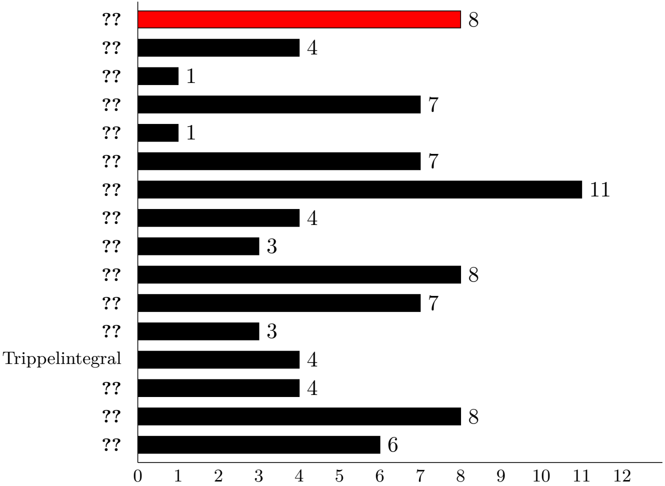
Flerdimhistorien på 90 minutter

s.ntnu.no/MA1103

Øistein Søvik

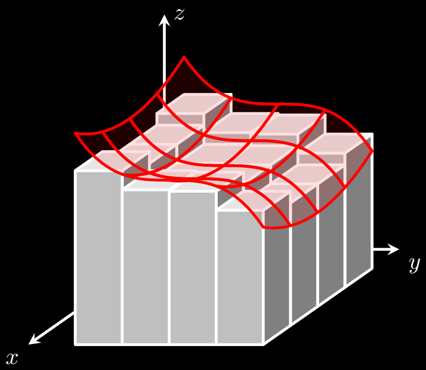
Mai 2018

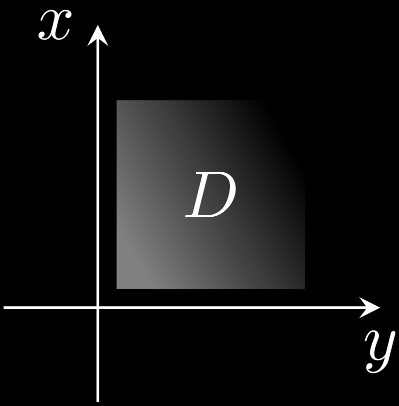


Plan:

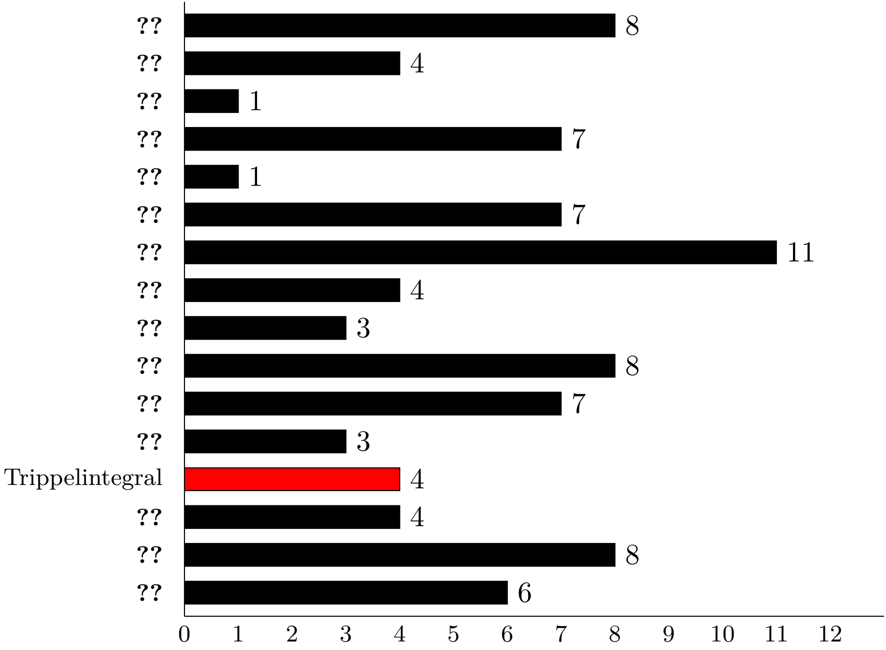
1. Før pausen: Derivasjon 7 temaer
2. Etter pausen: Integrasjon 7 temaer
3. Hvert tema har inneholder introduksjon/intuisjon, oppgaveløsning.

Integrasjon





$$\iint_D \int_0^{f(x,y)} 1 \, dz \, d(x,y) \qquad = \qquad \iint_D f(x,y) \, d(x,y)$$

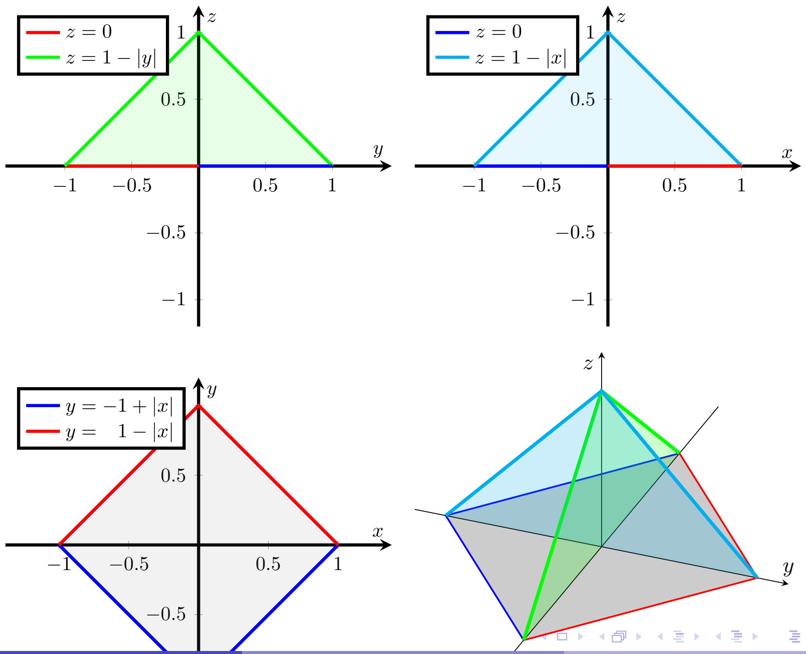

??
??
??
??
??
??
??
??
??
??
??
??
Trippelintegral
??
??
??
8
4
1
7
1
7
11
4
3
8
7
3
4
4
8
6
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Trippelintegral

1. Tegn integrasjonsområdet i xy, xz og yz-planet
2. Bestem grensene
3. Gjør forenklinger med hensyn på symmetri
4. Beregn trippelintegralet og bytt grenser om nødvendig

Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^2$.

Viser området $0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|$



Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy\,\mathrm{d}V = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$M = \iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \iiint_R z^n\,\mathrm{d}V$$

Bestem volumet til $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x,y,z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy\,\mathrm{d}V = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_R z^n\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{x=?}^{x=?} \int_{y=f(x)}^{y=g(x)} \int_{z=u(x,y)}^{z=v(x,y)} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Bestem volumet til $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x,y,z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy\,\mathrm{d}V = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$\begin{aligned} M &= \iiint_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_R z^n\,\mathrm{d}V \\ &= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-1+|x|}^{y=1-|x|} \int_{z=0}^{z=1-|x|-|y|} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Bestem volumet til $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x, y, z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy\,\mathrm{d}V = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \iiint_R z^n\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-1+|x|}^{y=1-|x|} \int_{z=0}^{z=1-|x|-|y|} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Bestem volumet til $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|\}$ når massetettheten er gitt som $f(x,y,z) = xy + z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Siden $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ når f er en odde funksjon, og x er odde så er $\iiint_R xy\,\mathrm{d}V = 0$. Da området vi integrerer over er symmetrisk. Volumet til den blå og røde trekanten er like store, men med motsatt fortegn.

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_R z^n\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-1+|x|}^{y=1-|x|} \int_{z=0}^{z=1-|x|-|y|} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z^n\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 4 \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{(n+1)(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$