

2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号	<u>45-196010</u>
フリガナ	オクダ タカコ
氏名	<u>奥田 堯子</u>

# 目次

導入 . . . . .	2
謝辞 . . . . .	2
1 設定と基本的な補題 . . . . .	3
1.1 記号の設定 . . . . .	3
2 具体例と主定理の証明 . . . . .	3
2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群 . . . . .	3
2.2 $G$ の実階数が 1 の場合 . . . . .	6
参考文献 . . . . .	6

## 導入

$G$  を非コンパクトな実半単純 Lie 群,  $H$  を  $G$  の部分 Lie 群で,  $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対して  $H = \Theta H$  を満たすものとする.  $K$  を  $G$  の極大コンパクト部分群で  $K = \Theta K$  なるものとするとき,  $G/K$  は  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式  $B$  から定まる Riemann 計量によって Riemann 多様体の構造を持つ.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\Theta$  の微分  $d\Theta$  による  $\mathfrak{g}$  の Cartan 分解とすると,  $G/K$  は  $\mathfrak{p}$  と微分同相であり,  $eK$  を通る  $G/K$  の極大測地線は  $B(X, X) = 1$  なる  $X \in \mathfrak{p}$  によって  $e^{tX}K$ ,  $t \in \mathbf{R}$  と書ける. 測地線  $e^{tX}K$  の  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  成分と  $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  成分への分解を与える定理として次の定理が知られている.

定理 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$  は上への微分同相である.

この定理を用いると  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  と定義できる.

## 謝辞

# 1 設定と基本的な補題

## 1.1 記号の設定

本論文の基本的な設定は次のとおりであり、この他に必要な条件は都度明示することとする。

### 記号と定義 1.1

- $G$  を非コンパクト実半単純 Lie 群,  $H$  を  $G$  の部分 Lie 群で,  $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対して  $\Theta H = H$  なるものとする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$ ,  $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$  とし,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\theta := d\Theta$  による Cartan 分解とする.
- $e$  を  $G$  の単位元とし,  $o_K := eK \in G/K$  とする.
- $B(-, -)$  を  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式とし,  $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid \text{任意の } Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \text{ に対して } B(Y, W) = 0\}$  とする.

以下の定理 1.2 を用いて,  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  と定義する.

### 定理 1.2 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$  は上への微分同相である.

ここで,  $Y(\mathbf{R} X)$  の有界性について, 次の予想が小林俊行氏によって立てられた.

### 予想 1.3 (by T. Kobayashi)

ベクトル空間としての分解  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$  に対応して  $X = X_1 + X_2$  と分解すると,  $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ or } X_1 = 0\}$  である.

ここで,  $Z(\mathbf{R} X)$  の有界性については次の定理が知られている.

### 定理 1.4 [Kob97, Lemmma 5.4]

$X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$  である.

ここに  $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$  は  $X$  と  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の元がなす角度の最小値  $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$  であり,  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$  である.

つまり  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  ならば  $\|Z(tX)\| \rightarrow \infty$ ,  $|t| \rightarrow \infty$  である.

## 2 具体例と主定理の証明

### 2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

命題 2.1  $G = SO(1, n)$ ,  $SU(1, n)$ ,  $Sp(1, n)$ ,  $H = SO(1, 1)$ ,  $n \geq 2$  に対して予想 1.3 は正しい.

$G = Sp(1, 2)$ ,  $\mathfrak{h} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  の場合にのみ示す. その他の場合も全く同様の議論である.

**命題 2.2**  $G = Sp(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$ ,  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $Y(\mathbf{R} X)$  が有界  $\iff X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  or  $X = 0$  である.

ただし,  $H$  は  $G$  の左上に入っている. すなわち,  $\text{Lie } H = \mathfrak{h} = \mathbf{R} A$ ,  $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とする.

**記号と定義 2.3**  $\mathbf{H}$  を四元数体とする.  $Sp(1, 2)/Sp(1) \times Sp(2) \simeq \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\} =: \mathbf{H}\mathbb{H}^2$  である. これは自然表現  $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^2$  の  ${}^t(1, 0, 0)$  軌道を考え, 第 2, 第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が  $\mathbf{H}\mathbb{H}^2$  と微分同相であるためであり,  $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^3$  の  ${}^t(1, 0, 0)$  軌道の点  $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  に対応する  $\mathbf{H}\mathbb{H}^2$  の点を  $\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 z_0^{-1} \\ z_2 z_0^{-1} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$  と書く.

愚直な行列計算により, 次が示される.

$$\text{補題 2.4 } \forall z, w \in \mathbf{H} \text{ に対し, } \exp \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & * & * \\ \frac{\bar{z}}{r} \sinh r & * & * \\ \frac{\bar{w}}{r} \sinh r & * & * \end{pmatrix}, \text{ ただし } r := \sqrt{|z|^2 + |w|^2},$$

である.

**命題 2.2 の証明**

$X = 0 \Rightarrow Y(\mathbf{R} X) = \{0\}$  と  $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$  のときに  $Y(\mathbf{R} X)$  が非有界であることは明らかであるから,  $X \notin \mathfrak{h}$  の場合にのみ議論すればよい. つまり  $X = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ ,

$z, w \in \mathbf{H}$  s.t.  $|z|^2 + |w|^2 = 1$  を任意に 1 つ固定して議論して一般性を失わない. このとき,  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  より  $\text{Re } z \neq \pm 1$  であることに注意する ( $\text{Re}: \mathbf{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto a \in \mathbf{R}$  とする).

$G$  の Cartan 対合を  $\Theta(g) = (g^*)^{-1}$  ( $g^*$  は  $g$  の共役転置) とするとき,  $\Theta(e^{Y(tX)} e^{Z(tX)}) \cdot o_K = e^{-Y(tX)} e^{-Z(tX)} \cdot o_K = \Theta(e^X) \cdot o_K = e^{-X} \cdot o_K$  より, 「 $Y(\mathbf{R} X)$  が非有界  $\iff Y(\mathbf{R} X) \subset \mathbf{R} A$  が上に非有界」である.

したがって,  $Y(\mathbf{R} X)$  が非有界であるとき, 列  $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$  で,  $s_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , ただし  $Y(t_n X) = s_n A$ , なるものが存在する.

このとき,  $\{|t_n|\}_{n \in \mathbf{N}}$  が有界  $\iff \{e^{t_n X} \cdot o_K\}_{n \in \mathbf{N}}$  が有界ならば,  $G/K \ni e^X \cdot o_K \mapsto (Y(X), Z(X)) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ ,  $X \in \mathfrak{p}$  が微分同相であることから  $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  も有界である. 従って対偶より  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \rightarrow \infty$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n| \rightarrow \infty$  である.

補題 2.4 より,

$$\begin{aligned} e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K &= \begin{pmatrix} \cosh s_n & \sinh s_n & 0 \\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm \bar{z} \tanh |t_n| \\ \pm \bar{w} \tanh |t_n| \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n \\ \pm \bar{w} \tanh |t_n| \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

複号は  $t_n$  の符号  $\pm$  と同順, である. このとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh s_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh |t_n|$  と  $\operatorname{Re} z \neq \pm 1$  に注意すると次を得る. 具体的な計算は後述する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n)^{-1} = 1 \quad (2.1)$$

である.

したがって,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルと,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から

$\begin{pmatrix} (\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n)^{-1} \\ * \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルがなす Euclidean な内積の値を  $I_n$  とすると,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$  である.

しかし,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルと,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $e^{W(t_n X)} \cdot o_K \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルがなす Euclidean な内積の値  $J_n$  は,

$$W(t_n X) \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & 0 & 0 \\ \bar{z}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, \text{ \& } \operatorname{Re} z_1 = 0 \right\} \text{ であることと, 補題 2.4 から } \operatorname{Re} J_n =$$

0 となり,  $e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K \implies \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 1$  に矛盾する.

以上より 「 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \implies Y(\mathbf{R} X)$  有界」, したがって 命題 2.2 を得る. ■

命題 2.2 の計算:

具体的に計算すると,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| \quad (\text{これが } = 0 \text{ を示せば良い}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\tanh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n|)(1 \pm \bar{z} \tanh |t_n| \tanh s_n)}{|(1 \pm \bar{z} \tanh |t_n| \tanh s_n)|^2} - 1 \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n|)z' - (1 \pm \bar{z} \tanh |t_n| \tanh s_n)z'|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh |t_n| \tanh s_n)|^2}, \quad z' := 1 \pm \bar{z} \tanh |t_n| \tanh s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh |t_n|)z'|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh |t_n| \tanh s_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh |t_n|)|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh |t_n| \tanh s_n)|} \end{aligned}$$

であり,  $0 < \min |1 \pm \operatorname{Re} z| \leq |(1 \pm \bar{z} \tanh |t_n| \tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$  と  $\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z|\} \leq$

$|-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|| \leq \sqrt{5}$  であることから,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z|\}}{\sqrt{5}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n||)|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \operatorname{Re} z|\}} = 0 \end{aligned}$$

より, (2.1) が成り立つ.

## 2.2 $G$ の実階数が 1 の場合

**定理 2.5**  $G$  を実階数 1 の実半単純 Lie 群とすると, 予想 1.3 が成り立つ.

**定義 2.6** [Ebe72a, Definition 1.3]

$M$  が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき,  $M$  を Hadamard 多様体といい, Hadamard 多様体  $M$  が visibility manifold であるとは,  $\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$  に対し, ある  $r(p, \varepsilon) > 0$  が存在して, 測地線  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow X$  が  $d_M(p, \gamma(t)) \geq r(p, \varepsilon), \forall t \in [t_0, t_1]$  ならば,  $\angle_p(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) \leq \varepsilon$  であることである.

[図を入れる](#)

**定理 2.7** [BH99, p. 296, 9.33 Theorem], originally [Ebe72b, Theorem 4.1]

$\exists C \subset M$  s.t.  $M = \bigcup_{\text{cpt.}} \{f(C) \mid f \in \operatorname{Isom}(M)\}$  なる Hadamard 多様体  $M$  に対し, 次は同値である.

- (i)  $M$  は visibility manifold である.
- (ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体  $M' \subset M$  で  $\mathbf{R}^2$  と等長同型なものがない.

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり, 定理 2.7 の (ii) は  $G$  の実階数が 1 以下であることと同値である. したがって  $G$  の実階数が 1 の場合  $G/K$  は visibility manifold であり,  $G = SU(1, 2), H = SO(1, 1)$  の場合の証明と全く同様にして背理法により予想 1.3 が示される.

## 参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710
- [BBE85] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer, 1999
- [Borel–Ji] A. Borel and L. Ji, *Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006

- [**Ebe72a**] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, pp. 492–510, 1972
- [**Ebe72b**] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, pp. 151–70, 1972
- [**EO73**] P. Eberlein and B. O’Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109
- [**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54