken retning du nærmer deg origo. Anta du ønsker å undersøke om en funksjon på formen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{g(x,y)}{h(x,y)}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases} ,$$

er kontinuert.

- Forenkle $f(x, ax^b)$ mest mulig. Eksisterer a og b slik at $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax^b) \neq f(0, 0)$? Da er funksjonen *ikke* kontinuert.
- Inneholder $h(x, y)$ uttrykket $x^2 + y^2$? Forenkle $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Undersøk om $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$ for *alle* vinkler, altså θ .

V2016, Oppgave 1

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Steg 1: Forenkle $f(x, ax^b)$ mest mulig.

$$f(x, ax^b) = \frac{ax^b x^3}{3(ax^b)^2 + x^6}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Steg 1: Forenkle $f(x, ax^b)$ mest mulig.

$$f(x, ax^b) = \frac{ax^{3+b}}{3a^2x^{2b} + x^6}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Steg 1: Forenkle $f(x, ax^b)$ mest mulig.

$$f(x, ax^b) = \frac{a}{3a^2x^{2b-(3+b)} + x^{6-(3+b)}}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Steg 1: Forenkle $f(x, ax^b)$ mest mulig.

$$f(x, ax^b) = \frac{a}{3a^2x^{b-3} + x^{3-b}}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Steg 2: Eksisterer det nå en a og b slik at $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax^b) \neq f(0, 0) = 0$?

$$f(x, ax^b) = \frac{a}{3a^2x^{b-3} + x^{3-b}}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Steg 2: Eksisterer det nå en a og b slik at $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax^b) \neq f(0, 0) = 0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax^3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{3a^2x^{3-3} + x^{3-3}}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Steg 2: Eksisterer det nå en a og b slik at $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax^b) \neq f(0, 0) = 0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax^3) = \frac{a}{3a^2 + 1}$$

Siden f ikke er kontinuerlig kan den naturlig nok heller ikke være deriverbar!

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

- Notasjonen $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ betyr *ikke* den deriverte med hensyn på x i origo!
- Den partiellderiverte er den *retningsderiverte* av f i retning $(1, 0)$ altså langs x -aksen. Tilsvarende for $\partial f / \partial y(0, 0)$.
- At funksjonen ikke er deriverbar betyr at det eksisterer en retning mot origo hvor den retningsderiverte ikke har et klart definert stigningstall. De retningsderiverte i x og y retningen kan såklart likevell eksistere.

V2016, Oppgave 1

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Den *retnings*deriverte til f i punktet $\mathbf{a} = (0, 0)$ og *retning* \mathbf{r} er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(1, 0)) - f(0, 0)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(0, 1)) - f(0, 0)}{h} \end{aligned}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Den *retningsderiverte* til f i punktet $\mathbf{a} = (0, 0)$ og *retning* \mathbf{r} er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \end{aligned}$$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Den *retnings*deriverte til f i punktet $\mathbf{a} = (0, 0)$ og *retning* \mathbf{r} er gitt ved

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h^3}{3 \cdot 0^2 + h^6} - 0}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0^3}{3h^2 + 0^6} - 0}{h}$$

V2016, Oppgave 1

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^3}{3y^2 + x^6}, & \text{når } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{når } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0, 0)$, men de partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ eksisterer.

Den *retningsderiverte* til f i punktet $\mathbf{a} = (0, 0)$ og *retning* \mathbf{r} er gitt ved

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

K2013, Oppgave 3

Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Steg 1: Uttrykket inneholder $x^2 + y^2$ så vi forenkler $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

$$\frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)}{\sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}}$$

$$\frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}$$

K2013, Oppgave 3

Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Steg 1: Uttrykket inneholder $x^2 + y^2$ så vi forenkler $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

$$\frac{r^2(\cos \theta)(\sin \theta)}{\sqrt{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}}$$

$$\frac{r^2(\cos \theta)(\sin \theta)}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

K2013, Oppgave 3

Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Steg 1: Uttrykket inneholder $x^2 + y^2$ så vi forenkler $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2}} (\cos \theta)(\sin \theta)$$

$$\frac{r^2}{r^2} (\cos \theta)(\sin \theta)$$

K2013, Oppgave 3

Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Steg 1: Uttrykket inneholder $x^2 + y^2$ så vi forenkler $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

$$r(\cos \theta)(\sin \theta)$$

$$(\cos \theta)(\sin \theta)$$

K2013, Oppgave 3

Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Steg 2: Undersøker om $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ er uavhengig av θ .

$$\lim_{r \rightarrow 0} r(\cos \theta)(\sin \theta)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\cos \theta)(\sin \theta)$$

K2013, Oppgave 3

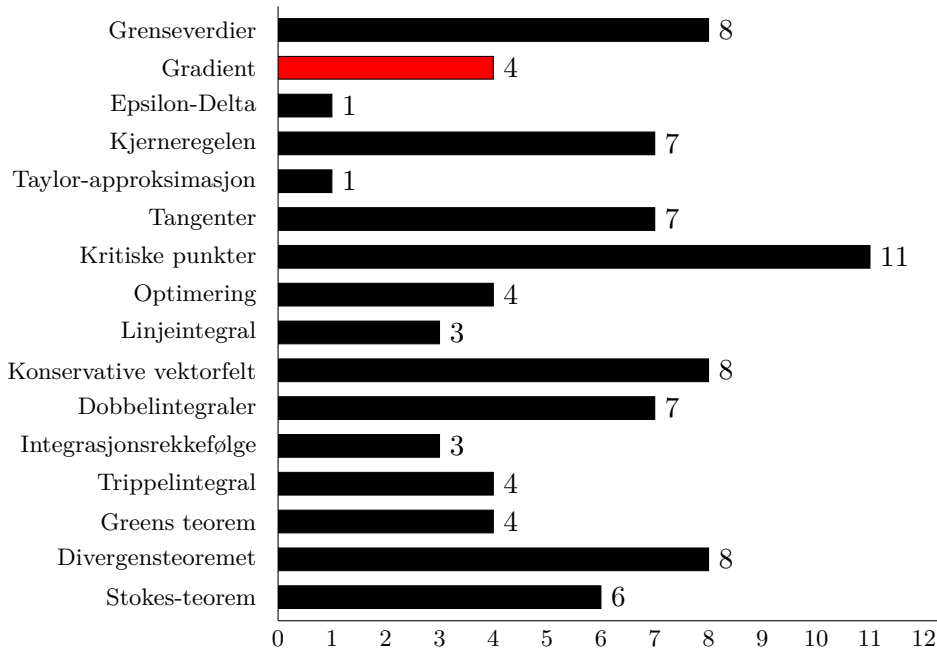
Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke gjør det

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Steg 2: Undersøker om $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ er uavhengig av θ .

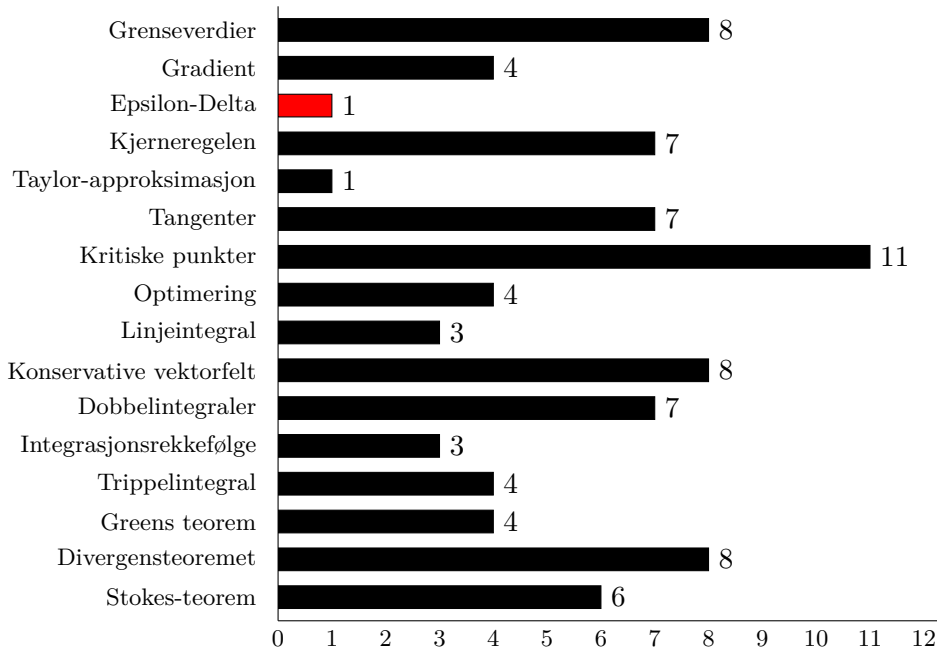
$$\lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{r(\cos \theta)(\sin \theta)}_{\text{Ja, 0 for alle } \theta}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{(\cos \theta)(\sin \theta)}_{\text{Nei, } \theta = 0 \rightarrow 0, \theta = \pi/4 \rightarrow 1/2.}$$

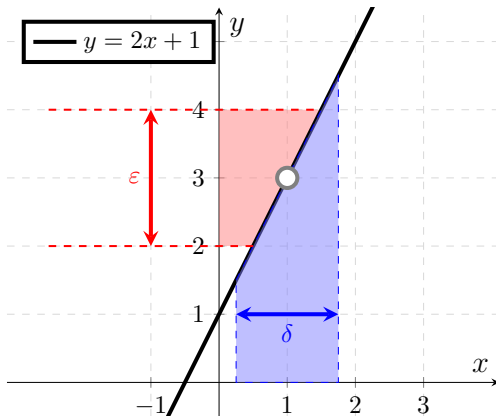


Gradient

Some more text here



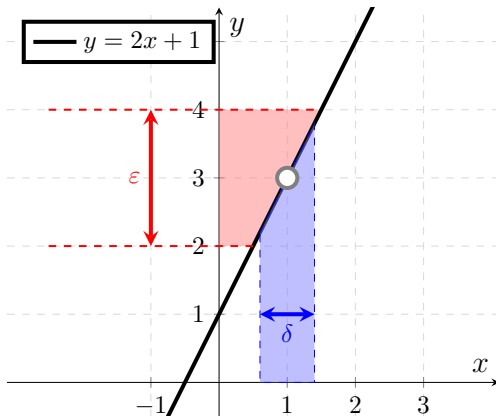
Epsilon-Delta



[Vi sier at f er *kontinuerlig* i \mathbf{a} dersom det for alle $\epsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \epsilon$ når $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.]

Intuisjon: uansett hvor nærme vi er \mathbf{a} kan vi alltid komme *litt* nærmere.

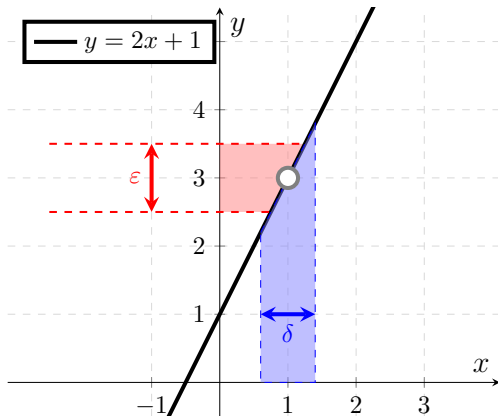
Epsilon-Delta



[Vi sier at f er *kontinuerlig* i \mathbf{a} dersom det for alle $\epsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \epsilon$ når $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.]

Intuisjon: uansett hvor nærme vi er \mathbf{a} kan vi alltid komme *litt* nærmere.

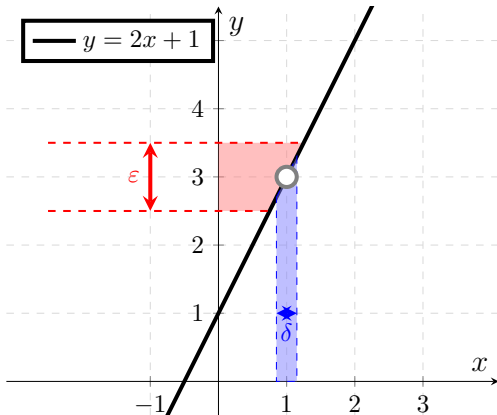
Epsilon-Delta



[Vi sier at f er *kontinuerlig* i \mathbf{a} dersom det for alle $\epsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \epsilon$ når $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.]

Intuisjon: uansett hvor nærme vi er \mathbf{a} kan vi alltid komme *litt* nærmere.

Epsilon-Delta



[Vi sier at f er *kontinuerlig* i \mathbf{a} dersom det for *alle* $\epsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \epsilon$ når $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$.]

Intuisjon: uansett hvor nærme vi er \mathbf{a} kan vi alltid komme *litt* nærmere.

Epsilon-Delta

- Kladd: Forenkle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|$ til du oppnår ulikheten $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.
- Bevis: Skriv opp definisjonen “ønsker å vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at”

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon.$$

- Bevis: Velg $\delta = \varepsilon/K$. Da er

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < K\delta \leq K(\varepsilon/K) = \varepsilon$$

- Litt som induksjon vi antar at $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ stemmer (induksjonshypotesen).

V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

Kladd: Antagelsen er at $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Slik at

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha < K\delta^\alpha$$

V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

Proof.

Ønsker å vise at f er kontinuerlig, med andre ord ønsker å vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon.$$



V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

Proof.

Ønsker å vise at f er kontinuerlig, med andre ord ønsker å vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon.$$

Velg $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$ da er

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$$



V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

Proof.

Ønsker å vise at f er kontinuerlig, med andre ord ønsker å vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon.$$

Velg $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$ da er

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha < K\delta^\alpha$$



V2014, Oppgave 8

La funksjonen $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ oppfylle $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ for alle x, y i A hvor K og α er positive. Vis at f er en kontinuerlig funksjon.

Proof.

Ønsker å vise at f er kontinuerlig, med andre ord ønsker å vise at for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer det en $\delta > 0$ slik at

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon.$$

Velg $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$ da er

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha < K\delta^\alpha = K \left(\frac{\varepsilon^{1/\alpha}}{K^{1/\alpha}} \right)^\alpha = \varepsilon$$

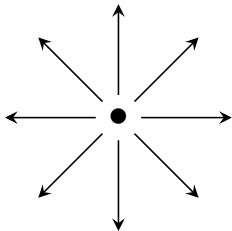
som var det vi ønsket å vise. □

Divergens

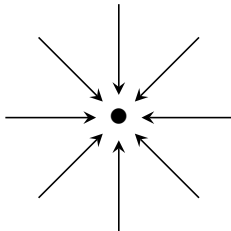
- Et vektorfelt kan betraktes som bevegelse av væsker eller gasser
- Divergens er *endring* i fluks. Altså en operator som tar inn et vektorfelt, og gir ut en skalar som viser hvor mye væsketettheten endrer seg i ett punkt.
- Formelen for divergens er

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \dots$$

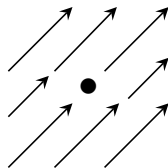
Hvor $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ er komponentene til $\mathbf{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.



$$\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$$



$$\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$$

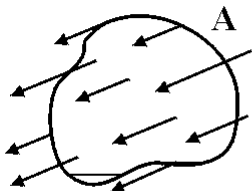


$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

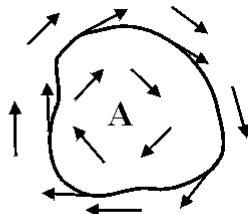
Curl

- Curlen viser hvor mye og i hvilken retning et vektorfelt “roterer”.
- Curlen er en vektor som peker i rotasjonsaksen og er proporsjonal med rotasjons hastigheten.
- Dersom vektorfeltet roterer mot klokken sier vi at kurlen er positiv, mot klokken er den negativ, mens dersom vektorfeltet er rotasjonsfritt er kurlen null.

- $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$ og $2\text{d-curl } \mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$.

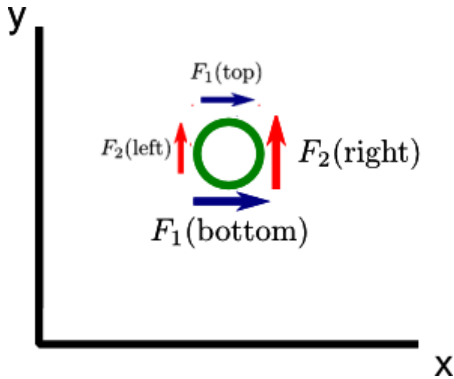


$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

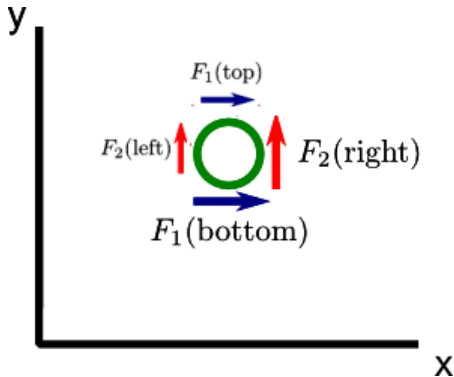


$$\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$$

Curl

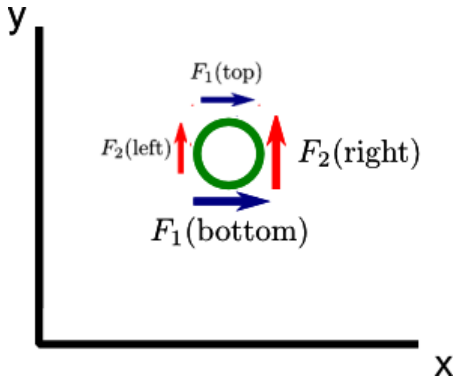


Curl



$$2\text{d-curl } \mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Curl



$$2\text{d-curl } \mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\text{curl } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\text{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2 .

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad \text{og} \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\text{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2 .

$$\text{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\text{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2 .

$$\text{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \textcircled{\mathbf{i}} & & \\ & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\text{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2 .

$$\text{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\text{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2 .

$$\text{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{matrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\text{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2 .

$$\text{curl}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{vmatrix}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\text{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2 .

$$\begin{aligned}\text{curl}(\nabla f) &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\text{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2 .

$$\begin{aligned}\text{curl}(\nabla f) &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)\end{aligned}$$

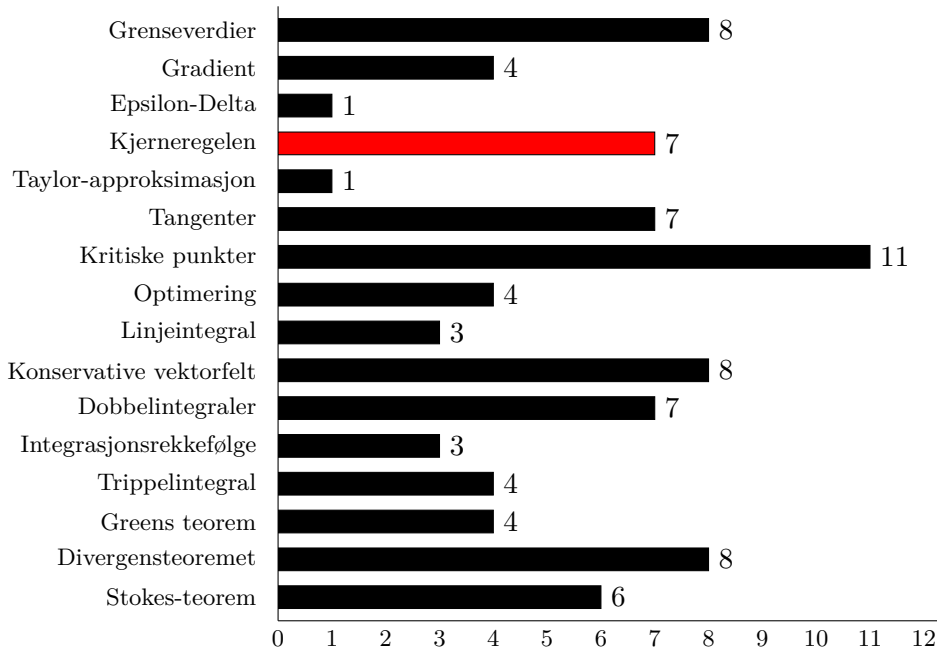
V2013, Oppgave 4

Vis sier at en funksjon er C^2 om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en C^2 funksjon, så er $\text{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er C^2 .

$$\begin{aligned}\text{curl}(\nabla f) &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)\end{aligned}$$

Siden funksjonen er C^2 er alle de kryss-partiellderiverte like slik at

$$= \mathbf{i}0 - \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0 = \mathbf{0}$$



Kjerneregelen

Anta vi skal derivere følgende funksjon

$$f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) + \cos(y^2 - x^2)$$

og ønsker å regne ut $x \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin(x^2 - y^2) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos(y^2 - x^2) \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin(x^2 - y^2) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos(y^2 - x^2) \right)\end{aligned}$$

Kjerneregelen

Anta vi skal derivere følgende funksjon

$$f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) + \cos(y^2 - x^2)$$

og ønsker å regne ut $x \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) \cos(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial x} (y^2 - x^2) \sin(y^2 - x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2) \cos(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2 - x^2) \sin(y^2 - x^2)$$

Kjerneregelen

Anta vi skal derivere følgende funksjon

$$f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) + \cos(y^2 - x^2)$$

og ønsker å regne ut $x \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2) + 2x \sin(y^2 - x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \cos(x^2 + y^2) - 2y \sin(x^2 - y^2)$$

Ved inspeksjon ser vi at $x \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Men gjelder dette alltid?

K2014, Oppgave 2

Gitt $z = f(x, y)$ der f er en deriverbar funksjon og $x = u^2 - v^2$, $y = v^2 - u^2$. Vis at

$$u \frac{\partial z}{\partial v} + v \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

Bruker kjerneregelen på $z = f(x, y) = f(u^2 - v^2, v^2 - u^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (f(x(u, v), y(u, v)))$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (f(x(u, v), y(u, v)))$$

K2014, Oppgave 2

Gitt $z = f(x, y)$ der f er en deriverbar funksjon og $x = u^2 - v^2$, $y = v^2 - u^2$. Vis at

$$u \frac{\partial z}{\partial v} + v \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

Bruker kjerneregelen på $z = f(x, y) = f(u^2 - v^2, v^2 - u^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y}$$

K2014, Oppgave 2

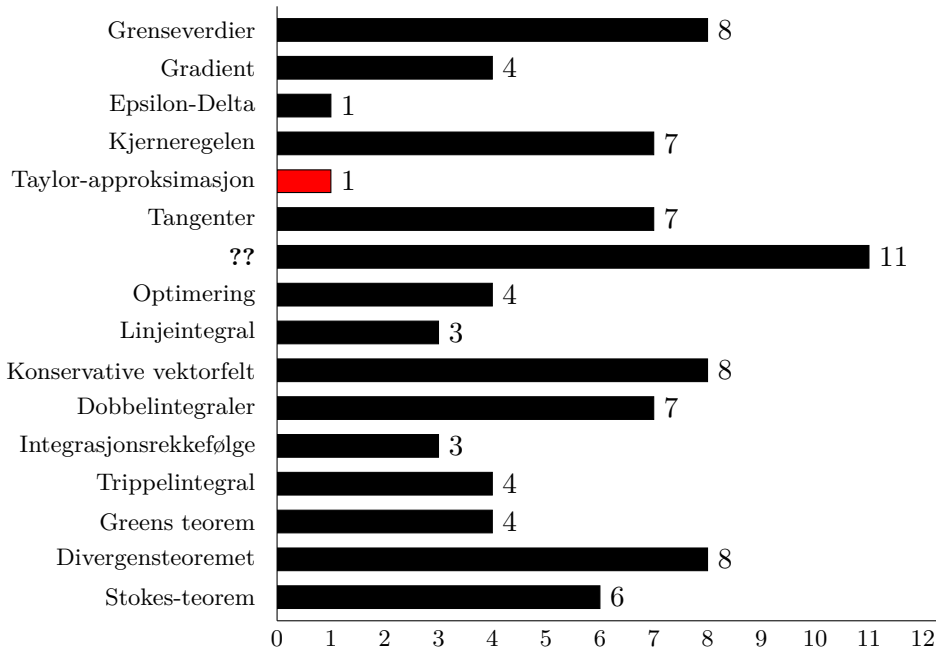
Gitt $z = f(x, y)$ der f er en deriverbar funksjon og $x = u^2 - v^2$,
 $y = v^2 - u^2$. Vis at

$$u \frac{\partial z}{\partial v} + v \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

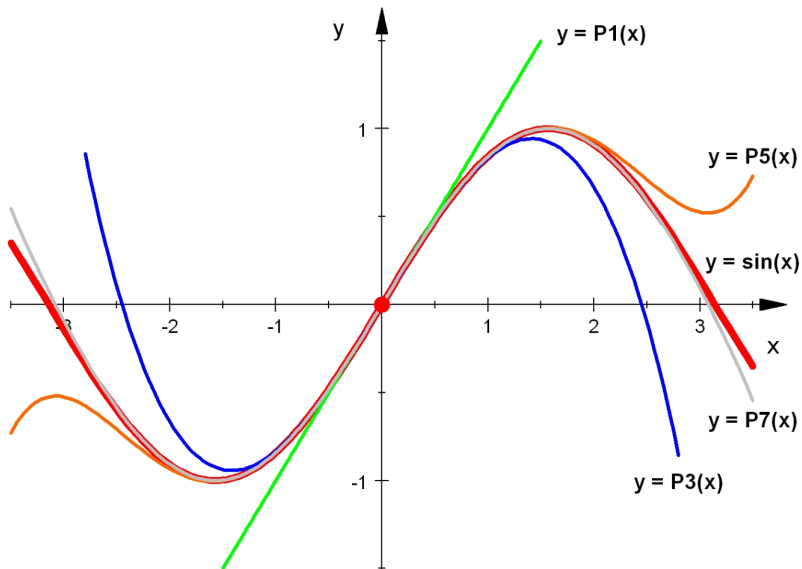
Bruker kjerneregelen på $z = f(x, y) = f(u^2 - v^2, v^2 - u^2)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= 2u \frac{\partial f}{\partial x} - 2v \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= -2v \frac{\partial f}{\partial x} + 2u \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Ved inspeksjon ser vi at $u \frac{\partial f}{\partial v} + v \frac{\partial f}{\partial u} = 0$ for alle deriverbare funksjoner
 $z = f(x, y)$.



Taylor-approximasjon



K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 1: Regn ut de partiellderiverte

$$\begin{array}{ll} f_x(x, y) = 4x^3 + 3x^2 + y & \Rightarrow f_x(1, 2) = 9 \\ f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 6x & \Rightarrow f_{xx}(1, 2) = 18 \\ f_y(x, y) = 2y + x & \Rightarrow f_y(1, 2) = 5 \\ f_{yy}(x, y) = 2 & \Rightarrow f_{yy}(1, 2) = 2 \\ f_{xy}(x, y) = 1 & \Rightarrow f_{xy}(x, y) = 1 \\ f_{yx}(x, y) = 1 & \Rightarrow f_{yx}(x, y) = 1 \end{array}$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approximasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$(1) \mid f(\mathbf{x}^0) = f(1, 2)$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)} \\ &= (8) \end{aligned}$$

$$(1) \mid f(\mathbf{x}^0) = 8$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)} \\ &= (8) \end{aligned}$$

$$(2) \left| \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0) \right|$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)} \\ &= (8) \end{aligned}$$

$$(2) \left| \sum_{i=1}^2 f_{x_i}(1, 2)(x_i - x_i^0) \right|$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)} \\ &= (8) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \left| \sum_{i=1}^2 f_{x_i}(1, 2)(x_i - x_i^0) = f_x(1, 2) \cdot (x - 1) + f_y(1, 2) \cdot (y - 2) \right.$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)} \\ &= (8) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \left| \sum_{i=1}^2 f_{x_i}(1, 2)(x_i - x_i^0) = 9(x - 1) + 5(y - 2) \right|$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)} \\ &= (8) + (9x + 5y - 19) \end{aligned}$$

$$(2) \left| \sum_{i=1}^2 f_{x_i}(1, 2)(x_i - x_i^0) = 9x + 5y - 19 \right.$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)} \\ &= (8) + (9x + 5y - 19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f_{x_i x_j}(1, 2)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \right. \\ &= \frac{1}{2} f_{xx}(1, 2)(x - 1)^2 + \frac{1}{2} f_{xy}(1, 2)(x - 1)(y - 2) + \\ & \quad \left. \frac{1}{2} f_{yx}(1, 2)(y - 2)(x - 1) + \frac{1}{2} f_{yy}(1, 2)(y - 2)^2 \right| \end{aligned}$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)} \\ &= (8) + (9x + 5y - 19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f_{x_i x_j}(1, 2)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \right. \\ &= \frac{1}{2} f_{xx}(1, 2)(x - 1)^2 + f_{xy}(1, 2)(x - 1)(y - 2) + \frac{1}{2} f_{yy}(1, 2)(y - 2)^2 \end{aligned}$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approximasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x, y)$ i formel.

$$T_2(\mathbf{x}) = \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)}$$

$$= (8) + (9x + 5y - 19)$$

$$\begin{aligned} (3) & \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f_{x_i x_j}(1, 2)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \right. \\ & = \frac{18}{2}(x - 1) + 1 \cdot (x - 1)(y - 2) + \frac{2}{2}(y - 2)^2 \end{aligned}$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$ i formel.

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)} \\ &= (8) + (9x + 5y - 19) + (9x^2 + xy - 20x + y^2 - 5y + 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \left| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f_{x_i x_j}(1, 2)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \right. \\ & \left. = 9x^2 + xy - 20x + y^2 - 5y + 15 \right. \end{aligned}$$

K2016, Oppgave 3

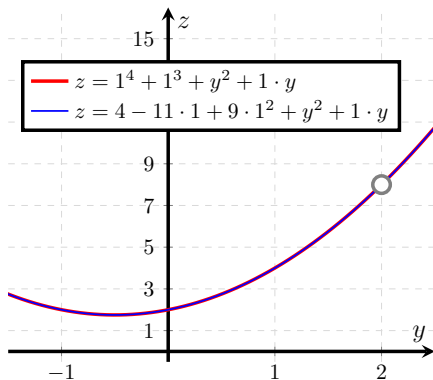
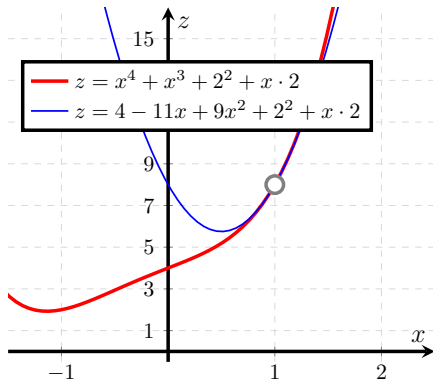
La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approksimasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

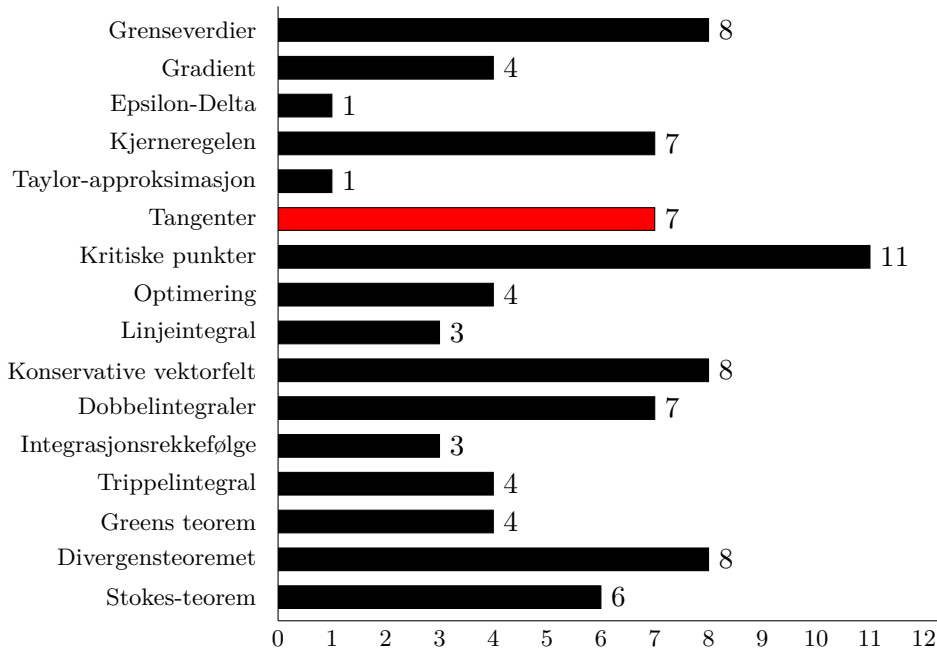
Steg 2: Sett inn $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$ og $\mathbf{x} = (x_1, x_0) = (x, y)$ i formel.

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) &= \underbrace{f(\mathbf{x}^0)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(3)} \\ &= 4 - 11x + 9x^2 + y^2 + xy \end{aligned}$$

K2016, Oppgave 3

La $f(x, y) = x^4 + x^3 + y^2 + xy$. Finn andreordens Taylor-approximasjon av f i $(x_0, y_0) = (1, 2)$.





Tangenter

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$.
- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^3 + y^3 - 3xy - z), \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$$

- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, \frac{\partial}{\partial y} (x^3 + y^3 - 3xy - z), \frac{\partial g}{\partial z})$$

- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, \frac{\partial g}{\partial z})$$

- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, \frac{\partial}{\partial z} (x^3 + y^3 - 3xy - z))$$

- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

Siden gradienten peker i samme retning som normalvektoren setter vi $\mathbf{n} = \nabla g(2, 2, 4) = (6, 6, -1)$.

- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.
Hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (2, 2, 4)$ og $\mathbf{n} = (6, 6, -1)$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (2, 2, 4)$ og $\mathbf{n} = (6, 6, -1)$

$$(6, 6, -1) \cdot ((x - 2, y - 2, z - 4)) = 0$$

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (2, 2, 4)$ og $\mathbf{n} = (6, 6, -1)$

$$6(x - 2) + 6(y - 2) - (z - 4) = 0$$

Matte 2 – Våren 2010, Oppgave 4b

La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Skriv opp likningen for tangentplanet til grafen til funksjonen $z = f(x, y)$ i punktet $(2, 2, 4)$.

Plan:

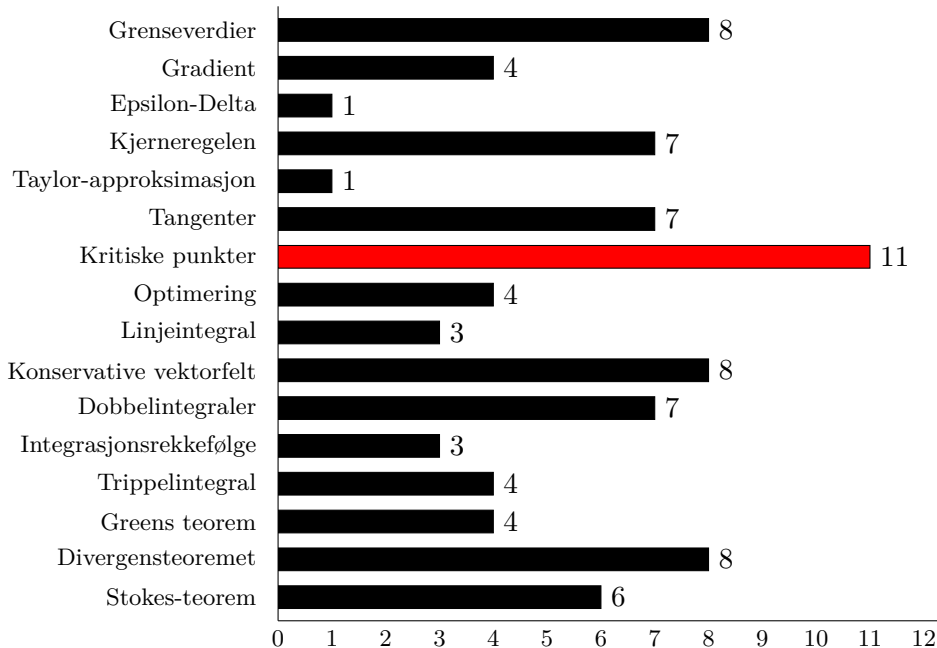
- 1 Finne normalvektor ved hjelp av gradienten
 $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Gradienten er gitt som

$$\nabla g(x, y, z) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x, -1)$$

- 2 Bruke den generelle likningen for et plan (normalvektor prikket med posisjonsvektor) $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (2, 2, 4)$ og $\mathbf{n} = (6, 6, -1)$

$$z = 6x + 6y - 20.$$



Kritiske punkter

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La \mathbf{a} være et punkt kritisk punkt ($\nabla f(\mathbf{a}) = 0$) for en funksjon $f(x, y)$ med kontinuerlige annenordens partiellderiverte. Definer $D(x, y)$ som

$$D(x, y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_A \underbrace{f_{yy}}_B - \underbrace{(f_{xy})^2}_C$$

- ❶ Hvis $D < 0$, så er \mathbf{a} et saddepunkt.
- ❷ Hvis $D > 0$ og $f_{xx} > 0$, så er \mathbf{a} et lokalt minimum.
- ❸ Hvis $D > 0$ og $f_{xx} < 0$, så er \mathbf{a} et lokalt maksimum.

Hvis $D = 0$ gir testen ingen konklusjon.

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La \mathbf{a} være et punkt kritisk punkt ($\nabla f(\mathbf{a}) = 0$) for en funksjon $f(x, y)$ med kontinuerlige annenordens partiellderivate. Definer $D(x, y)$ som

$$D(x, y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_A \underbrace{f_{yy}}_B - \underbrace{(f_{xy})^2}_C$$

- ❶ Hvis $D < 0$, så er \mathbf{a} et saddepunkt.
- ❷ Hvis $D > 0$ og $f_{xx} > 0$, så er \mathbf{a} et lokalt minimum.
- ❸ Hvis $D > 0$ og $f_{xx} < 0$, så er \mathbf{a} et lokalt maksimum.

Hvis $D = 0$ gir testen ingen konklusjon.

Intuisjon

Anta $f_{xx}f_{yy} < 0$. Enten $f_{xx} < 0$ og $f_{yy} > 0$ eller $f_{yy} < 0$ og $f_{xx} > 0$ uansett så har funksjonen positiv krumning \cup i den ene retningen og negativ krumning i den andre $\cap \Rightarrow$ åpenbart saddepunkt (pringles).

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La \mathbf{a} være et punkt kritisk punkt ($\nabla f(\mathbf{a}) = 0$) for en funksjon $f(x, y)$ med kontinuerlige annenordens partiellderivate. Definer $D(x, y)$ som

$$D(x, y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_A \underbrace{f_{yy}}_B - \underbrace{(f_{xy})^2}_C$$

- ❶ Hvis $D < 0$, så er \mathbf{a} et saddepunkt.
- ❷ Hvis $D > 0$ og $f_{xx} > 0$, så er \mathbf{a} et lokalt minimum.
- ❸ Hvis $D > 0$ og $f_{xx} < 0$, så er \mathbf{a} et lokalt maksimum.

Hvis $D = 0$ gir testen ingen konklusjon.

Intuisjon

Anta $f_{xx}f_{yy} > 0$. Hvis $f_{xx} > 0$ og $f_{yy} > 0$ så har f positiv krumning \cup omkring $\mathbf{a} \Rightarrow$ minimum. (bolle) Hvis $f_{xx} < 0$ og $f_{yy} < 0$ så har f negativ krumning \cap omkring $\mathbf{a} \Rightarrow$ maksimum. (øvre halvkule)

Theorem (Annenderivertetesten i to variable)

La \mathbf{a} være et punkt kritisk punkt ($\nabla f(\mathbf{a}) = 0$) for en funksjon $f(x, y)$ med kontinuerlige annenordens partiellderivate. Definer $D(x, y)$ som

$$D(x, y) := \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \underbrace{f_{xx}}_A \underbrace{f_{yy}}_B - \underbrace{(f_{xy})^2}_C$$

- ❶ Hvis $D < 0$, så er \mathbf{a} et saddepunkt.
- ❷ Hvis $D > 0$ og $f_{xx} > 0$, så er \mathbf{a} et lokalt minimum.
- ❸ Hvis $D > 0$ og $f_{xx} < 0$, så er \mathbf{a} et lokalt maksimum.

Hvis $D = 0$ gir testen ingen konklusjon.

Intuisjon

Tilfellet $f_{xx}f_{yy} = 0$ behandles av leddet f_{xy}^2 . Ligner funksjonen f mer på en (pringles) eller en (bolle/øvre halvkule)?

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelepunkter.

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelepunkter.

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderivate blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelepunkter.

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderivate blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddelepunkter.

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0, 0)$ og $(\pm 1, 0)$.

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddepunkter.

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0, 0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddepunkter.

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0, 0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x^2 - x^4 + y^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2x^2 - x^4 + y^2) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(2x^2 - x^4 + y^2)$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddepunkter.

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0, 0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x - 4x^3) \frac{\partial}{\partial y}(2y) - \frac{\partial}{\partial x}(2y)$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddepunkter.

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0, 0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x, y) = 8(1 - 3x^2)$$

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddepunkter.

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0, 0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x, y) = 8(1 - 3x^2)$$

Innsetning gir

$$D(0, 0) = 8, \quad f_{xx}(0, 0) = 4 \quad \text{og} \quad D(\pm 1, 0) = -16, \quad f_{xx}(\pm 1, 0) = -8$$

slik at $(0, 0)$ er ett _____ og $(\pm 1, 0)$ er _____.

K2015, Oppgave 4a

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn alle kritiske punkter til f , og avgjør om disse er lokale maksima, minima eller saddepunkter.

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$$

De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - x^2) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y$$

Likningsettet $\nabla \mathcal{L} = \mathbf{0}$ har løsninger $(0, 0)$ og $(\pm 1, 0)$. Determinanten

$$D(x, y) = 8(1 - 3x^2)$$

Innsetning gir

$$D(0, 0) > 0, \quad f_{xx}(0, 0) > 0 \quad \text{og} \quad D(\pm 1, 0) < 0, \quad f_{xx}(\pm 1, 0) < 0$$

slik at $(0, 0)$ er ett lokalt minimum og $(\pm 1, 0)$ er saddepunkter.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{L}(x, y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{L}(x, y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = ?$, $f_{\max} = ?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - \lambda 2y \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{L}(x, y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = ?$, $f_{\max} = ?$. De partiellderivererte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y(1 - \lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Fra $\mathcal{L}_y = 2y(1 - \lambda) = 0$ får vi at enten $y = 0$ eller $\lambda = 1$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{L}(x, y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = ?$, $f_{\max} = ?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y(1 - \lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$y = 0$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 - 4$$

Slik at $x^4 = 4 \Rightarrow x^2 = 2$ og $f = 2x^2 - x^4 + y^2$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{L}(x, y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = ?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y(1 - \lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$y = 0$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 - 4$$

Slik at $x^4 = 4 \Rightarrow x^2 = 2$ og $f = 2 \cdot 2 - 4 + 0^2 = 0$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{L}(x, y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = ?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y(1 - \lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\lambda = 1$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{L}(x, y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = ?$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y(1 - \lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\lambda = 1$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - 2x^2), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Når $x = 0$ så gir \mathcal{L}_λ , $y^2 = 4$ slik at $f = 2x^2 - x^4 + y^2$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{L}(x, y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 4$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y(1 - \lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\lambda = 1$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - 2x^2), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Når $x = 0$ så gir \mathcal{L}_λ , $y^2 = 4$ slik at $f = 2 \cdot 0^2 - 0^3 + 4 = 4$

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{L}(x, y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 4$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y(1 - \lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\lambda = 1$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - 2x^2), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

Når $x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{4}$ og $y^2 = 4 - x^4$ så $f = 2x^2 - x^4 + y^2$.

K2015, Oppgave 4b

Funksjonen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = 2x^2 - x^4 + y^2$. Finn største og minste verdi for f på kurven $x^4 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{L}(x, y) := 2x^2 - x^4 + y^2 - \lambda(x^4 + y^2 - 4)$$

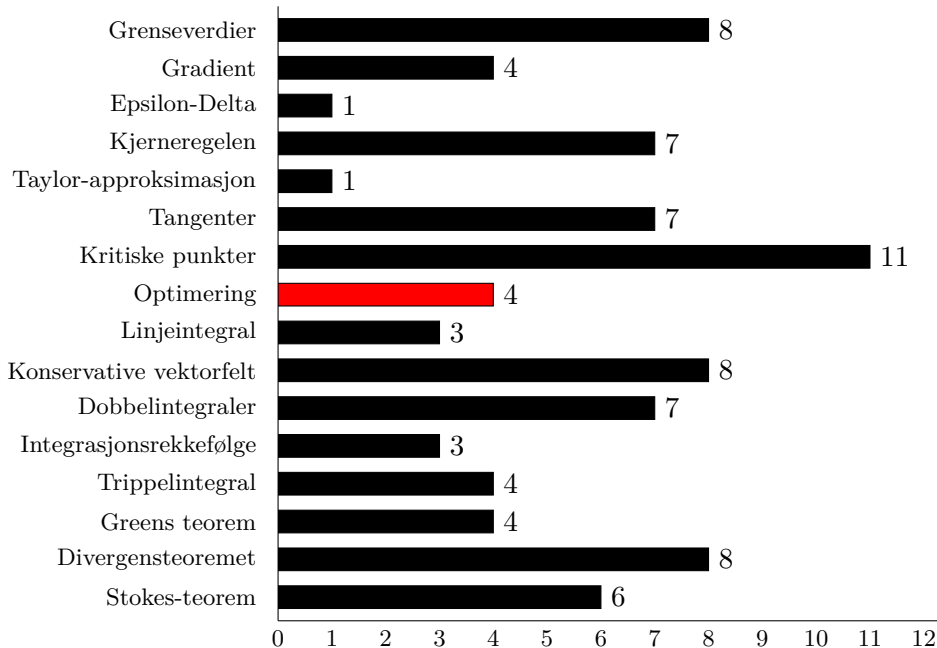
$f_{\min} = 0$, $f_{\max} = 4 + \frac{1}{2}$. De partiellderiverte blir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x - 4x^3 - 4\lambda x^3, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y(1 - \lambda) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

$\lambda = 1$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4x(1 - 2x^2), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^4 + y^2 - 4$$

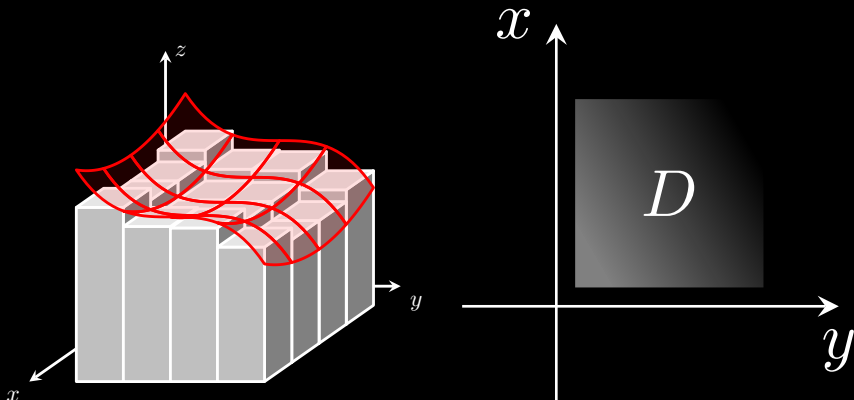
Når $x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{4}$ og $y^2 = 4 - x^4$ så $f = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 4 - \frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{2}$.



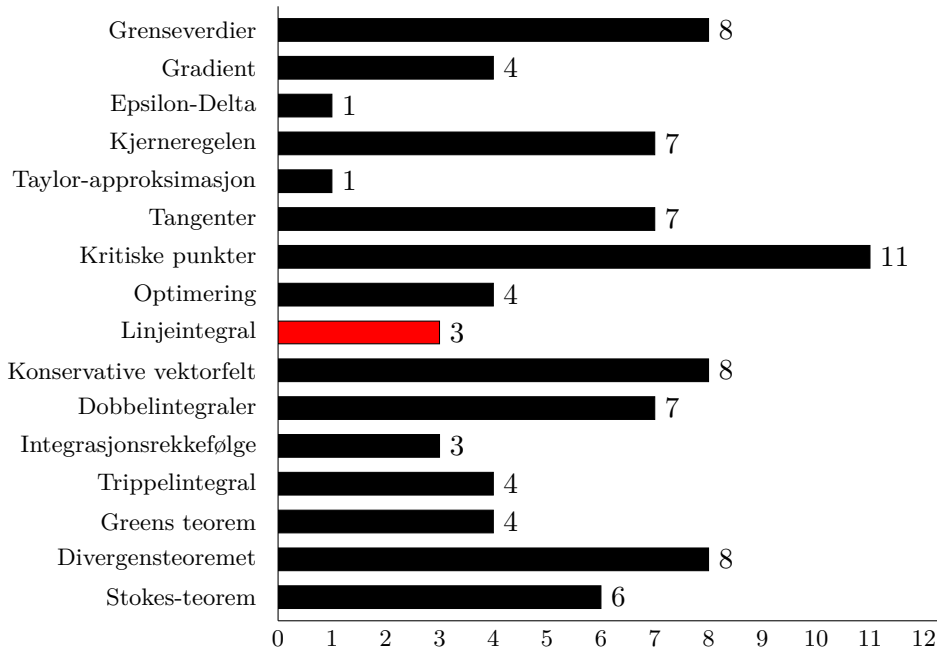
Optimering

Some more text here

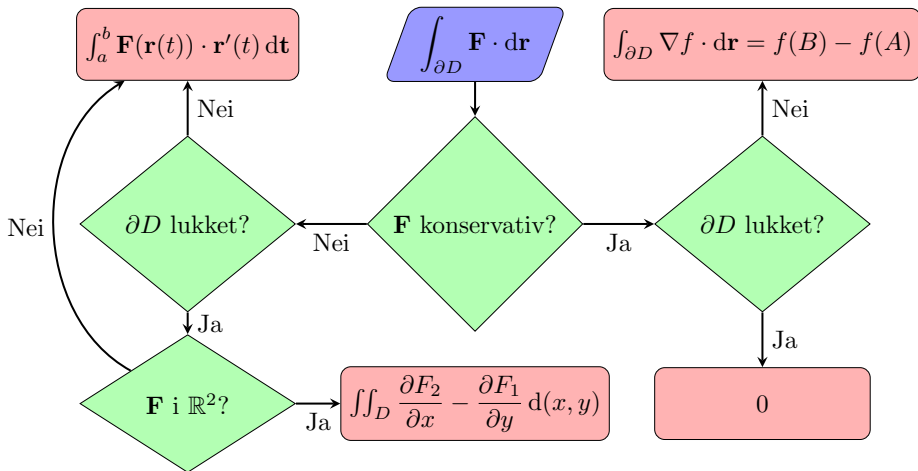
Integrasjon



$$\iint_D \int_0^{f(x,y)} 1 \, dz \, d(x,y) = \iint_D f(x,y) \, d(x,y)$$

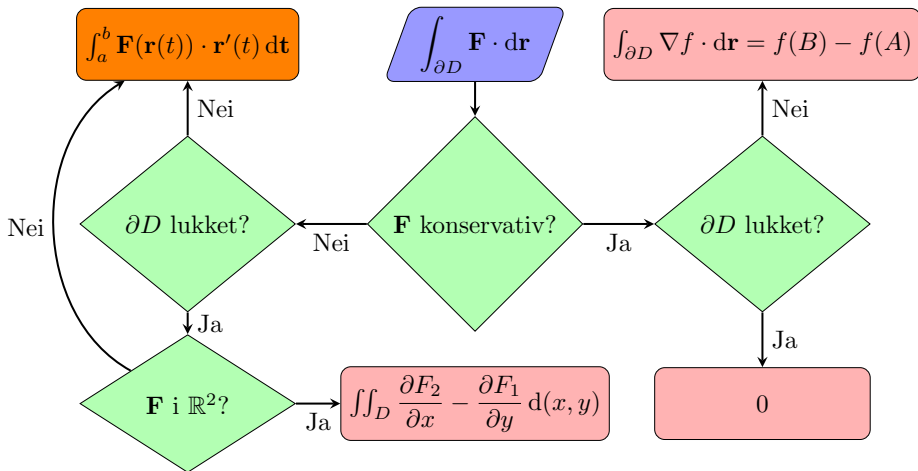


Linjeintegral



∂D er en kurve slik at $\partial D: \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ med $\mathbf{r}(a) = A$ og $\mathbf{r}(b) = B$.
 D er området avgrenset av ∂D . Dersom \mathbf{F} er konservativ er $\nabla f = \mathbf{F}$.

Linjeintegral



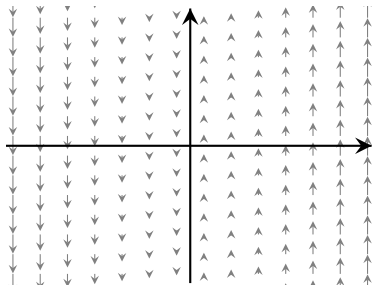
∂D er en kurve slik at $\partial D: \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ med $\mathbf{r}(a) = A$ og $\mathbf{r}(b) = B$.
 D er området avgrenset av ∂D . Dersom \mathbf{F} er konservativ er $\nabla f = \mathbf{F}$.

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



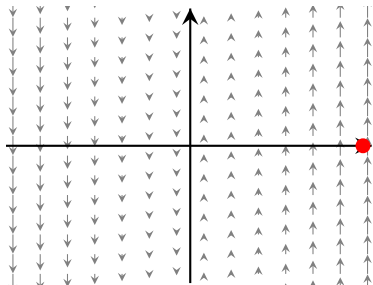
$$\mathbf{r}(\theta) = (x_0 + a \cos \theta)\mathbf{i} + (y_0 + a \sin \theta)\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



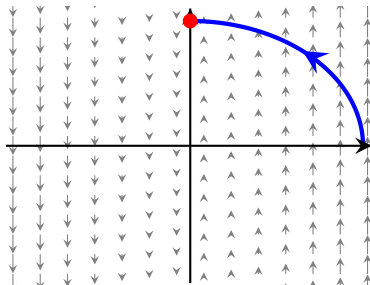
$$\mathbf{r}(\theta) = (x_0 + a \cos \theta)\mathbf{i} + (y_0 + a \sin \theta)\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



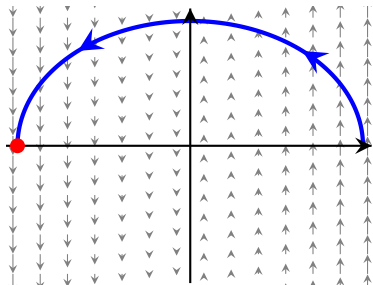
$$\mathbf{r}(\theta) = (x_0 + a \cos \frac{\pi}{2})\mathbf{i} + (y_0 + a \sin \frac{\pi}{2})\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



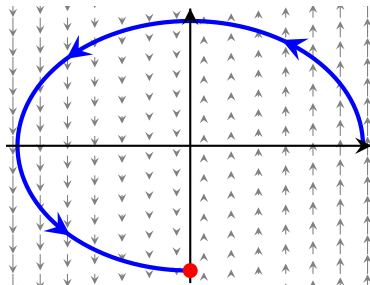
$$\mathbf{r}(\theta) = (x_0 + a \cos \theta)\mathbf{i} + (y_0 + a \sin \theta)\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



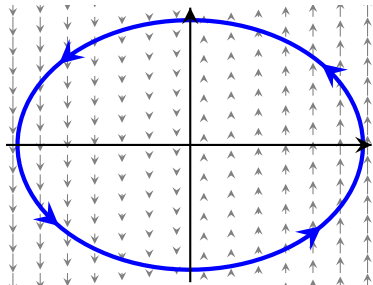
$$\mathbf{r}(\theta) = (x_0 + a \cos \frac{3\pi}{2})\mathbf{i} + (y_0 + a \sin \frac{3\pi}{2})\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



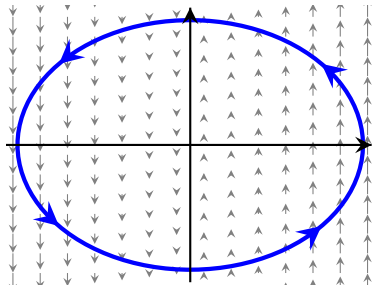
$$\mathbf{r}(\theta) = (x_0 + a \cos \theta)\mathbf{i} + (y_0 + a \sin \theta)\mathbf{j}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



$$\mathbf{r}(\theta) = (x_0 + a \cos \theta)\mathbf{i} + (y_0 + a \sin \theta)\mathbf{j}$$

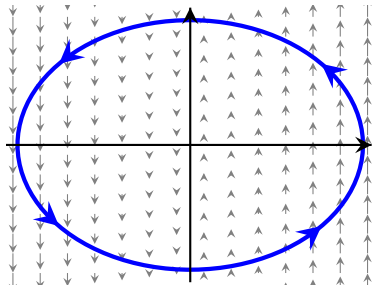
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) \mathbf{r}'(\theta) d\theta$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



$$\mathbf{r}(\theta) = (x_0 + a \cos \theta)\mathbf{i} + (y_0 + a \sin \theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(\theta) = -a \sin \theta \mathbf{i} + (a \cos \theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) = 0 \mathbf{i} + (x_0 + a \cos \theta)\mathbf{j}$$

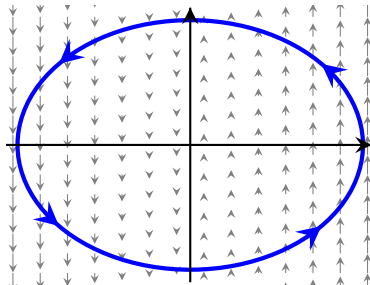
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta))\mathbf{r}'(\theta) d\theta$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



$$\mathbf{r}(\theta) = (x_0 + a \cos \theta)\mathbf{i} + (y_0 + a \sin \theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(\theta) = -a \sin \theta \mathbf{i} + (a \cos \theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) = 0 \mathbf{i} + (x_0 + a \cos \theta)\mathbf{j}$$

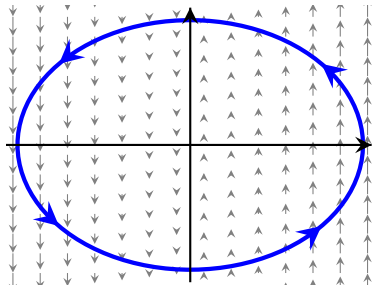
$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta))\mathbf{r}'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} ax_0(\cos \theta) + a^2(\cos \theta)^2 d\theta \end{aligned}$$

K2016, Oppgave 6

La $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Hva er verdien av integralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er en sirkel med radius $a > 0$?



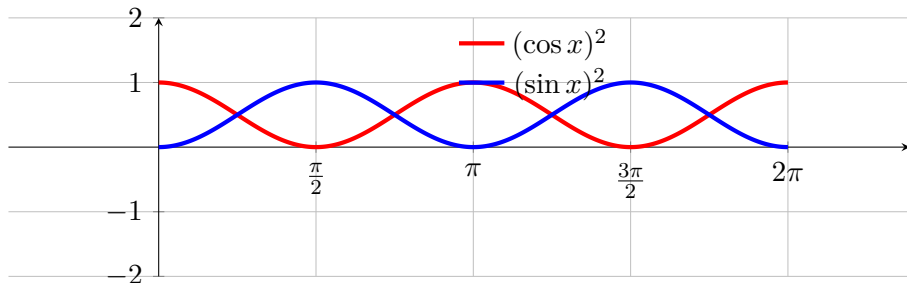
$$\mathbf{r}(\theta) = (x_0 + a \cos \theta) \mathbf{i} + (y_0 + a \sin \theta) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(\theta) = -a \sin \theta \mathbf{i} + (a \cos \theta) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) = 0 \mathbf{i} + (x_0 + a \cos \theta) \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) \mathbf{r}'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a x_0 (\cos \theta) + a^2 (\cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} d\theta = \pi a^2 \end{aligned}$$

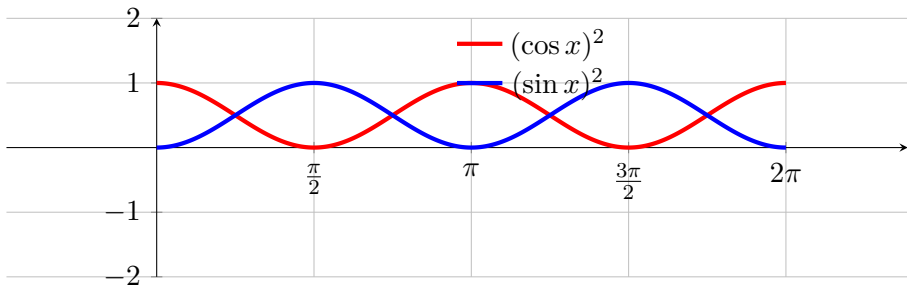
Trigonometri: like funksjoner



Theorem

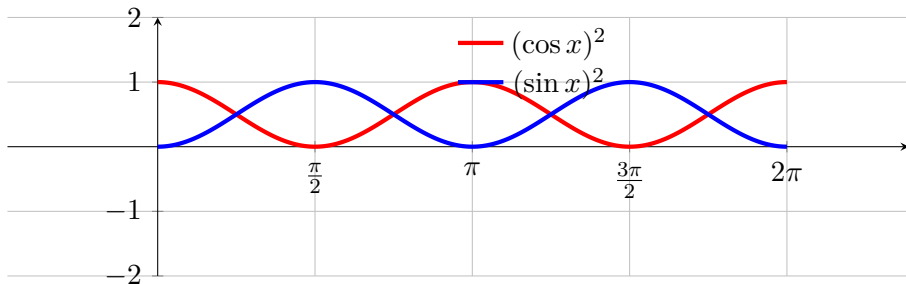
Det å integrere $(\cos x)^2$ eller $(\sin x)^2$ over intervaller som er multiplum av $\pi/2$ er det samme som å integrere $1/2$ over samme intervallet:

$$\int_{m\pi/2}^{n\pi/2} (\sin x)^2 dx = \int_{m\pi/2}^{n\pi/2} (\cos x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{m\pi/2}^{n\pi/2} dx \quad m, n \in \mathbb{Z}$$



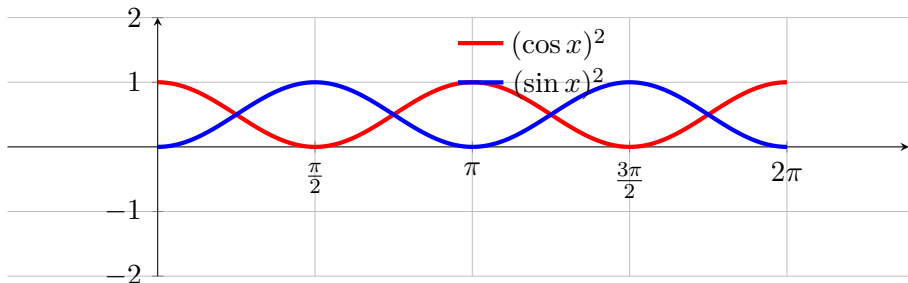
$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx \stackrel{u \rightarrow x - \pi/2}{=} - \int_{\pi/2}^0 (\sin(\pi/2 - u))^2 du$$

(2)



$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx$$

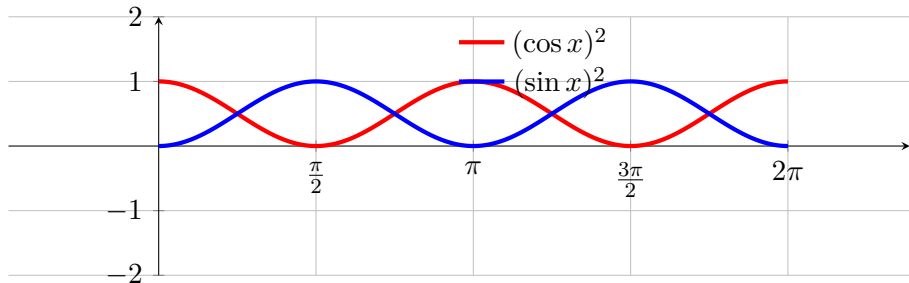
(2)



$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx \quad (1)$$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

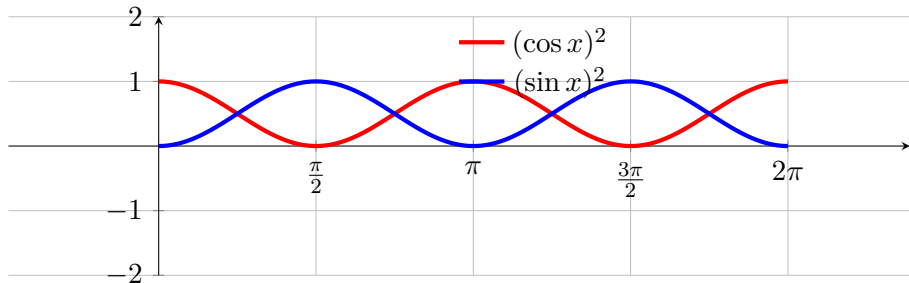
(3)



$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 + (\cos x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx$$

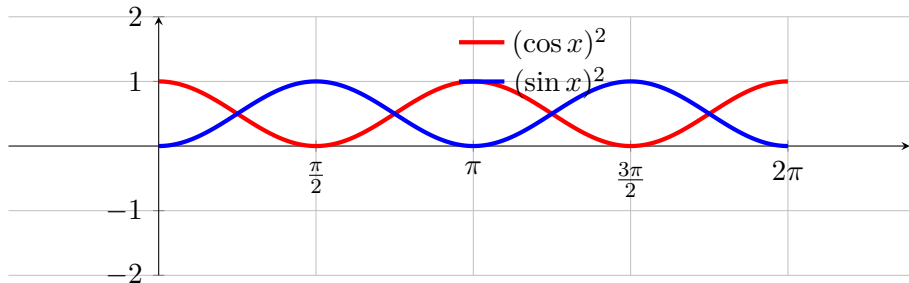
(3)



$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx + \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx$$

(3)

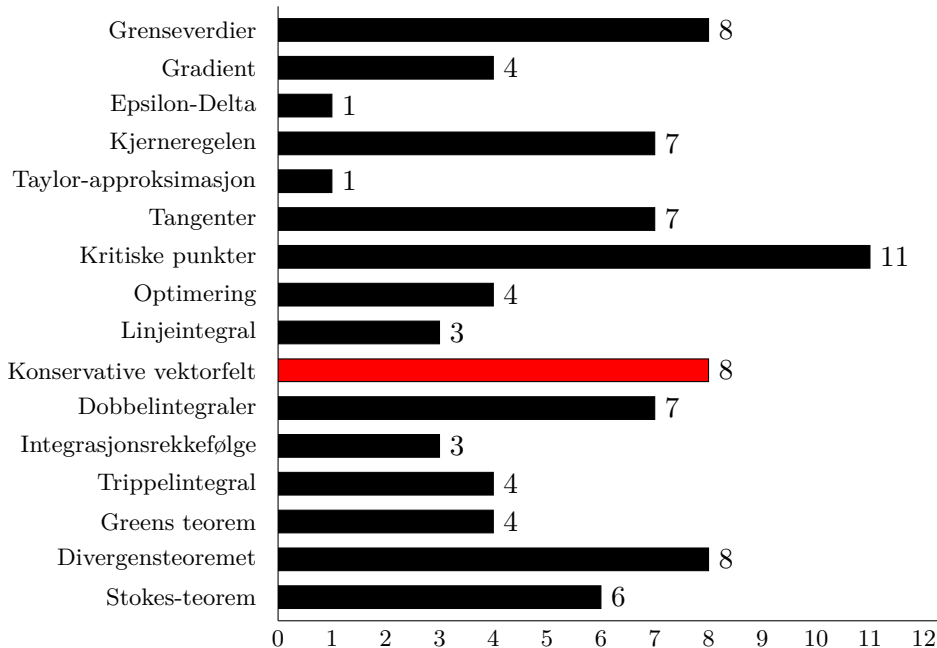


$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx \quad (1)$$

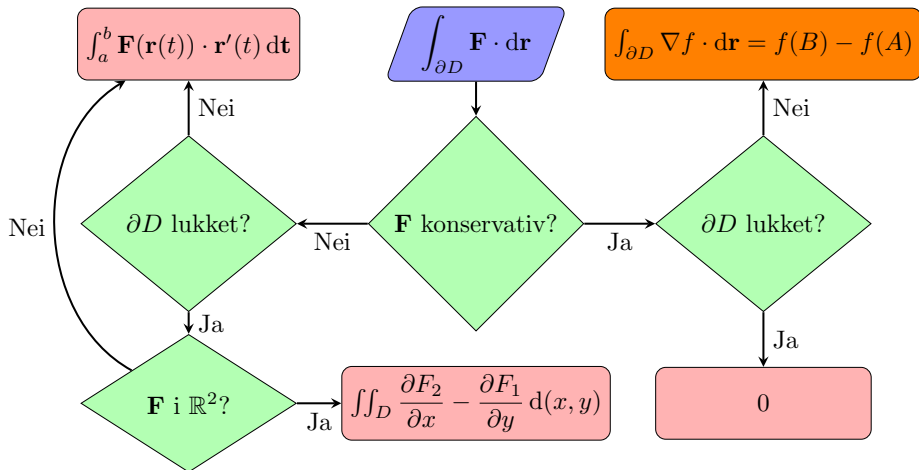
$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx + \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx \quad (2)$$

\Downarrow

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2} \quad (3)$$



Konservative vektorfelt



Konservative vektorfelt

Definition

Et vektorfelt $\mathbf{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, hvor $A \subset \mathbb{R}^m$ er *konservativt* dersom det eksisterer et skalarfelt f med kontinuerlige partiellderiverte på A slik at $\nabla f = (\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}) = (F_1, F_2) = \mathbf{F}$.

Theorem

- \mathbf{F} konservativt $\implies \text{curl } \mathbf{F} = 0$
- Dersom følgende krav holder
 - ▶ \mathbf{F} er definert på et enkeltsammenhengende området D
 - ▶ \mathbf{F} har kontinuerlige partiellderiverte på hele D
 - ▶ $\text{curl } \mathbf{F} = 0$

Så har vi $\text{curl } \mathbf{F} = 0 \implies \mathbf{F}$ konservativt.

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

\mathbf{F} er definert på hele \mathbb{R}^3 (enkeltsammenhengende) og har kontinuerlige partiellderiverte. Dersom $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ så er \mathbf{F} et konservativ felt.

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

\mathbf{F} er definert på hele \mathbb{R}^3 (enkeltsammenhengende) og har kontinuerlige partiellderiverte. Dersom $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ så er \mathbf{F} et konservativ felt.

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$$

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

\mathbf{F} er definert på hele \mathbb{R}^3 (enkeltsammenhengende) og har kontinuerlige partiellderiverte. Dersom $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ så er \mathbf{F} et konservativ felt.

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz) \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz) \right) \end{aligned}$$

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

\mathbf{F} er definert på hele \mathbb{R}^3 (enkeltsammenhengende) og har kontinuerlige partiellderiver. Dersom $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ så er \mathbf{F} et konservativ felt.

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz) \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz) \right) \\ &= \mathbf{i}(x - x) - \mathbf{j}(y - y) + \mathbf{k}(z - z) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

Siden \mathbf{F} er et konservativt felt eksisterer det et skalarfelt (potensial) f slik at $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (yz, xz, xy) = \mathbf{F}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz \Rightarrow f = xyz + C(y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz \Rightarrow f = xyz + D(x, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy \Rightarrow f = xyz + E(x, y)$$

Velger $C(y, z) = D(x, z) = E(x, y) = 0$ slik at $f(x, y, z) = xyz$.

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

Siden $f = xyz$, $\nabla f = \mathbf{F}$ og \mathbf{F} er konservativt bruker vi formelen

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

hvor B og A er henholdsvis start og sluttunktet til kurven C .

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

Siden $f = xyz$, $\nabla f = \mathbf{F}$ og \mathbf{F} er konservativt bruker vi formelen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(\pi/4)) - f(\mathbf{r}(0))$$

hvor B og A er henholdsvis start og sluttunktet til kurven C .

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

Siden $f = xyz$, $\nabla f = \mathbf{F}$ og \mathbf{F} er konservativt bruker vi formelen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) - f(\cos 0, \sin 0, 0)$$

hvor B og A er henholdsvis start og slutt punktet til kurven C .

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

Siden $f = xyz$, $\nabla f = \mathbf{F}$ og \mathbf{F} er konservativt bruker vi formelen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right) - f(1, 0, 0)$$

hvor B og A er henholdsvis start og sluttunktet til kurven C .

V2015, Oppgave 8

La $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$. Bestem

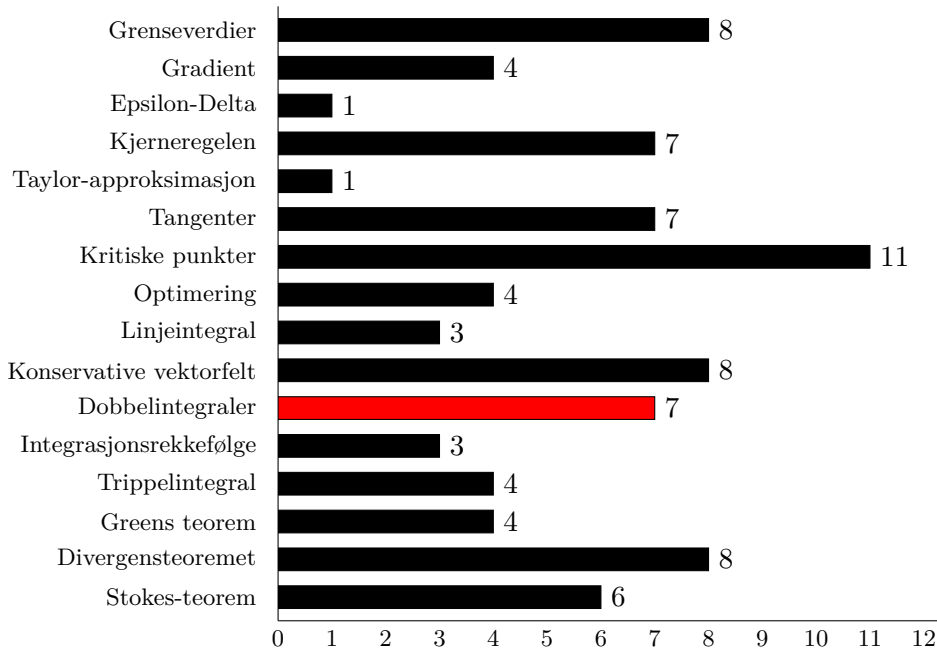
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

når C har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t < \pi/4$.

Siden $f = xyz$, $\nabla f = \mathbf{F}$ og \mathbf{F} er konservativt bruker vi formelen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi}{8}$$

hvor B og A er henholdsvis start og sluttunktet til kurven C .



Dobbelintegraler

- ❶ Integralet av en odde funksjon omkring et symmetrisk området er null

$$\int_{-a}^a x \, dx = 0$$

- ❷ Dersom integralet inneholder $x^2 + y^2$ bytt til polarkoordinater

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad dx \, dy = r \, dr \, d\theta$$

Dobbelintegraler

- ❶ Integralet av en odde funksjon omkring et symmetrisk området er null

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

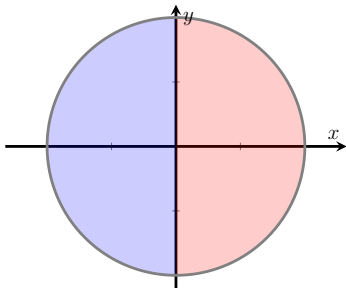
Hvor $f(-x) = -f(x)$.

- ❷ Dersom integralet inneholder $x^2 + y^2$ bytt til polarkoordinater

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad dx \, dy = r \, dr \, d\theta$$

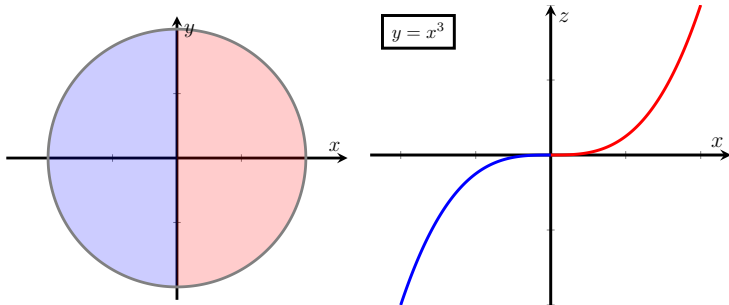
V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.



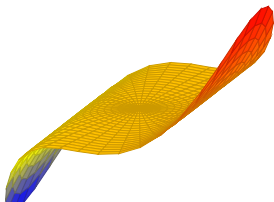
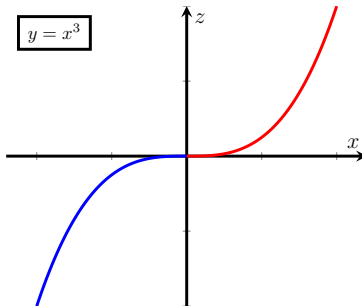
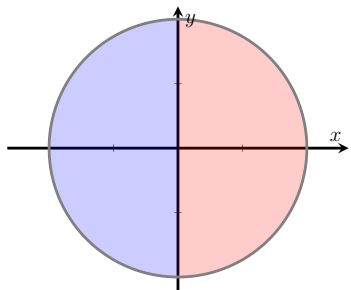
V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.



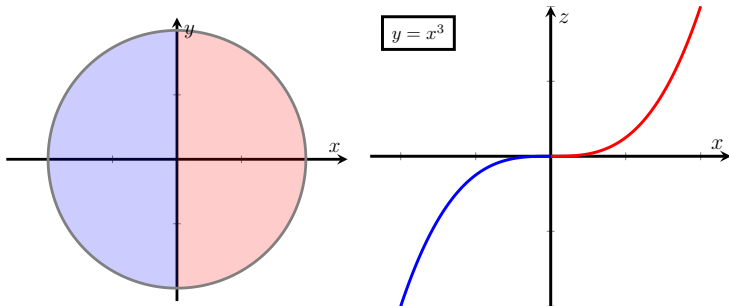
V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.



V2017, Oppgave 4

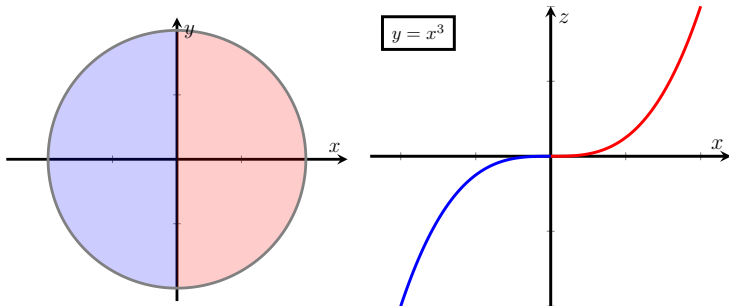
Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.



$$\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$$

V2017, Oppgave 4

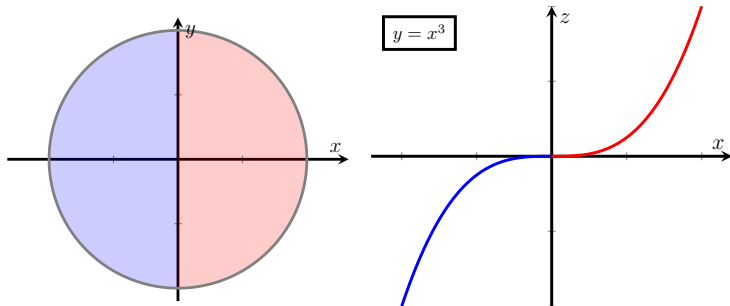
Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.



$$\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$$

V2017, Oppgave 4

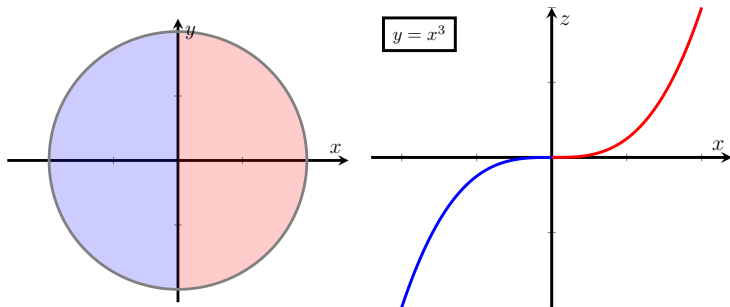
Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.



$$\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) = 3 \iint_D d(x, y) + \iint_D x^3 \, d(x, y)$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.



$$\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) = 3 \underbrace{\iint_D d(x, y)}_{\pi a^2} + \underbrace{\iint_D x^3 \, d(x, y)}_0 = 3\pi a^2$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r \cos \theta)^3) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a 3r + r^4 (\cos \theta) \, dr \right]_0^a d\theta\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r \cos \theta)^3) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos \theta)^3 \right]_0^a \, d\theta\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r \cos \theta)^3) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos \theta)^3 \right]_0^a \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos \theta)^3 \, d\theta\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r \cos \theta)^3) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos \theta)^3 \right]_0^a \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos \theta)^3 \, d\theta \\ &= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^2 \cos \theta \, d\theta\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r \cos \theta)^3) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos \theta)^3 \right]_0^a \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos \theta)^3 \, d\theta \\ &= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin \theta)^2) \cos \theta \, d\theta\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r \cos \theta)^3) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos \theta)^3 \right]_0^a d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos \theta)^3 d\theta \\ &= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin \theta)^2) \cos \theta \, d\theta \\ &= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \left[\int (1 - (\sin \theta)^2) \cos \theta \, d\theta \right]_0^{2\pi}\end{aligned}$$

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}
 \iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r \cos \theta)^3) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos \theta)^3 \right]_0^a \, d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos \theta)^3 \, d\theta \\
 &= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin \theta)^2) \cos \theta \, d\theta \\
 &= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \left[\int_0^{2\pi} 1 - u^2 \, du \right]_0^{2\pi}
 \end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r \cos \theta)^3) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos \theta)^3 \right]_0^a d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos \theta)^3 \, d\theta \\ &= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin \theta)^2) \cos \theta \, d\theta \\ &= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \left[u - \frac{1}{3} u^3 \right]_0^{2\pi}\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Bytter direkte til polarkoordinater

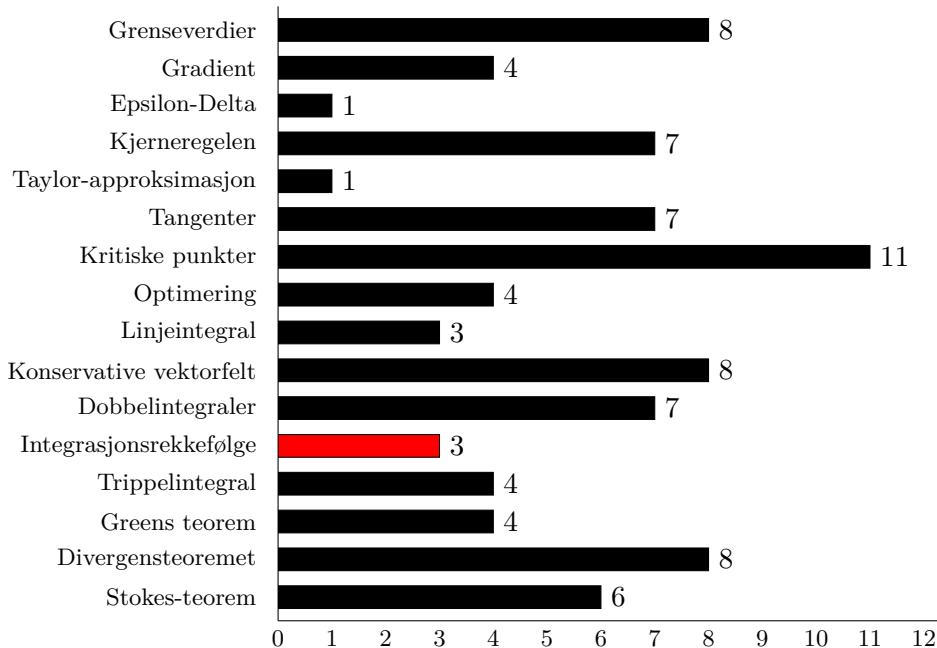
$$\begin{aligned}\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r \cos \theta)^3) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos \theta)^3 \right]_0^a \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos \theta)^3 \, d\theta \\ &= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin \theta)^2) \cos \theta \, d\theta \\ &= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \left[\sin x - \frac{1}{3} (\sin x)^3 \right]_0^{2\pi}\end{aligned}$$

V2017, Oppgave 4

Beregn dobbelintegralet $\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y)$ der D er gitt ved $x^2 + y^2 \leq a^2$.

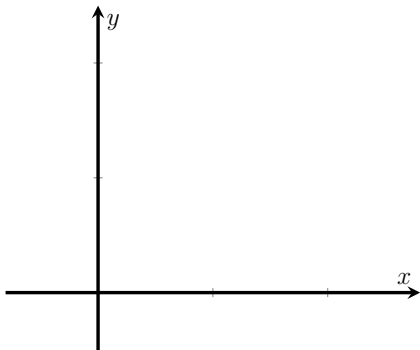
Bytter direkte til polarkoordinater

$$\begin{aligned}\iint_D 3 + x^3 \, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (3 + (r \cos \theta)^3) r \, dr \, d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} r^2 + \frac{r^5}{5} (\cos \theta)^3 \right]_0^a d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} a^2 + \frac{a^5}{5} (\cos \theta)^3 d\theta \\&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} (1 - (\sin \theta)^2) \cos \theta d\theta \\&= 3\pi a^2 + \frac{a^5}{5} \left[\sin x - \frac{1}{3} (\sin x)^3 \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2\end{aligned}$$



V2017, Oppgave 3

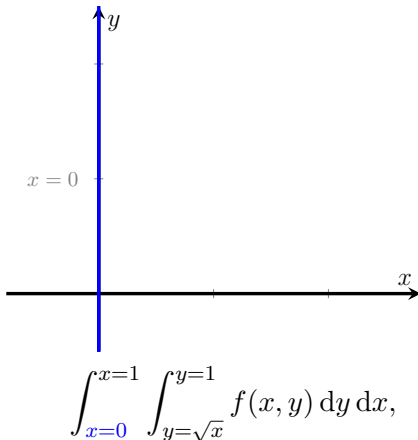
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=1} f(x, y) dy dx,$$

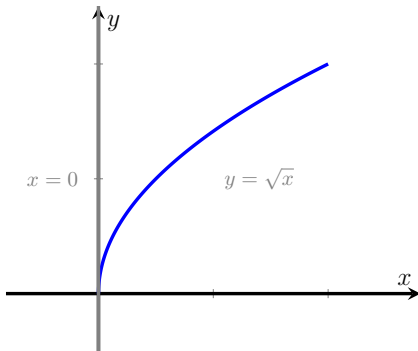
V2017, Oppgave 3

Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



V2017, Oppgave 3

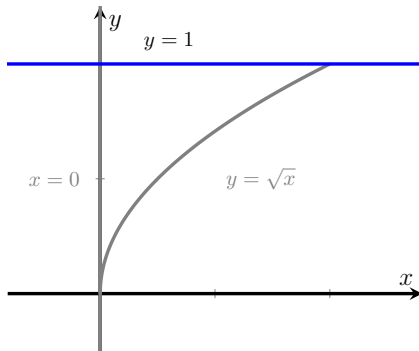
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=1} f(x, y) dy dx,$$

V2017, Oppgave 3

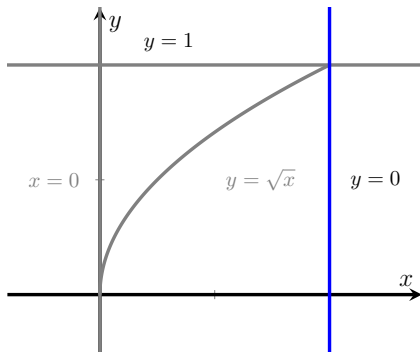
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=0} f(x, y) dy dx,$$

V2017, Oppgave 3

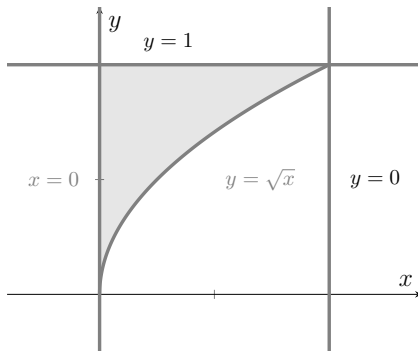
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=0} f(x, y) dy dx,$$

V2017, Oppgave 3

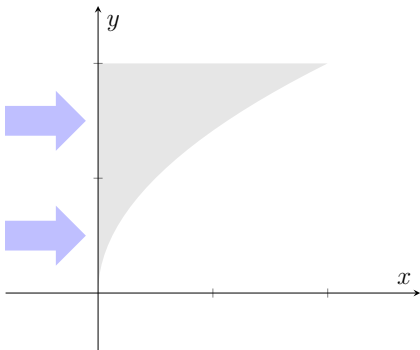
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=0} f(x, y) dy dx,$$

V2017, Oppgave 3

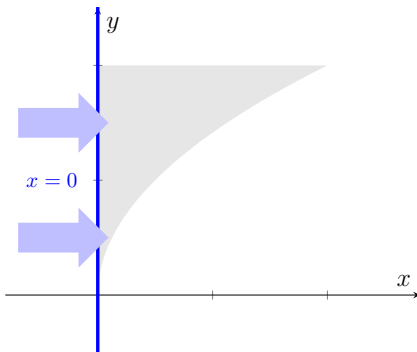
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx = \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} f(x, y) dx dy$$

V2017, Oppgave 3

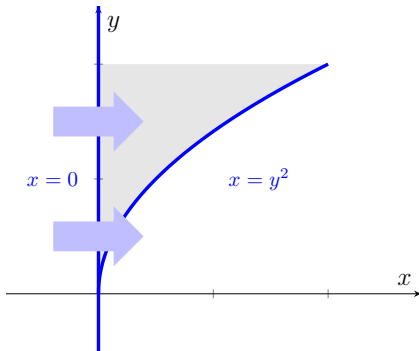
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx = \int_{?}^{?} \int_{x=0}^{?} f(x, y) dx dy$$

V2017, Oppgave 3

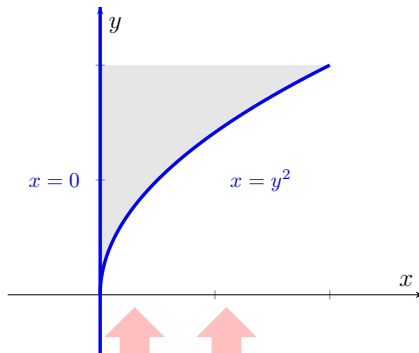
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx = \int_{?}^{?} \int_0^{x=y^2} f(x, y) dx dy$$

V2017, Oppgave 3

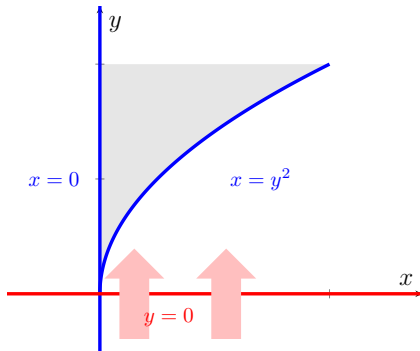
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx = \int_{?}^{?} \int_0^{y^2} f(x, y) dx dy$$

V2017, Oppgave 3

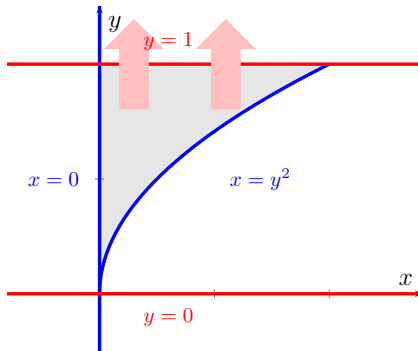
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx = \int_{y=0}^? \int_0^{y^2} f(x, y) dx dy$$

V2017, Oppgave 3

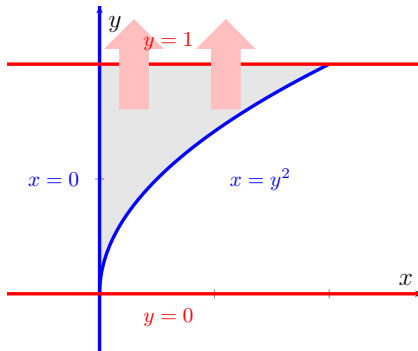
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{y^2} f(x, y) dx dy$$

V2017, Oppgave 3

Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.



$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{y^2} f(x, y) dx dy$$

V2017, Oppgave 3

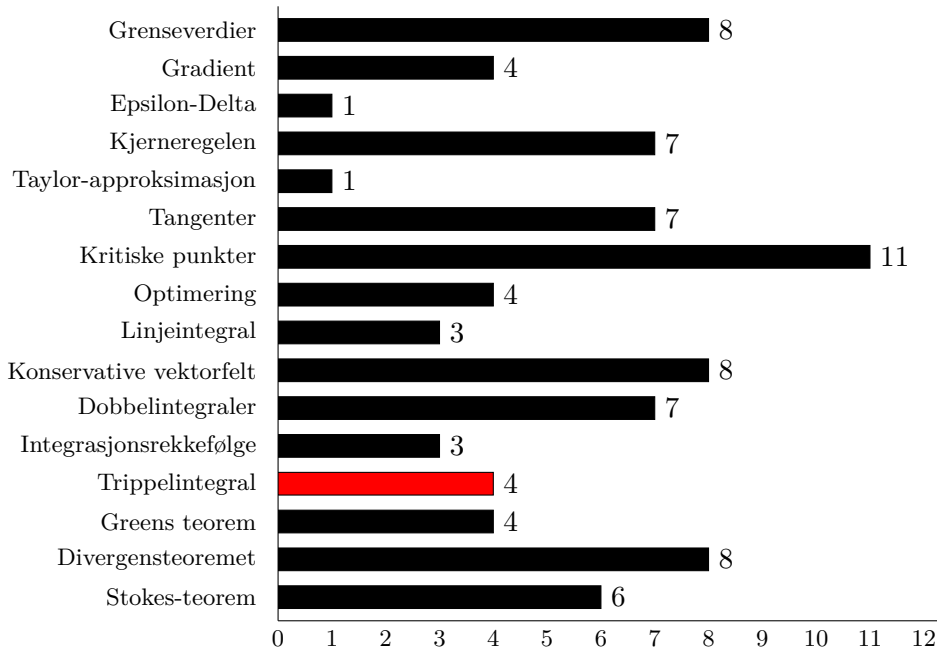
Skisser integrasjonsområdet for $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$, og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx dy$.

Har at $0 \leq x \leq 1$ og $\sqrt{x} \leq y \leq 1$. Dette fører til at

$$\sqrt{0} \leq y \leq 1$$

Ved å kvadrere $\sqrt{x} \leq y \leq 1$ får vi $x \leq y^2 \leq 1$. Videre vet vi at $0 \leq x$ slik at

$$0 \leq x \leq y^2$$

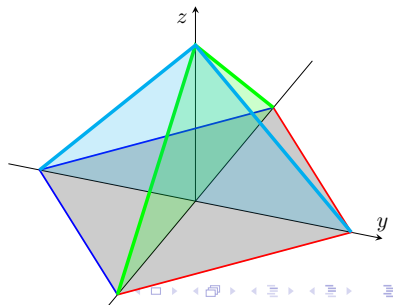
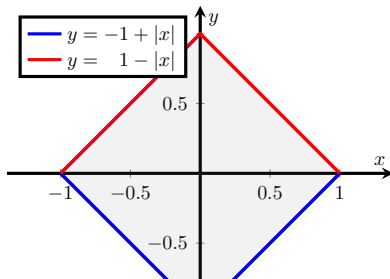
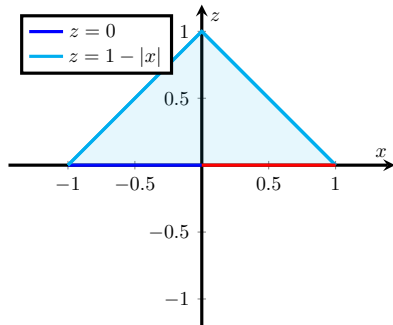
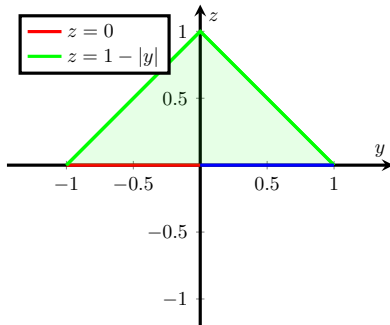


Trippelintegral

- 1 Tegn integrasjonsområdet i xy , xz og yz -planet
- 2 Bestem grensene
- 3 Gjør forenklinger med hensyn på symmetri
- 4 Beregn trippelintegralet og bytt grenser om nødvendig

Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^2$.

Viser området $0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|$



Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy dV = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$M = \iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R z^n dV$$

Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy dV = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$\begin{aligned} M &= \iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R z^n dV \\ &= \int_{x=?}^{x=?} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \int_{z=u(x,y)}^{z=v(x,y)} z^n dz dy dx \end{aligned}$$

Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy dV = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$\begin{aligned} M &= \iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R z^n dV \\ &= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-1+|x|}^{y=1-|x|} \int_{z=0}^{z=1-|x|-|y|} z^n dz dy dx \end{aligned}$$

Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

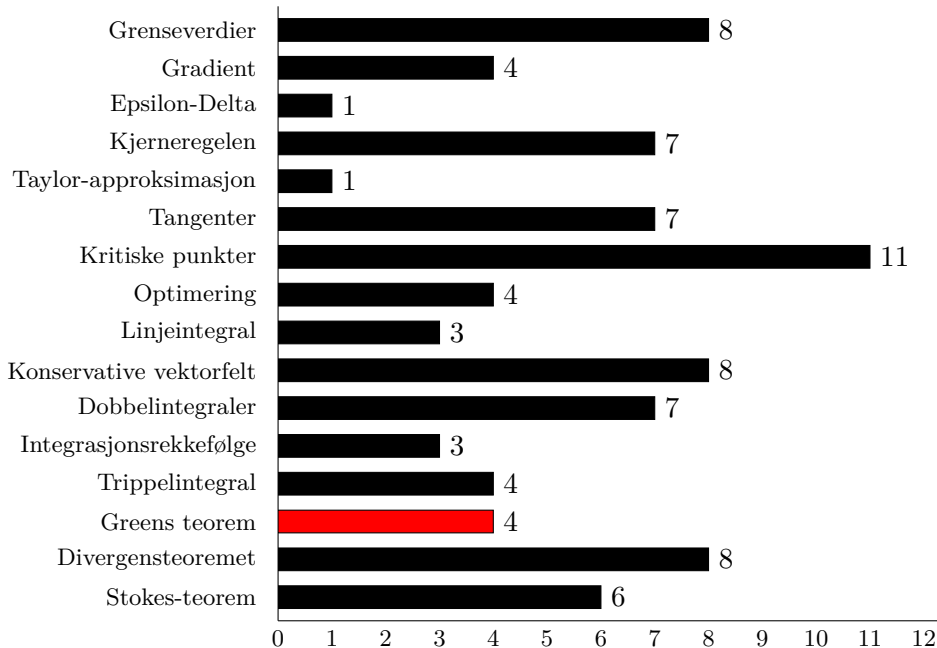
Siden $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy dV = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$\begin{aligned} M &= \iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R z^n dV \\ &= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-1+|x|}^{y=1-|x|} \int_{z=0}^{z=1-|x|-|y|} z^n dz dy dx \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^n dz dy dx \end{aligned}$$

Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy dV = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$\begin{aligned} M &= \iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_R z^n dV \\ &= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-1+|x|}^{y=1-|x|} \int_{z=0}^{z=1-|x|-|y|} z^n dz dy dx \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^n dz dy dx \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^{n+1}}{n+1} dy dx \\ &= 4 \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} dx = \frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$



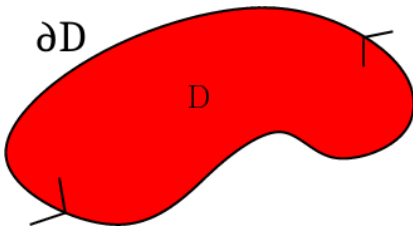
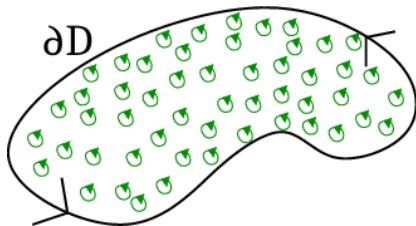
Greens teorem

Theorem (Greens theorem)

La ∂D være en positivt orientert, stykkevis glatt, enkel, lukket kurve og la D være området innelukket av ∂D . Dersom

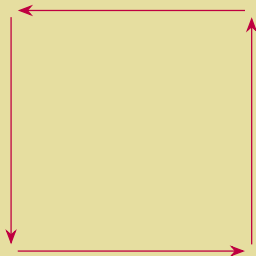
$\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ og \mathbf{F} har kontinuerlige partiellderiverte på hele D så er

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y).$$



Greens teorem

Intuisjon

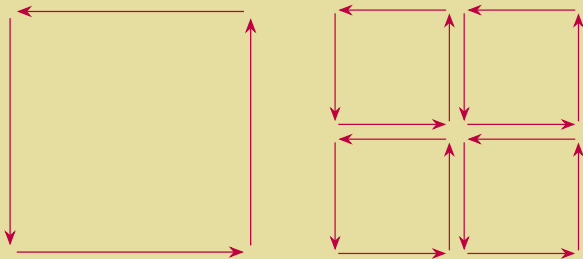


$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Med andre ord kanseleres alle de mikroskopiske sirkulasjonene slik at en står igjen med den makroskopiske sirkulasjonen, altså linjeintegralet.

Greens teorem

Intuisjon

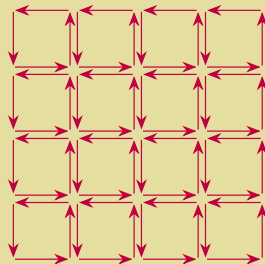
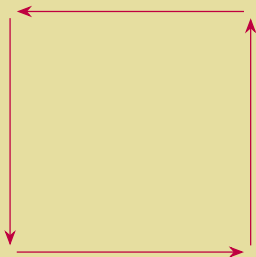


$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Med andre ord kanseleres alle de mikroskopiske sirkulasjonene slik at en står igjen med den makroskopiske sirkulasjonen, altså linjeintegralet.

Greens teorem

Intuisjon

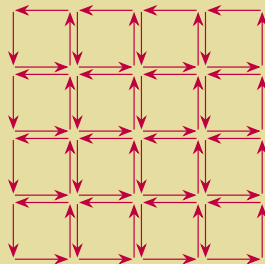
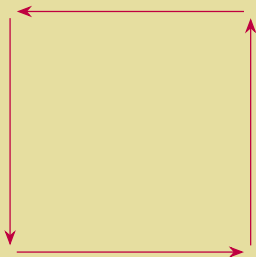


$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Med andre ord kanseleres alle de mikroskopiske sirkulasjonene slik at en står igjen med den makroskopiske sirkulasjonen, altså linjeintegralet.

Greens teorem

Intuisjon

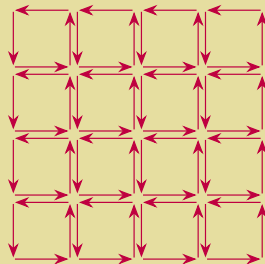
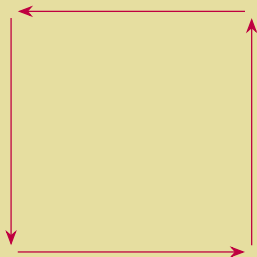


$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D 2\text{d-curl } \mathbf{F} \, d(x, y)$$

Med andre ord kanseleres alle de mikroskopiske sirkulasjonene slik at en står igjen med den makroskopiske sirkulasjonen, altså linjeintegralet.

Greens teorem

Intuisjon



$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y)$$

Med andre ord kanseleres alle de mikroskopiske sirkulasjonene slik at en står igjen med den makroskopiske sirkulasjonen, altså linjeintegralet.

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy$ der ∂D er en sirkel med radius 2 og sentrum (a, b) . Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy$ der ∂D er en sirkel med radius 2 og sentrum (a, b) . Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 1: Siden linjeintegralet vårt er på formen $\int_C P dx + Q dy$ og vi integrerer over en lukket kurve er det logisk å tenke Greens.

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy$ der ∂D er en sirkel med radius 2 og sentrum (a, b) . Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 1: Siden linjeintegralet vårt er på formen $\int_C P dx + Q dy$ og vi integrerer over en lukket kurve er det logisk å tenke Greens.

Steg 2: Sjekk om vilkårene for å bruke Greens er oppfylt:

- Kurven ∂D er lukket, glatt og enkel.
- Da alle polynomer, eksponensialfunksjoner og sinus/cosinus er deriverbare, har \mathbf{F} kontinuerlige partiellderiverte.

Merk: For at for å bruke Green's må ∂D orienteres *mot-klokken*.

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy$ der ∂D er en sirkel med radius 2 og sentrum (a, b) . Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

$$I = \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy$$

Greens $\stackrel{\text{teorem}}{=}$

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - \sin(y^3 + 8y)) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - e^{\sin x}) \right) d(x, y)$$

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy$ der ∂D er en sirkel med radius 2 og sentrum (a, b) . Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy \\ &\stackrel{\text{Greens teorem}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - \sin(y^3 + 8y)) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - e^{\sin x}) \right) d(x, y) \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - 0) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - 0) \right) d(x, y) \end{aligned}$$

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy$ der ∂D er en sirkel med radius 2 og sentrum (a, b) . Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy \\ &\stackrel{\text{Greens teorem}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - \sin(y^3 + 8y)) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - e^{\sin x}) \right) d(x, y) \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - 0) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - 0) \right) d(x, y) \\ &= \iint_D (10 - 5) d(x, y) \end{aligned}$$

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy$ der ∂D er en sirkel med radius 2 og sentrum (a, b) . Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy \\ &\stackrel{\text{Greens teorem}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - \sin(y^3 + 8y)) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - e^{\sin x}) \right) d(x, y) \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - 0) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - 0) \right) d(x, y) \\ &= 5 \iint_D d(x, y) \end{aligned}$$

V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy$ der ∂D er en sirkel med radius 2 og sentrum (a, b) . Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy \\ &\stackrel{\text{Greens teorem}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - \sin(y^3 + 8y)) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - e^{\sin x}) \right) d(x, y) \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - 0) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - 0) \right) d(x, y) \\ &= 5 \iint_D d(x, y) = 5 \text{Areal}(D) \end{aligned}$$

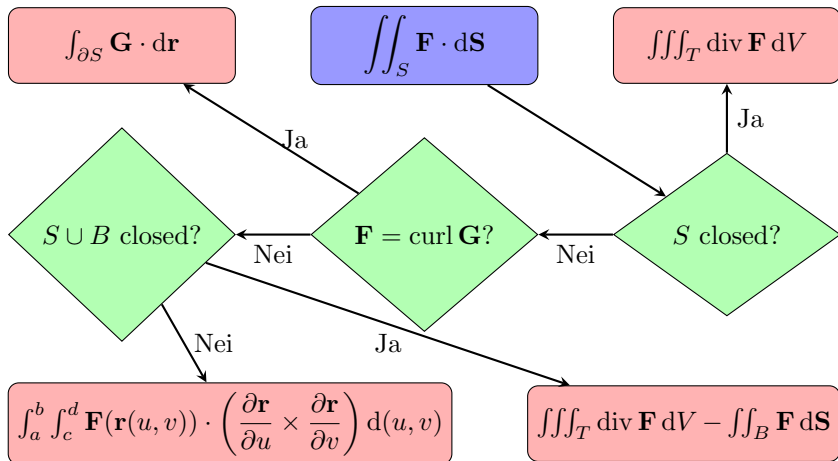
V2014, Oppgave , Oppgave 5

Regn ut $\int_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy$ der ∂D er en sirkel med radius 2 og sentrum (a, b) . Spesifiser om du regner integralet med eller mot klokka.

Steg 3: Bruk Green's til å beregn linjeintegralet

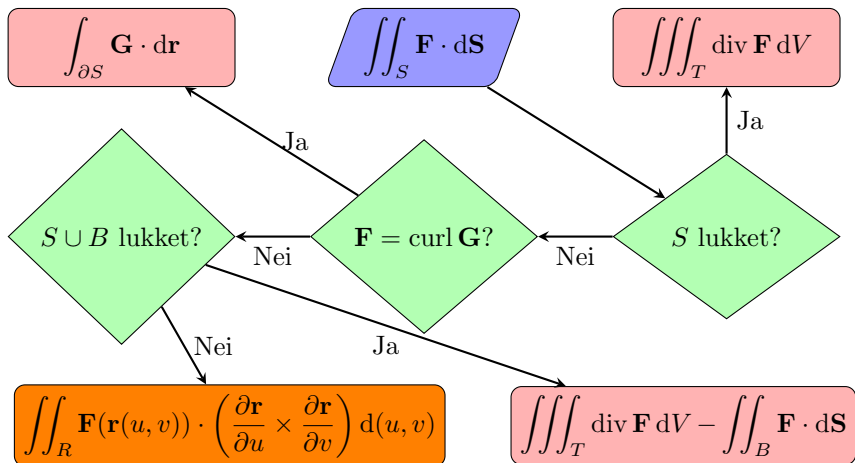
$$\begin{aligned} I &= \iint_{\partial D} (5y - e^{\sin x}) dx + (10x - \sin(y^3 + 8y)) dy \\ &\stackrel{\text{Greens teorem}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - \sin(y^3 + 8y)) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - e^{\sin x}) \right) d(x, y) \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (10x - 0) - \frac{\partial}{\partial y} (5y - 0) \right) d(x, y) \\ &= 5 \iint_D d(x, y) = 5 \text{Areal}(D) = 5(\pi \cdot 2^2) = 20\pi \end{aligned}$$

Overflateintegral



S er en parametrisert flate $S: \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in R \subseteq \mathbb{R}^2$ med rand ∂S .
 T er volumet med overflate S . B er en tiltenkt flate (lokk til S).

Overflateintegral



S er en parametrisert flate $S: \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in R \subseteq \mathbb{R}^2$ med rand ∂S .
 T er volumet med overflate S . B er en tiltenkt flate (lokk til S).

- ❶ Tegn integrasjonsområdet og bestem integrasjonsgrensene
- ❷ Bestem parametriseringen $\mathbf{r}(u, v): (u, v) \in R$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.
- ❸ Dersom $\mathbf{F}(x, y)$ er et vektorfelt blir fluksen ut av overflaten

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) d(x, y).$$

Dersom $z = g(x, y)$ så er $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, g(x, y))$, $(x, y) \in R$ og

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_R (F_1, F_2, F_3) \cdot (-g_x, -g_y, 1) d(x, y).$$

- ❹ Dersom $g(x, y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$A = \iint_S \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| d(u, v),$$

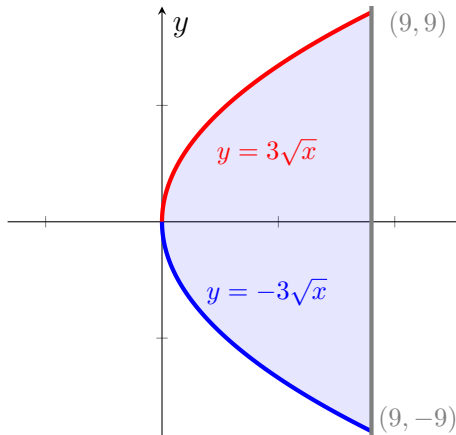
I spesialtilfelle $z = g(x, y)$ er $\mathbf{r}(u, v) = (x, y, g(x, y))$ og

$$A = \iint_T \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} d(x, y).$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y), (x, y) \in D\}$.

- ① Tegn integrasjonsområdet og bestem integrasjonsgrensene



$$\begin{aligned} 1 \leq x \leq 9 \\ -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x} \\ \Downarrow \\ \iint_D d(x, y) = \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} dy \, dx \end{aligned}$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y), (x, y) \in D\}$.

- 2 Bestem parametriseringen $\mathbf{r}(u, v): (u, v) \in R$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.

Parametriseringen vil være: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, g(x, y))$, $(x, y) \in D$ Slik at $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, g_x(x, y))$, og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 1, g_y(x, y))$. Så,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \quad (4)$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y), (x, y) \in D\}$.

- 8 Dersom $g(x, y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$A = \iint_S d\mathbf{S} = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| d(x, y)$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y), (x, y) \in D\}$.

- 8 Dersom $g(x, y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$A = \iint_S d\mathbf{S} = \iint_D \left\| \left(-\frac{\partial g}{\partial y}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \right\| d(x, y)$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y), (x, y) \in D\}$.

- 8 Dersom $g(x, y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$A = \iint_S d\mathbf{S} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} d(x, y)$$

Intuisjon

Fra Analyse I husker vi at lengden av en funksjon var gitt som

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} dx$$

Altså ser vi at et overflateintegral kan betraktes som et to-dimensjonalt buelengdeintegral dersom $z = g(x, y)$.

V2015, Oppgave 5b

La $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y), (x, y) \in D\}$.

- ③ Dersom $g(x, y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$\begin{aligned} A &= \iint_S d\mathbf{S} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} d(x, y) \\ &= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{1 + \left(-\frac{y^2}{2x^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} dy dx \end{aligned}$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y), (x, y) \in D\}$.

- 8 Dersom $g(x, y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$\begin{aligned} A &= \iint_S d\mathbf{S} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{y^2}{2x^2} + \left(\frac{y^2}{2x^2}\right)^2} dy dx \\ [a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= (a + b)^2] \end{aligned}$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y), (x, y) \in D\}$.

- 8 Dersom $g(x, y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$\begin{aligned} A &= \iint_S d\mathbf{S} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} d(x, y) \\ &= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{2x^2}\right)^2} dy dx \\ &= \int_1^9 \left[y + \frac{y^3}{6x^2} \right]_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y), (x, y) \in D\}$.

- 8 Dersom $g(x, y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$\begin{aligned} A &= \iint_S d\mathbf{S} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} d(x, y) \\ &= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{2x^2}\right)^2} dy dx \\ &= \int_1^9 6\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

V2015, Oppgave 5b

La $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y), (x, y) \in D\}$.

- 8 Dersom $g(x, y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

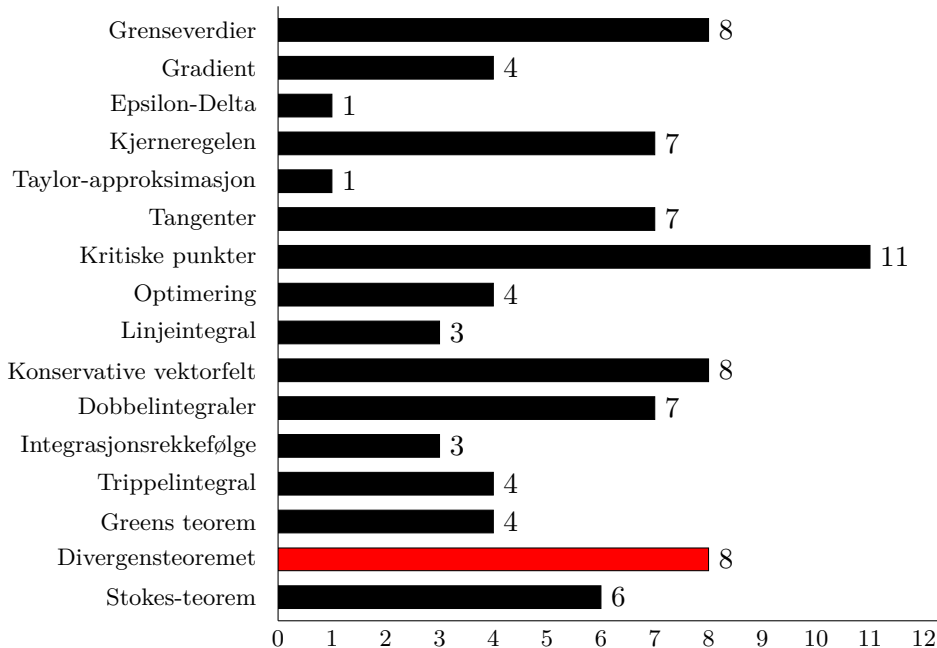
$$\begin{aligned} A &= \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} d(x, y) \\ &= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{2x^2}\right)^2} dy dx \\ &= \left[4x^{3/2} + 18x^{1/2}\right]_1^9 \end{aligned}$$

V2015, Oppgave 5b

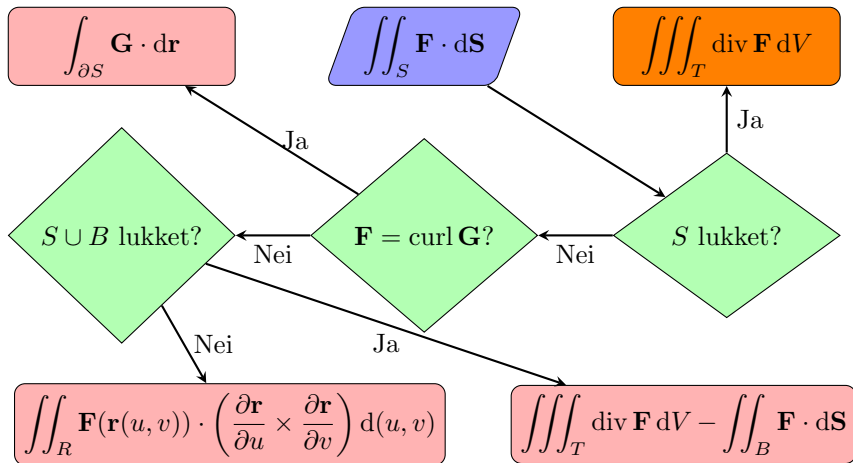
La $g(x, y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ være definert på $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ hvor $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 9, -3\sqrt{x} \leq y \leq 3\sqrt{x}\}$ bestem arealet av flaten $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y), (x, y) \in D\}$.

- 8 Dersom $g(x, y)$ er et skalarfelt er overflateintegralet gitt som

$$\begin{aligned} A &= \iint_S d\mathbf{S} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} d(x, y) \\ &= \int_1^9 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{2x^2}\right)^2} dy dx \\ &= 140 \end{aligned}$$



Divergensteoremet



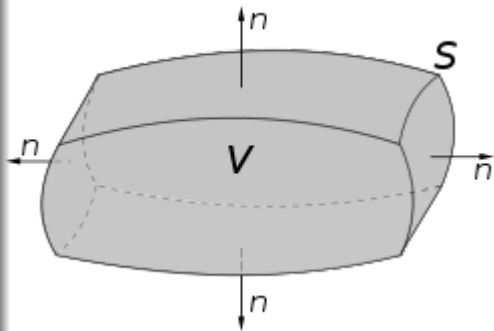
Theorem (Divergensteoremet)

La V være et lukket volum i rommet som har en parametriserbar overflate S , og la enhetsnormalen \mathbf{n} peke ut av V . Dersom \mathbf{F} er et vektorfelt som har kontinuerlige partiellderiverte på V da er

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

Intuisjon

Anta du har en *full* bolle med vann, og heller på mer vann. Hva skjer? Jo det renner vann ut av overflaten til bollen. Med andre ord er summen av endring i vesketetthet ($\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV$) lik hvor mye væske som forlater overflaten ($\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$).



V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x, y, z) = (\sin y)2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x, y, z) = (\sin y)2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

To krav:

- 1 Er flaten V avgrenset av randen S lukket og enkeltsammenhengende? Ja, enhetskula er åpenbart lukket og enkeltsammenhengende.
- 2 Har vektor feltet F kontinuerlige partiellderiverter definert på W . Ja, alle polynomer og $\sin x$ er deriverbare.

V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x, y, z) = (\sin y)2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

To krav:

- 1 Er flaten V avgrenset av randen S lukket og enkeltsammenhengende? Ja, enhetskula er åpenbart lukket og enkeltsammenhengende.
- 2 Har vektor feltet F kontinuerlige partiellderiverte definert på W . Ja, alle polynomer og $\sin x$ er deriverbare.

Har at normalvektoren er $-\mathbf{n}$ siden den skulle peke *inn* i kula.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}) \, dS &= - \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= - \iiint_V 0 + 0 + x \, dV = - \iiint_V x \, dV\end{aligned}$$

V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x, y, z) = (\sin y)2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

To krav:

- 1 Er flaten V avgrenset av randen S lukket og enkeltsammenhengende? Ja, enhetskula er åpenbart lukket og enkeltsammenhengende.
- 2 Har vektor feltet F kontinuerlige partiellderiverte definert på W . Ja, alle polynomer og $\sin x$ er deriverbare.

Har at normalvektoren er $-\mathbf{n}$ siden den skulle peke *inn* i kula.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}) \, dS &= - \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= - \iiint_V 0 + 0 + x \, dV = - \iiint_V x \, dV\end{aligned}$$

V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x, y, z) = (\sin y)2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

To krav:

- 1 Er flaten V avgrenset av randen S lukket og enkeltsammenhengende? Ja, enhetskula er åpenbart lukket og enkeltsammenhengende.
- 2 Har vektor feltet F kontinuerlige partiellderiverte definert på W . Ja, alle polynomer og $\sin x$ er deriverbare.

Har at normalvektoren er $-\mathbf{n}$ siden den skulle peke *inn* i kula.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}) \, dS &= - \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= - \iiint_V 0 + 0 + x \, dV = - \iiint_V x \, dV = 0\end{aligned}$$

V2012, Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $F(x, y, z) = (\sin y)\mathbf{2i} + x\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

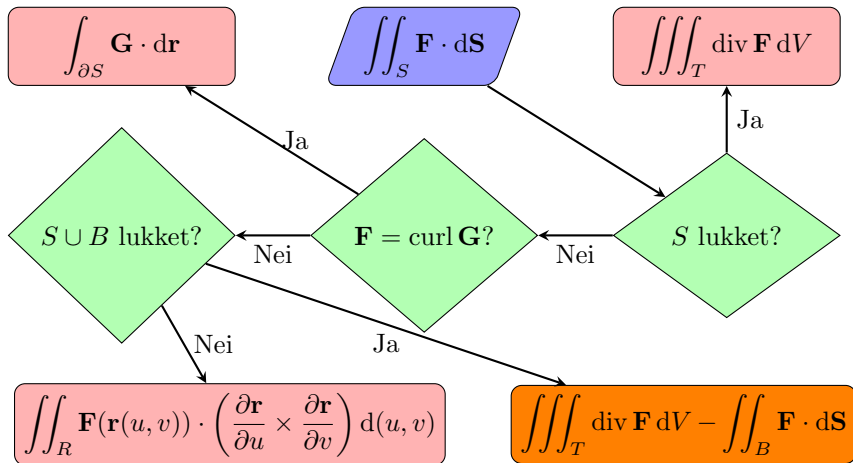
To krav:

- 1 Er flaten V avgrenset av randen S lukket og enkeltsammenhengende? Ja, enhetskula er åpenbart lukket og enkeltsammenhengende.
- 2 Har vektor feltet F kontinuerlige partiellderiverte definert på W . Ja, alle polynomer og $\sin x$ er deriverbare.

Har at normalvektoren er $-\mathbf{n}$ siden den skulle peke *inn* i kula.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}) dS &= - \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\ &= - \iiint_V 0 + 0 + 3 dV = - \iiint_V 3 dV = ?\end{aligned}$$

Divergensteoremet



Example

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$. Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T . Vektorfeltet \mathbf{F} er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ der \mathbf{n} har positiv z -komponent.

- 1 Regne ut $\operatorname{div} \mathbf{F}$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x(z + z^2)) - \frac{\partial}{\partial y}(yz^2 + xe^y) + \frac{\partial}{\partial z}(xze^y + 1)$$

- 2 Bruke divergensteoremet på hele overflaten til T
- 3 Finne fluksen ut av S .

Example

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$. Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T . Vektorfeltet \mathbf{F} er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ der \mathbf{n} har positiv z -komponent.

❶ Regne ut $\operatorname{div} \mathbf{F} = (z + z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x(z + z^2)) - \frac{\partial}{\partial y}(yz^2 + xe^y) + \frac{\partial}{\partial z}(xze^y + 1)$$

❷ Bruke divergensteoremet på hele overflaten til T

❸ Finne fluksen ut av S .

Example

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$. Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T . Vektorfeltet \mathbf{F} er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ der \mathbf{n} har positiv z -komponent.

① Regne ut $\operatorname{div} \mathbf{F} = (z + z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y = z$

② Bruke divergensteoremet på hele overflaten til T

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

③ Finne fluksen ut av S .

Example

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$. Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T . Vektorfeltet \mathbf{F} er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ der \mathbf{n} har positiv z -komponent.

① Regne ut $\operatorname{div} \mathbf{F} = (z + z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y = z$

② Bruke divergensteoremet på hele overflaten til T

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_V z \, dV$$

③ Finne fluksen ut av S .

Example

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$. Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T . Vektorfeltet \mathbf{F} er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ der \mathbf{n} har positiv z -komponent.

① Regne ut $\operatorname{div} \mathbf{F} = (z + z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y = z$

② Bruke divergensteoremet på hele overflaten til T

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_V z \, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \cos \varphi (\rho^2 \sin \varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

③ Finne fluksen ut av S .

Example

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$. Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T . Vektorfeltet \mathbf{F} er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ der \mathbf{n} har positiv z -komponent.

- 1 Regne ut $\operatorname{div} \mathbf{F} = (z + z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y = z$
- 2 Bruke divergensteoremet på hele overflaten til T

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_V z \, dV = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \left[-\frac{(\cos \varphi)^2}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

- 3 Finne fluksen ut av S .

Example

Halvkulen T er bestemt av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $z \geq 0$. Vi lar S betegne den krumme delen av overflaten til T . Vektorfeltet \mathbf{F} er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$$

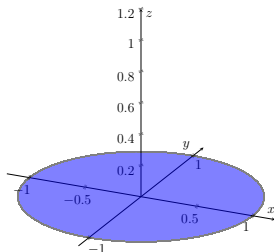
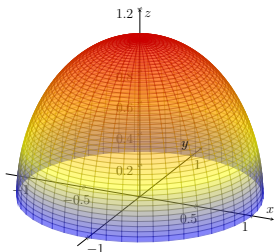
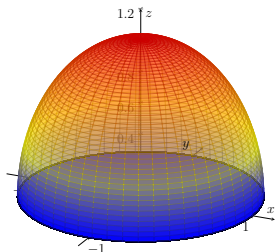
Bestem fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ der \mathbf{n} har positiv z -komponent.

① Regne ut $\operatorname{div} \mathbf{F} = (z + z^2) - (z^2 + xe^y) + xe^y = z$

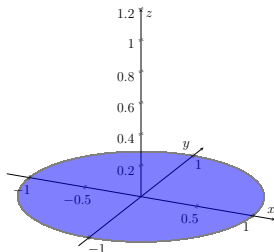
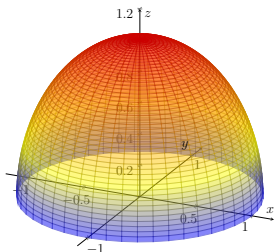
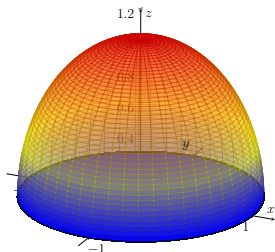
② Bruke divergensteoremet på hele overflaten til T

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_V z \, dV = 2\pi \left[\frac{1}{4} - 0 \right] \left[\frac{1^2}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{4}$$

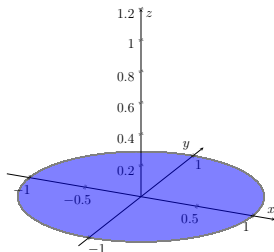
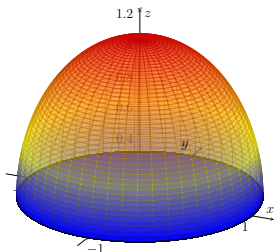
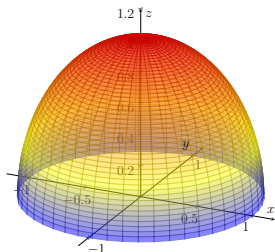
③ Finne fluksen ut av S .



$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$



$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS + \iint_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV - \iint_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Reminder: $\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$

Beregner overflateintegralet *ut* av bunnen. Siden normalvektoren må peke ut av flaten får vi $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ Så

$$\begin{aligned}\iint_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_B \mathbf{F} \cdot (0, 0, -1) \, dS \\ &= - \iint_B (x \cdot z \cdot e^y + 1) \, dS\end{aligned}$$

Reminder: $\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$

Beregner overflateintegralet *ut* av bunnen. Siden normalvektoren må peke ut av flaten får vi $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ Så

$$\begin{aligned}\iint_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_B \mathbf{F} \cdot (0, 0, -1) \, dS \\ &= - \iint_B (x \cdot 0 \cdot e^y + 1) \, dS = - \iint_B 1 \, dS = -\pi\end{aligned}$$

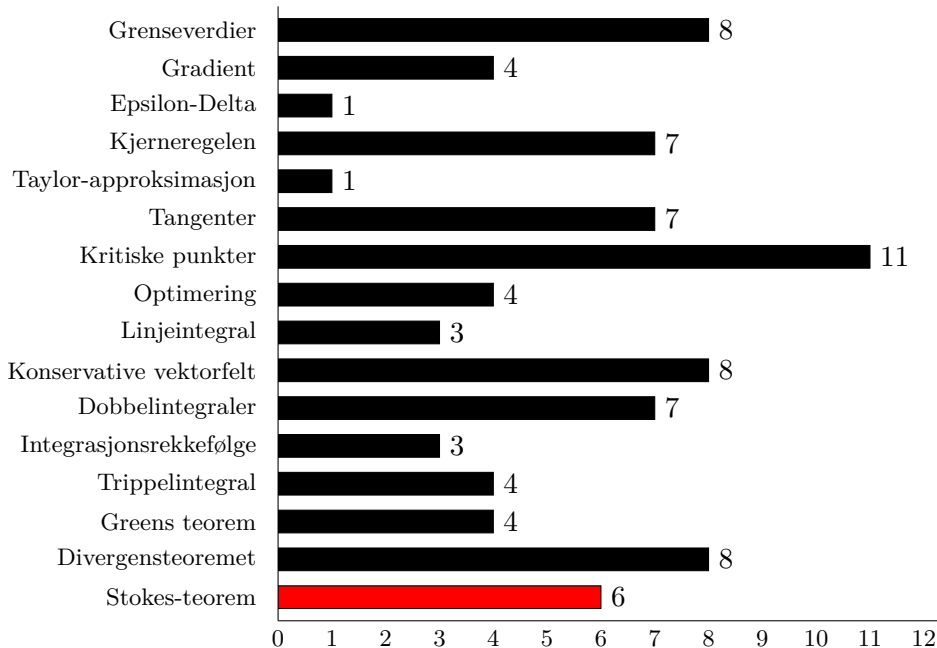
Reminder: $\mathbf{F}(x, y, z) = x(z + z^2)\mathbf{i} - (yz^2 + xe^y)\mathbf{j} + (xze^y + 1)\mathbf{k}$

Beregner overflateintegralet *ut* av bunnen. Siden normalvektoren må peke ut av flaten får vi $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ Så

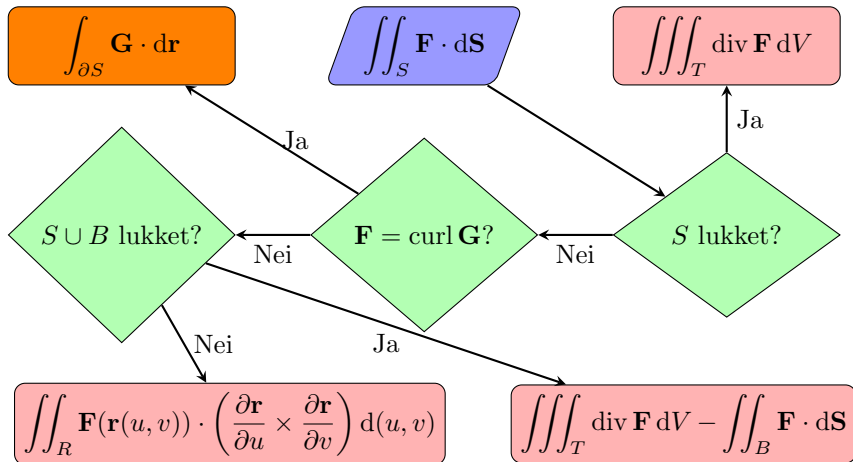
$$\begin{aligned}\iint_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint_B \mathbf{F} \cdot (0, 0, -1) \, dS \\ &= - \iint_B (x \cdot 0 \cdot e^y + 1) \, dS = - \iint_B 1 \, dS = -\pi\end{aligned}$$

Siden $z = 0$ og B er en sirkel med radius 1. Oppsumert har vi altså

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV - \iint_B \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \frac{\pi}{4} - (-\pi) \\ &= \frac{5\pi}{4}\end{aligned}$$



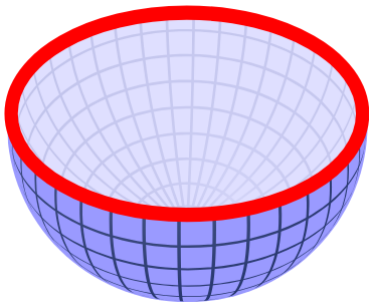
Stokes-teorem



Theorem (Stokes' teorem)

La S være en orienterbar glatt overflate som er begrenset av en enkel, lukket stykkevis-glatt randkurve C med positiv orientasjon. Dersom \mathbf{F} er et vektorfelt med kontinuerlige partiellderiverte på S så er

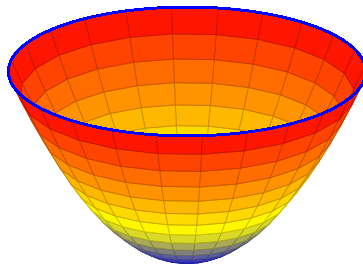
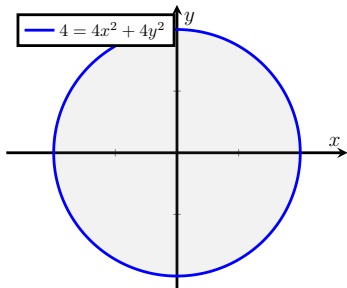
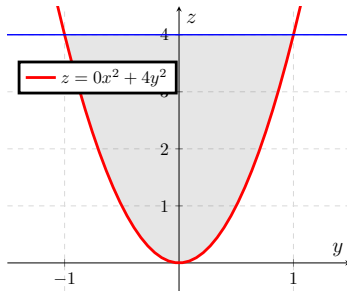
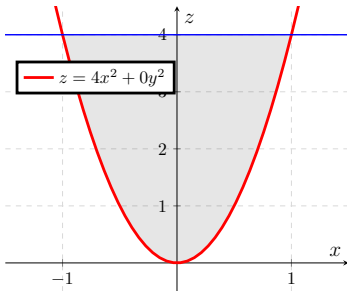
$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$



K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la \mathbf{n} være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$



K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la \mathbf{n} være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Flatene $z = 4x^2 + 4y^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1, z = 4$.

K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la \mathbf{n} være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Flatene $z = 4x^2 + 4y^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C . Vi ønsker å beregne fluxen ut av det **røde** området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med-klokken* og ikke mot som vanlig.

$$\mathbf{r}(\theta) = (\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la \mathbf{n} være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Flatene $z = 4x^2 + 4y^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1, z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C . Vi ønsker å beregne fluxen ut av det **røde** området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med-klokken* og ikke mot som vanlig.

$$\mathbf{r}(\theta) = (\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{4(\cos t)}{8\pi}, -\frac{\sin t}{2\pi}, 1 \right) (\cos t, -\sin t, 0) \, dt$$

K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la \mathbf{n} være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Flatene $z = 4x^2 + 4y^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C . Vi ønsker å beregne fluxen ut av det **røde** området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med-klokken* og ikke mot som vanlig.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta) &= (\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \\ \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t)^2 + (\sin t)^2 \, dt \end{aligned}$$

K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la \mathbf{n} være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Flatene $z = 4x^2 + 4y^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1, z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C . Vi ønsker å beregne fluxen ut av det **røde** området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med-klokken* og ikke mot som vanlig.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta) &= (\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \\ \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t)^2 + (\sin t)^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \, dt \end{aligned}$$

K2012, Oppgave 6c

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la \mathbf{n} være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Flatene $z = 4x^2 + 4y^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C . Vi ønsker å beregne fluxen ut av det **røde** området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med-klokken* og ikke mot som vanlig.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta) &= (\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \\ \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t)^2 + (\sin t)^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 1 \end{aligned}$$

Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$. La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la \mathbf{n} være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T . Vektorfeltet F er $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}$. Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Flatene $z = 4x^2 + 4y^2$ og $z = 4$ skjærer hverandre i sirkelen $x^2 + y^2 = 1, z = 4$. Randen til legemet T er altså sirkelen med radius $r = 1$ og $z = 4$, som vi kaller C . Vi ønsker å beregne fluxen ut av det **røde** området fra forrige side. Normalvektoren peker ut av legemet, altså *nedover* og vi må parametrisere randen C *med-klokken* og ikke mot som vanlig.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta) &= (\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \\ \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1 \end{aligned}$$