$$AV_{m-1} = V_m H_{m,m-1} = [v_1, \ldots, v_m] \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \ldots & h_{1,m-2} & h_{1,m-1} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & & h_{2,m-2} & h_{2,m-1} \\ 0 & h_{3,2} & & h_{3,m-2} & h_{3,m-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & h_{m-1,m-2} & h_{m-1,m-1} \\ 0 & & \ldots & 0 & h_{m,m-1} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{2} h_{i,1} v_i, \quad \sum_{i=1}^{3} h_{i,2} v_i, \quad \ldots, \sum_{i=1}^{m-1} h_{i,m-2} v_i, \quad \sum_{i=1}^{m} h_{i,m-1} v_i \right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{2} h_{i,1} v_i, \quad \sum_{i=1}^{3} h_{i,2} v_i, \quad \ldots, \sum_{i=1}^{m-1} h_{i,m-2} v_i, \quad \sum_{i=1}^{m-1} h_{i,m-1} v_i \right] + h_{m,m-1} v_m e_{m-1}^T$$

$$= V_{m-1} H_{m-1,m-1} + h_{m,m-1} v_m e_{m-1}^T$$

$$V_{m-1}^T A V_{m-1} = V_{m-1}^T V_{m-1} H_{m-1,m-1} + h_{m,m-1} V_{m-1}^T v_m e_{m-1}^T$$

$$V_{m-1}^T A V_{m-1} = I H_{m-1,m-1} + 0 = H_{m-1,m-1}$$

$$AV_{m-1} = V_{m-1} H_{m-1,m-1}$$