# Optimisation discrète - Course d'avions

**Quentin Burthier**
ENSTA Paris
quentin.burthier@ensta-paris.fr

**Antoine Gauthier**
ENSTA Paris
antoine.gauthier@ensta-paris.fr

## Abstract

The abstract paragraph should be indented ½ inch (3 picas) on both the left- and right-hand margins. Use 10 point type, with a vertical spacing (leading) of 11 points. The word **Abstract** must be centered, bold, and in point size 12. Two line spaces precede the abstract. The abstract must be limited to one paragraph.

## 1 Introduction

### 1.1 Notations

Une instance du problème est composée des données suivantes :
— Nombre d'aérodromes : $n$
— Aérodrome de départ : $k$
— Aérodrome d'arrivée : $l$
— Nombre d'aérodromes à parcourir : $A_{\text{min}}$
— Nombre de régions : $m$
— Région de l'aérodrome $i$ : $r_i$
— Distance maximale de vol sans se poser : $R$
— Coordonnées cartésiennes de l'aérodrome $i$ : $(x_i, y_j)$

On suppose que la distance entre deux aérodromes est la distance euclidienne, et on note $d_{ij} := \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ la distance entre l'aérodrome $i$ et l'aérodrome $j$.

## 2 Modélisation

### 2.1 Objectif

On cherche à minimiser la distance parcourue, soit

$$\mathcal{Z} = \min \sum_{i,j} x_{ij} d_{ij} \tag{1}$$

où $x_{ij} \in \{0, 1\}$.

### 2.2 Contraintes du problème

**Unicité des visites** Chaque aérodrome est visité au plus une fois, sauf les aéroports d'arrivée et de départ qui sont visités exactement une fois.

$$\forall i \notin \{k, l\}\,,\ \sum_j x_{ij} \leq 1 \tag{2a}$$

$$\forall i \notin \{k, l\}\,,\ \sum_j x_{ji} \leq 1 \tag{2b}$$

**Connexité** L'avion doit partir de $k$

$$\sum_j x_{kj} = 1 \tag{3a}$$

$$\sum_j x_{jk} = \delta_{kl} \tag{3b}$$

et arriver en $l$

$$\sum_j x_{lj} = \delta_{kl} \tag{3c}$$

$$\sum_j x_{jl} = 1 \tag{3d}$$

On autorise ainsi que les aérodromes d'arrivée et de départ soient identiques.

Un avion repart d'un aérodrome seulement si et seulement si il s'est posé à cet aérodrome.

$$\forall i \notin \{k, l\}\,,\ \sum_j x_{ji} = \sum_j x_{ij} \tag{3e}$$

**Nombre minimum d'aérodromes visités** L'avion doit visiter au moins $A_{\text{min}}$ aérodromes :

$$\sum_{i,j} x_{ij} \geq A_{\text{min}} \tag{4}$$

**Diversité des régions** La contrainte de visiter au moins une fois chaque région une fois s'écrit, en notant $I_r := \{i : r_i = r\}$ l'ensemble des aéroports appartenant à la région $r$, et $R$ l'ensemble des régions comportant au moins un aérodrome,

$$\forall r \in R \setminus \{0, r_k, r_l\}\,,\ \sum_{i \in I_r} x_{ij} \geq 1 \tag{5}$$

On a supprimé les contraintes sur les régions $r_1$ et $r_l$, qui sont redondantes avec **FILLME**

**Distance de vol maximale** Un avion peut parcourir une distance d'au plus $R$ sans se poser. Cela se traduit par

$$\forall i, j : i \neq j,\ x_{ij} d_{ij} \leq R \tag{6}$$

### 2.3 Contraintes d'élimination des sous-tours

Il nous reste à supprimer la possibilité d'avoir solutions composées de plusieurs cycles.

**Nombre polynomial de contraintes**

$$\forall i, j : i \neq k, j \neq k,\ u_j \geq u_i - n(1 - x_{ij}) \tag{7a}$$

Cela force $u_i > u_j$ pour $i$ et $j$ connectés, et interdit donc les cycles (sauf pour $i = k$ ou $j = k$, ce qui permet de revenir en $k$ si $k = l$).

**Nombre exponentiel de contraintes**

$$\forall S \subset (V \setminus \{l\}) \cup (V \setminus \{r\}), |S| > 1,\ \sum_{i \in S, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \tag{7b}$$

## 3 Étude numérique