

## $a^x$ и определение производной

Наша задача вычислить производную  $\frac{d}{dx}a^x$ .

Для начала запишем производную по определению:

$$\frac{d}{dx}a^x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

Пользуясь правилом  $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$ , чтобы вынести  $a^x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Поскольку мы, считая предел, полагаем, что  $a$  и  $x$  фиксированы, в то время как  $\Delta x$  у нас изменяется, мы можем вынести  $a^x$  за знак предела:

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Мы неплохо начали. Посмотрим, что у нас есть. Мы видим, что наша производная  $\frac{d}{dx}a^x$  — это  $a^x$ , умноженная на некоторый множитель, значение которого мы пока не знаем. Обозначим его как  $M(a)$ .

$$M(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

То есть, пользуясь определением, можем переписать производную как

$$\frac{d}{dx}a^x = M(a)a^x$$