Наклон касательной к a^x

Мы определили функцию $M(a)$ как

$$M(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Исходя из этого, мы можем сказать, что $\frac{d}{dx} a^x = M(a) a^x$. Чтобы понять, что из себя представляет производная a^x, нужно понимать, что из себя представляет $M(a)$; далее будем рассматривать $M(a)$ двумя разными способами.

Во-первых, подставим $x = 0$ в определение производной

$$\frac{d}{dx} a^x \bigg|_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} \bigg|_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{0+\Delta x} - a^0}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = M(a)$$

(другими словами, $\frac{d}{dx} a^x \Big|_{x=0} = M(a) a^0 = M(a)$). Итак, $M(a)$ — это значение производной в точке 0.

Напомним, что значение производной в точке говорит нам о наклоне касательной к этому графику в этой точке. То есть $M(a)$ — это угловой коэффициент касательной в точке 0 для графика функции $y = a^x$.

Заметим, что форма графика функции $y = a^x$ зависит от выбора a, значит для разных a мы будем получать разные касательные, а значит и разные $M(a)$.

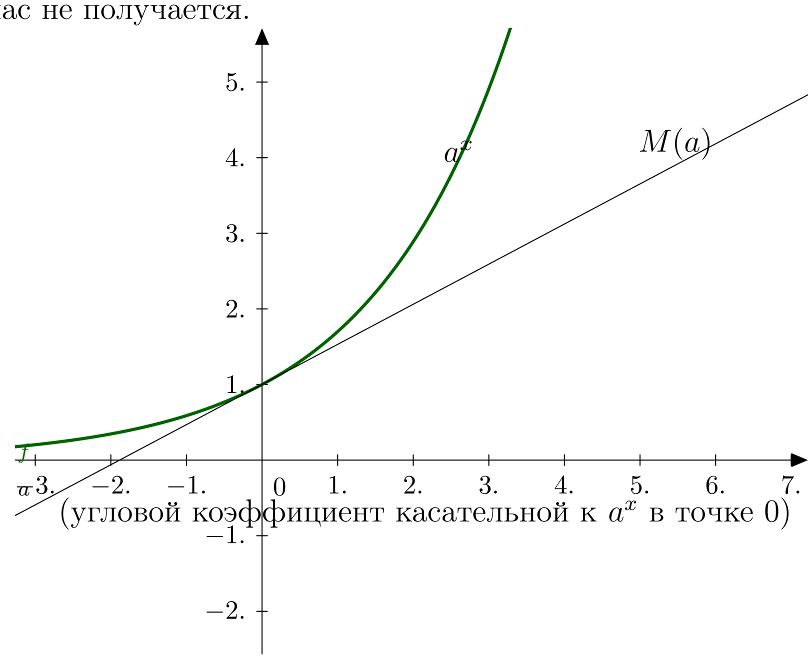
Поскольку $\frac{d}{dx} a^x = M(a) a^x$, единственное, что нам надо знать — это значение углового коэффициента в точке 0, чтобы определить его для любой другой точки графика.

Напомним, что для вычисления производной синуса нам пришлось постараться для вычисления предела $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. Это значение и есть производная синуса в точке 0, как показывает прямая проверка по определению. Для того, чтобы выяснить значение производнойв любой точке, нам нужно было вычислить её значение в нуле.

Формула для $a^{x+\Delta x}$ проще, чем таковая для $\sin(x + \Delta x)$, так что первая часть вычислений производной была проще. Однако вычислить предел

$$M(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

у нас не получается.



(угловой коэффициент касательной к a^x в точке 0)

Для нахождения предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ мы могли использовать свойства радианной меры угла и единичную окружность, но тут хороших методов нахождения точного значения углового коэффициента касательной для a^x в точке $x=0$ у нас нет