2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号　45-196010
フリガナ　オクダ タカコ
氏名　奥田 堯子

目次

序 2

謝辞 2

1 設定と基本的な補題 3

1.1 記号の設定 3

2 具体例と主定理の証明 3

2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群 3

2.2 G の実階数が 1 の場合 6

参考文献 6

序

This is a placeholder e^{tX}

謝辞

1　設定と基本的な補題

1.1　記号の設定

本論文の基本的な設定は次のとおりであり，この他に必要な条件は都度明示することとする．

記号と定義 1.1

- G を非コンパクト実半単純 Lie 群，H を G の部分 Lie 群で，G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ なるものとする．
- $\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G$, $\mathfrak{h} := \operatorname{Lie} H$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする．
- e を G の単位元とし，$o_K := eK \in G/K$ とする．
- $B(-,-)$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とし，$\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid \text{任意の } Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \text{ に対して } B(Y, W) = 0\}$ とする．

以下の定理 1.2 を用いて，$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義する．

定理 1.2 [**Kob89, Lemma 6.1**]

$\pi \colon (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である．

ここで，$Y(\mathbf{R}\, X)$ の有界性について，次の予想が小林俊行氏によって立てられた．

予想 1.3 (by T. Kobayashi)

ベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応して $X = X_1 + X_2$ と分解すると，$\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ or } X_1 = 0\}$ である．

ここで，$Z(\mathbf{R}\, X)$ の有界性については次の定理が知られている．

定理 1.4 [**Kob97, Lemmma 5.4**]

$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ である．

ここに $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ は X と $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の元がなす角度の最小値 $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$ であり，$X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$ である．

つまり $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ ならば $\|Z(tX)\| \to \infty$，$|t| \to \infty$ である．

2　具体例と主定理の証明

2.1　具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

命題 2.1 $G = SO(1, n)$，$SU(1, n)$，$Sp(1, n)$，$H = SO(1, 1)$，$n \geq 2$ に対して予想 1.3 は正しい．

$G = Sp(1, 2)$，$\mathfrak{h} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合にのみ示す．その他の場合も全く同様の議論である．

命題 2.2 $G=Sp(1,2)$，$H=SO(1,1)$，$X\in\mathfrak{p}$ に対し，$Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界 $\iff$ $X\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h}$ or $X=0$ である．

ただし，H は G の左上に入っている．すなわち，$\mathrm{Lie}\,H=\mathfrak{h}=\mathbf{R}\,A$，$A:=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ とする．

記号と定義 2.3 $\mathbf{H}$ を四元数体とする．$Sp(1,2)/Sp(1)\times Sp(2)\simeq\{(z_1,z_2)\mid z_1,z_2\in\mathbf{H},\ |z_1|^2+|z_2|^2<1\}=:\mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ である．これは自然表現 $Sp(1,2)\curvearrowright\mathbf{H}^2$ の ${}^t(1,0,0)$ 軌道を考え，第 2，第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が $\mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ と微分同相であるためであり，$Sp(1,2)\curvearrowright\mathbf{H}^3$ の ${}^t(1,0,0)$ 軌道の点 $\begin{pmatrix}z_0\\z_1\\z_2\end{pmatrix}$ に対応する $\mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ の点を $\left[\begin{pmatrix}z_0\\z_1\\z_2\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}1\\z_1z_0^{-1}\\z_2z_0^{-1}\end{pmatrix}\right]$ と書く．

愚直な行列計算により，次が示される．

補題 2.4 $\forall z,w\in\mathbf{H}$ に対し，$\exp\begin{pmatrix}0&z&w\\\overline{z}&0&0\\\overline{w}&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh r&*&*\\\frac{\overline{z}}{r}\sinh r&*&*\\\frac{\overline{w}}{r}\sinh r&*&*\end{pmatrix}$，ただし $r:=\sqrt{|z|^2+|w|^2}$，である．

命題 2.2 の証明

$X=0\Rightarrow Y(\mathbf{R}\,X)=\{0\}$ と $X\in\mathfrak{h}\setminus\{0\}$ のときに $Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界であることは明らかであるから，$X\notin\mathfrak{h}$ の場合にのみ議論すればよい．つまり $X=\begin{pmatrix}0&z&w\\\overline{z}&0&0\\\overline{w}&0&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h}$，$z,w\in\mathbf{H}$ s.t. $|z|^2+|w|^2=1$ を任意に 1 つ固定して議論して一般性を失わない．このとき，$X\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h}$ より $\mathrm{Re}\,z\neq\pm1$ であることに注意する (Re: $\mathbf{H}\ni a+bi+cj+dk\mapsto a\in\mathbf{R}$ とする)．

G の Cartan 対合を $\Theta(g)=(g^*)^{-1}$ (g^* は g の共役転置) とするとき，$\Theta(e^{Y(tX)}e^{Z(tX)})\cdot o_K=e^{-Y(tX)}e^{-Z(tX)}\cdot o_K=\Theta(e^X)\cdot o_K=e^{-X}\cdot o_K$ より，「$Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界 $\iff$ $Y(\mathbf{R}\,X)\subset\mathbf{R}\,A$ が上に非有界」である．

したがって，$Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界であるとき，列 $\{t_n\in\mathbf{R}\}_{n\in\mathbf{N}}$ で，$s_n\to\infty$, $n\to\infty$，ただし $Y(t_nX)=s_nA$，なるものが存在する．

このとき，$\{|t_n|\}_{n\in\mathbf{N}}$ が有界 $\iff$ $\{e^{t_nX}\cdot o_K\}_{n\in\mathbf{N}}$ が有界ならば，$G/K\ni e^X\cdot o_K\mapsto(Y(X),Z(X))\in(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p})\oplus(\mathfrak{h}^\perp\cap\mathfrak{p})$，$X\in\mathfrak{p}$ が微分同相であることから $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ も有界である．従って対偶より $\lim_{n\to\infty}s_n\to\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty}|t_n|\to\infty$ である．

補題 2.4 より，

$$
\begin{aligned}
e^{s_nA}e^{Z(t_nX)}\cdot o_K &= \begin{pmatrix}\cosh s_n & \sinh s_n & 0\\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1\\ \pm\overline{z}\tanh|t_n|\\ \pm\overline{w}\tanh|t_n|\end{pmatrix}\right]\\
&= \left[\begin{pmatrix}\cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n\\ \sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n\\ \pm\overline{w}\tanh|t_n|\end{pmatrix}\right],
\end{aligned}
$$

複号は t_n の符号 $\pm$ と同順，である．このとき $\lim_{n\to\infty}\tanh s_n = 1 = \lim_{n\to\infty}\tanh|t_n|$ と $\operatorname{Re} z \neq \pm 1$ に注意すると次を得る．具体的な計算は後述する．

$$
\lim_{n\to\infty}(\sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n)^{-1} = 1 \tag{2.1}
$$

である．

したがって，$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルと，$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix}(\sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n)^{-1}\\ *\end{pmatrix}\in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値を I_n とすると，$\lim_{n\to\infty} I_n = 1$ である．

しかし，$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルと，$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $e^{W(t_nX)}\cdot o_K \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値 J_n は，$W(t_nX)\in\left\{\begin{pmatrix}0 & z_1 & z_2\\ \overline{z_1} & 0 & 0\\ \overline{z_2} & 0 & 0\end{pmatrix}\,\middle|\, z_1, z_2 \in \mathbf{H},\ \&\ \operatorname{Re} z_1 = 0\right\}$ であることと，補題 2.4 から $\operatorname{Re} J_n = 0$ となり，$e^{s_nA}e^{Z(t_nX)}\cdot o_K = e^{t_nX}\cdot o_K \implies \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n = 1$ に矛盾する．

以上より「$X\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h} \Rightarrow Y(\mathbf{R}\,X)$ 有界」，したがって 命題 2.2 を得る．

■

命題 2.2 の計算:

具体的に計算すると，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left|(\sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n)^{-1} - 1\right| \qquad (\text{これが} = 0 \text{ を示せば良い})\\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\tanh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|)(1 \pm z\tanh|t_n|\tanh s_n)}{|(1\pm\overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|^2} - 1\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|(\tanh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|)z' - (1\pm\overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)z'|}{|(1\pm\overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|^2}, \qquad z' := 1 \pm z\tanh|t_n|\tanh s_n\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|(1-\tanh s_n)(-1\pm\overline{z}\tanh|t_n|)z'|}{|(1\pm\overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|^2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|(1-\tanh s_n)(-1\pm\overline{z}\tanh|t_n|)|}{|(1\pm\overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|}
\end{aligned}
$$

であり，$0 < \min|1\pm\operatorname{Re} z| \leq |(1\pm\overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ と $\min\{|-1\pm\operatorname{Re} z|\} \leq$

$|-1 \pm \bar{z}\tanh|t_n|| \leq \sqrt{5}$ であることから，

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty}(1-\tanh s_n)\frac{\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z|\}}{\sqrt{5}} &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{|(1-\tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}\tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \bar{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|} \\ &\leq \lim_{n\to\infty}(1-\tanh s_n)\frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \operatorname{Re} z|\}} = 0 \end{aligned}$$

より，(2.1) が成り立つ．

2.2 G の実階数が 1 の場合

定理 2.5 G を実階数 1 の非コンパクト実半単純 Lie 群とするとき，予想 1.3 が成り立つ．

定義 2.6 [**Ebe72a, Definition 1.3**]

M が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき，M を Hadamard 多様体といい，Hadamard 多様体 M が visibility manifold であるとは，$\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$ に対し，ある $r(p,\varepsilon) > 0$ が存在して，測地線 $\gamma\colon [t_0,t_1] \to X$ が $d_M(p,\gamma(t)) \geq r(p,\varepsilon)$，$\forall t \in [t_0,t_1]$ ならば，$\measuredangle_p(\gamma(t_0),\gamma(t_1)) \leq \varepsilon$ であることである．

図を入れる

定理 2.7 [**BH99, p. 296, 9.33 Theorem**], originally [**Ebe72b, Theorem 4.1**]

$\exists C \underset{\text{cpt.}}{\subset} M$ s.t. $M = \bigcup\{f(C) \mid f \in \operatorname{Isom}(M)\}$ なる Hadamard 多様体 M に対し，次は同値である．

(i) M は visibility manifold である．

(ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体 $M' \subset M$ で $\mathbf{R}^2$ と等長同型なものが存在しない．

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり，定理 2.7 の (ii) は G の実階数が 1 以下であることと同値である．したがって G の実階数が 1 の場合 G/K は visibility manifold であり，$G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合の証明と全く同様にして背理法により予想 1.3 が示される．

参考文献

[**Ber88**] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710

[**BBE85**] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203

[**BH99**] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Grundlehren der mathematischen Wissensschaften, Vol. 319, Springer, 1999

[**Borel–Ji**] A. Borel and L. Ji, Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006

[**Ebe72a**] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, pp. 492–510, 1972

[**Ebe72b**] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, pp. 151–70, 1972

[**EO73**] P. Eberlein and B. O'Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109

[**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.

[**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant mesures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54