Работа с показателем степени

Начнём с определения «основания» числа a. Это число должно быть положительным, и будем считать, что $a > 1$ для упрощения построения графиков.

Вспомним для начала, что мы знаем о показатеях степени? Для натуоальных чисел степень числа можно определить так:

$$a^1 = a;\ a^2 = a \cdot a;\ \ldots$$

В общем случае,

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$$

Из этих свойств мы можем вывести

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$$

и легко определить показательную функцию для любого натурального n. Для целых отрицательных мы видим из вышестоящих свойств, что $a^m a^{-m} = a^{m-m} = 1 \Rightarrow a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$.

Однако мы хотим определить a^x для любого действительного x, не только для целых. Начнём с определения его для рациональных x:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \text{ (где } p \text{ и } q \text{ натуральные)}$$

Поскольку $a^1 = a^{1/2+1/2} = a^{1/2}a^{1/2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$, это определение кажется вполне обоснованным.

Нам осталось только расширить это определение для иррациональных x. Для этого будем «заполнять» промежутки между рациональными числами, чтобы функция получилась непрерывной. Это именно то, что делает ваш калькулятор, когда вы просите его посчитать значение $2^{\sqrt{2}}$ или 3^π, вы не получите точного ответа, вместо этого устройство выдаст вам рациональное число (в виде десятичной дроби), близкое к точному значению.

Немного погодя, мы нарисуем график этой функции, и узнаем, как показательная функция устроена