Fiche 1 - SIGNE DE $ax + b$ SUR $\mathbb{R}$

Exemple 1 :

$\boldsymbol{A = 5\,x\ +\ 15}$

Racine de $5x + 15$:

$$5x + 15 = 0 \Leftrightarrow 5x = -15 \Leftrightarrow x = \frac{-15}{5} = -3$$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$5\,x\ +\ 15$		$-$	0	$+$	

car $a = 5 > 0$

$\boldsymbol{B = -4\,x\ +\ 8}$

Racine de $-4x + 8$:

$$-4x + 8 = 0 \Leftrightarrow -4x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{-8}{-4} = 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x + 8$		$+$	0	$-$	

car $a = -4 < 0$

$\boldsymbol{C = -10\,x}$

Racine de $-10x$:

$$-10x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{-10} = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-10x$		$+$	0	$-$	

car $a = -10 < 0$

Exemple 2 :

$\boldsymbol{A = (\ 11x - 33)(5 - 10x)}$

Racine de $11x - 33$:

$$11x - 33 = 0 \Leftrightarrow 11x = 33 \Leftrightarrow x = \frac{33}{11} = 3$$

Racine de $5 - 10x$:

$$5 - 10x = 0 \Leftrightarrow -10x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$$

car $a = 11 > 0$

car $a' = -10 < 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$11x - 33$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$5 - 10x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
A		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boldsymbol{B = \dfrac{x + 8}{3x - 12}}$

<u>Racine de $x + 8$</u> :

$x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -8$

<u>Racine de $3x - 12$</u> :

$3x - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} = 4$

car $a = 1 > 0$

car $a' = 3 > 0$

x	$-\infty$		-8		4		$+\infty$
$x + 8$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x - 12$		$-$	|	$-$	0	$+$	
B		$+$	0	$-$	||	$+$	

Attention, 4 est une valeur interdite de l'expression B

(le dénominateur ne peut pas prendre la valeur 0)

<u>Exemple 1</u> :

$$\boldsymbol{P(x) = -2x^2 + 6x + 20}$$

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-2) \times 20 = 36 + 160 = 196 > 0$. Donc $P(x)$ admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-6-\sqrt{196}}{2\times(-2)} = \frac{-6-14}{-4} = 5$ et $x_2 = \frac{-6+\sqrt{196}}{2\times(-2)} = \frac{-6+14}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$ car $a = -2 < 0$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

<u>Factorisation</u> : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -2(x + 2)(x - 5)$

$$\boldsymbol{Q(x) = x^2 + x + 1}$$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Donc $Q(x)$ n'admet aucune racine réelle.

Alors $Q(x)$ est du signe de $a = 1$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	

<u>Pas de factorisation</u> de $Q(x)$ sur $\mathbb{R}$

<u>Exemple 2</u> :

$R(x) = x^4 - 3x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$

<u>Effectuons un changement de variable et posons $\boldsymbol{X = x^2}$</u>

<u>Alors</u> $R(x) = X^2 - 3X + 5$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$.

Donc $R(x)$ n'admet aucune racine réelle et $R(x)$ est du signe de $a = 3 > 0$.

Donc $R(x) > 0$ pour tout x réel.

Fiche 3 - FONCTION DERIVEE ; EQUATION DE TANGENTE

Exemple 1 :

$\boldsymbol{f(x) = 10x^8 + 5x^2 + 6x - 3}$

Donc $f'(x) = 10 \times 8x^7 + 5 \times 2x + 6 \times 1 - 0 = 80x^7 + 10x + 6$

$\boldsymbol{g(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}}$

On reconnaît $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x - 2 \\ v(x) = x^2 + 5 \end{cases}$ Donc $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

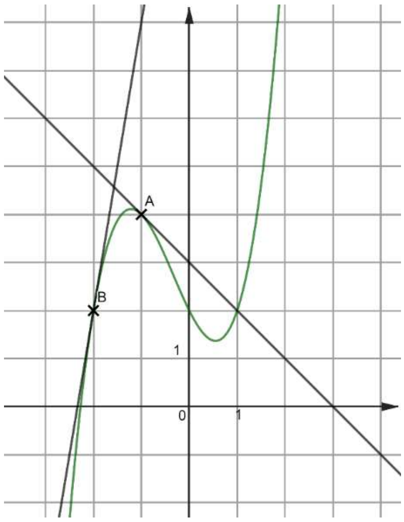
Donc : $g'(x) = \frac{1 \times (x^2+5) - 2x \times (x-2)}{(x^2+5)^2} = \frac{x^2+5-2x^2+4x}{(x^2+5)^2} = \frac{-x^2+4x+5}{(x^2+5)^2}$

$\boldsymbol{h(x) = (x^2 + 4)\sqrt{x}}$

On reconnaît $u(x) \times v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + 4 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$ Donc $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

Rappel : $(uv)' = u'v + v'u$

Donc : $h'(x) = 2x \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x^2 + 4) = \frac{2x \times \sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + x^2 + 4}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 + x^2 + 4}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2+4}{2\sqrt{x}}$



Exemple 2 :

1) $f(-2) = 2$ et $f(-1) = 4$
2) Le nombre dérivé en -2 est $f'(-2)$.
   $f'(-2) = coefficient\ directeur\ de\ la\ tangente\ au\ point\ de\ C_f\ d'abscisse - 2$
   Donc $f'(-2) = 6$ (méthode en escalier)
   Le nombre dérivé en -1 est $f'(-1)$.
   $f'(-1) = coefficient\ directeur\ de\ la\ tangente\ au\ point\ de\ C_f\ d'abscisse - 1$
   Donc $f'(-1) = -1$ (méthode en escalier)
3) Il y a 2 tangentes horizontales à la courbe représentative de f.

Exemple 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$

L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est $\boxed{y = f'(1)(x-1) + f(1)}$

Calculons d'abord la dérivée de f :

f est dérivable sur sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = 6x + 2$

Alors : $f'(1) = 6 \times 1 + 2 = 8$ Et $f(1) = 3 \times 1^2 + 2 \times 1 + 5 = 10$

Donc l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est $y = 8(x-1) + 10$

Soit : $y = 8x - 8 + 10$

Soit $y = 8x + 2$

Fiche 4 - ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

<u>Exemple :</u> La fonction f est définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 2{,}5$$

1) f est dérivable sur $[-2\ ;\ 3]$.
Soit $x \in [-2\ ;\ 3]$. $f'(x) = 3x^2 - 1{,}5 \times 2x - 6 \times 1 + 0 = 3x^2 - 3x - 6$
$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$
Cherchons son signe en calculant son discriminant :

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 81 > 0$. Donc $f'(x)$ admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{81}}{2\times 3} = \frac{-6}{6} = -1$ et $x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{81}}{2\times 3} = \frac{12}{6} = 2$

x	-2		-1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$0{,}5$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-7{,}5$	$\nearrow$	-2

<u>Images par f :</u>

$f(-2) = (-2)^3 - 1{,}5 \times (-2)^2 - 6 \times (-2) + 2{,}5 = 0{,}5$

$f(-1) = (-1)^3 - 1{,}5 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 2{,}5 = 6$

$f(2) = 2^3 - 1{,}5 \times 2^2 - 6 \times 2 + 2{,}5 = -7{,}5$

$f(3) = 3^3 - 1{,}5 \times 3^2 - 6 \times 3 + 2{,}5 = -2$

Fiche 5 – LA FONCTION EXPONENTIELLE

Exemple 1 : Développer A et B :

$\boldsymbol{A = (e^x - 3)(e^x + 1)}$ $= e^x \times e^x + e^x \times 1 - 3 \times e^x - 3 \times 1$ $= e^{2x} + e^x - 3e^x - 3$ $= e^{2x} - 2e^x - 3$	$\boldsymbol{B = (e^x - 2)(e^{-x} + 2)}$ $= e^x \times e^{-x} + e^x \times 2 - 2 \times e^{-x} - 2 \times 2$ $= e^0 + 2e^x - 2e^{-x} - 4$ $= 1 + 2e^x - 2e^{-x} - 4$ $= 2e^x - 2e^{-x} - 3$

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $e^{2x+6} = e^{-x+4} \Leftrightarrow 2x + 6 = -x + 4 \Leftrightarrow 2x + x = 4 - 6 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ $\quad S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

b) $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ $\quad S =]0; +\infty[$

c) $e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow e^{-x} > e^0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ $\quad S =]-\infty; 0[$

Exemple 3 : $f(x) = (x^2 + 3)e^x$

Etudions les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Calcul de la dérivée $f'(x)$:
f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On reconnaît $u(x) \times v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + 3 \\ v(x) = e^x \end{cases}$ Donc $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

Rappel : $(uv)' = u'v + v'u$

Donc : $f'(x) = 2x \times e^x + e^x \times (x^2 + 3) = e^x(2x + x^2 + 3) = e^x(x^2 + 2x + 3)$

Signe de la dérivée $f'(x)$:
$f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x + 3$, car $e^x > 0$

$x^2 + 2x + 3$ est un trinôme du second degré :

Calculons son discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8 < 0$.

Donc ce trinôme n'admet aucune racine réelle.

Donc le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

car $a = 1 > 0$

Déduction du tableau de variation de f:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variation de f	$\nearrow$

Exemple 4 : Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} + 2\,e^{x} - 4x$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2e^{2x} + 2\,e^{x} - 4$ car $(e^{ax})' = ae^{ax}$

   Or $2(e^{x} - 1)(\,e^{x} + 2) = 2(e^{x} \times e^{x} + e^{x} \times 2 - 1 \times e^{x} - 1 \times 2)$

   $$= 2(e^{2x} + e^{x} - 2)$$

   $$= 2e^{2x} + 2e^{x} - 4$$

   $$= f'(x)$$

2) Déterminons alors le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, étudions les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Signe de la dérivée $f'(x)$:

$$f'(x) = \; 2(e^{x} - 1)(\,e^{x} + 2)$$

$f\,'\,(x)$ est du signe de $e^{x} - 1$ car $e^{x} + 2 > 0$ et $2 > 0$

Résolvons l'inéquation $e^{x} - 1 > 0$:
$e^{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 1 \Leftrightarrow e^{x} > e^{0} \Leftrightarrow x > 0$

Déduction du tableau de variation de f:

D'après la résolution de l'inéquation précédente

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $e^{x} - 1$		$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Image par f :

$$f(0) = e^{2\times 0} + 2\,e^{0} - 4 \times 0 = 1 + 2 \times 1 - 0 = 3$$

Conclusion :

f admet pour minimum 3 sur $\mathbb{R}$

Fiche 6 – MODE DE GENERATION D'UNE SUITE

1) Suite définie par une formule explicite

Exemple 1 : Dans chaque cas, déterminer si possible u_0, u_1, u_{11} :

a) Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\boldsymbol{u_n = 5n^2 - n + 2}$.

$u_0 = 5 \times 0^2 - 0 + 2 = 2$

$u_1 = 5 \times 1^2 - 1 + 2 = 6$

$u_{11} = 5 \times 11^2 - 11 + 2 = 596$

b) Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\boldsymbol{u_n = 3 + \frac{n-1}{n}}$.

u_0 : Impossible car $n \in \mathbb{N}^*$ (donc $n \neq 0$)

$$u_1 = 3 + \frac{1-1}{1} = 3$$

$$u_{11} = 3 + \frac{11-1}{11} = \frac{43}{11}$$

2) Suite définie par une relation de récurrence

Exemple 2 : Dans chaque cas, calculer les trois premiers termes de la suite :

a) Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\boldsymbol{u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = u_n^2 + 2}$

$u_0 = 2$

$u_1 = u_{0+1} = u_0^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$

$u_2 = u_{1+1} = {u_1}^2 + 2 = 6^2 + 2 = 38.$

b) Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\boldsymbol{u_1 = 3 \text{ et } u_{n+1} = 5u_n + 4n + 3.}$

$u_1 = 3$

$u_2 = u_{1+1} = 5u_1 + 4 \times 1 + 3 = 5 \times 3 + 4 + 3 = 22$

$u_3 = u_{2+1} = 5u_2 + 4 \times 2 + 3 = 5 \times 22 + 8 + 3 = 121$

Exemple : Utiliser les formules dans le cas d'une suite arithmétique

1) Soit la suite (u_n) arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 5$.
   a) $u_1 = u_0 + 4 = 5 + 4 = 9$
   $u_2 = u_1 + 4 = 9 + 4 = 13$
   $u_3 = u_2 + 4 = 13 + 4 = 17$
   b) Terme général de u_n en fonction de n.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = u_0 + n \times r = 5 + n \times 4 = 5 + 4n$
   c) $u_{18} = 5 + 4 \times 18 = 77$

   d) Soit S la somme des 14 premiers termes de (u_n).
   $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{13}$ (Attention, il y a 14 termes, mais cette suite a pour premier terme u_0)

   $$= Nombre\ de\ termes\ de\ S \times \frac{Premier\ terme\ de\ S + Dernier\ terme\ de\ S}{2}$$

   $$= 14 \times \frac{u_0 + u_{13}}{2}$$

   Or $u_0 = 5$ et $u_{13} = 5 + 4 \times 13 = 57$

   Donc
   $S = 14 \times \frac{u_0+u_{13}}{2} = 14 \times \frac{5+57}{2} = 434$

2) Soit la suite (v_n) arithmétique de raison -2 et de premier terme $v_1 = 5$.
   a) $v_1 = 5$
   $v_2 = v_1 + (-2) = 5 - 2 = 3$
   $v_3 = v_2 + (-2) = 3 - 2 = 1$
   b) Terme général de v_n en fonction de n.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_n = v_1 + (n-1) \times r = 5 + (n-1) \times (-2) = 5 - 2n + 2 = 7 - 2n$

   c) $v_{100} = 7 - 2 \times 100 = -193$

   d) Soit S la somme des 12 premiers termes de (v_n).
   $S = v_1 + v_2 + \cdots + v_{12}$

   $$= Nombre\ de\ termes\ de\ S \times \frac{Premier\ terme\ de\ S + Dernier\ terme\ de\ S}{2}$$

   $$= 12 \times \frac{v_1 + v_{12}}{2}$$

   Or $v_1 = 5$ et $v_{12} = 7 - 2 \times 12 = -17$

   Donc
   $S = 12 \times \frac{v_1+v_{12}}{2} = 12 \times \frac{5+(-17)}{2} = -72$

Exemple : Utiliser les formules dans le cas d'une suite géométrique

1) Soit la suite (u_n) géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 3$.
   a) $u_1 = u_0 \times 4 = 3 \times 4 = 12$
      $u_2 = u_1 \times 4 = 12 \times 4 = 48$
      $u_3 = u_2 \times 4 = 48 \times 4 = 192$
   b) Terme général de u_n en fonction de n.
      Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = u_0 \times r^n = 3 \times 4^n$
   c) $u_{11} = 3 \times 4^{11} = 12\,582\,912$

   d) Soit S la somme des 12 premiers termes de (u_n).
      $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{11}$ (Attention, il y a 12 termes, mais cette suite a pour premier terme u_0)

      $= \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{Nombre\ de\ termes}}{1-q}$

      $= 3 \times \frac{1-4^{12}}{1-4}$

      $= 3 \times \frac{1-4^{12}}{-3}$

      $= (-1) \times (1 - 4^{12})$

      $= 4^{12} - 1$

   $= 16\,777\,215$

2) Soit la suite (v_n) géométrique de raison 4 et de premier terme $v_1 = 5$.
   a) $v_1 = 5$
      $v_2 = v_1 \times 4 = 5 \times 4 = 20$
      $v_3 = v_2 \times 4 = 20 \times 4 = 80$
   b) Terme général de v_n en fonction de n.
      Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_n = v_1 \times r^{n-1} = 5 \times 4^{n-1}$
   c) $v_{40} = 5 \times 4^{40-1} = 5 \times 4^{39} \approx 1{,}5 \times 10^{24}$

   d) Soit S la somme des 15 premiers termes de (v_n).
      $S = v_1 + v_2 + \cdots + v_{15}$

      $= \text{Premier terme} \times \frac{1-q^{Nombre\ de\ termes}}{1-q}$

      $= 5 \times \frac{1-4^{15}}{1-4}$

      $= 5 \times \frac{1-4^{15}}{-3}$

      $= \frac{-5}{3} \times (1 - 4^{15})$

      $= \frac{5}{3} \times (4^{15} - 1)$

      $= 1\,789\,569\,705$

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par :

$\boldsymbol{u_0 = 2}$ et, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = 3u_n + 8}$

1) $u_1 = u_{0+1} = 3u_0 + 8 = 3 \times 2 + 8 = 14$

   $u_2 = u_{1+1} = 3u_1 + 8 = 3 \times 14 + 8 = 50$

2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

$$u_2 - u_1 = 50 - 14 = 36$$

$$u_1 - u_0 = 14 - 2 = 12$$

Donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

3) La suite (u_n) est-elle géométrique ?

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}$$

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{14}{2} = 7$$

Donc

$$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$$

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

<u>Remarque</u> : Cette suite est arithmético-géométrique.

4) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 4$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3. Préciser son premier terme.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $v_{n+1} = \underbrace{u_{n+1}}_{3u_n+8} + 4$

$$v_{n+1} = 3u_n + 8 + 4$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 3u_n + 12 \\ &= 3(v_n - 4) + 12 \\ &= 3v_n - 12 + 12 \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Or $v_n = u_n + 4$ donc $u_n = v_n - 4$.

Donc $v_{n+1} = 3\,v_n$.

Alors la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$.

Son premier terme est $v_0 = u_0 + 4 = 2 + 4 = 6$

b) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Terme général de la suite (v_n) : $v_n = v_0 \times q^n = 6 \times 3^n$.

Or $v_n = u_n + 4$ donc $u_n = v_n - 4 = 6 \times 3^n - 4$.

c) Déterminer la valeur de $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$. (il y a 101 termes)

Donc : $S = v_0 - 4 + v_1 - 4 + v_2 - 4 + \cdots + v_{100} - 4$

$= v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{100} + (-4) + (-4) + (-4) \ldots + (-4)$

$=$ Premier terme$\times \frac{1-q^{Nombre\ de\ termes}}{1-q} + (-4) \times Nombre\ de\ termes$

$= 6 \times \frac{1-3^{101}}{1-3} + (-4) \times 101$

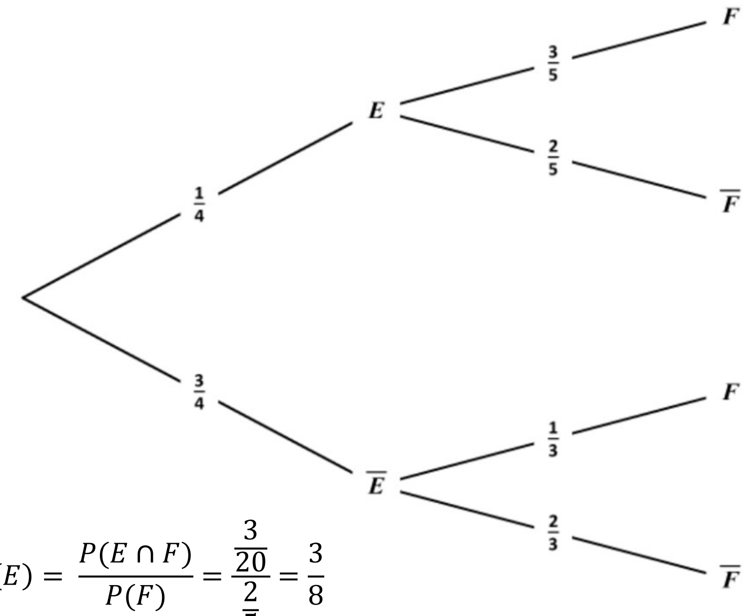
$= 6 \times \frac{1-3^{101}}{-2} + (-4) \times 101$

car (v_n) est géométrique

$= (-3) \times (1 - 3^{101}) - 404$

$= -3 + 3 \times 3^{101} - 404$

$= 3^{102} - 407$



Exemple 1 :

2) D'après la loi des probabilités totales :
$P(F) = P(E \cap F) + P(\bar{E} \cap F)$

$= P(E) \times P_E(F) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(F)$

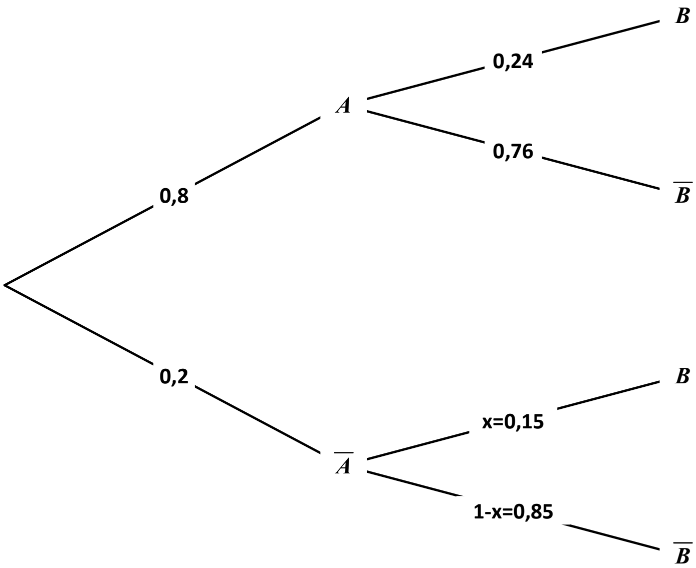
$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{5}$

3) La probabilité de E sachant F est

$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{8}$$

Exemple 2 :



Notons $P_{\bar{A}}(B) = x$.

Or, d'après la loi des probabilités totales :

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$

Soit : $0{,}8 \times 0{,}24 + 0{,}2 \times x = 0{,}222$

$\Leftrightarrow 0{,}2x + 0{,}192 = 0{,}222$

$\Leftrightarrow 0{,}2x = 0{,}222 - 0{,}192 = 0{,}03$

$\Leftrightarrow x = \frac{0{,}03}{0{,}2} = 0{,}15$

Exemple 3 :

A : « la boule tirée porte un nombre pair » B : « la boule tirée porte un multiple de 3 »

1) $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ donc $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
$B = \{3; 6; 9; 12\}$ donc $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
$A \cap B = \{6; 12\}$ donc $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
2) $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$
Donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Alors les événements A et B sont indépendants.

Exemple : Savoir expliciter une variable aléatoire et calculer ses éléments caractéristiques

Un joueur paie 5 € pour lancer un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

La variable aléatoire X représente le gain algébrique (en €) selon la règle suivante :

- Si le joueur obtient 6, il gagne 20€.
- S'il obtient 3, 4 ou 5, il gagne 5€.
- Sinon, il ne gagne rien.

1) Attention, le joueur paie 5 euros qu'il faut donc déduire du gain éventuel

X prend les valeurs $20 - 5 = 15$; $5 - 5 = 0$ et $0 - 5 = -5$.

2) $P(X = 15) = \frac{1}{6}$ car il y a une chance sur 6 d'obtenir le 6.

$P(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ car il y a trois chances sur 6 d'obtenir les faces 3, 4 ou 5.

$P(X = -5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ car il y a deux chances sur 6 d'obtenir les faces 1 ou 2.

Voici le tableau donnant la loi de probabilité de X :

x_i	15	0	-5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

3) $P(X \geq 0) = P(X = 0) + P(X = 15) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
4) $E(X) = 15 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{2} + (-5) \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$: au bout d'un grand nombre de lancers, on pourra espérer gagner en moyenne environ 0,83 €.

Le jeu n'est pas équitable car $E(X) \neq 0$.

5) La variance est : $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 15^2 \times \frac{1}{6} + 0^2 \times \frac{1}{2} + (-5)^2 \times \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1625}{36}$

Donc l'écart-type est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1625}{36}} = \frac{5\sqrt{65}}{6}$