LES BASES MATHEMATIQUES A MAITRISER POUR L'ENTREE EN TG – SPE MATHEMATIQUES

Attention, ce livret n'est pas exhaustif, mais ce sont les bases de ce qui est vraiment indispensable pour entrer sereinement en TG Spé Mathématiques

Evidemment, tout sera revu en classe au fur et à mesure des besoins.

Fiche 1 - SIGNE D'UNE EXPRESSION DU PREMIER DEGRE $ax + b$ SUR $\mathbb{R}$

Méthode :

On cherche d'abord la racine de l'expression, en résolvant l'équation $ax + b = 0$

Puis on utilise la règle suivante :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$a\,x + b$		Signe contraire de a	0	Signe de a après la racine	

Exemple 1 : Compléter le tableau de signes des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$A = 5\,x + 15$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$5\,x + 15$	

$B = -4\,x + 8$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$-4\,x + 8$	

$C = -10\,x$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$-10x$	

Exemple 2 : Compléter les tableaux de signes des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$A = (\,11x - 33)(5 - 10x)$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$11x - 33$	
$5 - 10x$	
A	

$$B = \frac{x + 8}{3x - 12}$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x + 8$	
$3x - 12$	
B	

Fiche 2 - SIGNE ET FACTORISATION D'UNE EXPRESSION DU SECOND DEGRE SUR $\mathbb{R}$

Soit le trinôme du 2nd degré $f(x) = ax^2 + bx + c$

(a, b et c réels et $a \neq 0$), avec $x \in \mathbb{R}$.

Le discriminant de $f(x)$ est le nombre réel $\boxed{\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}}$

	$\boldsymbol{\Delta < 0}$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\boldsymbol{\Delta > 0}$
Racines	Aucune racine réelle	Une racine réelle double $\boldsymbol{x_0 = -\frac{b}{2a}}$	Deux racines réelles distinctes $\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ **et** $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$
Signe du trinôme	Signe de a sur $\mathbb{R}$	Signe de a sur $\mathbb{R}$	Signe de a à l'extérieur des racines
Factorisation	$f(x)$ n'est pas factorisable	$f(x) = a(x - x_0)^2$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

__Exemple 1__ :

Déterminer le signe de $P(x) = -2x^2 + 6x + 20$ et de $Q(x) = x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$, puis en donner une factorisation éventuelle.

__Exemple 2__ : PLUS DIFFICILE

Déterminer le signe de $R(x) = x^4 - 3x^2 + 5$ sur $\mathbb{R}$

__Aide :__ Effectuer un changement de variable en **posant** $\boldsymbol{X = x^2}$

__Des formules utiles – Les identités remarquables__

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

$$\boldsymbol{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Fiche 3 - FONCTION DERIVEE ; EQUATION DE TANGENTE

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Fonction dérivée
$f(x) = k$ (k réel)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

Opérations et dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k ∈ ℝ . Alors :

$$(\boldsymbol{ku})' = \boldsymbol{ku'}$$

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u'} + \boldsymbol{v'}$$

$$(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u'v} + \boldsymbol{v'u}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'v} - \boldsymbol{v'u}}{\boldsymbol{v^2}}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{v}}\right)' = -\frac{\boldsymbol{v'}}{\boldsymbol{v^2}}$$

Exemple 1 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes (dérivabilité admise) :

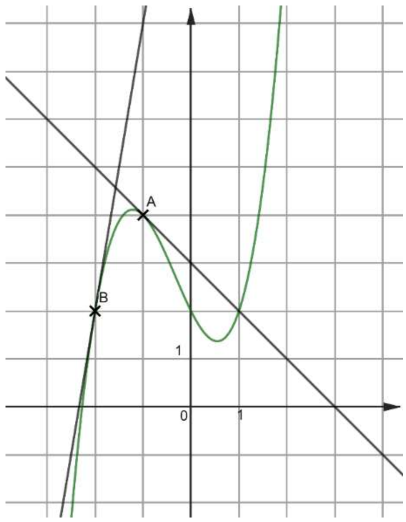
$f(x) = 10x^8 + 5x^2 + 6x - 3$ $\qquad g(x) = \frac{x-2}{x^2+5}$ $\qquad h(x) = (x^2 + 4)\sqrt{x}$

Tangente en un point à une courbe :

L'équation réduite de cette tangente est $\boldsymbol{y = f'(a)\,(x - a) + f(a)}$

Remarque : Si $f'(a) = 0$, la tangente associée est horizontale

Exemple 2 :



On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Les deux droites tracées sont les tangentes à la courbe représentative de f en A et en B.
Par lecture graphique, donner :

1) $f(-2)$ et $f(-1)$
2) le nombre dérivé en -2 et celui en -1.
3) le nombre de tangentes horizontales à la courbe représentative de f.

Exemple 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$.

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Fiche 4 - ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

Méthode :

a) Ensemble de définition D et de dérivabilité (souvent admis dans l'énoncé)

b) On calcule la dérivée f'

c) On étudie le signe de f' sur D. On en déduit les variations de la fonction f; on dresse son tableau de variation sur D :

- **Si, pour tout $x \in D$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur D.**
- **Si, pour tout $x \in D$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur D.**
- **Si, pour tout $x \in D$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur D .**

d) Une étude de fonction permet ensuite d'optimiser la fonction (minimum, maximum)

Exemple :

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 2{,}5$$

1) Déterminer $f'(x)$.
2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$ puis en déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.

Fiche 5 – LA FONCTION EXPONENTIELLE

La fonction exponentielle est la **seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.** On a donc : $\boldsymbol{exp' = exp}$ et $\boldsymbol{exp(0) = 1}$.

Elle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par convention : pour tout réel x, on note $\boldsymbol{exp(x) = e^x}$

Remarque : une valeur approchée du nombre e est $\boldsymbol{e \approx 2,71828}$

Règles de calcul : on retrouve les mêmes que pour les puissances

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$\boldsymbol{e^0 = 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$ $\qquad$ $\boldsymbol{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$

$\boldsymbol{e^1 = e}$ $\qquad$ $\boldsymbol{e^{-y} = \frac{1}{e^y}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx}}$

Exemple 1 : Développer A et B : $A = (e^x - 3)(e^x + 1)$; $B = (e^x - 2)(e^{-x} + 2)$

Equations et inéquations

Pour tout couple de réels $(a\,;\,b)$: $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

$$\boldsymbol{e^a < e^b \Leftrightarrow a < b}$$

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $e^{2x+6} = e^{-x+4}$ $\qquad$ b) $e^x - 1 > 0$ $\qquad$ c) $e^{-x} - 1 > 0$

Exemple 3 : On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 + 3)e^x$$

Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4 : Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} + 2\,e^x - 4x$

1) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ et vérifier que : $f'(x) = 2(e^x - 1)(\,e^x + 2)$.
2) Déterminer alors le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Fiche 6 – SUITES – MODES DE GENERATION

Il s'agit en fait **<u>d'une fonction définie sur $\mathbb{N}$</u>** par $\quad u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$n \longmapsto u(n) = u_n$$

u_n est appelé le **terme de rang n** de cette suite (ou **d'indice n**).

DEUX MODES DE GENERATION D'UNE SUITE :

1) Suite définie par une formule explicite

Chaque terme de la suite est exprimé en fonction du rang n et ne dépend pas des termes précédents.

<u>Exemple 1 :</u> Dans chaque cas, déterminer si possible u_0, u_1, u_{11} :

a) Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n^2 - n + 2$.

b) Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + \frac{n-1}{n}$.

2) Suite définie par une relation de récurrence

Chaque terme de la suite s'obtient à partir du terme précédent.

<u>Exemple 2 :</u> Dans chaque cas, calculer les trois premiers termes de la suite :

a) Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = u_n^2 + 2$$

b) Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = 3 \text{ et } u_{n+1} = 5u_n + 4n + 3.$$

Fiche 7 – SUITES ARITHMETIQUES

Comment passer d'un terme au suivant ?

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours un même nombre appelé raison.

On définit une suite arithmétique grâce à son premier terme et sa raison r.

Formule de récurrence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$

Terme général :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 + n \times r$ si u_0 est le 1er terme

$= u_1 + (n-1) \times r$ si u_1 est le 1er terme

$= u_p + (n-p) \times r$ si u_p est le 1er terme

Sens de variation :

Si $r > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

Si $r < 0$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

Si $r = 0$: la suite (u_n) est constante.

Somme des premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique

(vue un peu différemment en première) :

$$S = \text{Nombre de termes de la somme} \times \frac{\text{1er terme de } S + \text{dernier terme de } S}{2}$$

Exemple : Utiliser les formules dans le cas d'une suite arithmétique

1) Soit la suite (u_n) arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 5$.
   a) Calculer u_1, u_2 , u_3
   b) Donner l'expression du terme général de u_n en fonction de n.
   c) Calculer u_{18}.
   d) Calculer la somme des 14 premiers termes de (u_n).

2) Soit la suite (v_n) arithmétique de raison -2 et de premier terme $v_1 = 5$.
   a) Calculer v_1, v_2 , v_3
   b) Donner l'expression du terme général de v_n en fonction de n.
   c) Calculer v_{100}.
   d) Calculer la somme des 12 premiers termes de (v_n).

Fiche 8 – SUITES GEOMETRIQUES

Comment passer d'un terme au suivant ?

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par un même nombre appelé raison.

On définit une suite géométrique grâce à son premier terme et sa raison q.

Formule de récurrence :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n \times q$

Terme général :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 \times q^n$ si u_0 est le 1er terme

$= u_1 \times q^{n-1}$ si u_1 est le 1er terme

$= u_p \times q^{n-p}$ si u_p est le 1er terme

Sens de variation :

Si $0 < q < 1$: la suite (u_n) est strictement décroissante.

Si $q > 1$: la suite (u_n) est strictement croissante.

Si $q = 1$: la suite (u_n) est constante.

Somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique

(vue un peu différemment en première) :

$$\boldsymbol{S} = \textbf{1er terme de } \boldsymbol{S} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes de } S}}{1 - q}$$

Exemple : Utiliser les formules dans le cas d'une suite géométrique

1) Soit la suite (u_n) géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 3$.
   a) Calculer u_1, u_2 , u_3
   b) Donner l'expression du terme général de u_n en fonction de n.
   c) Calculer u_{11}.
   d) Calculer la somme des 12 premiers termes de (u_n).

2) Soit la suite (v_n) géométrique de raison 4 et de premier terme $v_1 = 5$.
   a) Calculer v_1, v_2 , v_3
   b) Donner l'expression du terme général de v_n en fonction de n.
   c) Calculer v_{40}.
   d) Calculer la somme des 15 premiers termes de (v_n).

Fiche 9 – UNE SUITE ARITHMETICO - GEOMETRIQUE

Une **suite arithmético-géométrique** est une suite définie par la donnée de u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$\boldsymbol{u_{n+1} = au_n + b}$ **(avec $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ réels)**

Point méthode :

Etudier une telle suite peut se faire en utilisant une suite intermédiaire qui est géométrique.

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 8$

1) Calculer u_1 et u_2.
2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ?
3) La suite (u_n) est-elle géométrique ?

Remarque : Cette suite est arithmético-géométrique.

4) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 4$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3. Préciser son premier terme.

   b) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

   c) Déterminer la valeur exacte de $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.

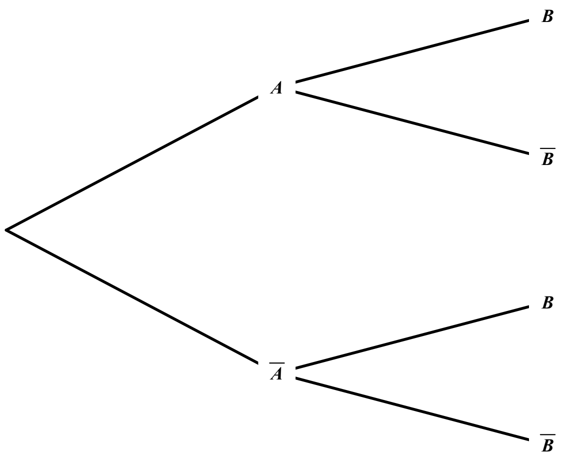
Fiche 10 – PROBABILITES CONDITIONNELLES

Quelques formules

- **La probabilité d'un événement A est telle que :** $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$
- $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$, **où $\overline{A}$ est l'événement contraire de A.**
- $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Arbre de probabilites, probabilités conditionnelles et loi des probabilités totales

Soit A et B deux événements de l'univers Ω.



	Evénement correspondant	Probabilité associée au chemin
	$\boldsymbol{A \cap B}$	$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$
	$\boldsymbol{A \cap \overline{B}}$	$\boldsymbol{P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})}$
	$\boldsymbol{\overline{A} \cap B}$	$\boldsymbol{P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$
	$\boldsymbol{\overline{A} \cap \overline{B}}$	$\boldsymbol{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})}$

Pour les <u>branches issues d'un même nœud</u>, la somme des probabilités des événements est égale à 1.

<u>Probabilité de l'intersection des événements A et B</u> : $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$

<u>Conséquence</u> : Si $P(A) \neq 0$, la **<u>probabilité conditionnelle</u>** de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est le nombre $P_A(B)$ tel que : $\boldsymbol{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

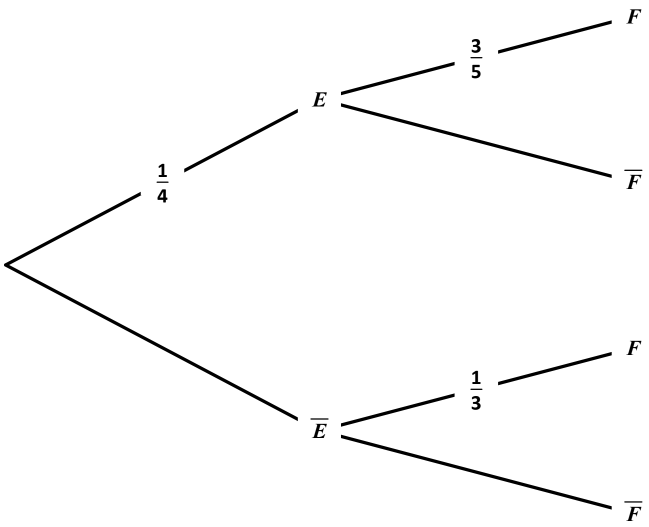
<u>Loi des probabilités totales</u> : $\boldsymbol{P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}$

Exemple 1 : Utiliser un arbre de probabilité et la loi des probabilités totales

Soit E et F deux événements.

On s'intéresse à l'arbre pondéré de probabilités ci-contre.

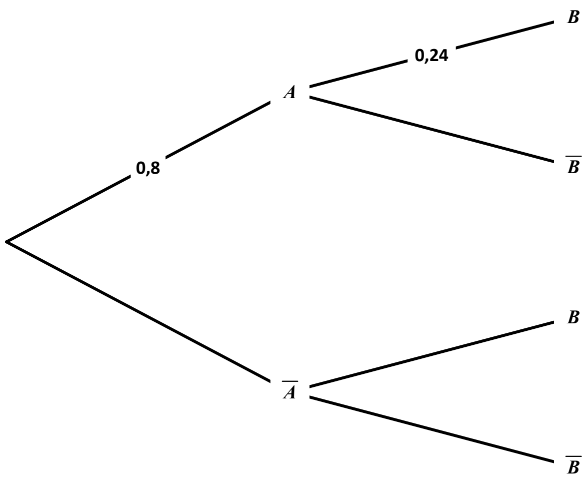
1) Compléter les probabilités manquantes.
2) Calculer la probabilité de F.
3) Calculer la probabilité de E sachant F.



Exemple 2 : Utiliser la loi des probabilités totales, pour déterminer une probabilité conditionnelle manquante :

Soit A et B deux événements. On s'intéresse à l'arbre pondéré de probabilités ci-contre.

Compléter les probabilités manquantes sur l'arbre, sachant que $P(B) = 0{,}222$.



INDEPENDANCE DE DEUX EVENEMENTS :

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle :

les événements A et B sont indépendants **si** $\boldsymbol{P_B(A) = P(A)}$

si $\boldsymbol{P_A(B) = P(B)}$

si $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

Exemple 3 : Justifier l'indépendance de deux événements :

On considère une urne contenant 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard.

On définit les événements suivants : A : « la boule tirée porte un nombre pair »

B : « la boule tirée porte un multiple de 3 »

1) Déterminer les probabilités suivantes : $P(A)$; $P(B)$ et $P(A \cap B)$
2) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Fiche 11 – VARIABLES ALEATOIRES

Soit une **variable aléatoire** X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$

▪ L'**espérance mathématique** de X est :

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

▪ La **variance** de la loi de X est

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\big(x_i - E(X)\big)^2$$

▪ L'**écart-type** de la loi de X est : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

<u>Théorème de Koenig</u> : $\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2}$

<u>Exemple : Savoir expliciter une variable aléatoire et calculer ses éléments caractéristiques</u>

Un joueur paie 5 € pour lancer un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

La variable aléatoire X représente le gain algébrique (en €) selon la règle suivante :

- Si le joueur obtient 6, il gagne 20 €.
- S'il obtient 3, 4 ou 5, il gagne 5 €.
- Sinon, il ne gagne rien.

1) Déterminer les valeurs possibles prises par X.
2) Déterminer la loi de probabilité de X, que l'on résumera dans un tableau.
3) Déterminer $P(X \geq 0)$.
4) Calculer l'espérance de X. Le jeu est-il équitable ?
5) Calculer l'écart-type de X.