

2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号	<u>45-196010</u>
フリガナ	オクダ タカコ
氏名	<u>奥田 堯子</u>

# 目次

導入 . . . . .	2
謝辞 . . . . .	3
1 設定と $\mathfrak{h}$ 射影の基本的な性質および問題 1.3 の観察 . . . . .	4
1.1 記号の設定 . . . . .	4
1.2 問題 1.3 の観察: $G = SU(1, 1)$ , $H = SO(1, 1)$ の場合 . . . . .	6
1.3 問題 1.3 の観察: 問題 1.3 の仮定を外した場合の成り立たない例 . . . . .	11
2 $G$ の実階数が 1 の場合 . . . . .	12
2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群 . . . . .	12
2.2 $G$ の実階数が 1 の場合 . . . . .	15
2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面 . . . . .	22
2.3 $G$ が実階数 1 の実半単純 Lie 群の直積の場合 . . . . .	23
3 $G$ の実階数が 2 の場合 . . . . .	24
参考文献 . . . . .	28

## 導入

$G$  を非コンパクトな実半単純 Lie 群,  $K$  を  $G$  の極大コンパクト部分群で  $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対して  $K = \Theta K$  なるものとする.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\Theta$  の微分  $d\Theta$  による  $\mathfrak{g}$  の Cartan 分解とすると,  $G/K$  は  $\mathfrak{p}$  と  $\mathfrak{p} \ni X \mapsto e^X K \in G/K$  により微分同相である.

$H$  を  $G$  の非コンパクトな閉部分群で,  $H = \Theta H$  を満たすものとし,  $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{g} \mid B(W, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$  とするとき,  $G/K$  と  $\mathfrak{p}$  の微分同相についてより強い次の構造定理が知られている.

**定理 ([Kob89, Lemma 6.1])**  $\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$  は上への微分同相である.

この定理を用いて  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  と定義する.

$G/K$  に  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式  $B$  から定まる Riemann 計量によって Riemann 多様体の構造を定める.  $G$  の単位元の  $G/K$  での像  $eK$  を通る  $G/K$  の極大測地線は  $B(X, X) = 1$  なる  $X \in \mathfrak{p}$  によって  $e^{tX} K$ ,  $t \in \mathbf{R}$  と書ける. 定理 1.2 より任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対して  $e^{tX} K = e^{Y(tX)} e^{Z(tX)} K$  である.

$G = SU(1, 1)$ ,  $H = SO(1, 1)$  とするとき,  $t \in \mathbf{R}$  に対し,  $Y(tX)$  は図 1 に図示するような幾何学的な意味を持つ. 図 1 は Poincaré 円板における測地線  $e^{tX} K$  (赤色の斜め線) とその上の一点  $e^{tX} K$  から  $eK$  の  $H$  軌道 (中央の直線) に下ろした垂線の足 (緑の丸) が  $e^{Y(tX)} K$  である.

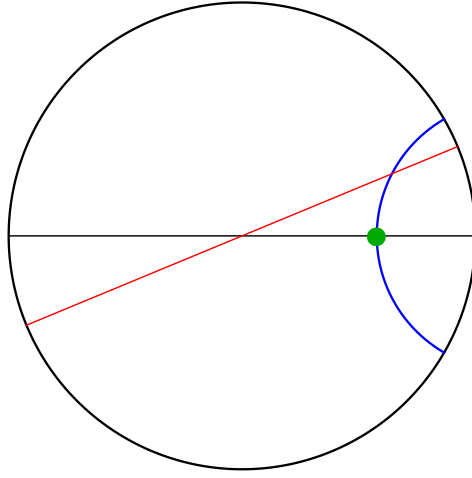


図 1: Poincaré 円板における  $Y(tX)$  の幾何学的意味

本論文では小林俊行氏による次の問題について考察し， $G$  が実階数 1 の場合の肯定的な結果を得た．

問題  $Y(\mathbf{R} X)$  が  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の有界な部分集合であることと「 $X \in \mathfrak{h}^\perp$  もしくは『 $[X_1, X_2] \neq 0$  かつ  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(X) = 0$  であること』」は同値である．

ただし  $X = X_1 + X_2$  はベクトル空間としての分解  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$  に対応する  $X \in \mathfrak{p}$  の分解とする．

謝辞

# 1 設定と $\mathfrak{h}$ 射影の基本的な性質および問題 1.3 の観察

## 1.1 記号の設定

本論文の基本的な設定は次のとおりであり、この他に必要な条件は都度明示することとする。

### 記号と定義 1.1

- $\mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$  をそれぞれ 0 を含む自然数全体, 実数全体, 複素数全体, 四元数全体の集合とする。
- $G$  を非コンパクト実半単純 Lie 群,  $H$  を  $G$  の非コンパクトな部分 Lie 群で,  $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対して  $\Theta H = H$  なる実半単純 Lie 群とする。
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$ ,  $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$  とし,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\theta := d\Theta$  による Cartan 分解とする。
- $e$  を  $G$  の単位元とし,  $o_K := eK \in G/K$  とする。
- $B(-, -)$  を  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式とし,  $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{g} \mid B(W, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$  とする。
- $X \in \mathfrak{p}$  に対し, ベクトル空間としての分解  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  に対応した分解を  $X = X_1 + X_2$ ,  $X_1 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ ,  $X_2 \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  とする。
- $(M, d_M)$  を  $M$  の上の任意の 2 点に対し一意的な測地線が存在する Riemann 多様体と  $M$  上の計量から定まる距離とする。相異なる点  $p, q, r \in M$  に対し,
  - $\gamma_{p,q}: [0, d_M(p, q)] \rightarrow M$  を,  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(d_M(p, q)) = q$  なる測地線とする。
  - $\angle_p(q, r)$  を  $\gamma_{p,q}$  と  $\gamma_{p,r}$  が  $p$  においてなす角とする。

以下の定理 1.2 を用いて,  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  と定義する。

**定理 1.2** ([Kob89, Lemma 6.1])  $\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$  は上への微分同相である。

ここで,  $Y(\mathbf{R} X)$  の有界性について, 次の問題 1.3 が小林俊行氏によって提起された。

問題 1.3 (by T. Kobayashi)  $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} := \{X \in \mathfrak{p} \mid Y(\mathbf{R} X) \text{ が } \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \text{ の有界集合である.}\}$  と定めるとき,

$$1. \quad \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} = (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \cup \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ かつ } \mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = 0 \text{ である.}\} \quad (1.1)$$

であるか?

2.  $G$  が実半単純 Lie 群ならば  $\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}}$  は測度 0 であるか?

問題 1.3 についての基本的な事項を挙げる.

補題 1.4

1.  $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} \subset (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \cup \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ かつ } \mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = 0 \text{ である.}\}$  が成り立つ.
2.  $X \in \mathfrak{p}$  が  $X_1 = 0$  を満たすならば  $X \in \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}}$  である.
3.  $G$  が実階数 1 のとき, 問題 1.3 と 「 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} = \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ 」 は同値である.

補題 1.4 の証明

1. 背理法による.  $X \notin \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  なる  $X$  に対し,  $[X_1, X_2] = 0$  ならば  $e^{tX_1} e^{tX_2} \cdot o_K = e^{t(X_1+X_2)} \cdot o_K = e^{tX} \cdot o_K$  である. したがって定理 1.2 より  $Y(tX) = tX_1$ ,  $Z(tX) = tX_2$  であることから  $Y(\mathbf{R} X) = \mathbf{R} X_1$  となり,  $X_1 \neq 0$  より  $Y(\mathbf{R} X)$  は有界集合とならない.  
また,  $X \notin \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  なる  $X$  に対し,  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) \neq 0$  ならば, ある  $W \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$  が存在して  $[W, X] = [W, X_1 + X_2] = [W, X_2] = 0$  である.
2.  $X_1 = 0$  であることと  $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  であることは同値であることから従う.
- 3.

■

$Y(\mathbf{R} X)$  の有界性は  $\text{Ad}(k)$ -不変である. 具体的には補題 1.5 が成り立つ.

補題 1.5  $k \in K$ ,  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $X' := \text{Ad}(k)X$ ,  $\mathfrak{h}' := \text{Ad}(k)\mathfrak{h}$  とする.  $Y'(X'), Z'(X')$  を, 微分同相  $\pi': (\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y', Z') \mapsto e^{Y'} e^{Z'} \cdot o_K$  を用いて,  $X' \in \mathfrak{p}$  に対し,  $(Y'(X'), Z'(X')) = \pi'^{-1}(e^{X'} \cdot o_K)$  と定める.

このとき  $Y(\mathbf{R} X)$  が有界であることと  $Y'(\mathbf{R} X')$  が有界であることは同値である.

**補題 1.5** の証明 主張は  $(X, \mathfrak{h})$  と  $(X', \mathfrak{h}')$  に対して対称的であるから,  $Y(\mathbf{R} X)$  が有界ならば  $Y'(\mathbf{R} X')$  が有界であることのみを示せば十分である.

任意に  $r \in \mathbf{R}$  を取る.  $e^{rX'} \cdot o_K = e^{Y'(rX')} e^{Z'(rX')} \cdot o_K$  であり, 両辺に左から  $k^{-1}$  を掛けると,  $e^{rX} = e^{\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX'))} e^{\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX'))} \cdot o_K$  を得る. ここで  $Y'(rX') \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}$ ,  $Z'(rX') \in \mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}$  であるから  $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ ,  $\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX')) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  である.

定理 1.2 により  $\pi$  は微分同相であるから, 任意の  $r \in \mathbf{R}$  に対して  $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) = Y(rX)$  である.  $Y'(\mathbf{R} X) = \text{Ad}(k)(Y(\mathbf{R} X))$  であり,  $\text{Ad}(k)$  は有限次元空間の間の線型写像であるから有界性を保つ.

以上から補題 1.5 が示された. ■

$Z(\mathbf{R} X)$  の有界性については次の定理が知られており, 有界性の判定は Lie 環の言葉のみで行える.

**定理 1.6** ([Kob97, Lemma 5.4])  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$  である. ここに  $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$  は  $X$  と  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の元がなす角度の最小値  $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$  であり,  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$  である.

定理 1.6 より,  $X \in \mathfrak{h}$  と  $Z(\mathbf{R} X)$  が有界であることが同値である.

## 1.2 問題 1.3 の観察: $G = SU(1, 1)$ , $H = SO(1, 1)$ の場合

$G = SU(1, 1)$ ,  $H = SO(1, 1) := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$  の場合に問題 1.3 が正しいことは直接計算により確かめられる.

**命題 1.7**  $G = SU(1, 1)$ ,  $H = SO(1, 1)$  のとき問題 1.3 は正しい.

**補題 1.8**  $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(1, 1)$  の Killing 形式から定まる Poincaré 円板  $G/K = \{x + \sqrt{-1}y \mid x^2 + y^2 < 1\}$  の計量は  $\frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$  である.

補題 1.8 の証明  $\mathfrak{g}$  の元を  $G/K$  上の左不変ベクトル場と同一視すると

$$X' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$Y' := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}$$

である.  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式  $B$  から定まる  $\mathfrak{p}$  上のノルム  $\|-\|$  に対して  $\|X'\|^2 = \|Y'\|^2 = 8$ ,  $B(X', Y') = 0$  であって,  $0 \in G/K = \{x + \sqrt{-1}y \mid x^2 + y^2 < 1\}$  で主張が成り立つ.

したがって  $k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$ ,  $a_r := \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r \\ \sinh r & \cosh r \end{pmatrix}$  とすると,

$$\begin{aligned} & g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X')) \\ &= g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) \\ &= 8, \\ & g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) = 0 \end{aligned}$$

なるような計量  $g$  が Killing 形式から誘導される計量であるが, それが主張の形であることを示せば良い (これらのベクトルが何を表しているかは図 2 参照).

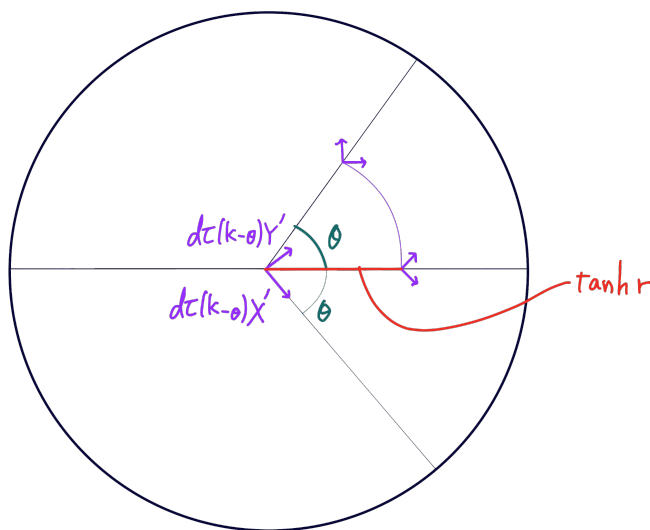


図 2



$t = 0$  での接ベクトルが  $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X'$  を与える曲線は

$$\gamma_x(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \cosh r}$$

であるから,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_x(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial x} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x}$$

である.

同様に  $t = 0$  での接ベクトルが  $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y'$  を与える曲線は

$$\gamma_y(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \cosh r}$$

であるから,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_y(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial y} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

である.

以上より  $g = \frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$  が示された. ■

**命題 1.7** の証明  $k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$ ,  $X_\theta := k_{\theta/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} k_{-\theta/2}$  とすると,  $\mathfrak{p} \setminus \{0\} = \{tX_\theta \mid t \in \mathbf{R}_{>0}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$  である. この  $X_\theta$  と  $t \in \mathbf{R}$  に対して  $Y(tX_\theta) = s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  なる  $s \in \mathbf{R}$  を求める.

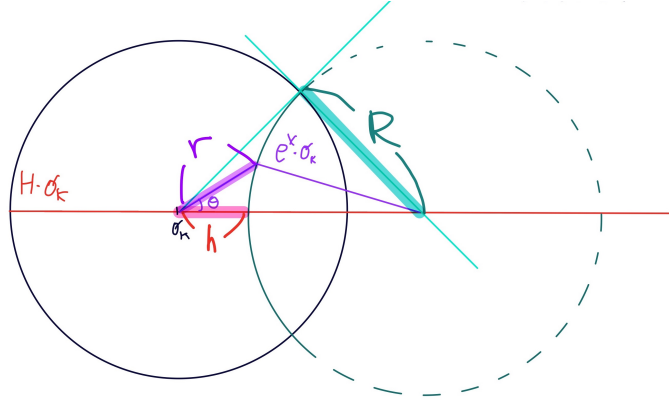


図 3

右の円の Euclid 距離での半径を  $R$  とし,  $e^{tX_\theta} \cdot o_K$  から  $H \cdot o_K$  への垂線の足の  $o_K$  からの Euclid 距離を  $h$  とするとき, 外側の青色の直角三角形に対して三平方の定理を用いて  $(h + R)^2 = R^2 + 1$  より  $R = \frac{1 - h^2}{2h}$ ,  $R + h = \frac{1 + h^2}{2h}$  を得る.

さらに下の紫色の三角形に対して余弦定理を用いて  $R^2 = (R + h)^2 + r^2 - 2(R + h) \cos \theta$  を得,

$$\frac{2r \cos \theta}{r^2 + 1} = \frac{2h}{h^2 + 1} \quad (1.2)$$

を得る.

$r = \tanh t$ ,  $h = \tanh s$  であるから (1.2) は  $\cos \theta \tanh 2t = \tanh 2s$  と書き直せる. したがって  $X_\theta$  に対して  $Y(\mathbf{R} X)$  が有界  $\iff |\cos \theta| \neq 1 \iff X \notin \mathfrak{h}$  である. ■

**補足 1.9** 命題 1.7 は角度を用いた議論によっても示すことができる. 具体的には, 計算により次の補題 1.10 が示せる.

**補題 1.10**  $e^{sY} e^{rZ} \cdot o_K = \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix} \sqrt{-1} \tanh r \in SU(1, 1)/U(1)$ ,  $s > 0$ ,

$r \in \mathbf{R}$  に対し,  $\varphi_{s,r} := \angle_{o_K}(e^{sY} e^{rZ} \cdot o_K, e^{sY} \cdot o_K)$  は,  $\tan \varphi_{s,r} = \frac{\tanh 2r}{\sinh 2s}$  を満たす.

ただし  $Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Z := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$  とする.

補題 1.10 により命題 1.7 は次のように証明できる. 任意の  $0 \neq s \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R}$  に

対し,

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \tan \varphi_{|s|,r} = \frac{-1}{\sinh 2|s|} \leq \tan \varphi_{s,r} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \tan \varphi_{|s|,r} = \frac{1}{\sinh 2|s|} \quad (1.3)$$

であるから,  $X \notin \mathbf{R}Y$  の元に対して  $Y(\mathbf{R}X)$  が非有界であるとする,  $0 < \varepsilon < \varphi(X, \mathfrak{h})$  なる  $\varepsilon$  に対し, ある  $t \in \mathbf{R}$  が存在して,  $Y(tX) = s_t Y$ ,  $\sinh 2|s_t| > \frac{1}{\tan \varepsilon}$  である.  $Z(tX) = r_t Z$  とすると (1.3) より  $|\tan \varphi_{s_t, r_t}| < \tan \varepsilon$ , したがって

$$-\varepsilon < \angle_{o_K}(e^{s_t Y} e^{r_t Z} \cdot o_K, e^{s_t Y} \cdot o_K) < \varepsilon < \varphi(X, \mathfrak{h})$$

となる. しかし定義より  $\angle_{o_K}(e^{s_t Y} e^{r_t Z} \cdot o_K, e^{s_t Y} \cdot o_K) = \angle_{o_K}(e^{tX} \cdot o_K, e^{Y(tX)} \cdot o_K)$  であり,  $\angle_{o_K}(e^{tX} \cdot o_K, e^{Y(tX)} \cdot o_K) = \varphi(X, \mathfrak{h})$  であるから矛盾する.

系 1.11  $G = SO(1, n)$ ,  $H = SO(1, k)$ ,  $1 \leq k \leq n-1$  に対して問題 1.3 は正しい.

系 1.11 の証明 より正確に記述せよ  $SO(1, n)/SO(n)$  の開球としての実現を考える. 「 $e^X \cdot o_K$  と  $o_K$  を結ぶ直線」と  $H \cdot o_K$  で張られる超平面で  $SO(1, n)/SO(n)$  を切った際の断面を考える.

$n=3, k=1$  の例

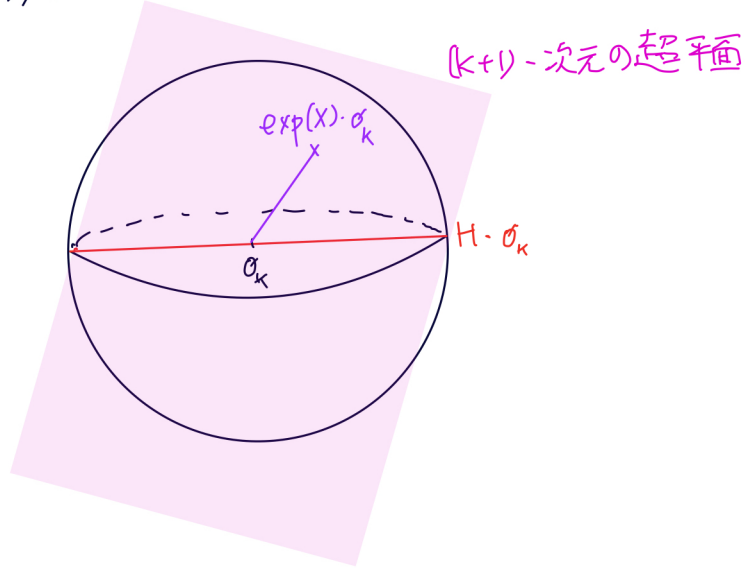


図 4

この断面に現れるのは図 3 と同じであるから、同様の計算により系 1.11 を得る. ■

### 1.3 問題 1.3 の観察: 問題 1.3 の仮定を外した場合の成り立たない例

問題 1.3 と次の問題 1.12 は同値である.

**問題 1.12**  $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \text{ である.}\}$

ここで似た予想として  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  を  $\mathfrak{h}$  に置き換えた次の予想が立てられる.

**問題 1.13**  $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp \mathfrak{h} \text{ である.}\}$

しかし問題 1.13 には反例が存在する.

**補題 1.14**  $G = SL(3, \mathbf{R})$ ,  $Y_1 := \text{diag}(1, 1, -2)$ ,  $Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$\mathfrak{h} = \mathbf{R}Y_1 \oplus \mathbf{R}Y_2$ ,  $X = \text{diag}(1, 0, -1)$  に対し,  $[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$  であるが  $Y(\mathbf{R}X) = \mathbf{R}Y_1$  であり, 非有界である.

**補題 1.14** の計算  $\mathfrak{h}$  は可換 Lie 環であり,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$  の Cartan 対合  $\theta W := -{}^t W$  に対し  $\mathfrak{h} = \theta \mathfrak{h}$  である.

$[X, \mathfrak{h}] \neq 0$  は,  $[X, Y_2] \neq 0$  より従う.

ここで  $Z_1 := \text{diag}(1, -1, 0) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  であり, 任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対し,  $e^{2tX} = e^{tY_1} e^{tZ_1}$  であるから,  $Y(\mathbf{R}X) = \mathbf{R}Y_1$  となり, 補題 1.14 が示された. ■

補題 1.14 において  $X$  と  $\mathfrak{h}$  は,  $[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$  だが  $[X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] = \{0\}$  かつ  $X \not\perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$  となるように取った.

つまり問題 1.13 の右辺を次の問題 1.15 のように少し弱めても補題 1.14 はその反例になっている.

**問題 1.15**  $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \text{ である.}\}$

## 2 $G$ の実階数が 1 の場合

### 2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

**命題 2.1**  $G = SO(1, n)$ ,  $SU(1, n)$ ,  $Sp(1, n)$ ,  $H = SO(1, 1)$ ,  $n \geq 2$  に対して問題 1.3 は正しい.

$G = Sp(1, 2)$ ,  $\mathfrak{h} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  の場合にのみ示す. その他の場合も全く同様の議論である.

**命題 2.2**  $G = Sp(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$ ,  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $Y(\mathbf{R} X)$  が有界  $\iff X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  or  $X = 0$  である.

ただし,  $H$  は  $G$  の左上に入っている. すなわち,  $\text{Lie } H = \mathfrak{h} = \mathbf{R} Y$ ,  $Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とする.

**記号と定義 2.3**  $\mathbf{H}$  を四元数体とする.  $Sp(1, 2)$  の定義と自然表現の定義  $Sp(1, 2)/Sp(1) \times Sp(2) \simeq \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\} =: \mathbf{H}\mathbb{H}^2$  である. なぜならば  ${}^t(1, 0, 0)$  の自然表現  $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^2$  による軌道を考え, 第 2, 第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が  $\mathbf{H}\mathbb{H}^2$  と微分同相であるためであり,  $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^3$  の  ${}^t(1, 0, 0)$  軌道の点  $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  に対応する  $\mathbf{H}\mathbb{H}^2$  の点を

$$\left[ \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 z_0^{-1} \\ z_2 z_0^{-1} \end{pmatrix} \right] \text{ と書く.}$$

愚直な行列計算により, 次が示される.

補題 2.4  $\forall z, w \in \mathbf{H}$  に対し,  $\exp \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & * & * \\ \frac{\bar{z}}{r} \sinh r & * & * \\ \frac{\bar{w}}{r} \sinh r & * & * \end{pmatrix}$ , ただし

$r := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$ , である.

命題 2.2 の証明  $X = 0 \Rightarrow Y(\mathbf{R}X) = \{0\}$  と  $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$  のときに  $Y(\mathbf{R}X)$  が非有界であることは明らかであるから,  $X \notin \mathfrak{h}$  の場合にのみ議論すればよい.

$G$  の Cartan 対合を  $\Theta(g) = (g^*)^{-1}$  ( $g^*$  は  $g$  の共役転置) とするとき,  $\Theta(e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}) \cdot o_K = e^{-Y(tX)}e^{-Z(tX)} \cdot o_K = \Theta(e^X) \cdot o_K = e^{-X} \cdot o_K$  より, 「 $Y(\mathbf{R}X)$  が非有界  $\iff Y(\mathbf{R}X) \subset \mathbf{R}Y$  が上に非有界」である.

したがって,  $Y(\mathbf{R}X)$  が非有界であるとき, 列  $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$  で,  $s_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , ただし  $Y(t_n X) = s_n Y$ , なるものが存在する.

また, 任意の  $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  の元はある  $Z = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ ,  $z, w \in \mathbf{H}$  s.t.  $|z|^2 +$

$|w|^2 = 1$  と  $r \in \mathbf{R}$  により  $rZ$  と表せる.  $Z(t_n X) = r_n Z_n$ ,  $Z_n := \begin{pmatrix} 0 & z_n & w_n \\ \bar{z}_n & 0 & 0 \\ \bar{w}_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$z_n, w_n \in \mathbf{H}$  s.t.  $|z_n|^2 + |w_n|^2 = 1$  とすると,  $X \notin \mathfrak{h}$  であるから定理 1.6 より  $|r_n| \rightarrow \infty$  である.  $z_n, w_n \in \mathbf{H}$  s.t.  $|z_n|^2 + |w_n|^2 = 1$  より,  $\{t_n\}$  の部分列を取

るとある  $Z_\infty$  が存在して  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z_\infty = \begin{pmatrix} 0 & z_\infty & w_\infty \\ \bar{z}_\infty & 0 & 0 \\ \bar{w}_\infty & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  な

るようにできる.  $Z \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  より  $\operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$  であることに注意する ( $\operatorname{Re}: \mathbf{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto a \in \mathbf{R}$  とする).

補題 2.4 より,

$$\begin{aligned} e^{s_n Y} e^{r_n Z_n} \cdot o_K &= \begin{pmatrix} \cosh s_n & \sinh s_n & 0 \\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \\ \pm \bar{w}_n \tanh |r_n| \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n \\ \pm \bar{w}_n \tanh |r_n| \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

複号は  $r_n$  の符号  $\pm$  と同順, である. このとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh s_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh |r_n|$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$  に注意すると次を得る. 具体的な計算は後述する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n) (\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} = 1 \quad (2.1)$$

である.

したがって,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルと,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  か

ら  $\begin{pmatrix} (\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n) (\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} \\ * \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルがなす Euclidean な内積の値を  $I_n$  とすると,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$  である.

しかし,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルと,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $e^{t_n X} \cdot o_K \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルがなす Euclidean な内積の値  $J_n$  は,  $X := \begin{pmatrix} 0 & z_0 & w_0 \\ \bar{z}_0 & 0 & 0 \\ \bar{w}_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $z_0, w_0 \in \mathbf{H}$  s.t.  $|z_0|^2 + |w_0|^2 = 1$  とするとき  $J_n = \frac{\bar{z}_0}{r_0} \tanh(tr_0)$ ,

$r_0 := \sqrt{|z_0|^2 + |w_0|^2}$  であり,  $X \notin \mathfrak{h} \iff z_0 \neq 1$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{\bar{z}_0}{r_0} \neq 1$  である.

以上 2 つの議論を合わせると  $e^{s_n Y} e^{r_n Z_n} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K \implies 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n \neq 1$  となり矛盾する.

以上より「 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \implies Y(\mathbf{R} X)$  有界」, したがって 命題 2.2 を得る.

■

命題 2.2 の計算  $\lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| = 0$  を示せば主張が得られる．具体的に計算すると，

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)(1 \pm z_n \tanh |r_n| \tanh s_n)}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|^2} - 1 \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)z'_n - (1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|^2} \quad (*) \end{aligned}$$

である．ここで  $z'_n := 1 \pm z_n \tanh |r_n| \tanh s_n$  とすると，

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)z'_n - (1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|} \end{aligned}$$

であり， $0 < \min |1 \pm \operatorname{Re} z_n| \leq |(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$  と  $\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z_n|\} \leq |-1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|| \leq \sqrt{5}$  であることと  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$  より，

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z_n|\}}{\sqrt{5}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \operatorname{Re} z_n|\}} = 0 \end{aligned}$$

より，(2.1) が成り立つ. ■

## 2.2 $G$ の実階数が 1 の場合

定理 2.5  $G$  を実階数 1 の実半単純 Lie 群， $H$  を  $G$  の非コンパクトな閉部分 Lie 群で， $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対して  $\Theta H = H$  かつ  $\dim \mathfrak{h} = 1$  とするとき，問題 1.3 が成り立つ．

定理 2.6 ([Hel01, p. 409, Theorem 3.1])  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を実半単純 Lie 環  $\mathfrak{g}$  の Cartan 対合  $\theta$  に対する Cartan 分解とし， $\alpha, 2\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  と仮定する． $0 \neq X_\alpha \in$



$\mathfrak{g}_\alpha$ ,  $0 \neq X_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$  を任意に固定したとき,  $X_\alpha, X_{2\alpha}, \theta X_\alpha, \theta X_{2\alpha}$  から生成される Lie 環  $\mathfrak{g}^*$  は  $\mathfrak{su}(2, 1)$  と同型である.

以下で定理 2.6 を示すための補題や記号を設定し, 定理 2.6 を示す.

### 記号と定義 2.7

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  を極大分裂可換部分代数,  $\mathfrak{m} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) := \{W \in \mathfrak{k} \mid [W, \mathfrak{a}] = \{0\}\}$  とする.  $B$  を  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式とする.
- $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  を  $\mathfrak{a}$  に関する制限ルート系とする.  $\mathfrak{g}_\lambda$  を  $\lambda \in \mathfrak{a}^*$  のルート空間とする.
- $Y_\alpha := [\theta X_\alpha, X_{2\alpha}]$  とする.
- $A_\alpha \in \mathfrak{a}$  を, 任意の  $H \in \mathfrak{a}$  に対して  $B(H, A_\alpha) = \alpha(H)$  を満たす元とする. このとき, 任意の  $H \in \mathfrak{a}$  に対して  $B(H, [X_\alpha, \theta X_\alpha]) = \alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$  である. したがって

$$\begin{aligned} [X_\alpha, \theta X_\alpha] &= B(X_\alpha, \theta X_\alpha)A_\alpha, \\ [Y_\alpha, \theta Y_\alpha] &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)A_\alpha, \\ [X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}] &= 2B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})A_\alpha \end{aligned}$$

である.

- $c_\alpha := \sqrt{\frac{-2}{\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)}}$ ,  $c_{2\alpha} := \sqrt{\frac{-2}{\alpha(A_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})}}$  とし,

$$\begin{aligned} X_\alpha^* &:= c_\alpha X_\alpha, \\ X_{2\alpha}^* &:= c_{2\alpha} X_{2\alpha}, \\ Y_\alpha^* &:= [\theta X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = c_\alpha c_{2\alpha} Y_\alpha, \\ A_\alpha^* &:= \frac{1}{12\alpha(A_\alpha)} A_\alpha \end{aligned}$$

とする.

**補題 2.8**  $c := 2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$  とすると,  $[X_\alpha, Y_\alpha] = cX_{2\alpha}$  である. 特に  $0 \neq Y_\alpha \neq X_\alpha$  である.

**補題 2.8** の証明 [Jacobi 恒等式と  \$3\alpha \notin \Sigma\(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}\)\$  による.](#) ■

**補題 2.9**  $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$  である. また  $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], X_\alpha] = -3\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)Y_\alpha$  である.

補題 2.9 の証明  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  より  $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} + \mathfrak{a}$  であり, 任意の  $H \in \mathfrak{a}$  に対して

$$\begin{aligned} B(H, [X_\alpha, \theta Y_\alpha]) &= B([H, X_\alpha], Y_\alpha) = \alpha(H)B(X_\alpha, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]) \\ &= \alpha(H)B([X_\alpha, X_\alpha], X_{2\alpha}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることより  $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m}$  である.

さらに,

$$\begin{aligned} [[\theta X_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] &= -[[Y_\alpha, X_\alpha], \theta X_\alpha] - [[X_\alpha, \theta X_\alpha], Y_\alpha] \\ &= c[X_{2\alpha}, \theta X_\alpha] - B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha \\ &= -cY_\alpha - B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha \\ &= -3\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)Y_\alpha \neq 0 \end{aligned}$$

より,  $\theta[\theta X_\alpha, Y_\alpha] = [X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$  である. ■

補題 2.10  $\mathbf{R} X_\alpha + \mathbf{R} Y_\alpha$  は  $\text{ad}_{\mathfrak{g}}([X_\alpha, \theta Y_\alpha])$  で不変である. さらに

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= -6\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha, \\ [Y_\alpha, \theta Y_\alpha] &= -2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})A_\alpha \end{aligned}$$

である.

補題 2.10 の証明  $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] \in \mathbf{R} X_\alpha$  を示せば, 補題 2.9 と併せて 補題 2.10 が従う.

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= -[[\theta Y_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] - [[Y_\alpha, X_\alpha], \theta Y_\alpha] \\ &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha + c[X_{2\alpha}, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]] \\ &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - c[X_\alpha, [\theta X_{2\alpha}, X_{2\alpha}]] - c[\theta X_{2\alpha}, [X_{2\alpha}, X_\alpha]] \\ &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - cB(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})\alpha(A_{2\alpha})X_\alpha \end{aligned}$$

であり ( $\mathfrak{g}_{3\alpha} = \{0\}$  による),  $A_{2\alpha} = 2A_\alpha$  であるから,

$$[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] = B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha$$

を得る.

さらに,

$$\begin{aligned} B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha) &= B(Y_\alpha, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]) = -B([X_\alpha, Y_\alpha], \theta X_{2\alpha}) \\ &= -2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}) \end{aligned}$$

であるから, 最終的に

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha \\ &= -6\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha \end{aligned}$$

を得る. ■

**補題 2.11**  $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], X_{2\alpha}] = 0$  である.

**補題 2.11** の証明 [補題 2.8–2.10](#) と [Jacobi 恒等式](#) による. ■

**補題 2.12**  $[Y_\alpha, \theta X_{2\alpha}] = 2\alpha(A_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})\theta X_\alpha$  である.

**補題 2.12** の証明 Jacobi 恒等式を用いて与式を変形し計算することにより示せる.

■

**定理 2.6** の証明  $\mathfrak{g}_0^* := \mathbf{R} A_\alpha \oplus \mathbf{R}[X_\alpha, \theta Y_\alpha]$ ,  $\mathfrak{g}_\alpha^* := \mathbf{R} X_\alpha \oplus \mathbf{R} Y_\alpha$ ,  $\mathfrak{g}_{-\alpha}^* := \mathbf{R} \theta X_\alpha \oplus \mathbf{R} \theta Y_\alpha$ ,  $\mathfrak{g}_{2\alpha}^* := \mathbf{R} X_{2\alpha}$ ,  $\mathfrak{g}_{-2\alpha}^* := \mathbf{R} \theta X_{2\alpha}$  とすると, [補題 2.8–2.12](#) より,  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_0^* \oplus \mathfrak{g}_\alpha^* \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}^*$  が示される.

非自明な  $\mathfrak{g}^*$  の Lie 括弧の関係は以下の通りである (残りの関係式はこの両辺に  $\theta$  をつけることで得られる).

$$\begin{aligned}
[X_\alpha^*, Y_\alpha^*] &= -4X_{2\alpha}^*, & (\text{補題 2.8 による}), \\
[X_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] &= -6Y_\alpha^*, & (\text{補題 2.9 による}), \\
[X_\alpha^*, \theta X_\alpha^*] &= -24A_\alpha^*, & (\text{定義による}), \\
[X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] &= 0, & (\mathfrak{g}_{3\alpha} = 0 \text{ による}), \\
[X_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] &= \theta Y_\alpha^*, & (\text{定義による}), \\
[Y_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] &= 0, & (\text{補題 2.11 による}), \\
[Y_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] &= -4\theta X_\alpha^*, & (\text{補題 2.12 による}), \\
[Y_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*] &= -96A_\alpha^*, & (\text{補題 2.10 による}), \\
[Y_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] &= 24X_\alpha^*, & (\text{補題 2.10 による}), \\
[[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*], X_{2\alpha}^*] &= [[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*], \theta X_{2\alpha}^*] = 0, & (\text{補題 2.12 による}), \\
[X_{2\alpha}^*, \theta X_{2\alpha}^*] &= -48A_\alpha^*, & (\text{定義による})
\end{aligned}$$

これらを踏まえて  $\mathfrak{g}^*$  と  $\mathfrak{su}(2, 1)$  の対応を,

$$\begin{aligned}
X_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & X_{2\alpha}^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\
\theta X_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \theta X_{2\alpha}^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\
Y_\alpha^* &\leftrightarrow -2 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, & \theta Y_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & -\sqrt{-1} & -0 \end{pmatrix}, \\
A_\alpha^* &\leftrightarrow \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & [X_\alpha, \theta Y_\alpha^*] &\leftrightarrow -4 \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

でつづける．この対応が Lie 環としての同型であること（上の関係式が満たされること）は計算することにより従う．

以上より定理 2.6 が示された． ■

**補題 2.13**  $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$  の場合，任意に固定した  $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  と  $\theta X_\alpha$  により生成される部分 Lie 環  $\mathfrak{g}'$  は  $\mathfrak{su}(1, 1)$  と同型である．

**補題 2.13** の証明  $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} = \{0\}$  より， $[X_\alpha, X_\alpha] = [X_{-\alpha}, X_{-\alpha}] = 0$  である．

$A_\alpha \in \mathfrak{a}$  を任意の  $H \in \mathfrak{a}$  に対して  $B(H, A_\alpha) = \alpha(H)$  を満たす元とする．任意の  $H \in \mathfrak{a}$  に対して  $B(H, [X_\alpha, \theta X_\alpha]) = \alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$  である．任意の  $0 \neq W \in \mathfrak{g}$  に対し  $-B(W, \theta W) > 0$  より  $[X_\alpha, \theta X_\alpha] = B(X_\alpha, \theta X_\alpha)A_\alpha \neq 0$  である．

以上より  $X_\alpha$  と  $\theta X_\alpha$  により生成される  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 環  $\mathfrak{g}'$  は  $\mathfrak{g}' = \mathbf{R} A_\alpha \oplus \mathbf{R} X_\alpha \oplus \mathbf{R} X_{-\alpha}$  である．

$c_\alpha := \frac{2}{\alpha(A_\alpha)}$  を用いて  $\mathfrak{g}'$  と  $\mathfrak{su}(1, 1)$  の対応を

$$\begin{aligned} A_\alpha &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & c_\alpha X_\alpha &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\ c_\alpha X_{-\alpha} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

により与えると、これは  $\mathfrak{g}'$  と  $\mathfrak{su}(1, 1)$  の間の同型になっている． ■

**系 2.14**  $G$  を実階数 1 の実半単純 Lie 群とする．任意の  $Y \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$  と任意の  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$  を固定したとき、 $X, Y$  を含む部分 Lie 環  $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$  で、 $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$  か  $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$  なるものが存在する．

**系 2.14** の証明  $G$  は実階数 1 より、極大分裂可換部分代数  $\mathfrak{a} := \mathbf{R} Y \subset \mathfrak{g}$  に対しある  $\alpha \in \mathfrak{a}^*$  が存在して  $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$  あるいは  $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$  であるから、それぞれ定理 2.6 と補題 2.13 より系 2.14 の主張が従う．以下で  $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  の形で場合分けしてこの議論を確認する．

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$  の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ,  $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$  より  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$  をこの分解に対応して  $X = X_0 + X_\alpha + X_{-\alpha}$  と分解すると、 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$  より  $X_{-\alpha} = -\theta X_\alpha \neq 0$  である． $Y \in \mathbf{R}[X_\alpha, \theta X_\alpha]$  であるからこの  $X_\alpha \neq 0$  に補題 2.13 を適用することにより  $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$  で  $X, Y \in \mathfrak{g}_0$  なるものが存在する．

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$  の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$ ,  $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$  より  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$  をこの分解に対応して  $X = X_0 + X_\alpha + X_{-\alpha} + X_{2\alpha} + X_{-2\alpha}$  と書くと、 $X \in \mathfrak{p}$  より  $X_{-\alpha} = -\theta X_\alpha$ ,  $X_{-2\alpha} = -\theta X_{2\alpha}$  である．

ここで  $X \notin \mathfrak{a}$  より、

1.  $X_\alpha \neq 0$  かつ  $X_{2\alpha} \neq 0$
2.  $X_\alpha \neq 0$  かつ  $X_{2\alpha} = 0$
3.  $X_\alpha = 0$  かつ  $X_{2\alpha} \neq 0$

のいずれかである.

- 1 の場合はこの  $X_\alpha, X_{2\alpha}$  と  $Y$  に,
- 2 の場合はこの  $X_\alpha$  と, 適当な  $0 \neq X'_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$  と  $Y$  に,
- 3 の場合はこの  $X_{2\alpha}$  と, 適当な  $0 \neq X'_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  と  $Y$  に,

定理 2.6 を適用することにより  $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$  で  $X, Y \in \mathfrak{g}_0$  なるものが存在する.

■

系 2.14 で定めた  $\mathfrak{g}_0$  とその  $G$  における解析部分群  $G_0$  について次の 3 つが成り立つ.

**補題 2.15** [Hel01, p. 409, Lemma 2.2]  $\mathfrak{g}$  の Cartan 対合  $\theta$  に対して  $\mathfrak{g}_0 = \theta \mathfrak{g}_0$  であり,  $\mathfrak{g}_0$  への  $\theta$  の制限は  $\mathfrak{g}_0$  の Cartan 分解を与える.

**補題 2.16** ([Yos38, p. 82]) 系 2.14 の  $\mathfrak{g}_0$  の  $G$  における解析的部分群を  $G_0$  とする.  $G_0$  は  $G$  の閉部分群である.

**補題 2.17** ([Hel01, p. 409, Lemma 2.3]) 系 2.14 の  $\mathfrak{g}_0$  の  $G$  における解析的部分群を  $G_0$  とする.  $G = KAN$  を  $G$  の岩澤分解,  $G_0 = K_0 A_0 N_0$  を  $G$  の岩澤分解とすると,

$$K_0 := G_0 \cap K, \quad A_0 := G_0 \cap A, \quad N_0 := G_0 \cap N,$$

であり,  $G_0/K_0 \simeq G_0/K$  は  $G/K$  の全測地的な部分 Riemann 多様体である.

以上のことを用いて,  $G$  が実階数 1 の場合を  $SU(1, 2)$  ないし  $SU(1, 1)$  に帰着させることにより定理 2.5 を示す.

**定理 2.5 の証明** おそらく  $\dim H = 1$  出ない場合も背理法で示せる気がする.  $\mathfrak{g}$  の極大分裂可換部分代数  $\mathfrak{h}$  の定めるルート系を  $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  とし,  $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  の形によって 2 通りに場合分けして証明する.

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm\alpha\}$  のとき

系 2.14 により  $X$  と  $\mathfrak{h}$  を含む部分 Lie 環  $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$  で  $\mathfrak{su}(1, 1)$  に同型なものが存在する.  $\mathfrak{g}'$  に対応する  $G$  の解析的部分群を  $G'$  とし, その岩澤分解を  $G' = K'A'N'$  とする. このとき  $e^{Z(tX)} \cdot o_K = e^{-Y(tX)}e^{tX} \cdot o_K \in G'/K$  であるから  $Z(tX) \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} \subset$  であり,  $Y(\mathbf{R}X)$  の有界性は全測地的な部分 Riemann 多様体  $G'/K' \subset G/K$  に対して行えば良いことがわかる. したがって命題 1.7 により  $X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd}} \iff X = 0$  あるいは  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  が言え, 定理 2.5 が示された.

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$  のとき

系 2.14 により  $X$  と  $\mathfrak{h}$  を含む部分 Lie 環  $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{g}$  で  $\mathfrak{su}(2, 1)$  に同型なものが存在する.  $\mathfrak{g}^*$  に対応する  $G$  の解析的部分群を  $G^*$  とし, その岩澤分解を  $G^* = K^*A^*N^*$  とする. このとき  $e^{Z(tX)} \cdot o_K = e^{-Y(tX)}e^{tX} \cdot o_K \in G'/K$  であるから  $Z(tX) \in \mathfrak{g}^* \cap \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} \subset$  であり,  $Y(\mathbf{R}X)$  の有界性は全測地的な部分 Riemann 多様体  $G^*/K^* \subset G/K$  に対して行えば良いことがわかる. したがって命題 2.1 により  $X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd}} \iff X = 0$  あるいは  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  が言え, 定理 2.5 が示された.

■

### 2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面

#### 定義 2.18 [Ebe72a, Definition 1.3]

$M$  が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき,  $M$  を Hadamard 多様体といい, Hadamard 多様体  $M$  が visibility manifold であるとは,  $\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$  に対し, ある  $r(p, \varepsilon) > 0$  が存在して, 測地線  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow X$  が任意の  $t \in [t_0, t_1]$  に対し  $d_M(p, \gamma(t)) \geq r(p, \varepsilon)$  を満たすならば,  $\angle_p(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) \leq \varepsilon$  であることである.

後に示すように Poincaré 円板は visibility manifold であるが, 補題 1.10 よりその片鱗を見ることはできる. 具体的には  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  に対し  $t_\varepsilon := \frac{1}{2} \sinh^{-1} \frac{1}{|\tan \varepsilon|}$  とし, 測地線  $\gamma_\varepsilon(s) = e^{t_\varepsilon Y} e^{sZ} \cdot o_K$  とすると, 補題 1.10 より任意の  $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$  に対し  $\angle_{o_K}(\gamma_\varepsilon(s_0), \gamma_\varepsilon(s_1)) \leq \varepsilon$  である. この様子を図示すると図 5 のようになる.

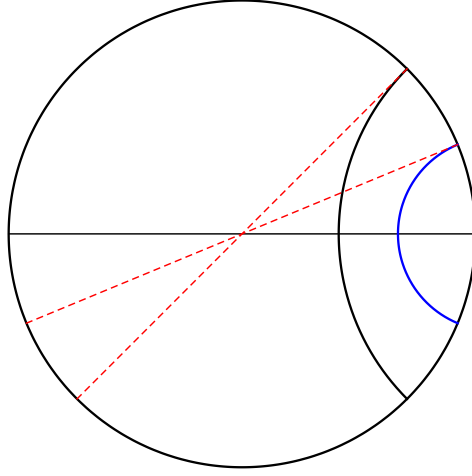


図 5: visibility manifold のイメージ

**定理 2.19** [BH99, p. 296, 9.33 Theorem], originally [Ebe72b, Theorem 4.1]

$\exists C \subset M$  s.t.  $M = \bigcup_{\text{cpt.}} \{f(C) \mid f \in \text{Isom}(M)\}$  なる Hadamard 多様体  $M$  に対し, 次は同値である.

- (i)  $M$  は visibility manifold である.
- (ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体  $M' \subset M$  で  $\mathbf{R}^2$  と等長同型なものが存在しない.

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり, 定理 2.19 の (ii) は  $G$  の実階数が 1 以下であることと同値である. したがって  $G$  の実階数が 1 の場合  $G/K$  は visibility manifold であり,  $G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合の証明と全く同様にして背理法により問題 1.3 が示される.

### 2.3 $G$ が実階数 1 の実半単純 Lie 群の直積の場合

定理 2.5 の系として次が示される.

**系 2.20**  $n \in \mathbf{N}$  を固定し,  $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$  を実階数 1 の実半単純 Lie 群の族,  $\Theta_i$  を  $G_i$  の Cartan 対合とする.

$G$  を  $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$  の直積からなる Lie 群  $G = G_1 \times \cdots \times G_n$  とし,  $H$  を  $G$  の非



コンパクトな部分 Lie 群で,  $G$  の Cartan 対合  $\Theta: G \rightarrow G$ ,  $G \ni (g_1, \dots, g_n) \mapsto (\Theta_1 g_1, \dots, \Theta_n g_n) \in G$  に対して  $\Theta H = H$  で  $\dim \mathfrak{h} = 1$  なるものとする. このとき問題 1.3 が成り立つ.

系 2.20 の証明 各  $G_i$  を  $G$  の部分 Lie 群と自然にみなす. このとき  $H_i := G_i \cap H$  とすると,  $H \simeq H_1 \times \dots \times H_n$  である. 同様に  $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}_i$  とみなすと  $\mathfrak{h}_i := \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{h}$  は  $H_i$  の Lie 環である.

$K_i$  を  $\Theta K_i = K_i$  なる  $G_i$  の極大コンパクト部分群とすると,  $K := K_1 \times \dots \times K_n$  は  $G$  の極大コンパクト部分群で  $\Theta K = K$  を満たす.

$G/K \simeq G_1/K_1 \times \dots \times G_n/K_n$  であり, 定理 1.2 により各  $1 \leq i \leq n$  の  $(G_i, H_i, \Theta_i)$  に対し上への微分同相  $\pi_i: (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i) \oplus (\mathfrak{h}_i^\perp \cap \mathfrak{p}_i) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G_i/K_i$  が存在する.  $X_i \in \mathfrak{p}_i$  に対し  $(Y_i(X_i), Z_i(X_i)) := \pi_i^{-1}(e^{X_i} K_i)$  と定める.

$X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $X = X^{(1)} + \dots + X^{(n)}$  を  $\mathfrak{p} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{p}_i$  に対応する  $X$  の分解とすると,  $Y(\mathbf{R} X)$  が有界であることは各  $Y_i(\mathbf{R} X^{(i)})$  が有界であることと同値である. また定理 2.5 より  $Y_i(\mathbf{R} X^{(i)})$  が有界であることと「 $[X_1^{(i)}, X_2^{(i)}] \neq 0$  あるいは  $X_1^{(i)} = 0$  であること」が同値である. ここで  $X^{(i)} = X_1^{(i)} + X_2^{(i)}$  は  $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i) \oplus (\mathfrak{h}_i^\perp \cap \mathfrak{p}_i)$  に対応する  $X^{(i)} \in \mathfrak{p}_i$  の分解とする.

したがって,  $Y(\mathbf{R} X)$  が非有界であることと「 $[X_1, X_2] = 0$  かつ  $X_1 \neq 0$  であること」が同値であり, 系 2.20 が示された. ■

### 3 $G$ の実階数が 2 の場合

$G$  の実階数が 2 のとき問題 1.3 には次の反例が存在する.

命題 3.1  $G = SL(3, \mathbf{R})$ ,  $H = \{\text{diag}(e^a, e^b, e^c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0\}$ ,

$X := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$  に対し  $Y(\mathbf{R} X)$  は非有界である.

$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0\}$  であるから  $X_1 = \text{diag}(1, 0, -1)$ ,

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ であり, } [X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ より } X \text{ は (1.1)}$$

の右辺の集合の元ではあるが  $X \notin \mathfrak{p}_{H, \text{bdd}}$  であるから, 命題 3.1 は問題 1.3 の反例となっている.

1 つ補題を用意してから命題 3.1 を証明する.

**補題 3.2** 任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対し

$$\exp\left(2t \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{3} & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} & \frac{e^{2t} + 2e^{-4t}}{3} \end{pmatrix}$$

である.

**補題 3.2** の証明  $\theta$  を  $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$ ,  $\sin 2\theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$  を満たす実数として任意に 1 つ固定する. このとき

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{2}{3}, \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である.  $k := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  とすると,

$$\begin{aligned} k \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} k^{-1} &= \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta & \sqrt{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \cos \theta \sin \theta \\ \sqrt{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \cos \theta \sin \theta & 2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin 2\theta - \sin^2 \theta & \sqrt{2} \cos 2\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \\ \sqrt{2} \cos 2\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} & \sqrt{2} \sin 2\theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

したがって

$$k \exp \left( 2t \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \right) k^{-1} = \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -4t \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \exp \left( 2t \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \right) &= k^{-1} \exp \left( \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -4t \end{pmatrix} \right) k \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} \cos^2 \theta + e^{-4t} \sin^2 \theta & (e^{-4t} - e^{2t}) \sin \theta \cos \theta \\ (e^{-4t} - e^{2t}) \sin \theta \cos \theta & e^{2t} \sin^2 \theta + e^{-4t} \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{3} & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} & \frac{e^{2t} + 2e^{-4t}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

**命題 3.1 の証明** 行列式 1 の  $3 \times 3$  正定値実対称行列全体の集合  $\text{Symm}^+(3)$  と  $G/K$

は  $gK \mapsto g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t g$  により微分同相である.

補題 3.2 より

$$\begin{aligned} e^{tX} \cdot o_K &= e^{tX} {}^t(e^{tX}) = e^{2tX} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{3} & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} & \frac{e^{2t} + 2e^{-4t}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

である.

$$Y := \text{diag}(a, b, c), \quad a + b + c = 0, \quad Z := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とすると, } r \in \mathbf{R} \text{ に対し,}$$

$$\begin{aligned} e^Y e^{rZ} \cdot o_K &= e^Y e^{2rZ} e^Y \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2r & \sinh 2r \\ 0 & \sinh 2r & \cosh 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2b} \cosh 2r & e^{b+c} \sinh 2r \\ 0 & e^{b+c} \sinh 2r & e^{2c} \cosh 2r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2b} \cosh 2r & e^{-a} \sinh 2r \\ 0 & e^{-a} \sinh 2r & e^{-2a-2b} \cosh 2r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

である．ただし最後の変形には  $a + b + c = 0$  を用いた．

(3.1) と (3.2) を見比べると,

$$\begin{aligned} a &= t, \\ \sinh 2r &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \sinh 3t, \\ e^{2b} &= \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{\sqrt{9 + 8 \sinh^2 3t}} \end{aligned}$$

とすると  $e^Y e^{rZ} \cdot o_K = e^{tX} \cdot o_K$  を得る．つまり任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対し

- $Y(tX) = \text{diag}(a(t), b(t), -a(t) - b(t))$   
ただし  $a(t) = t$ ,  $b(t) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{\sqrt{9 + 8 \sinh^2 3t}} \right)$ ,
- $Z(tX) = r(t)Z$  ただし  $r(t) = \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \sinh 3t \right)$

であるから,  $Y(\mathbf{R}X)$  は非有界である. ■

## 参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.
- [BBE85] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203.
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer, 1999.
- [Borel–Ji] A. Borel and L. Ji, *Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006.
- [Ebe72a] P. Eberlein, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, 1972, pp. 492–510.
- [Ebe72b] P. Eberlein, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, 1972, pp. 151–70.
- [EO73] P. Eberlein and B. O’Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109.
- [Hel84] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis—Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 83, AMS, 1984.
- [Hel01] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.
- [Yos37] K. Yosida, *A problem concerning the second fundamental theorem of Lie*, Proc. Imp. Acad., Vol. 13, No. 5, 1937, pp. 152–155.

[Yos38] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*,  
Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.