2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号　45-196010
フリガナ　オクダ タカコ
氏名　奥田 堯子

目次

序

hoge

謝辞

本研究および修士課程全体において常に洞察に富むご助言と丁寧なご指導を賜った指導教員の小林俊行教授に深謝の意を表する．また，文献の情報から数学的な議論にわたり様々なご助言をくださった，修了生も含む小林研究室のみなさまにも心より感謝する．特に小林研究室の田内大渡氏には幾度か議論いただいたことに御礼申し上げたい．

最後に，学部時代からセミナーに付き合ってくださり，ときに精神的にも支えてくださった友人と家族に感謝の意を表して謝辞とする．

1　設定と共通の補題

1.1　記号の設定

記号を次のように定め，必要な条件 (実階数 1 など) は証明の都度宣言することとする．

記号と定義 1.1

- G を非コンパクト実半単純 Lie 群，H を G の Cartan 対合 Θ に対する非コンパクトな簡約部分 Lie 群とする．
- $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\, G$, $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}\, H$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする．
- e_G を G の単位元とし，$o_K := e_G K \in G/K$ とする．
- $B(-,-)$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とし，$\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(Y, W) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$ とする．
- 以下の 定理 1.2 を用いて，$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義する．

  定理 1.2 [**Kob89, Lemma 6.1**]
  $\pi\colon (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である．

ここで，$Y(\mathbf{R}\, X)$ の有界性について，次の予想が小林俊行氏によって立てられた．

予想 1.3 ベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に沿って $X = X_1 + X_2$ と分解すると，$\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ or } X_1 = 0\}$ である．

ここで，$Z(\mathbf{R}\, X)$ の有界性については次の定理が知られている．

定理 1.4 [**Kob97, Lemmma 5.4**]
$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ である．
ここに $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ は X と $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の元がなす角度の最小値 $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$ であり，$X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$ である．

つまり $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ ならば $\|Z(tX)\| \to \infty$，$|t| \to \infty$ である．

2　具体例と主定理の証明

2.1　具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

命題 2.1 $G = SO(1, n)$，$SU(1, n)$，$Sp(1, n)$，$H = SO(1, 1)$，$n \geq 2$ に対して予想 1.3 は正しい．

$G = Sp(1, 2)$，$\mathfrak{h} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合にのみ示す．その他の場合も全く同様の議論である．

命題 2.2 $G = Sp(1, 2)$，$H = SO(1, 1)$，$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$Y(\mathbf{R}\, X)$ が有界 $\iff$ $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ or

$X=0$ である．

ただし，H は G の左上に入っている．すなわち，$\mathrm{Lie}\,H=\mathfrak{h}=\mathbf{R}\,A$，$A:=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ とする．

記号と定義 2.3 $\mathbf{H}$ を四元数体とする．$Sp(1,2)/Sp(1)\times Sp(2)\simeq\{(z_1,z_2)\mid z_1,z_2\in\mathbf{H},\ |z_1|^2+|z_2|^2<1\}=:\mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ である．これは自然表現 $Sp(1,2)\curvearrowright\mathbf{H}^2$ の ${}^t(1,0,0)$ 軌道を考え，第 2，第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が $\mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ と微分同相であるためであり，$Sp(1,2)\curvearrowright\mathbf{H}^3$ の ${}^t(1,0,0)$ 軌道の点 $\begin{pmatrix}z_0\\z_1\\z_2\end{pmatrix}$ に対応する $\mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ の点を $\left[\begin{pmatrix}z_0\\z_1\\z_2\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}1\\z_1z_0^{-1}\\z_2z_0^{-1}\end{pmatrix}\right]$ と書く．

愚直な行列計算により，次が示される．

補題 2.4 $\forall z,w\in\mathbf{H}$ に対し，$\exp\begin{pmatrix}0&z&w\\\overline{z}&0&0\\\overline{w}&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh r&*&*\\\dfrac{\overline{z}}{r}\sinh r&*&*\\\dfrac{\overline{w}}{r}\sinh r&*&*\end{pmatrix}$，ただし $r:=\sqrt{|z|^2+|w|^2}$，である．

命題 2.2 の証明

$X=0\Rightarrow Y(\mathbf{R}\,X)=\{0\}$ と $X\in\mathfrak{h}\setminus\{0\}$ のときに $Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界であることは明らかであるから，$X\notin\mathfrak{h}$ の場合にのみ議論すればよい．つまり $X=\begin{pmatrix}0&z&w\\\overline{z}&0&0\\\overline{w}&0&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h}$，$z,w\in\mathbf{H}$ s.t. $|z|^2+|w|^2=1$ を任意に 1 つ固定して議論して一般性を失わない．このとき，$X\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h}$ より $\mathrm{Re}\,z\neq\pm1$ であることに注意する (Re: $\mathbf{H}\ni a+bi+cj+dk\mapsto a\in\mathbf{R}$ とする)．

G の Cartan 対合を $\Theta(g)=(g^*)^{-1}$ (g^* は g の共役転置) とするとき，$\Theta(e^{Y(tX)}e^{Z(tX)})\cdot o_K=e^{-Y(tX)}e^{-Z(tX)}\cdot o_K=\Theta(e^X)\cdot o_K=e^{-X}\cdot o_K$ より，「$Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界 $\iff Y(\mathbf{R}\,X)\subset\mathbf{R}\,A$ が上に非有界」である．

したがって，$Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界であるとき，列 $\{t_n\in\mathbf{R}\}_{n\in\mathbf{N}}$ で，$s_n\to\infty$, $n\to\infty$，ただし $Y(t_nX)=s_nA$，なるものが存在する．

このとき，$\{|t_n|\}_{n\in\mathbf{N}}$ が有界 $\iff$ $\{e^{t_nX}\cdot o_K\}_{n\in\mathbf{N}}$ が有界ならば，$G/K\ni e^X\cdot o_K\mapsto(Y(X),Z(X))\in(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p})\oplus(\mathfrak{h}^\perp\cap\mathfrak{p})$，$X\in\mathfrak{p}$ が微分同相であることから $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ も有界である．従って対偶より $\lim_{n\to\infty}s_n\to\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty}|t_n|\to\infty$ である．

補題 2.4 より，

$$e^{s_nA}e^{Z(t_nX)}\cdot o_K=\begin{pmatrix}\cosh s_n&\sinh s_n&0\\\sinh s_n&\cosh s_n&0\\0&0&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1\\\pm\overline{z}\tanh|t_n|\\\pm\overline{w}\tanh|t_n|\end{pmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n \\ \pm\overline{w}\tanh|t_n| \end{pmatrix}\right],$$

複号は t_n の符号 $\pm$ と同順，である．このとき $\lim_{n\to\infty}\tanh s_n = 1 = \lim_{n\to\infty}\tanh|t_n|$ と $\mathrm{Re}\, z \neq \pm 1$ に注意すると次を得る．具体的な計算は後述する．

$$\lim_{n\to\infty}(\sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n)^{-1} = 1 \tag{2.1}$$

である．

したがって，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルと，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} (\sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n)^{-1} \\ * \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値を I_n とすると，$\lim_{n\to\infty} I_n = 1$ である．

しかし，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルと，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $e^{W(t_n X)} \cdot o_K \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値 J_n は，
$W(t_n X) \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 & z_2 \\ \overline{z_1} & 0 & 0 \\ \overline{z_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; z_1, z_2 \in \mathbf{H},\ \&\ \mathrm{Re}\, z_1 = 0 \right\}$ であることと，補題 2.4 から $\mathrm{Re}\, J_n = 0$ となり，$e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K \implies \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n = 1$ に矛盾する．

以上より「$X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \Rightarrow Y(\mathbf{R}\, X)$ 有界」，したがって 命題 2.2 を得る．

$\blacksquare$

命題 2.2 の計算:

具体的に計算すると，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left|(\sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n)^{-1} - 1\right| \qquad (\text{これが} = 0 \text{ を示せば良い}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\tanh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|)(1 \pm z\tanh|t_n|\tanh s_n)}{|(1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|^2} - 1\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|(\tanh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|)z' - (1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)z'|}{|(1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|^2}, \qquad z' := 1 \pm z\tanh|t_n|\tanh s_n \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|)z'|}{|(1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|}
\end{aligned}$$

であり，$0 < \min|1 \pm \mathrm{Re}\, z| \leq |(1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ と $\min\{|-1 \pm \mathrm{Re}\, z|\} \leq |-1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|| \leq \sqrt{5}$ であることから，

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{n\to\infty}(1 - \tanh s_n)\frac{\min\{|-1 \pm \mathrm{Re}\, z|\}}{\sqrt{5}} &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|} \\
&\leq \lim_{n\to\infty}(1 - \tanh s_n)\frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \mathrm{Re}\, z|\}} = 0
\end{aligned}$$

より，(2.1) が成り立つ．

2.2 $\mathbf{R}$-rank $G=1$ の場合

定理 2.5 G を実階数 1 の非コンパクト実半単純 Lie 群とするとき，予想 1.3 が成り立つ．

補題 2.6

2.3 $\dim H = 1$ かつ $\mathfrak{h}$ の基底が generic の場合

定理 2.7 G を非コンパクト実半単純 Lie 群とするとき，$\mathfrak{h} = \mathbf{R}Y$ かつ $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y) = \mathfrak{m} + \mathfrak{a}$ ならば 予想 1.3 が成り立つ．

補題 2.8 [**Borel–Ji, Corollary I.2.17**]

$\mathfrak{a}_P^+(\infty) \ni W \overset{1:1}{\longleftrightarrow} [e^{tW} \cdot o_K] \in G/K(\infty)$ により $G/K(\infty) = \bigsqcup_{P:\ \mathrm{psg}} \mathfrak{a}_P^+(\infty)$ である．

以下，この主張を用いて $G/K(\infty)$ の元と $\mathfrak{a}_P^+(\infty)$，あるいは $\overline{\mathfrak{a}_P^+(\infty)}$ の元を同一視する．

補題 2.9 [**Borel–Ji, Proposition I.2.6, Corollary I.2.17**]

$G/K(\infty)$ の任意の点の固定部分群は G ではない放物型部分群であり，放物型部分群 P を固定部分群として持つ $G/K(\infty)$ の元は $\overline{\mathfrak{a}_P^+(\infty)}$ に一致する．

補題 2.10 ([**EO73, Proposition 6.7**], [**BBE85, 2.8 Lemma**])

任意の $p \in G/K(\infty)$ と点列 $\{t_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $t_n \to \infty$, $n \to \infty$ に対し，$\{e^{t_nY} \cdot p\}_{n\in\mathbf{N}}$ の任意の集積点は $[\mathfrak{a}]$ の元である．

補題 2.10 の証明

必要ならば部分列に移って $\{e^{t_nY} \cdot p\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束すると仮定する．

任意の $I \subsetneq \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に対し，$P_0 \subset P_I$ と Bruhat 分解 $G = \bigsqcup_{w\in W} \overline{N}wP_0$ より $G = \bigcup_{w\in W} \overline{N}k_wP_I$ である．したがって $p \in \mathfrak{a}_P^+(\infty)$ なる放物型部分群 P を取ると，ある I と $\overline{n} \in \overline{N}$，$w \in \mathcal{W}$ が存在して，$P = \overline{n}k_wP_Ik_w^{-1}\overline{n}^{-1}$ と書ける． 以下，$P_I' \coloneqq k_wP_Ik_w^{-1}$ とする．

$e^{t_nY} \cdot p$ の固定部分群は $P_n \coloneqq e^{t_nY}Pe^{-t_nY}$ であり，【$k_n \in K$ を $K/(K\cap P_I') \simeq G/P_I'$ という同一視 のもとで，$k_n(K \cap P_I') = e^{t_nY}\overline{n}e^{-t_nY}P_I'$ かつ $\|-\|_\theta$ から定まる $K/(K\cap P_I')$ の計量に対して最も原点 $\mathrm{id}_G(K\cap P_I')$ に近い元とすると，】[*1] $k_w^{-1}e^{t_nY}k_w \in P_I$ より $P_n = k_nP_I'k_n^{-1}$ である．補題 2.9 より $e^{t_nY} \cdot p \in \overline{\mathfrak{a}_{P_n}^+(\infty)}$ であり $\overline{\mathfrak{a}_{P_n}^+(\infty)} \subset \mathrm{Ad}(k_n)\,\mathfrak{a}_{P_I'}$ より，ある一意的な $W_n \in \mathfrak{a}_{P_I'}$, $\|W_n\|_\theta = 1$ が取れて，$e^{t_nY} \cdot p$ と $\dfrac{\mathrm{Ad}(k_n)W_n}{\|\mathrm{Ad}(k_n)W_n\|_\theta}$ が補題 2.8 の意味で対応する．

必要ならば再度部分列に移ると $\|W_n\|_\theta = 1$ より $\lim_{n\to\infty} W_n = \exists W \in \mathfrak{a}_{P_I'}$ であり，$\lim_{n\to\infty} e^{t_nY}\overline{n}e^{-t_nY} = \mathrm{id}_G$ であることと，k_n と原点の距離の最短性より $\lim_{n\to\infty} k_n = \mathrm{id}_G$ であるから $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{Ad}(k_n)W_n}{\|\mathrm{Ad}(k_n)W_n\|_\theta} = W$ である．

収束する点列の部分列はもとの収束先に収束するから $\lim_{n\to\infty} e^{t_nY} \cdot p$ と $W \in \mathfrak{a}_{P_I'}$ が補題 2.8

[*1] この k_n はもう少し単純に表せる気がします．

の意味で対応し，$\mathfrak{a}_{P'_I} \subset \mathrm{Ad}(k_w)\,\mathfrak{a}_I \subset \mathrm{Ad}(k_w)\,\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ より $\lim_{n\to\infty} e^{t_n Y} \cdot p \in [\mathfrak{a}]$ である．

したがって補題 2.10 が示された．

■

定理 2.7 の証明

予想 1.3 について，$\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} \subset \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ or } X_1 = 0\}$ は明らかであるから，$\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} \supset \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ or } X_1 = 0\}$ を示せば良い．さらに $X_1 = 0 \implies X \in \mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}}$ も明らかであるから，今示すべきは，$X \in \mathfrak{p}$ s.t. $[X_1, X_2] \neq 0 \implies X \in \mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}}$ である．

$[X_1, X_2] \neq 0$ より，$[X, Y] = [X_2, Y] \neq 0$ であるから，$X \notin \mathfrak{a}$ である．

ここで $\|Y(\mathbf{R}\,X)\|$ が非有界であると仮定する．このとき $X \notin \mathfrak{h}$ であるから [**?, Lemma 5.4**] より $\|Z(\mathbf{R}\,X)\|$ も非有界である．必要なら Y の符号を調整し，列 $\{t_n \geq 0\}_{n\in\mathbf{N}}$ であって $s_n \to \infty$，ただし $Y(t_n X) = s_n Y$，$s_n \in \mathbf{R}$，かつ $e^{Z(t_n X)} \cdot o_K \to [Z] \in G/K(\infty)$，$Z \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$，$n \to \infty$ なるものが取れる ($e^{Z(t_n X)} \cdot o_K$ の収束は $\overline{G/K}^c$ のコンパクト性による)．

ここで $U(\varepsilon, r) \coloneqq \bigcup_{x\in[\mathfrak{a}]} C(x, \varepsilon, r)$ とすると，$U(\varepsilon, r)$ は $[\mathfrak{a}]$ の任意の点の近傍であり，補題 2.10 より，任意の $r, \varepsilon > 0$ に対して $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の部分列を取り直せば，$\forall n > N$，$e^{s_n Y}[Z] \cdot o_K \in U(r, \varepsilon)$ である．また $G \curvearrowright \overline{G/K}^c$ の連続性より，ある $C([Z], \varepsilon', r')$ を取ると，$e^{s_n Y} \cdot C([Z], \varepsilon', r') \subset U(r, \varepsilon)$ である．$e^{Z(t_n X)} \cdot o_K \to [Z] \in G/K(\infty)$，$Z \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$，$n \to \infty$ であるから，必要ならばさらに N を大きく取り直すことで $\forall n > N$，$e^{Z(t_n X)} \cdot o_K \in C([Z], \varepsilon', r')$，したがって $e^{s_n Y} e^{Z(t_n Z)} \cdot o_K \in U(\varepsilon, r)$ である．

しかし $e^{s_n Y} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K$ と $A \cdot o_K$ 上の o_K を通る測地線のなす角の最小値は X と $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$ のなす角で，非零であるから矛盾する．

■

参考文献

[**BBE85**] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203

[**Borel–Ji**] A. Borel and L. Ji, Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006

[**EO73**] P. Eberlein and B. O'Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109

[**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.

[**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant mesures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54