Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Информатики и систем управления

КАФЕДРА Теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа № 5

«Метод наискорейшего спуска поиска минимума функции многих переменных»

по курсу «Численные методы»

Выполнил:

студент группы ИУ9-61Б

Окутин Денис

Проверила:

Домрачева А. Б.

Москва, 2024

1. Цель

Целью данной работы является изучение метода наискорейшего спуска для поиска минимума функции многих переменных и сравнение полученного результата со значением минимума функции, найденным аналитически.

Постановка задачи

Дано: функция многих переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и точка X^0;

Задание:

- Найти минимум функции двух переменных с точностью $\varepsilon = 0.001$, начиная итерации из точки X^0;
- Найти минимум аналитичности;
- Сравнить полученные результаты.

Индивидуальный вариант:

$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2\sin((x_1 - x_2)/2) + x_2,\ X^0 = (0,0).$

2. Основные теоретические сведения

Метод наискорейшего спуска является итерационным. Пусть для заданной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на -том шаге имеется некоторое приближение к минимуму $X^k = \left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)$.

Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi_k(t)$:

$$\varphi_k(t) = f\left(X^k - t * grad\, f(X^k)\right),$$

где вектор $grad\, f(X^k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X^k), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X^k)\right)$ – градиент функции f в точке X^k.

Функция $\varphi_k(t)$ представляет собой ограничение функции f на прямую градиентного спуска, проходящую через точку -го приближения X^k.

Для следующего приближения к точке минимума полагаем

$$X^{k+1} = X^k - t^* * grad\, f(X^k),$$

где точка t^*– это минимум функции $\varphi_k(t)$.

Процесс поиска минимума продолжается до тех пор, пока $\left\| grad\ f(X^k) \right\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(X^k) \right|$ не станет меньше допустимой погрешности ε.

В двумерном случае итерация имеет следующий вид:

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = \left(x_k - t^* \frac{\partial f}{\partial x}, y_k - t^* \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

где $t^* = -\frac{\varphi_k'(0)}{\varphi_k''(0)}$;

$$\varphi_k'(0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,$$

$$\varphi_k''(0) = \frac{\partial f^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,$$

где все производные берутся в точке (x_k, y_k).

3. Реализация

Листинг 1. Метод наискорейшего спуска поиска минимума функции многих переменных

```
import math

eps = 0.001


def f(x, y):
    return (2 * x ** 2) + (3 * y ** 2) - 2 * math.sin((x - y) / 2) + y


def analytical_min():
    return 0.24003045, -0.326686970012716


def f_x(x, y):
    return 4 * x - math.cos(x / 2 - y / 2)


def f_y(x, y):
    return 6 * y - math.cos(x / 2 - y / 2) + 1


def f_x_x(x, y):
    return math.sin(x / 2 - y / 2) / 2 + 4


def f_x_y(x, y):
    return math.sin(x / 2 - y / 2) / 2
```

```
def f_y_y(x, y):
    return math.sin(x / 2 - y / 2) / 2 + 6


k = 0
xk, yk = 0.0, 0.0
while max(abs(f_x(xk, yk)), abs(f_y(xk, yk))) >= eps:
    phi1 = - (f_x(xk, yk)) ** 2 - (f_y(xk, yk)) ** 2
    phi2 = (f_x_x(xk, yk) * (f_x(xk, yk)) ** 2 + 2 * f_x_y(xk, yk) * f_x(xk, yk) *
f_y(xk, yk) + f_y_y(xk, yk) * (
        f_y(xk, yk)) ** 2)
    t_star = - phi1 / phi2
    xk = xk - t_star * f_x(xk, yk)
    yk = yk - t_star * f_y(xk, yk)

print(f'methods min {xk, yk}')
print(f'analytical min: {analytical_min()}')
print(f'difference: {math.fabs(xk - analytical_min()[0]), math.fabs(yk -
analytical_min()[1])}')
```

4. Результаты

```
methods min (0.2481026227936635, -0.0012976444795267975)
analytical min: (0.24003045, -0.326686970012716)
difference: (0.008072172793663485, 0.3253893255331892)
```

5. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы был изучен и реализован метод наискорейшего спуска, получено приближенное значение минимума функции двух переменных и был найден ее минимум аналитичности.