PRØVEEKSAMEN

Eksamen i:	MAT-0001 – Brukerkurs i matematikk
Dato:	18. – 25. november 2019
Klokkeslett:	09:00 – 13:00
Sted:	Administrasjonsbygget, B154
Tillatte hjelpemidler:	– Alle trykte og skrevne – Kalkulator
Type innføringsark (rute/linje):	
Antall sider inkl. forside:	13
Kontaktperson under eksamen:	Per Kristen Jakobsen
Telefon:	33 12 31 23
Mobil:	921 32 132
Vil det bli gått oppklaringsrunde i eksamenslokalet? Svar: JA	
Hvis JA: ca 11	

NB! Det er ikke tillatt å levere inn kladdepapir som del av eksamensbesvarelsen. Hvis det likevel leveres inn, vil kladdepapiret bli holdt tilbake og ikke bli sendt til sensur.

1 La følgende benevnte størrelser være gitt

$$a_1 = 4{,}1\,\mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{m}$$
$$a_2 = 6{,}2\,\mathrm{kg}^2\,\mathrm{m}^4$$

a) Hva er måltallet til størrelsen a_1? Hva er benevningen?

Måltallet og benevningen til a_1 er henholdsvis

$$\langle a_1 \rangle = 4{,}1 \quad \text{og} \quad [a_1] = \mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{m}$$

b) La a være den benevnte avledede størrelsen

$$a = a_1^2 a_2^{\frac{1}{3}}$$

Finn måltallet og benevningen til a.

Måltallet og benevningen til a kan henholdsvis skrives som

$$\langle a \rangle = \langle a_1^2 a_2^{\frac{1}{3}} \rangle = \langle a_1 \rangle^2 \langle a_2 \rangle^{\frac{1}{3}} = (\mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{m})^2 (6{,}2)^{\frac{1}{3}} = 30{,}8815\ldots$$
$$\begin{aligned}[a] = [a_1^2 a_2^{\frac{1}{3}}] &= [a_1]^2 [a_2]^{\frac{1}{3}} \\ &= (\mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{m})^2 (\mathrm{kg}^2\,\mathrm{m}^4)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{kg}^{\frac{1}{2}\cdot 2 + 2\cdot\frac{1}{3}} \mathrm{m}^{1\cdot 2 + 4\cdot\frac{1}{3}} = \mathrm{kg}^{\frac{5}{3}}\,\mathrm{m}^{\frac{10}{3}}\end{aligned}$$

Hvor vi benyttet oss av at $\langle a^m b^n \rangle = \langle a \rangle^m \langle b \rangle^n$ og $[a^m b^n] = [a]^m [b]^n$.

c) Vis at

$$b = a_1^2 a_2^{-\frac{1}{2}}$$

er en ubenevnt avledet størrelse.

Må vise at b er uten benevning altså at $[b] = 1$

$$\begin{aligned}[a] = [a_1^2 a_2^{-\frac{1}{2}}] &= [a_1]^2 [a_2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= (\mathrm{kg}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{m})^2 (\mathrm{kg}^2\,\mathrm{m}^4)^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{kg}^{\frac{1}{2}\cdot 2 - 2\cdot\frac{1}{2}} \mathrm{m}^{1\cdot 2 - 4\cdot\frac{1}{2}} = \mathrm{kg}^0\,\mathrm{m}^0 = 1\end{aligned}$$

Altså er b en ubenevnt avledet størrelse, som var det som skulle vises.

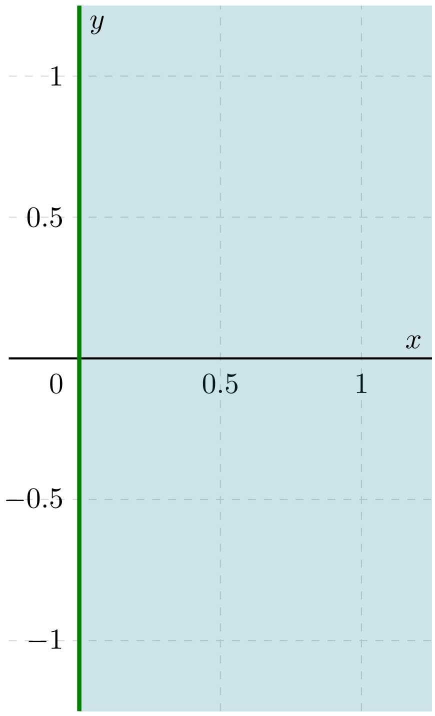
2 Regionen D består av punkter (x, y) som oppfyller ulikhetene

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \\ y - x &\geq 0, \\ y + 2x &\leq 1. \end{aligned}$$

a) Skisser D i ett koordinatsystem.

MERK: Figur 1 er *interaktiv* og for å få det meste ut av løsningsforslaget må du bruke en PDF leser som støtter dette. Eksempelvis funger `Adobe Acrobat Reader` glimrende, men nettlesere og spesielt nettlesere på mobil har problemer med å vise de ulike PDF'lagene riktig.

Trykk på ulikheten øverst på siden for å legge til eller trekke fra restriksjoner. Området som tilfredstiller alle ulikhetene du har aktivert er vist i lyseblått i figur 1. Ulikheten $x \geq 0$ er alltid aktivert og når alle ulikhetene er aktivert ser du området D. Dette er og måten du ville gått frem for hånd, med å legge til en og en ulikhet til du ender opp med området D.



Figur 1

b) La funksjonen f være gitt ved

$$f(x,y) = 2x + 3y$$

Finn minste og største verdi av funksjonen f på D.

Største og minste verdi av f finner vi alltid i hjørnene til figuren. For å bestemme hjørnene må vi finne skjæringspunktet mellom følgende likninger

$$\begin{aligned}(x = 0) &\quad \text{og} \quad (y = 0)\\ (y + 2x = 1) &\quad \text{og} \quad (y = 0)\\ (y + 2x = 1) &\quad \text{og} \quad (y - x = 0)\end{aligned}$$

Fra første likning får vi punktet $(0,0)$. Siden $y = 0$ så er $y + 2x = 1 \Rightarrow 0 + 2x = 1 \Rightarrow x = 1/2$. Altså er neste hjørne $(1/2, 0)$. Tilslutt så løser vi

$$\begin{aligned}2x + y &= 1\\ -x + y &= 0\end{aligned}$$

Dersom vi ganger nederste likning med -1 får vi

$$\begin{aligned}2x + y &= 1\\ x - y &= 0\end{aligned}$$

Ved å legge sammen likningene er $3x = 1$ som betyr at $x = 1/3$ og siden $y - x = 0 \Rightarrow y = x$ har vi og at $y = 1/3$. Det siste hjørnet er altså $(1/3, 1/3)$. Alternativt kan vi bruke $-x + y = 0 \Rightarrow x = y$ til å løse likningensettet direkte

$$2x + y = 1 \Rightarrow 2x + x = 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} = y$$

Som er det samme som vi fikk i sted. En liten tabell gir oss nå

Tabell 1

(x,y)	$f(x,y)$	Maks?	Min?
$(0,1)$	$2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 3$	✓	×
$(\frac{1}{2},0)$	$2\cdot \frac{1}{2} + 3\cdot 0 = 1$	×	✓
$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	$2\cdot \frac{1}{3} + 3\cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$	×	×

Hvor vi ser at henholdsvis største og minste verdi f tar på D er 1 og 3.

3 Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4}. \tag{1}$$

a) Finn alle nullpunktene til f.

Nullpunktene til funksjonen er x-verdiene i definisjonsmengden til x slik at $f(x) = 0$. Hva er definisjonsmengden til f? Jo, alle punktene der f er definert (alle lovlige verdier) som er $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$. Utregning gir

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad (\text{når } x \neq 4)$$

Det finnes mange ulike måter å løse den siste likningen på. Kanskje den enkleste er at vi har $(x - b)(x - a) = x^2 - (a + b)x + ab$ slik at ved å sammenligne koeffisienter leter vi etter to tall slik at $a + b = -3$ og $ab = 2$. Etter litt tenking kommer du for håpentligvis frem til $a = -1$ og $b = -2$ så

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Med løsning $x = 1$ og $x = 2$. Disse kunne vi og ha funnet via ABC-formelen

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3) + 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} \frac{3-1}{2} = 1 \\ \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases}$$

Den siste metoden er rett frem faktorisering

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2)$$

Siden f er definert for $x = 1$ og $x = 2$ så er disse nullpunktene til funksjonen.

Vi har litt ekstra plass da neste deloppgave ikke begynner før neste side så la oss utbrodere litt mer. Alle heltalsløsninger til ett polynom vil være delelig på konstantleddet. I klartekst betyr dette at i vårt tilfellet må $2/a$ bli ett heltall dersom funksjonen bare har heltallsløsninger. Eneste mulighetene er $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$ og det går raskt å sjekke med innsetning hvilke av disse tallene som gir $f(a) = 0$. Om vi hadde funnet en løsning ved innsetning eller tipping kunne vi bestemt den andre via polynomdivisjon

$$\begin{array}{l} \left(\;\; x^2 - 3x + 2\right) : \left(x - 1\right) = x - 2 \\ \underline{-x^2 \;\; + x} \\ \qquad -2x + 2 \\ \qquad \underline{\;\;\; 2x - 2} \\ \qquad\qquad\;\; 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \left(\;\; x^2 - 3x + 2\right) : \left(x - 2\right) = x - 1 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ \qquad\;\; -x + 2 \\ \qquad\;\; \underline{\;\;\; x - 2} \\ \qquad\qquad\;\; 0 \end{array}$$

Men dette blir unødvendig tungvindt. Men nå får nok være nok!

b) Finn eventuelle vertikale asymptoter. Har funksjonen noen horisontale eller skrå asymptoter?

Den vertikale asymptoten oppstår hvor $f \to \pm\infty$ når $x \to a$, fra enten venstre eller høyre side. Slik at $x = 4$ er en vertikal asymptote til $f(x)$. Siden det vil være nyttig senere la oss vise dette mer eksplisitt.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4^-} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(4 - \frac{1}{n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \quad (4 - \frac{1}{n}) + 1 + \frac{6}{(4 - \frac{1}{n}) + 4} = \lim_{n\to\infty} 5 - \frac{1}{n} - 6n = -\infty \\
\lim_{x\to 4^+} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(4 + \frac{1}{n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \quad (4 + \frac{1}{n}) + 1 + \frac{6}{(4 + \frac{1}{n}) + 4} = \lim_{n\to\infty} 5 + \frac{1}{n} + 6n = \infty
\end{aligned}$$

Siden teller har høyere grad enn nevner – og vi ikke kan forkorte brøken vår noe mer – har funksjonen en *skrå* asymptote. Denne kan enklest finnes via polynomdivisjon

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^2 - 3x + 2\big) : \big(x - 4\big) = x + 1 + \dfrac{6}{x - 4} \\
\underline{-\, x^2 + 4x} \\
\qquad\quad x + 2 \\
\qquad \underline{-\, x + 4} \\
\qquad\qquad 6
\end{array}$$

Nå ser vi at når x øker så vil $6/(x - 4)$ bli mindre og mindre. Funksjonen nærmer seg altså $x + 1$ for store x. I klartekst er $x + 1$ en skrå asymptote til $f(x)$.

c) Vis at den deriverte til $f(x)$ er gitt ved

$$f'(x) = \frac{x^2 - 8x + 10}{(x - 4)^2}$$

Ved å bruke kvotientregelen (brøkregelen) kan den deriverte skrives

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4}\Big)' &= \frac{(x^2 - 3x + 2)'(x - 4) - (x^2 - 3x + 2)(x - 4)'}{(x - 4)^2} \\
&= \frac{(2x - 3)(x - 4) - (x^2 - 3x + 2)}{(x - 4)^2} \\
&= \frac{(2x^2 - 11x + 12) - (x^2 - 3x + 2)}{(x - 4)^2} = \frac{x^2 - 8x + 10}{(x - 4)^2}
\end{aligned}$$

som var det vi ønsket å vise.

d) Vis at den dobbeltderiverte til $f(x)$ er gitt ved

$$f''(x) = \frac{12}{(x-4)^3}$$

Via kjerneregelen så er $[(x-4)^2]' = 2(x-4)'(x-4)^{2-1} = 2(x-4)$ slik at

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2-8x+10}{(x-4)^2}\right)' &= \frac{(x^2-8x+10)'(x-4)^2 - (x^2-8x+10)[(x-4)^2]'}{[(x-4)^2]^2} \\
&= \frac{(2x-8)(x-4)^2 - 2(x^2-8x+10)(x-4)}{(x-4)^4} \\
&= \frac{(2x-8)(x-4) - 2(x^2-8x+10)}{(x-4)^3} \\
&= \frac{2(x^2-8x+16) - 2(x^2-8x+10)}{(x-4)^3} \\
&= \frac{12}{(x-4)^3}
\end{aligned}$$

Å se den siste overgangen kunne man sett ved å tenke seg at man stiller det opp som ett klassisk divisjonsstykke

$$\begin{aligned}
&2(x^2 - 8x + 16) \\
-&2(x^2 - 8x + 10) \\
=&2(0 \quad + 0 \quad + \quad 6)
\end{aligned}$$

Siden $2 \cdot 6$ selvsagt er lik 12 får vi samme svar som før.

e) Finn alle lokale ekstremalpunkter og avgjør om de er lokale maksimums- eller minimumspunkter. Har funksjonen globale ekstremalpunkter?

Det enkleste her blir å bestemme nullpunktene til $x^2 - 8x + 10$. Her er vanskelig å finne to heltall slik at $ab = 10$ og $a + b = -8$. Problemet er at de eneste heltall tallparene med produkt 10 er $(-10,-1)$,$(-5,-2)$, $(2,5)$ eller $(1,10)$ og ingen av disse har sum -8. Derimot er $(-5,-2)$ nærme så vi kan anta at løsningen ikke ligger så langt unna. Andregradsformelen gir nå

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 + 4(1)(10)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 4 \pm \sqrt{6}$$

Vi regner så ut funksjonsverdien f i disse to punktene

$$\begin{aligned}
f(4+\sqrt{6}) &= \frac{(4+\sqrt{6})^2 - 3(4+\sqrt{6}) + 2}{(4+\sqrt{6}) - 4} \\
&= \frac{(4^2 + 2 \cdot 4\sqrt{6} + 6) - (12 + 3\sqrt{6}) + 2}{\sqrt{6}} \\
&= \frac{5\sqrt{6} + 12}{\sqrt{6}} = 5 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} + 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{6}} = 5 + 2\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Helt tilsvarende kan en vise at $f(4-\sqrt{6}) = 5-2\sqrt{6}$. Ett grovt overslag gir $2 = \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$, og dette lar oss bestemme ca hvor røttene ligger

$$\begin{aligned} 2 = 4-2 = 4-\sqrt{4} > 4-\sqrt{6} > 4-\sqrt{9} = 4-3 = 1 \\ 6 = 4+2 = 4+\sqrt{4} > 4+\sqrt{6} > 4+\sqrt{9} = 4+3 = 7 \end{aligned}$$

Altså har vi at $4-\sqrt{6} \in (1,2)$ og $4+\sqrt{6} \in (6,7)$ som er ett godt overslag. Fordi vi kan la oss gjøre en hårfin forbedring. For små verdier av x så har vi $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$ ($x \ll 1$). Ved å skrive om $3^2 - 3 = 6$ kan vi estimere $\sqrt{6}$

$$\sqrt{6} = \sqrt{9-3} = \sqrt{9(1-\frac{3}{9})} = 3\sqrt{1-\frac{1}{3}} \overset{*}{\approx} 3\Big(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Big) = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Hvor vi brukte at $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ i overgangen markert med $*$. Med å bruke denne forbedrede verdien så er

$$\begin{aligned} 4-\sqrt{6} &\approx 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \\ 4+\sqrt{6} &\approx 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5 \end{aligned}$$

Slik at røttene ligger omtrentlig dønn i midten av intervallene $(1,2)$ og $(6,7)$ som vi opprinnelig fant ut inneholdt ekstremalpunktene. For å drøfte om dette er minimum eller maksiumspunkter bruker vi andrederivertetesten

$$\begin{aligned} f''(4-\sqrt{6}) &= \frac{12}{([4-\sqrt{6}]-4)^3} = \frac{12}{(-\sqrt{6}])^3} = -\frac{12}{6^{3/2}} < 0 \\ f''(4+\sqrt{6}) &= \frac{12}{([4+\sqrt{6}]-4)^3} = \frac{12}{(\sqrt{6}])^3} = \frac{12}{6^{3/2}} > 0 \end{aligned}$$

Altså oppnår vi følgende konklusjon

$$\begin{aligned} \text{Toppunkt:} &\quad (4-\sqrt{6},\ 5-2\sqrt{6}) \\ \text{Bunnpunkt:} &\quad (4+\sqrt{6},\ 5+2\sqrt{6}) \end{aligned}$$

La oss avslutningsvis prøve å grovt si hvor stor $f(4 \pm \sqrt{6})$ er.

$$\begin{aligned} f(4+\sqrt{6}) &= 5+2\sqrt{6} \approx 5 + 2\cdot\frac{5}{2} = 10 \\ f(4-\sqrt{6}) &= 5-2\sqrt{6} \approx 5 - 2\cdot\frac{5}{2} = 0 \end{aligned}$$

hvor vi husket at $\sqrt{6} \approx 5/2$. Merk at dette er bare *omtrentlige* verdier. En ganske enkel utregning viser at

$$f(4-\sqrt{6}) = 5-2\sqrt{6} = \sqrt{5^2} - \sqrt{2^2}\sqrt{6} = \sqrt{5^2} - \sqrt{2^2\cdot 6} = \sqrt{25} - \sqrt{24}$$

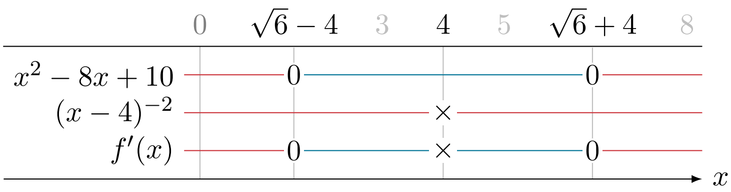
slik at $f(4-\sqrt{6}) = 5 - 2\sqrt{6} > 0$, men fortsatt veldig nærme null. Helt på tampen – og helt unnødvendig – gir det siste uttrykket oss ett ankerpunkt til å oppnå en litt bedre tilnærming. Vi har

$$\begin{aligned}5 - 2\sqrt{6} = \sqrt{25} - \sqrt{24} = \sqrt{25}\Big(1 - \sqrt{\frac{24}{25}}\Big) &= 5\Big(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{25}}\Big) \\ &\overset{*}{\approx} 5(1 - \Big[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25}\Big]) = \frac{1}{10} = 0{,}1\end{aligned}$$

Tilsvarende er $5 + 2\sqrt{6} \approx 5(1 + (1 - \frac{1}{50})) = 9 + \frac{9}{10} = 9{,}9$ med samme fremgangsmåte.

f) Finn alle intervaller hvor funksjonen er strengt monoton og avgjør om den vokster eller avtar i hvert av intervallene.

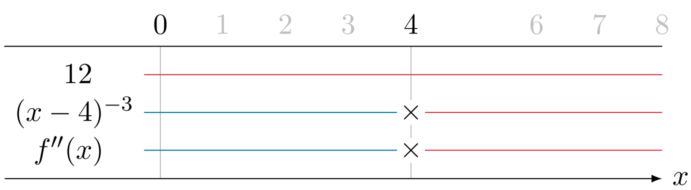
Ett enkelt fortegnsskjema ser for eksemepel slik ut



Hvor vi ser at funksjonen stiger frem til toppunktet i $x = \sqrt{6} - 4$ før det synker igjen frem til bunnpunktet i $x = \sqrt{6} + 4$, for deretter å stige igjen. Altså er funksjonen monotont voksende for $x \in (-\infty, \sqrt{6} - 4] \cup [\sqrt{6} + 4, \infty)$ og monotont synkende for $x \in [\sqrt{6} - 4) \cup (4, \sqrt{6} + 4]$.

g) Avgjør hvor funksjonen er konveks og hvor den er konkav. Har funksjonen noen vendepunkter?

En enkel fortengslinje for den dobbelderiverte ser for eksempel slik ut



Funksjonen er konk*veks* hvor f'' *vek*ser (vokser) og konk*av* hvor f'' *av*tar. Altså er f konkav for $x < 4$, og konveks for $x > 4$. Med voksennotasjon

$$\begin{aligned}\text{Konveks:}\quad & x \in \mathbb{R}_{<4} = (-\infty, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\} \\ \text{Konkav:}\quad & x \in \mathbb{R}_{>4} = \quad (4, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}\end{aligned}$$

h) Skisser grafen til f.

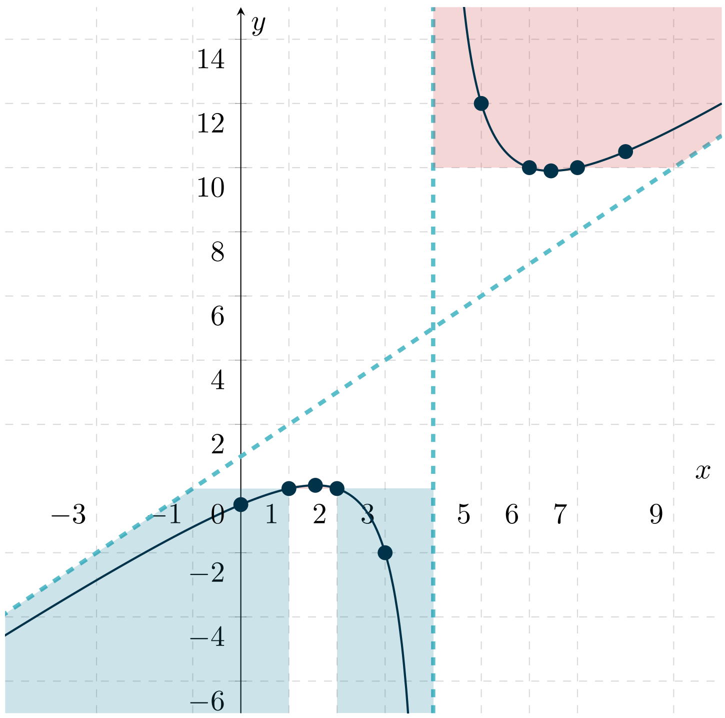
La oss oppsumere det vi vet i en tabell. Videre lar jeg x_* og x^* henholdsvis betegne bunnpunktet og toppunktet til funksjonen.

Tabell 2

x	0	1	x^*	2	3	4^+	4^-	5	6	x_*	7	8
$f(x)$	-0.5	0	0,1	0	-2	∞	$-\infty$	12	10	9.9	10	10.5

For å tegne figuren under gjorde vi følgende

1. Vi tegnet in asymptotene til funksjonen.
2. Vi markerte med blått og rødt hvor funksjonen henholdsvis skal være negativ og positiv
3. Vi tegnet inn punktene vi fant fra tabellen.
4. Tilslutt tegnet vi inn en kurve som går igjennom alle punktene vi tegnet, holder seg innenfor de blå og røde områdene, og ikke minst nærmer seg asymptotene sine.



Figur 2

4 La V_m, α og C være konstanter og la følgende ligning som forbinder t og V være gitt

$$\alpha t + 3\left(V_m - V\right)^{\frac{1}{3}} = C. \tag{2}$$

a) Bruk implisitt derivasjon til å vise at enhver funksjon $V = V(t)$ som løser likning (2) er en løsning til differensialligningen

$$V'(t) = \alpha\left(V_m - V\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

Siden $(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}$ så får vi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha t + 3\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V_m - V\right)^{\frac{1}{3}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C\\ \alpha - 3\cdot\frac{V'}{3}\left(V_m - V\right)^{\frac{1}{3}-1} &= 0\end{aligned}$$

når vi brukte kjerneregelen. Siden $(V_m - V)' = -V$ da V_m er konstant. Ved å løse likningen med hensyn på V' får vi

$$V'(t) = \frac{\alpha}{\left(V_m - V\right)^{-\frac{2}{3}}} = \alpha\left(V_m - V\right)^{\frac{2}{3}}$$

Når vi skyller ned på toalettet, vil vanntanken på vannklosettet fylles opp automatisk. La oss måle tiden i minutter og la $t = 0$ svare til tidspunktet da vi skylte ned. Dersom $V(t)$ er volumet av vannet i vanntanken t minutter etter vi skylte ned, postulerer vi at en matematisk modell for fyllingen av vanntanken er gitt ved differensialligningen (3). I denne modellen er nå V_m er volumet av vann i vanntanken når den er full, og $\alpha > 0$ er en parameter som avhenger hvordan produsenten av toalettet har valgt å styre vanntilstrømningen til vanntanken.

b) La oss anta at vanntanken er tom ved $t = 0$. Bruk dette til å bestemme konstanten C og vis at $V(t)$ for denne verdien av C kan skrives som

$$V(t) = V_m - \left(V_m^{1/3} - \frac{\alpha}{3}t\right)^3.$$

Ved å sette inn $t = 0$ i likning (3) får vi

$$C = \alpha \cdot 0 + 3\,(V_m - V(0))^{\frac{1}{3}}$$

Siden vanntanken er tom ved $t = 0$ betyr det at $V(0) = 0$

$$C = 3\,(V_m - 0)^{\frac{1}{3}} = 3V_m^{1/3}$$

Nå som vi har bestemt verdien til C kan vi løse likning (3) med tanke på V

$$\begin{aligned}
\alpha t + 3\big(V_m - V\big)^{\frac{1}{3}} &= 3V_m^{1/3} \\
\big(V_m - V\big)^{\frac{1}{3}} &= V_m^{1/3} - \frac{\alpha}{3}t \\
V_m - V &= \left(V_m^{1/3} - \frac{\alpha}{3}t\right)^3
\end{aligned}$$

Å løse den siste likningen med hensyn på V gir

$$V(t) = V_m - \left(V_m^{1/3} - \frac{\alpha}{3}t\right)^3,$$

som var det vi ønsket å vise.

c) Vis at tanken er full når

$$t = \frac{3V_m^{1/3}}{\alpha}.$$

Det er flere måter å betrakte denne oppgaven på. At tanken er full kan betrakes som at vannivået har stabilisert seg – det renner ikke mer vann inn – altså at *endringen* i vannivået er null. En annen måte i si det siste på er at

$$V'(t) = 0 \Rightarrow \alpha(V_m - V)^{\frac{2}{3}} = 0$$

Siden det var oppgitt i oppgaven at $\alpha > 0$ så er eneste mulighet for at $V'(t) = 0$ at $V_m = V = V(t)$. La oss regne ut tiden det tar til tanken er full

$$\begin{aligned}
V(t) &= V_m \\
V_m &= V_m - \left(V_m^{1/3} - \frac{\alpha}{3}t\right)^3 \\
0 &= \left(V_m^{1/3} - \frac{\alpha}{3}t\right)^3
\end{aligned}$$

For at x^3 skal være null *må* $x = 0$. I vårt tilfellet er dette det samme som

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{3}t &= V_m^{1/3} \\
t &= \frac{3V_m^{1/3}}{\alpha}
\end{aligned}$$

som var det som skulle vises.

d) La oss anta at den instantane vanntilstrømningen til vanntanken like etter nedskyllingen, $V'(0)$, er 5.4 liter/minutt og at tankens maksimal kapasitet, V_m, er 11 liter. Bruk disse opplysningene til å finne hvor lang tid det tar før vanntanken er full. Gi svaret i minutter og sekunder.

Tiden før tanken er full er gitt i forrige deloppgave. For å bruke denne formelen trenger vi å bestemme konstanten α. Denne kan vi heldigvis bestemme fra likning (3) siden vi vet at $V'(0) = 5.4$ liter/minutt, $V(0) = 0$ og $V_m = 11$ liter.

$$\begin{aligned} V'(0) &= \alpha \left(V_m - V(0)\right)^{\frac{2}{3}} \\ \alpha &= V'(0) \frac{1}{(V_m - 0)^{\frac{2}{3}}} = \frac{V'(0)}{V_m^{2/3}} \end{aligned}$$

Innsettning i formelen fra forrige deloppgave gir

$$t = \frac{3V_m^{1/3}}{\alpha} = \frac{3V_m^{1/3}}{V'(0)/V_m^{2/3}} = \frac{3V_m^{1/3}V_m^{2/3}}{V'(0)} = \frac{3V_m^{1/3+2/3}}{V'(0)} = \frac{3V_m}{V'(0)}$$

Ved å sette inn de konkrete verdiene våre får vi

$$\langle t \rangle \; = \frac{3 \cdot 11}{5{,}4} \approx 6.11\ldots$$

Altså tar det ca 6 minutter og 7 sekunder før vanntanken er full. Her brukte vi at $0{,}11 \cdot 60 = 6{,}66$ for å regne om 0,11 minutter til sekunder. La oss for ordens skyld bekrefte at enheten til t faktisk er i minutter

$$[t] = \frac{[V_m]}{[V']^{-1}} = \frac{\text{liter}}{\text{liter/minutt}} \cdot \frac{\text{minutt}}{\text{minutt}} = \frac{\text{liter}}{\text{liter}} \cdot \text{minutt} = \text{minutt}$$

Som gir en god indikasjon på at vi har regnet riktig.