2021年度

修士論文題目

Riemann対称空間上における測地線の簡約部分Lie代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号 45-196010

フリガナ オクダ タカコ

氏名 奥田 堯子

目次

導入

G を非コンパクトな実半単純 Lie 群，K を G の極大コンパクト部分群で G の Cartan 対合 Θ に対して $K=\Theta K$ なるものとするとき，G/K は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B から定まる Riemann 計量によって Riemann 多様体の構造を持つ．$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を Θ の微分 $d\Theta$ による $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とするとき，G/K は $\mathfrak{p}$ と微分同相であり，G の単位元の G/K での像 eK を通る G/K の極大測地線は $B(X,X)=1$ なる $X\in\mathfrak{p}$ によって $e^{tX}K$，$t\in\mathbf{R}$ と書ける．H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で，$H=\Theta H$ を満たすものとし，$\mathfrak{p}$ での B に対する $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ の直交補空間を $\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p}$ とする．測地線 $e^{tX}K$ の $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ 成分と $\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p}$ 成分への分解を与える定理として次の定理が知られている．

定理 [**Kob89, Lemma 6.1**]

$\pi\colon(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p})\oplus(\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p})\ni(Y,Z)\mapsto e^{Y}e^{Z}K\in G/K$ は上への微分同相である．

この定理を用いて $X\in\mathfrak{p}$ に対し，$(Y(X),Z(X)):=\pi^{-1}(e^{X}\cdot K)\in(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p})\oplus(\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p})$ と定義すると，任意の $t\in\mathbf{R}$ に対して $e^{tX}K=e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}K$ である．

$G=SU(1,1)$，$H=SO(1,1)$ とするとき，$t\in\mathbf{R}$ に対し，$Y(tX)$ は図 1 に図示するような幾何学的な意味を持つ．図 1 は Poincaré 円板における測地線 $e^{tX}K$ (赤色の斜め線) とその上の一点 $e^{tX}K$ から eK の H 軌道 (中央の直線) に下ろした垂線の足 (緑の丸) が $e^{Y(tX)}K$ である．

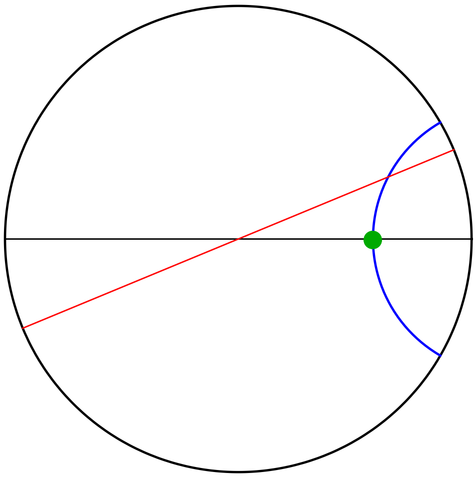

図 1: Poincaré 円板における $Y(tX)$ の幾何学的意味

本論文では小林俊行氏による次の予想について考察し，G が実階数 1 の場合の肯定的な結果を得た．

予想 $Y(\mathbf{R}\,X)$ は $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ の有界な部分集合である $\iff$ $[X_1, X_2] \neq 0$ であるか $X_1 = 0$ である．

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}^{\perp})$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする．

謝辞

1　設定と基本的な補題

1.1　記号の設定

本論文の基本的な設定は次のとおりであり，この他に必要な条件は都度明示することとする．

記号と定義 1.1

- G を非コンパクト実半単純 Lie 群，H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で，G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ なるものとする．
- $\mathfrak{g} \coloneqq \mathrm{Lie}\, G$, $\mathfrak{h} \coloneqq \mathrm{Lie}\, H$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta \coloneqq d\Theta$ による Cartan 分解とする．
- e を G の単位元とし，$o_K \coloneqq eK \in G/K$ とする．
- $B(-,-)$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とし，$\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p} \coloneqq \{W \in \mathfrak{p} \mid$ 任意の $Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ に対して $B(Y, W) = 0\}$ とする．

以下の定理 1.2 を用いて，$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$(Y(X), Z(X)) \coloneqq \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p})$ と定義する．

定理 1.2 [**Kob89, Lemma 6.1**]

$\pi \colon (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である．

ここで，$Y(\mathbf{R}\, X)$ の有界性について，次の予想が小林俊行氏によって立てられた．

予想 1.3 (by T. Kobayashi)

ベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^{\perp})$ に対応して $X = X_1 + X_2$ と分解すると，$\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0$ あるいは $X_1 = 0\}$ である．

予想 1.3 についての基本的な事項を挙げる．

補題 1.4

1. $\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} \subset \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0$ あるいは $X_1 = 0\}$ である．
2. $X \in \mathfrak{p}$ が $X_1 = 0$ を満たすならば $X \in \mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}}$ である．
3. 1，2 より予想 1.3 と「$X \in \mathfrak{p}$ が $[X_1, X_2] \neq 0$ ならば $X \in \mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}}$ である」は同値である．
4. G が実階数 1 のとき，予想 1.3 と「$\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} = \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$」は同値である．

補題 1.4 の証明

1. 背理法による．$[X_1,X_2]=0$ かつ $X_1\neq 0$ なる $X\in\mathfrak{p}$ に対しては $[X_1,X_2]=0$ より $e^{tX_1}e^{tX_2}\cdot o_K=e^{t(X_1+X_2)}\cdot o_K=e^{tX}\cdot o_K$ であり，$Y(tX)=tX_1$，$Z(tX)=tX_2$ であることから $Y(\mathbf{R}\,X)=\mathbf{R}\,X_1$ となり，$X_1\neq 0$ より $Y(\mathbf{R}\,X)$ は有界集合とならない．
2. $X_1=0\iff X\in\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p}$ より $Z(tX)=tX$，$Y(tX)=0$ であることによる．
4. 対偶を示す．$X\in\mathfrak{p}$ に対し，$[X_1,X_2]=0$ かつ $X_1\neq 0\iff X\in\mathfrak{h}\setminus\{0\}$ を示せば良い．G の実階数は 1 で，H は非コンパクトであるから，$\mathfrak{h}\subset\mathfrak{p}$ であり，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間である．よって $X_1\neq 0$ かつ $[X_1,X_2]=0\implies X_2=0$ であり，$X=X_1+X_2\in\mathfrak{h}\setminus\{0\}$ を得る．

■

$Y(\mathbf{R}\,X)$ の有界性は $\mathrm{Ad}(k)$-不変である;

補題 1.5 $k\in K$, $X\in\mathfrak{p}$ に対し, $X':=\mathrm{Ad}(k)X$, $\mathfrak{h}':=\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{h}$ とするとき, $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界 $\iff Y'(\mathbf{R}\,X')$ が有界である．

ここで $Y'(X'),Z'(X')$ を，微分同相 $\pi'\colon(\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{p})\oplus(\mathfrak{h}'^{\perp}\cap\mathfrak{p})\ni(Y',Z')\mapsto e^{Y'}e^{Z'}\cdot o_K$ を用いて，$X'\in\mathfrak{p}$ に対し，$(Y'(X'),Z'(X'))=\pi'^{-1}(e^{X'}\cdot o_K)$ と定める．

補題 1.5 の証明

主張は $(X,\mathfrak{h})$ と $(X',\mathfrak{h}')$ に対して対称的であるから, $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界 $\Rightarrow Y'(\mathbf{R}\,X')$ が有界，のみを示せば十分である．

任意に $r\in\mathbf{R}$ を取る．$e^{rX'}\cdot o_K=e^{Y'(rX')}e^{Z'(rX')}\cdot o_K$ であり，両辺に左から k^{-1} を掛けると，$e^{rX}=e^{\mathrm{Ad}(k^{-1})(Y'(rX'))}e^{\mathrm{Ad}(k^{-1})(Z'(rX'))}\cdot o_K$ を得る．ここで $Y'(rX')\in\mathfrak{h}'\cap\mathfrak{p}$，$Z'(rX')\in\mathfrak{h}'^{\perp}\cap\mathfrak{p}$ であるから $\mathrm{Ad}(k^{-1})(Y'(rX'))\in\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$，$\mathrm{Ad}(k^{-1})(Z'(rX'))\in\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p}$ である．

定理 1.2 により π は微分同相であるから任意の $r\in\mathbf{R}$ に対して $\mathrm{Ad}(k^{-1})(Y'(rX'))=Y(rX)$ であるから，$Y'(\mathbf{R}\,X)=\mathrm{Ad}(k)(Y(\mathbf{R}\,X))$ であり，$\mathrm{Ad}(k)$ は有限次元空間の間の線型写像であるから有界性を保つ．

以上から補題 1.5 が示された．

■

$Z(\mathbf{R}\,X)$ の有界性については次の定理が知られており，有界性の判定は Lie 環の

言葉のみで行える．

定理 1.6 [**Kob97, Lemmma 5.4**]

$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ である．

ここに $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ は X と $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の元がなす角度の最小値 $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$ であり，$X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$ である．

つまり $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ ならば $\|Z(tX)\| \to \infty$，$|t| \to \infty$ である．

1.2　予想 1.3 の観察: $G = SU(1,1)$，$H = SO(1,1)$ の場合

$G = SU(1,1)$，$H = SO(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbf{R} \right\}$ の場合に予想 1.3 が正しいことは直接計算により確かめられる．

命題 1.7 $G = SU(1,1)$，$H = SO(1,1)$ のとき予想 1.3 は正しい．

$\mathfrak{su}(1,1)$ の Killing 形式と $r = \tanh t$ の関係を明記せよ．

命題 1.7 の証明

$k_\theta := \mathrm{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$, $X_\theta := k_{\theta/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_{-\theta/2}$ とすると, $\mathfrak{p} \setminus \{0\} = \{tX_\theta \mid t \in \mathbf{R}_{>0},\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ である．この X_θ と $t \in \mathbf{R}$ に対して $Y(tX_\theta) = s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なる $s \in \mathbf{R}$ を求める．

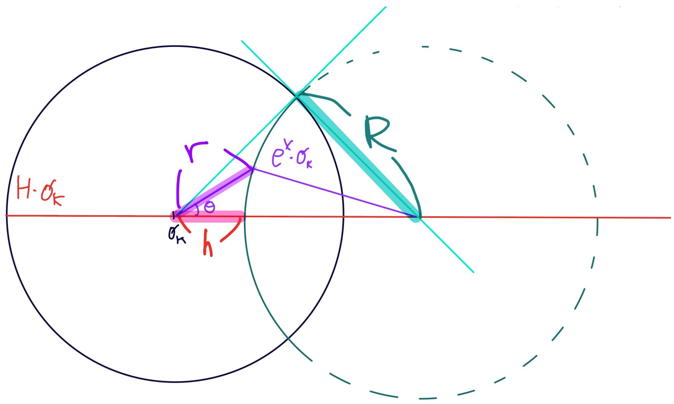

図 2

右の円の Euclid 距離での半径を R とし，$e^{tX_\theta} \cdot o_K$ から $H \cdot o_K$ への垂線の足の o_K からの Euclid 距離を h とするとき，外側の青色の直角三角形に対して三平方の定理を用いて $(h+R)^2 = R^2 + 1$ より $R = \frac{1-h^2}{2h}, R+h = \frac{1+h^2}{2h}$ を得る．

さらに下の紫色の三角形に対して余弦定理を用いて $R^2 = (R+h)^2 + r^2 - 2(R+h)\cos\theta$ を得，$\dfrac{2r\cos\theta}{r^2+1} = \dfrac{2h}{h^2+1} \quad \cdots$ (1.1) を得る．

ここで $r = \tanh t$，$h = \tanh s$ であり (1.1) は $\cos\theta \tanh 2t = \tanh 2s$ と書き直せる．したがって X_θ に対して $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界 $\iff |\cos\theta| \neq 1 \iff X \notin \mathfrak{h}$ である．

■

系 1.8 $G = SO(1,n)$，$H = SO(1,k)$，$1 \leq k \leq n-1$ に対して予想 1.3 は正しい．

系 1.8 の証明

「$e^X \cdot o_K$ と o_K を結ぶ直線」と $H \cdot o_K$ で張られる超平面で Poincaré 球 $SO(1,n)/SO(n)$ を切った際の断面を考える．

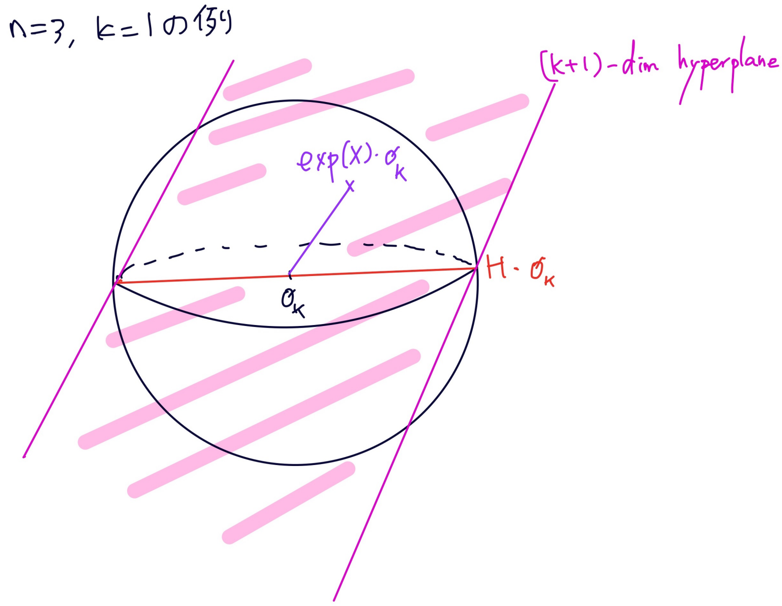

図 3

この断面に現れるのは図 2 と同じであるから，同様の計算により系 1.8 を得る．

■

2　具体例と主定理の証明

2.1　具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

命題 2.1 $G = SO(1,n)$，$SU(1,n)$，$Sp(1,n)$，$H = SO(1,1)$，$n \geq 2$ に対して予想 1.3 は正しい．

$G = Sp(1,2)$，$\mathfrak{h} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合にのみ示す．その他の場合も全く同様の議論である．

命題 2.2 $G = Sp(1,2)$，$H = SO(1,1)$，$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界 $\iff$ $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ or $X = 0$ である．

ただし，H は G の左上に入っている．すなわち，$\mathrm{Lie}\,H = \mathfrak{h} = \mathbf{R}\,A$，$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

記号と定義 2.3 $\mathbf{H}$ を四元数体とする．$Sp(1,2)/Sp(1) \times Sp(2) \simeq \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H},\ |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\} =: \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ である．これは自然表現 $Sp(1,2) \curvearrowright \mathbf{H}^2$ の ${}^t(1,0,0)$ 軌道を考え，第 2，第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が $\mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ と微分同相であるためであり，$Sp(1,2) \curvearrowright \mathbf{H}^3$ の ${}^t(1,0,0)$ 軌道の点 $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ に対応する $\mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ の点を $\left[\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ z_1 z_0^{-1} \\ z_2 z_0^{-1} \end{pmatrix}\right]$ と書く．

愚直な行列計算により，次が示される．

補題 2.4 $\forall z, w \in \mathbf{H}$ に対し，$\exp \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \overline{z} & 0 & 0 \\ \overline{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & * & * \\ \dfrac{\overline{z}}{r} \sinh r & * & * \\ \dfrac{\overline{w}}{r} \sinh r & * & * \end{pmatrix}$，ただし $r := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$，である．

命題 2.2 の証明

$X = 0 \Rightarrow Y(\mathbf{R}\,X) = \{0\}$ と $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のときに $Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界であることは明らかであるから，$X \notin \mathfrak{h}$ の場合にのみ議論すればよい．つまり $X = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \overline{z} & 0 & 0 \\ \overline{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$，$z, w \in \mathbf{H}$ s.t. $|z|^2 + |w|^2 = 1$ を任意に 1 つ固定して議論して一般性を失わない．このとき，$X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ より $\mathrm{Re}\, z \neq \pm 1$ であることに注意する (Re: $\mathbf{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto a \in \mathbf{R}$ とする)．

G の Cartan 対合を $\Theta(g) = (g^*)^{-1}$ (g^* は g の共役転置) とするとき，$\Theta(e^{Y(tX)} e^{Z(tX)}) \cdot o_K = e^{-Y(tX)} e^{-Z(tX)} \cdot o_K = \Theta(e^X) \cdot o_K = e^{-X} \cdot o_K$ より，「$Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界 $\iff$ $Y(\mathbf{R}\,X) \subset \mathbf{R}\,A$ が上に非有界」である．

したがって，$Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界であるとき，列 $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$ で，$s_n \to \infty$, $n \to \infty$，ただし $Y(t_n X) = s_n A$，なるものが存在する．

このとき，$\{|t_n|\}_{n \in \mathbf{N}}$ が有界 $\iff$ $\{e^{t_n X} \cdot o_K\}_{n \in \mathbf{N}}$ が有界ならば，$G/K \ni e^X \cdot o_K \mapsto (Y(X), Z(X)) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$，$X \in \mathfrak{p}$ が微分同相であることから $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ も有界である．従って対偶より $\lim_{n \to \infty} s_n \to \infty$ ならば $\lim_{n \to \infty} |t_n| \to \infty$ である．

補題 2.4 より，

$$
\begin{aligned}
e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K &= \begin{pmatrix} \cosh s_n & \sinh s_n & 0 \\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \pm \overline{z} \tanh |t_n| \\ \pm \overline{w} \tanh |t_n| \end{pmatrix} \right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} \cosh s_n \pm \overline{z} \tanh |t_n| \sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \overline{z} \tanh |t_n| \cosh s_n \\ \pm \overline{w} \tanh |t_n| \end{pmatrix} \right],
\end{aligned}
$$

複号は t_n の符号 $\pm$ と同順，である．このとき $\lim_{n \to \infty} \tanh s_n = 1 =$

$\lim_{n\to\infty}\tanh|t_n|$ と $\mathrm{Re}\, z \neq \pm 1$ に注意すると次を得る．具体的な計算は後述する．

$$\lim_{n\to\infty}(\sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n)^{-1} = 1 \qquad (2.1)$$

である．

したがって，$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルと，$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix}(\sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n)^{-1}\\ *\end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値を I_n とすると，$\lim_{n\to\infty} I_n = 1$ である．

しかし，$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルと，$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ から $e^{W(t_nX)} \cdot o_K \in \mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値 J_n は，$W(t_nX) \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 & z_2 \\ \overline{z_1} & 0 & 0 \\ \overline{z_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, z_1, z_2 \in \mathbf{H},\ \&\ \mathrm{Re}\, z_1 = 0 \right\}$ であることと，補題 2.4 から $\mathrm{Re}\, J_n = 0$ となり，$e^{s_nA}e^{Z(t_nX)} \cdot o_K = e^{t_nX} \cdot o_K \implies \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n = 1$ に矛盾する．

以上より「$X \in \mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h} \Rightarrow Y(\mathbf{R}\,X)$ 有界」，したがって 命題 2.2 を得る．

■

命題 2.2 の計算:

$\lim_{n\to\infty}|(\sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n)^{-1} - 1| = 0$ を示せば主張が得られる．具体的に計算すると，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}|(\sinh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|\sinh s_n)^{-1} - 1| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\tanh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|)(1 \pm z\tanh|t_n|\tanh s_n)}{|(1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|^2} - 1\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|(\tanh s_n \pm \overline{z}\tanh|t_n|)z' - (1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)z'|}{|(1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|^2}, \quad z' := 1 \pm z\tanh|t_n|\tanh s_n \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|)z'|}{|(1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|}
\end{aligned}$$

であり，$0 < \min|1 \pm \mathrm{Re}\, z| \leq |(1 \pm \overline{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ と $\min\{|-1 \pm \mathrm{Re}\, z|\} \leq |-1 \pm \overline{z}\tanh|t_n|| \leq \sqrt{5}$ であることから，

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty}(1-\tanh s_n)\frac{\min\{|-1\pm\mathrm{Re}\,z|\}}{\sqrt{5}} &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{|(1-\tanh s_n)(-1\pm\overline{z}\tanh|t_n|)|}{|(1\pm\overline{z}\tanh|t_n|\tanh s_n)|} \\ &\leq \lim_{n\to\infty}(1-\tanh s_n)\frac{\sqrt{5}}{\min\{|1\pm\mathrm{Re}\,z|\}} = 0 \end{aligned}$$

より，(2.1) が成り立つ．

2.2 G の実階数が 1 の場合

定理 2.5 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群とするとき，予想 1.3 が成り立つ．

2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面

定義 2.6 [**Ebe72a, Definition 1.3**]

M が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき，M を Hadamard 多様体といい，Hadamard 多様体 M が visibility manifold であるとは，$\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$ に対し，ある $r(p,\varepsilon) > 0$ が存在して，測地線 $\gamma\colon [t_0,t_1] \to X$ が $d_M(p,\gamma(t)) \geq r(p,\varepsilon)$，$\forall t \in [t_0,t_1]$ ならば，$\measuredangle_p(\gamma(t_0),\gamma(t_1)) \leq \varepsilon$ であることである．

図を入れる

定理 2.7 [**BH99, p. 296, 9.33 Theorem**], originally [**Ebe72b, Theorem 4.1**]

$\exists C \underset{\text{cpt.}}{\subset} M$ s.t. $M = \bigcup\{f(C) \mid f \in \mathrm{Isom}(M)\}$ なる Hadamard 多様体 M に対し，次は同値である．

(i) M は visibility manifold である．

(ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体 $M' \subset M$ で $\mathbf{R}^2$ と等長同型なものが存在しない．

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり，定理 2.7 の (ii) は G の実階数が 1 以下であることと同値である．したがって G の実階数が 1 の場合 G/K は visibility manifold であり，$G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合の証明と全く同様にして背理法により予想 1.3 が示される．

2.3 G が実階数 1 の群の直積の場合

参考文献

[**Ber88**] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710

[**BBE85**] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203

[**BH99**] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Grundlehren der mathematischen Wissensschaften, Vol. 319, Springer, 1999

[**Borel–Ji**] A. Borel and L. Ji, Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006

[**Ebe72a**] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, pp. 492–510, 1972

[**Ebe72b**] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, pp. 151–70, 1972

[**EO73**] P. Eberlein and B. O'Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109

[**Hel84**] S. Helgason, Groups and Geometric Analysis—Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 83, AMS, 1984

[**Hel01**] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, GSM, Vol. 34, AMS, 2001

[**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.

[**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant mesures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54