Optimisation discrète - Course d'avions

Quentin Burthier
ENSTA Paris
quentin.burthier@ensta.fr

Abstract

The abstract paragraph should be indented ½ inch (3 picas) on both the left- and right-hand margins. Use 10 point type, with a vertical spacing (leading) of 11 points. The word **Abstract** must be centered, bold, and in point size 12. Two line spaces precede the abstract. The abstract must be limited to one paragraph.

1 Introduction

1.1 Notations

Une instance du problème est composée des données suivantes :

- Nombre d'aérodromes : n
- Aérodrome de départ : k
- Aérodrome d'arrivée : l
- Nombre d'aérodromes à parcourir : A_{min}
- Nombre de régions : m
- Région de l'aérodrome i : r_i
- Distance maximale de vol sans se poser : R
- Coordonnées cartésiennes de l'aérodrome i : (x_i, y_j)

On suppose que la distance entre deux aérodromes est la distance euclidienne, et on note $d_{ij} := \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ la distance entre l'aérodrome i et l'aérodrome j.

2 Modélisation

2.1 Objectif

On cherche à minimiser la distance parcourue, soit

$$\mathcal{Z} = \min \sum_{i,j} x_{ij} d_{ij} \tag{1}$$

où $x_{ij} \in \{0, 1\}$.

2.2 Contraintes du problème

Unicité des visites Chaque aérodrome est visité au plus une fois, sauf les aéroports d'arrivée et de départ qui sont visités exactement une fois.

$$\forall i \notin \{k, l\}, \ \sum_j x_{ij} \leq 1 \tag{2a}$$

$$\forall i \notin \{k, l\}, \ \sum_j x_{ji} \leq 1 \tag{2b}$$

Connexité L'avion doit partir de k

$$\sum_j x_{kj} = 1 \tag{3a}$$

$$\sum_j x_{jk} = \delta_{kl} \tag{3b}$$

et arriver en l

$$\sum_j x_{lj} = \delta_{kl} \tag{3c}$$

$$\sum_j x_{jl} = 1 \tag{3d}$$

On autorise ainsi que les aérodromes d'arrivée et de départ soient identiques.

Un avion repart d'un aérodrome seulement si et seulement si il s'est posé à cet aérodrome.

$$\forall i \notin \{k, l\}\,, \; \sum_j x_{ji} = \sum_j x_{ij} \tag{3e}$$

Nombre minimum d'aérodromes visités L'avion doit visiter au moins A_{min} aérodromes :

$$\sum_{i,j} x_{ij} \geq A_{\text{min}} \tag{4}$$

Diversité des régions La contrainte de visiter au moins une fois chaque région une fois s'écrit, en notant $I_r := \{i : r_i = r\}$ l'ensemble des aéroports appartenant à la région r, et R l'ensemble des régions comportant au moins un aérodrome,

$$\forall r \in R \setminus \{0, r_k, r_l\}\,, \; \sum_{i \in I_r} x_{ij} \geq 1 \tag{5}$$

On a supprimé les contraintes sur les régions r_1 et r_l, qui sont redondantes avec **FILLME**

Distance de vol maximale Un avion peut parcourir une distance d'au plus R sans se poser. Cela se traduit par

$$\forall i, j : i \neq j, \; x_{ij} d_{ij} \leq R \tag{6}$$

2.3 Contraintes d'élimination des sous-tours

Il nous reste à supprimer la possibilité d'avoir solutions composées de plusieurs cycles.

Nombre polynomial de contraintes

$$\forall i, j : i \neq k, j \neq k, \; u_j \geq u_i - n(1 - x_{ij}) \tag{7a}$$

Cela force $u_i > u_j$ pour i et j connectés, et interdit donc les cycles (sauf pour $i = k$ ou $j = k$, ce qui permet de revenir en k si $k = l$).

Nombre exponentiel de contraintes

$$\forall S \subset (V \setminus \{l\}) \cup (V \setminus \{r\}), |S| > 1, \sum_{i \in S, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \tag{7b}$$

3 Étude numérique