1 Теорема Лагранжа о среднем значении: следствия

Первой областью, к которой мы применим ТСЗ, будут графики, но, как мы увидим позже, эта теорема играет важную роль в анализе.

- Если $f' > 0$, то f – возрастающая.
- Если $f' < 0$, то f – убывающая.
- Если $f' = 0$, то f – постоянная.

Мы сказали, что первые два утверждения верны, но не доказали. Теперь мы можем доказать их с помощью ТСЗ.

Доказательство: Теорема о среднем значении говорит нам, что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Для некоторого c, лежащего между a и b. В данном доказательстве мы примем такие b и a, что $b > a$. Мы напишем уравнение ТСЗ "в обратном направлении", так как мы хотим использовать производную f' для получения информации о f.

Мы проведем некоторые действия над уравнением:

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= f'(c)(b - a) \\ f(b) &= f(a) + f'(c)(b - a) \end{aligned}$$

Эта новая форма ТСЗ дает нам возможность проверить три упомянутых утверждения.

Поскольку $a < b$, $b - a > 0$, то знак выражения $f'(c)(b - a)$ полностью зависит от знака выражения $f'(c)(b - a)$.

- Если $f'(\mathrm{c}) > 0$, то $f(b) > f(a)$.
- Если $f'(\mathrm{c}) < 0$, то $f(b) < f(a)$.
- Если $f'(\mathrm{c}) = 0$, то $f(b) = f(a)$.

Эти утверждения могут показаться очевидными, однако это не так. Определение производной описано в терминах бесконечно малых. Это не совсем верное определение, так как эти бесконечно малые не имеют ничего общего с поведением функции в больших масштабах. Раньше мы утверждали, что отношение разностей приблизительно равно производной. Сейчас мы говорим, что оно точно равно производной (Несмотря на это мы не знаем, в какой момент следует взять производную.)