

2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号	<u>45-196010</u>
フリガナ	オクダ タカコ
氏名	<u>奥田 堯子</u>

目次

導入	2
謝辞	3
1 設定と射影の基本的な性質, 予想 1.4 の観察	4
1.1 記号の設定	4
1.2 予想 1.4 の観察: $G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ の場合	6
1.3 予想 1.4 の観察: 予想 1.4 の仮定を外した場合の成り立たない例	10
2 具体例と主定理の証明	11
2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群	11
2.2 G の実階数が 1 の場合	15
2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面	21
2.3 G が実階数 1 の実半単純 Lie 群の直積の場合	22
参考文献	23

導入

G を非コンパクトな実半単純 Lie 群, K を G の極大コンパクト部分群で G の Cartan 対合 Θ に対して $K = \Theta K$ なるものとする. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Θ の微分 $d\Theta$ による \mathfrak{g} の Cartan 分解とすると, G/K は \mathfrak{p} と微分同相である. G/K に \mathfrak{g} の Killing 形式 B から定まる Riemann 計量によって Riemann 多様体の構造を定める. G の単位元の G/K での像 eK を通る G/K の極大測地線は $B(X, X) = 1$ なる $X \in \mathfrak{p}$ によって $e^{tX}K$, $t \in \mathbf{R}$ と書ける. H を G の非コンパクトな閉部分群で, $H = \Theta H$ を満たすものとし, $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{g} \mid B(W, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$ とする. 「分解」という言葉の言い回し: 測地線 $e^{tX}K$ の $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ 成分と $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ 成分への分解を与える定理として次の定理が知られている.

定理 ([Kob89, Lemma 6.1]) $\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

この定理を用いて $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義すると, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $e^{tX}K = e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}K$ である.

$G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ とするとき, $t \in \mathbf{R}$ に対し, $Y(tX)$ は図 1 に図示するような幾何学的な意味を持つ. 図 1 は Poincaré 円板における測地線 $e^{tX}K$ (赤色の斜め線) とその上の一点 $e^{tX}K$ から eK の H 軌道 (中央の直線) に下ろした垂線の足 (緑の丸) が $e^{Y(tX)}K$ である.



図 1: Poincaré 円板における $Y(tX)$ の幾何学的意味

本論文では小林俊行氏による次の予想について考察し, G が実階数 1 の場合の肯定的な結果を得た.

予想 $Y(\mathbf{R} X)$ は $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合であることと「 $[X_1, X_2] \neq 0$ であるか $X_1 = 0$ であること」は同値である.

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.

謝辞

1 設定と \mathfrak{h} 射影の基本的な性質, 予想 1.4 の観察

1.1 記号の設定

本論文の基本的な設定は次のとおりであり, この他に必要な条件は都度明示することとする.

記号と定義 1.1

- $\mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$, をそれぞれ 0 を含む自然数全体, 実数全体, 複素数全体, 四元数全体の集合とする.
- G を非コンパクト実半単純 Lie 群, H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で, G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ なるものとする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$, $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e を G の単位元とし, $o_K := eK \in G/K$ とする.
- $B(-, -)$ を \mathfrak{g} の Killing 形式とし, $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{g} \mid B(W, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$ とする.
- $X \in \mathfrak{p}$ に対し, ベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ に対応した分解を $X = X_1 + X_2$, $X_1 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$, $X_2 \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ とする.

以下の定理 1.2 を用いて, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義する.

定理 1.2 ([Kob89, Lemma 6.1]) $\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

ここで, $Y(\mathbf{R} X)$ の有界性について, 次の予想 1.4 が小林俊行氏によって立てられた.

定義 1.3 $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} := \{X \in \mathfrak{p} \mid Y(\mathbf{R} X) \text{ が } \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \text{ の有界集合である.}\}$ と定める.

予想 1.4 (by T. Kobayashi) $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ あるいは } X_1 = 0 \text{ である.}\}$ である.

予想 1.4 についての基本的な事項を挙げる.

補題 1.5

1. $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}} \subset \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ あるいは } X_1 = 0\}$ である.
2. $X \in \mathfrak{p}$ が $X_1 = 0$ を満たすならば $X \in \mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}}$ である.
3. 1, 2 より予想 1.4 と「 $X \in \mathfrak{p}$ が $[X_1, X_2] \neq 0$ ならば $X \in \mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}}$ である」は同値である.
4. G が実階数 1 のとき, 予想 1.4 と「 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}} = \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ 」は同値である.

補題 1.5 の証明

1. 背理法による. $[X_1, X_2] = 0$ かつ $X_1 \neq 0$ なる $X \in \mathfrak{p}$ に対しては $[X_1, X_2] = 0$ より $e^{tX_1}e^{tX_2} \cdot o_K = e^{t(X_1+X_2)} \cdot o_K = e^{tX} \cdot o_K$ である. したがって定理 1.2 より $Y(tX) = tX_1$, $Z(tX) = tX_2$ であることから $Y(\mathbf{R} X) = \mathbf{R} X_1$ となり, $X_1 \neq 0$ より $Y(\mathbf{R} X)$ は有界集合とならない.
2. $X_1 = 0 \iff X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ より $Z(tX) = tX$, $Y(tX) = 0$ であることによる.
4. 同値な命題である「 $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $[X_1, X_2] = 0$ かつ $X_1 \neq 0$ であることと $fX \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ であることは同値である」を示せば良い. G の実階数は 1 で, H は非コンパクトかつ $\Theta H = H$ であるから, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$ であり, \mathfrak{h} は \mathfrak{g} の極大可換部分空間である. よって $X_1 \neq 0$ かつ $[X_1, X_2] = 0 \implies X_2 = 0$ であり, $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ を得る.

■

$Y(\mathbf{R} X)$ の有界性は $\text{Ad}(k)$ -不変である. つまり補題 1.6 が成り立つ.

補題 1.6 $k \in K$, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $X' := \text{Ad}(k)X$, $\mathfrak{h}' := \text{Ad}(k)\mathfrak{h}$ とする. $Y'(X'), Z'(X')$ を, 微分同相 $\pi': (\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y', Z') \mapsto e^{Y'}e^{Z'} \cdot o_K$ を用いて, $X' \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y'(X'), Z'(X')) = \pi'^{-1}(e^{X'} \cdot o_K)$ と定めると, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であることと $Y'(\mathbf{R} X')$ が有界であることは同値である.

補題 1.6 の証明 主張は (X, \mathfrak{h}) と (X', \mathfrak{h}') に対して対称的であるから, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界ならば $Y'(\mathbf{R} X')$ が有界であることのみを示せば十分である.

任意に $r \in \mathbf{R}$ を取る. $e^{rX'} \cdot o_K = e^{Y'(rX')}e^{Z'(rX')} \cdot o_K$ であり, 両辺に左から k^{-1} を掛けると, $e^{rX} = e^{\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX'))}e^{\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX'))} \cdot o_K$ を得る. ここで $Y'(rX') \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}$, $Z'(rX') \in \mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}$ であるから $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$,

$\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX')) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ である.

定理 1.2 により π は微分同相であるから任意の $r \in \mathbf{R}$ に対して $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) = Y(rX)$ である. $Y'(\mathbf{R}X) = \text{Ad}(k)(Y(\mathbf{R}X))$ であり, $\text{Ad}(k)$ は有限次元空間の間の線型写像であるから有界性を保つ.

以上から補題 1.6 が示された. ■

$Z(\mathbf{R}X)$ の有界性については次の定理が知られており, 有界性の判定は Lie 環の言葉のみで行える.

定理 1.7 ([Kob97, Lemmma 5.4]) $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ である.

ここに $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ は X と $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の元がなす角度の最小値 $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$ であり, $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$ である.

つまり $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ ならば $\|Z(tX)\| \rightarrow \infty, |t| \rightarrow \infty$ である.

1.2 予想 1.4 の観察: $G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ の場合

$G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1) := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$ の場合に予想 1.4 が正しいことは直接計算により確かめられる.

命題 1.8 $G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ のとき予想 1.4 は正しい.

補題 1.9 $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(1, 1)$ の Killing 形式から定まる Poincaré 円板 $G/K = \{x + \sqrt{-1}y \mid x^2 + y^2 < 1\}$ の計量は $\frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ である.

補題 1.9 の証明 \mathfrak{g} の元を G/K 上の左不変ベクトル場と同一視すると $X' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y' := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}$ である. \mathfrak{g} の Killing 形式 B から定まる \mathfrak{p} 上のノルム $\|-\|$ に対して $\|X'\|^2 = \|Y'\|^2 = 8$, $B(X', Y') = 0$ であって, $0 \in G/K = \{x + \sqrt{-1}y \mid x^2 + y^2 < 1\}$ で主張が成り立つ.

したがって $k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$, $a_r := \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r \\ \sinh r & \cosh r \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} & g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X')) \\ &= g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) \\ &= 8, \\ & g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) = 0 \end{aligned}$$

なるような計量 g が Killing 形式から誘導される計量であるが、それが主張の形であることを示せば良い (これらのベクトルが何を表しているかは図 2 参照).

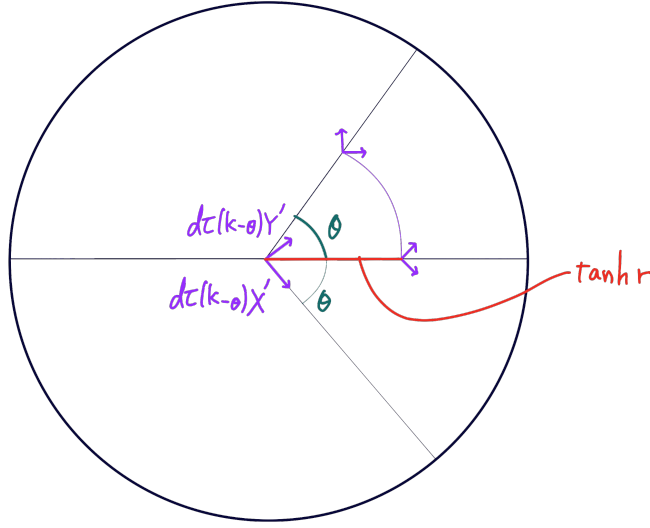


図 2

$t = 0$ での接ベクトルが $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X'$ を与える曲線は

$$\gamma_x(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \cosh r}$$

であるから,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_x(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial x} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x}$$

である.

同様に $t = 0$ での接ベクトルが $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y'$ を与える曲線は

$$\gamma_y(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \cosh r}$$

であるから,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_y(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial y} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

である.

以上より $g = \frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ が示された. ■

命題 1.8 の証明 $k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$, $X_\theta := k_{\theta/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} k_{-\theta/2}$ とすると, $\mathfrak{p} \setminus \{0\} = \{tX_\theta \mid t \in \mathbf{R}_{>0}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ である. この X_θ と $t \in \mathbf{R}$ に対して $Y(tX_\theta) = s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なる $s \in \mathbf{R}$ を求める.

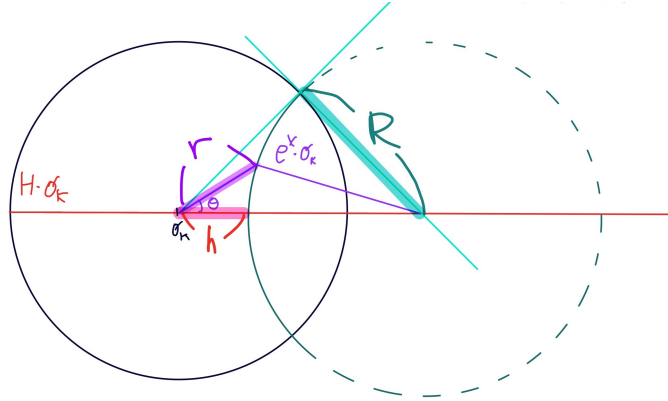


図 3

右の円の Euclid 距離での半径を R とし, $e^{tX_\theta} \cdot o_K$ から $H \cdot o_K$ への垂線の足の o_K からの Euclid 距離を h とするとき, 外側の青色の直角三角形に対して三平方の定理を用いて $(h + R)^2 = R^2 + 1$ より $R = \frac{1-h^2}{2h}$, $R + h = \frac{1+h^2}{2h}$ を得る.

さらに下の紫色の三角形に対して余弦定理を用いて $R^2 = (R + h)^2 + r^2 - 2(R +$

$h) \cos \theta$ を得,

$$\frac{2r \cos \theta}{r^2 + 1} = \frac{2h}{h^2 + 1} \quad (1.1)$$

を得る.

要確認: ここで補題 1.9 より $\frac{r}{2\sqrt{2}} = \tanh 2\sqrt{2}t$, $\frac{h}{2\sqrt{2}} = \tanh 2\sqrt{2}s$ であり (1.1) は $\cos \theta \tanh \frac{t}{4\sqrt{2}} = \tanh \frac{s}{4\sqrt{2}}$ と書き直せる. したがって X_θ に対して $Y(\mathbf{R} X)$ が有界 $\iff |\cos \theta| \neq 1 \iff X \notin \mathfrak{h}$ である. ■

補足 1.10 命題 1.8 は角度を用いた議論によっても示すことができる. 具体的には, 計算により次の補題 1.11 が示せる.

補題 1.11 $e^{tY} e^{sZ} \cdot o_K = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \sqrt{-1} \tanh s \in SU(1, 1)/U(1)$, $t > 0$, $s \in \mathbf{R}$ に対し, o_K と $e^{tY} e^{sZ} \cdot o_K$ を結ぶ測地線が o_K と $e^{tY} \cdot o_K$ を結ぶ測地線と o_K でなす角 $\varphi_{s,t}$ は, $\tan \varphi_{s,t} = \frac{\tanh 2s}{\sinh 2t}$ を満たす.

ただし, $Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Z := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ とする.

補題 1.11 により命題 1.8 は次のように証明できる. 任意の $s \in \mathbf{R}, 0 \neq t \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \tan \varphi_{s,t} = \frac{-1}{\sinh 2|t|} \leq \tan \varphi_{s,t} \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \tan \varphi_{s,t} = \frac{1}{\sinh 2|t|}$$

であるから, $X \notin \mathbf{R} Y$ の元に対して $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であるとする, $\varphi(X, \mathfrak{h}) > \varepsilon > 0$ なる ε に対し, ある $r \in \mathbf{R}$ が存在して, $Y(rX) = tY$, $Z(rX) = sZ$ に対し $|\tan \varphi_{s,t}| < \tan \varepsilon$ となり, o_K と $e^{tY} e^{sZ} \cdot o_K$ を結ぶ測地線が o_K と $e^{tY} \cdot o_K$ を結ぶ測地線と o_K でなす角が ε 未満, つまり \mathfrak{h} と X の角度未満となって矛盾する (o_K と $e^{tX} \cdot o_K (= e^{tY} e^{sZ} \cdot o_K)$ を結ぶ測地線が o_K と $e^{tY} \cdot o_K$ を結ぶ測地線と o_K でなす角は $\varphi(X, \mathfrak{h})$ である).

系 1.12 $G = SO(1, n)$, $H = SO(1, k)$, $1 \leq k \leq n-1$ に対して予想 1.4 は正しい.

系 1.12 の証明 $SO(1, n)/SO(n)$ の開球としての実現を考える. 「 $e^X \cdot o_K$ と o_K を

結ぶ直線」と $H \cdot o_K$ で張られる超平面で $SO(1, n)/SO(n)$ を切った際の断面を考える。

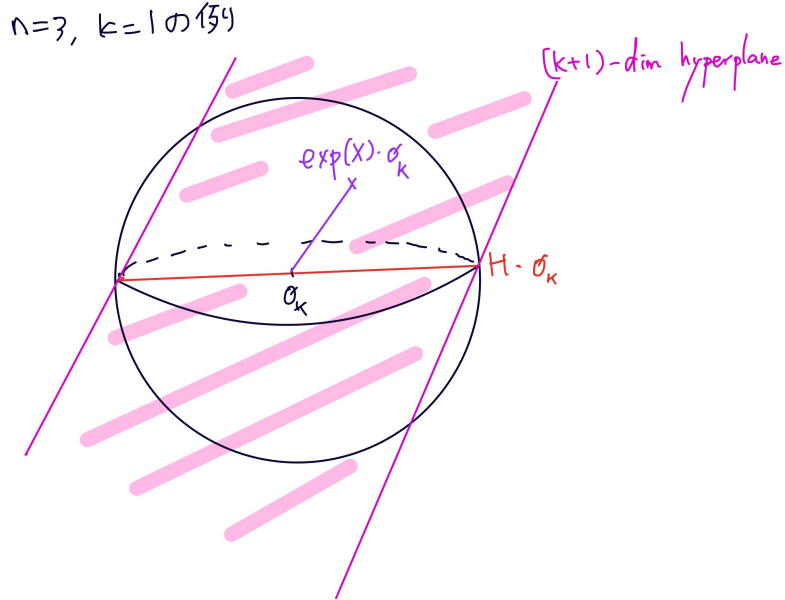


図 4

この断面に現れるのは図 3 と同じであるから、同様の計算により系 1.12 を得る。 ■

1.3 予想 1.4 の観察: 予想 1.4 の仮定を外した場合の成り立たない例

予想 1.4 と次の予想 1.13 は同値である。

予想 1.13 $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \text{ である.}\}$

ここで似た予想として次の $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ を \mathfrak{h} に置き換えた予想が立てられる。

予想 1.14 $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp \mathfrak{h} \text{ である.}\}$

しかし予想 1.14 には反例が存在する。

補題 1.15 $G = SL(3, \mathbf{R})$, $Y_1 := \text{diag}(1, 1, -2)$, $Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathfrak{h} = \mathbf{R}Y_1 \oplus \mathbf{R}Y_2$, $X = \text{diag}(1, 0, -1)$ に対し, $[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ であるが $Y(\mathbf{R}X) = \mathbf{R}Y_1$ であり, 非有界である.

補題 1.15 の計算 \mathfrak{h} は可換 Lie 環であり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$ の Cartan 対合 $\theta W := -{}^t W$ に対し $\mathfrak{h} = \theta \mathfrak{h}$ である.

$[X, \mathfrak{h}] \neq 0$ は, $[X, Y_2] \neq 0$ より従う.

ここで $Z_1 := \text{diag}(1, -1, 0) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ であり, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し, $e^{2tX} = e^{tY_1} e^{tZ_1}$ であるから, $Y(\mathbf{R}X) = \mathbf{R}Y_1$ となり, 補題 1.15 が示された. ■

補題 1.15 において X と \mathfrak{h} は, $[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ だが $[X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] = \{0\}$ かつ $X \not\perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ となるように取った.

つまり予想 1.14 の右辺を次の予想 1.16 のように少し弱めても補題 1.15 はその反例になっている.

予想 1.16 $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \text{ である.}\}$

2 具体例と主定理の証明

2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

命題 2.1 $G = SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$, $H = SO(1, 1)$, $n \geq 2$ に対して予想 1.4 は正しい.

$G = Sp(1, 2)$, $\mathfrak{h} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合にのみ示す. その他の場合も全く同様の議論である.

命題 2.2 $G = Sp(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $Y(\mathbf{R}X)$ が有界 $\iff X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ or $X = 0$ である.

ただし, H は G の左上に入っている. すなわち, $\text{Lie } H = \mathfrak{h} = \mathbf{R} A$, $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

記号と定義 2.3 \mathbf{H} を四元数体とする. $Sp(1, 2)/Sp(1) \times Sp(2) \simeq \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\} =: \mathbf{H}\mathbb{H}^2$ である. なぜならば ${}^t(1, 0, 0)$ の自然表現 $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^2$ による軌道を考え, 第 2, 第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が $\mathbf{H}\mathbb{H}^2$ と微分同相であるためであり, $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^3$ の ${}^t(1, 0, 0)$ 軌道の点 $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ に対応する $\mathbf{H}\mathbb{H}^2$ の点を $\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 z_0^{-1} \\ z_2 z_0^{-1} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ と書く.

愚直な行列計算により, 次が示される.

$$\text{補題 2.4 } \forall z, w \in \mathbf{H} \text{ に対し, } \exp \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & * & * \\ \frac{\bar{z}}{r} \sinh r & * & * \\ \frac{\bar{w}}{r} \sinh r & * & * \end{pmatrix}, \text{ ただし}$$

$r := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$, である.

命題 2.2 の証明 $X = 0 \Rightarrow Y(\mathbf{R} X) = \{0\}$ と $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のときに $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であることは明らかであるから, $X \notin \mathfrak{h}$ の場合にのみ議論すればよい.

G の Cartan 対合を $\Theta(g) = (g^*)^{-1}$ (g^* は g の共役転置) とするとき, $\Theta(e^{Y(tX)} e^{Z(tX)}) \cdot o_K = e^{-Y(tX)} e^{-Z(tX)} \cdot o_K = \Theta(e^X) \cdot o_K = e^{-X} \cdot o_K$ より, 「 $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界 $\iff Y(\mathbf{R} X) \subset \mathbf{R} A$ が上に非有界」である.

したがって, $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であるとき, 列 $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$ で, $s_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, ただし $Y(t_n X) = s_n A$, なるものが存在する.

また, 任意の $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ の元はある $Z = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$, $z, w \in \mathbf{H}$ s.t. $|z|^2 +$

$|w|^2 = 1$ と $r \in \mathbf{R}$ により rZ と表せる. $Z(t_n X) = r_n Z_n$, $Z_n := \begin{pmatrix} 0 & z_n & w_n \\ \overline{z_n} & 0 & 0 \\ \overline{w_n} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z_n, w_n \in \mathbf{H}$ s.t. $|z_n|^2 + |w_n|^2 = 1$ とすると, $X \notin \mathfrak{h}$ であるから定理 1.7 より $|r_n| \rightarrow \infty$ である. $z_n, w_n \in \mathbf{H}$ s.t. $|z_n|^2 + |w_n|^2 = 1$ より, $\{t_n\}$ の部分列を取るとある Z_∞ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z_\infty = \begin{pmatrix} 0 & z_\infty & w_\infty \\ \overline{z_\infty} & 0 & 0 \\ \overline{w_\infty} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ なるようにできる. $Z \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ より $\operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$ であることに注意する ($\operatorname{Re}: \mathbf{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto a \in \mathbf{R}$ とする).

補題 2.4 より,

$$\begin{aligned} e^{s_n A} e^{r_n Z_n} \cdot o_K &= \begin{pmatrix} \cosh s_n & \sinh s_n & 0 \\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \\ \pm \overline{w_n} \tanh |r_n| \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} \cosh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \cosh s_n \\ \pm \overline{w_n} \tanh |r_n| \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

複号は r_n の符号 \pm と同順, である. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh s_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh |r_n|$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$ に注意すると次を得る. 具体的な計算は後述する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sinh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \cosh s_n) (\cosh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} = 1 \quad (2.1)$$

である.

したがって, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルと, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} (\sinh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \cosh s_n) (\cosh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} \\ * \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値を I_n とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$ である.

しかし, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルと, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $e^{t_n X} \cdot o_K \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値 J_n は, $X :=$

$$\begin{pmatrix} 0 & z_0 & w_0 \\ \bar{z}_0 & 0 & 0 \\ \bar{w}_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z_0, w_0 \in \mathbf{H} \text{ s.t. } |z_0|^2 + |w_0|^2 = 1 \text{ とするとき } J_n = \frac{\bar{z}_0}{r_0} \tanh(tr_0),$$

$r_0 := \sqrt{|z_0|^2 + |w_0|^2}$ であり, $X \notin ha \iff z_0 \neq 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{\bar{z}_0}{r_0} \neq 1$ である.

以上 2 つの議論を合わせると $e^{s_n A} e^{r_n Z_n} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K \implies 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n \neq 1$ となり矛盾する.

以上より「 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \Rightarrow Y(\mathbf{R} X)$ 有界」, したがって 命題 2.2 を得る. ■

命題 2.2 の計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| = 0$ を示せば主張が得られる. 具体的に計算すると,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|)(1 \pm z_n \tanh|r_n| \tanh s_n)}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)|^2} - 1 \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|)z'_n - (1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)|^2} \quad (*) \end{aligned}$$

である. ここで $z'_n := 1 \pm z_n \tanh|r_n| \tanh s_n$ とすると,

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|)z'_n - (1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|)|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)|} \end{aligned}$$

であり, $0 < \min |1 \pm \operatorname{Re} z_n| \leq |(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ と $\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z_n|\} \leq |-1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|| \leq \sqrt{5}$ であることと $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$ より,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z_n|\}}{\sqrt{5}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|)|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)|} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \operatorname{Re} z_n|\}} = 0 \end{aligned}$$

より, (2.1) が成り立つ. ■

2.2 G の実階数が 1 の場合

定理 2.5 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群, H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で, G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ で $\dim \mathfrak{h} = 1$ とするとき, 予想 1.4 が成り立つ.

定理 2.6 ([Hel01, p. 409, Theorem 3.1]) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を実半単純 Lie 環とその Cartan 対合 θ に対する Cartan 分解とし, $\alpha, 2\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ と仮定する. $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $0 \neq X_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$ を任意に固定したとき, $X_\alpha, X_{2\alpha}, \theta X_\alpha, \theta X_{2\alpha}$ から生成される Lie 環 \mathfrak{g}^* は $\mathfrak{su}(2, 1)$ と同型である.

以下で定理 2.6 を示すための補題や記号を設定し, 定理 2.6 を示す.

記号と定義 2.7

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ を極大分裂可換部分代数, $\mathfrak{m} := \mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a}) := \{W \in \mathfrak{k} \mid [W, \mathfrak{a}] = \{0\}\}$ とする. B を \mathfrak{g} の Killing 形式とする.
- $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ を \mathfrak{a} に関する制限ルート系とする. \mathfrak{g}_λ を $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ のルート空間とする
- $Y_\alpha := [\theta X_\alpha, X_{2\alpha}]$ とする.
- $A_\alpha \in \mathfrak{a}$ を, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, A_\alpha) = \alpha(H)$ を満たす元とする. このとき, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, [X_\alpha, \theta X_\alpha]) = \alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$, したがって $[X_\alpha, \theta X_\alpha] = B(X_\alpha, \theta X_\alpha)A_\alpha$ (同様に $[Y_\alpha, \theta Y_\alpha] = B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)A_\alpha$, $[X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}] = 2B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})A_\alpha$) である.

- $c_\alpha := \sqrt{\frac{-2}{\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)}}$, $c_{2\alpha} := \sqrt{\frac{-2}{\alpha(A_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})}}$ とする.

また,

$$\begin{aligned} & - X_\alpha^* := c_\alpha X_\alpha \\ & - X_{2\alpha}^* := c_{2\alpha} X_{2\alpha} \\ & - Y_\alpha^* := [\theta X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = c_\alpha c_{2\alpha} Y_\alpha \\ & - A_\alpha^* := \frac{1}{12\alpha(A_\alpha)} A_\alpha \end{aligned}$$

とする.

補題 2.8 $c := 2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$ とすると, $[X_\alpha, Y_\alpha] = cX_{2\alpha}$ である. 特に $0 \neq Y_\alpha \neq X_\alpha$ である.

証明略, Jacobi 恒等式と $3\alpha \notin \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ による.

補題 2.9 $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ である. また $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], X_\alpha] = -3\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)Y_\alpha$ である.

補題 2.9 の証明 $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ より $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} + \mathfrak{a}$ であり, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\begin{aligned} B(H, [X_\alpha, \theta Y_\alpha]) &= B([H, X_\alpha], Y_\alpha) = \alpha(H)B(X_\alpha, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]) \\ &= \alpha(H)B([X_\alpha, X_\alpha], X_{2\alpha}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることより $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m}$ である.

さらに,

$$\begin{aligned} [[\theta X_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] &= -[[Y_\alpha, X_\alpha], \theta X_\alpha] - [[X_\alpha, \theta X_\alpha], Y_\alpha] \\ &= c[X_{2\alpha}, \theta X_\alpha] - B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha \\ &= -cY_\alpha - B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha \\ &= -3\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)Y_\alpha \neq 0 \end{aligned}$$

より, $\theta[\theta X_\alpha, Y_\alpha] = [X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ である. ■

補題 2.10 $\mathbf{R} X_\alpha + \mathbf{R} Y_\alpha$ は $\text{ad}_{\mathfrak{g}}([X_\alpha, \theta Y_\alpha])$ で不変である. さらに

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= -6\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha, \\ [Y_\alpha, \theta Y_\alpha] &= -2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})A_\alpha \end{aligned}$$

である.

補題 2.10 の証明 $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] \in \mathbf{R} X_\alpha$ を示せば, 補題 2.9 と併せて 補題 2.10 が従う.

$$\begin{aligned}
[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= -[[\theta Y_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] - [[Y_\alpha, X_\alpha], \theta Y_\alpha] \\
&= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha + c[X_{2\alpha}, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]] \\
&= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - c[X_\alpha, [\theta X_{2\alpha}, X_{2\alpha}]] - c[\theta X_{2\alpha}, [X_{2\alpha}, X_\alpha]] \\
&= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - cB(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})\alpha(A_{2\alpha})X_\alpha
\end{aligned}$$

であり ($\mathfrak{g}_{3\alpha} = \{0\}$ による), $A_{2\alpha} = 2A_\alpha$ であるから,

$$[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] = B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha$$

を得る.

さらに,

$$\begin{aligned}
B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha) &= B(Y_\alpha, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]) = -B([X_\alpha, Y_\alpha], \theta X_{2\alpha}) \\
&= -2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})
\end{aligned}$$

であるから, 最終的に

$$\begin{aligned}
[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha \\
&= -6\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha
\end{aligned}$$

を得る. ■

補題 2.11 $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], X_{2\alpha}] = 0$ である.

証明略. 補題 2.8–2.10 と Jacobi 恒等式による.

補題 2.12 $[Y_\alpha, \theta X_{2\alpha}] = 2\alpha(A_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})\theta X_\alpha$ である.

証明略. Jacobi 恒等式を用いて与式を変形し計算することによる.

定理 2.6 の証明 $\mathfrak{g}_0^* := \mathbf{R} A_\alpha \oplus \mathbf{R}[X_\alpha, \theta Y_\alpha]$, $\mathfrak{g}_\alpha^* := \mathbf{R} X_\alpha \oplus \mathbf{R} Y_\alpha$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}^* := \mathbf{R} \theta X_\alpha \oplus \mathbf{R} \theta Y_\alpha$, $\mathfrak{g}_{2\alpha}^* := \mathbf{R} X_{2\alpha}$, $\mathfrak{g}_{-2\alpha}^* := \mathbf{R} \theta X_{2\alpha}$ とすると, 補題 2.8–2.12 より, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_0^* \oplus \mathfrak{g}_\alpha^* \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}^*$ が示される.

非自明な \mathfrak{g}^* の Lie 括弧の関係は以下の通りである (残りの関係式はこの両辺に θ をつけることで得られる).

- $[X_\alpha^*, Y_\alpha^*] = -4X_{2\alpha}^*$ (補題 2.8 による)
- $[X_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] = -6Y_\alpha^*$ (補題 2.9 による)

- $[X_\alpha^*, \theta X_\alpha^*] = -24A_\alpha^*$ (定義による)
- $[X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = 0$ ($\mathfrak{g}_{3\alpha} = 0$ による)
- $[X_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] = \theta Y_\alpha^*$
- $[Y_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = 0$ (補題 2.11 による)
- $[Y_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] = -4\theta X_\alpha^*$ (補題 2.12 による)
- $[Y_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*] = -96A_\alpha^*$ (補題 2.10 による)
- $[Y_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] = 24X_\alpha^*$ (補題 2.10 による)
- $[[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*], X_{2\alpha}^*] = [[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*], \theta X_{2\alpha}^*] = 0$ (補題 2.12 による)
- $[X_{2\alpha}^*, \theta X_{2\alpha}^*] = -48A_\alpha^*$

\mathfrak{g}^* と $\mathfrak{su}(2, 1)$ の対応を,

$$\begin{aligned}
X_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & X_{2\alpha}^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\
\theta X_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \theta X_{2\alpha}^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\
Y_\alpha^* &\leftrightarrow -2 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, & \theta Y_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & -\sqrt{-1} & -0 \end{pmatrix}, \\
A_\alpha^* &\leftrightarrow \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*] &\leftrightarrow -4 \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

でつづける. この対応が Lie 環としての同型であること (上の関係式が満たされること) は計算することにより従う.

以上より定理 2.6 が示された. ■

補題 2.13 証明せよ

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ の場合, 任意に固定した $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と θX_α により生成される部分 Lie 環 \mathfrak{g}' は $\mathfrak{su}(1, 1)$ と同型である.

補題 2.13 の証明 $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} = \{0\}$ より, $[X_\alpha, X_\alpha] = [X_{-\alpha}, X_{-\alpha}] = 0$ である. Killing 形式 B は非退化より, $B(X_\alpha, \theta X_\alpha) \neq 0$ であるから,

■

系 2.14 任意の $Y \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ と任意の $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ を固定したとき, G が実階数 1 ならば, 極大分裂可換部分代数 $\mathfrak{a} := \mathbf{R}Y \subset \mathfrak{g}$ に対し $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ あるいは $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ であるから, それぞれ定理 2.6 と補題 2.13 より, X, Y を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ で, $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$ か $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$ なるものが存在する.

系 2.14 の証明

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ より $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ をこの分解に対応して $X = X_0 + X_\alpha + X_{-\alpha}$ と分解すると, $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ より $X_{-\alpha} = -\theta X_\alpha \neq 0$ である. $Y \in \mathbf{R}[X_\alpha, \theta X_\alpha]$ であるからこの $X_\alpha \neq 0$ に補題 2.13 を適用することにより $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$ で $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ なるものが存在する.

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$, $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ より $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ をこの分解に対応して $X = X_0 + X_\alpha + X_{-\alpha} + X_{2\alpha} + X_{-2\alpha}$ と書くと, $X \in \mathfrak{p}$ より $X_{-\alpha} = -\theta X_\alpha$, $X_{-2\alpha} = -\theta X_{2\alpha}$ である.

ここで $X \notin \mathfrak{a}$ より,

1. $X_\alpha \neq 0$ かつ $X_{2\alpha} \neq 0$
2. $X_\alpha \neq 0$ かつ $X_{2\alpha} = 0$
3. $X_\alpha = 0$ かつ $X_{2\alpha} \neq 0$

のいずれかである.

- 1 の場合はこの $X_\alpha, X_{2\alpha}$ と Y に,
- 2 の場合はこの X_α と, 適当な $0 \neq X'_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$ と Y に,
- 3 の場合はこの $X_{2\alpha}$ と, 適当な $0 \neq X'_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と Y に,

定理 2.6 を適用することにより $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$ で $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ なるものが存在する.

■

系 2.14 で定めた \mathfrak{g}_0 について次の 3 つが成り立つ.

補題 2.15 [Hel01, p. 409, Lemma 2.2] \mathfrak{g} の Cartan 対合 θ に対して $\mathfrak{g}_0 = \theta\mathfrak{g}_0$ であり, \mathfrak{g}_0 への θ の制限は \mathfrak{g}_0 の Cartan 分解を与える.

補題 2.16 ([Yos38, p. 82]) 系 2.14 の \mathfrak{g}_0 の G における解析的部分群を G_0 とする. G_0 は G の閉部分群である.

補題 2.17 ([Hel01, p. 409, Lemma 2.3]) 系 2.14 の \mathfrak{g}_0 の G における解析的部分群を G_0 とする. $G = KAN$ を G の岩澤分解, $G_0 = K_0A_0N_0$ を G の岩澤分解とすると,

$$K_0 := G_0 \cap K, \quad A_0 := G_0 \cap A, \quad N_0 := G_0 \cap N,$$

であり, $G_0/K_0 \simeq G_0/K$ は G/K の全測地的な部分 Riemann 多様体である.

以上のことを用いて, G が実階数 1 の場合を $SU(1, 2)$ ないし $SU(1, 1)$ に帰着させることにより定理 2.5 を示す.

定理 2.5 の証明 \mathfrak{g} の極大分裂可換部分代数 \mathfrak{h} の定めるルート系を $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし, $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の形によって 2 通りに場合分けして証明する.

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm\alpha\}$ のとき

系 2.14 により X と \mathfrak{h} を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ で $\mathfrak{su}(1, 1)$ に同型なものが存在する. \mathfrak{g}' に対応する G の解析的部分群を G' とし, その岩澤分解を $G' = K'A'N'$ とする. このとき $e^{Z(tX)} \cdot o_K = e^{-Y(tX)}e^{tX} \cdot o_K \in G'/K$ であるから $Z(tX) \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ であり, $Y(\mathbf{R}X)$ の有界性は全測地的な部分 Riemann 多様体 $G'/K' \subset G/K$ に対して行えば良いことがわかる. したがって命題 1.8 により $X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} \iff X = 0$ あるいは $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ が言え, 定理 2.5 が示された.

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ のとき

系 2.14 により X と \mathfrak{h} を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{g}$ で $\mathfrak{su}(2, 1)$ に同型なものが存在する. \mathfrak{g}^* に対応する G の解析的部分群を G^* とし, その岩澤分解を $G^* = K^*A^*N^*$ とする. このとき $e^{Z(tX)} \cdot o_K = e^{-Y(tX)}e^{tX} \cdot o_K \in G^*/K$ であるから $Z(tX) \in \mathfrak{g}^* \cap \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ であり, $Y(\mathbf{R}X)$ の有界性は全測地的な部分 Riemann 多様体 $G^*/K^* \subset G/K$ に対して行えば良いことがわかる. したがって命題 2.1 により

$X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} \iff X = 0$ あるいは $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ が言え, 定理 2.5 が示された.

■

2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面

定義 2.18 [Ebe72a, Definition 1.3]

M が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき, M を Hadamard 多様体といい, Hadamard 多様体 M が visibility manifold であるとは, $\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$ に対し, ある $r(p, \varepsilon) > 0$ が存在して, 測地線 $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow M$ が $d_M(p, \gamma(t)) \geq r(p, \varepsilon), \forall t \in [t_0, t_1]$ ならば, $\angle_p(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) \leq \varepsilon$ であることである.

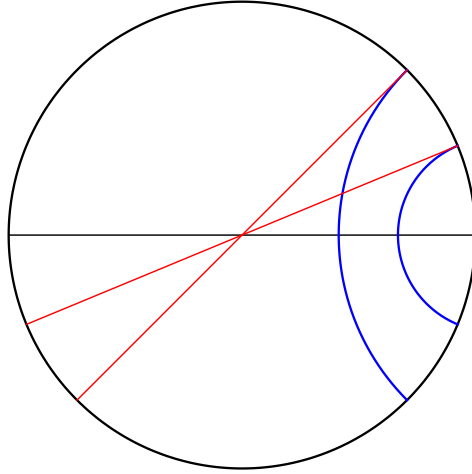


図 5: visibility manifold のイメージ

定理 2.19 [BH99, p. 296, 9.33 Theorem], originally [Ebe72b, Theorem 4.1]

$\exists C \subset M$ s.t. $M = \bigcup_{\text{cpt.}} \{f(C) \mid f \in \text{Isom}(M)\}$ なる Hadamard 多様体 M に対し, 次は同値である.

- (i) M は visibility manifold である.
- (ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体 $M' \subset M$ で \mathbf{R}^2 と等長同型なものがない.

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり, 定理 2.19 の (ii) は G の実階数が 1 以下であることと同値である. したがって G の実階数が 1 の場合 G/K は visibility manifold であり, $G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合の証明と全く同様にして背理法により予想 1.4 が示される.

2.3 G が実階数 1 の実半単純 Lie 群の直積の場合

定理 2.5 の系として次が示される.

系 2.20 $n \in \mathbf{N}$ を固定し, $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$ を実階数 1 の実半単純 Lie 群の族, Θ_i を G_i の Cartan 対合とする.

G を $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$ の直積からなる Lie 群 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ とし, H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で, G の Cartan 対合 $\Theta: G \rightarrow G$, $G \ni (g_1, \dots, g_n) \mapsto (\Theta_1 g_1, \dots, \Theta_n g_n) \in G$ に対して $\Theta H = H$ で $\dim \mathfrak{h} = 1$ なるものとする. このとき予想 1.4 が成り立つ.

系 2.20 の証明 各 G_i を G の部分 Lie 群と自然にみなす. このとき $H_i := G_i \cap H$ とすると, $H \simeq H_1 \times \cdots \times H_n$ である. 同様に $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}_i$ とみなすと $\mathfrak{h}_i := \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{h}$ は H_i の Lie 環である.

K_i を $\Theta K_i = K_i$ なる G_i の極大コンパクト部分群とすると, $K := K_1 \times \cdots \times K_n$ は G の極大コンパクト部分群で $\Theta K = K$ を満たす.

$G/K \simeq G_1/K_1 \times \cdots \times G_n/K_n$ であり, 定理 1.2 により各 $1 \leq i \leq n$ の (G_i, H_i, Θ_i) に対し上への微分同相 $\pi_i: (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i) \oplus (\mathfrak{h}_i^\perp \cap \mathfrak{p}_i) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G_i/K_i$ が存在する. $X_i \in \mathfrak{p}_i$ に対し $(Y_i(X_i), Z_i(X_i)) := \pi_i^{-1}(e^{X_i} K_i)$ と定める.

$X \in \mathfrak{p}$ に対し, $X = X^{(1)} + \cdots + X^{(n)}$ を $\mathfrak{p} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{p}_i$ に対応する X の分解とすると, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であることは各 $Y_i(\mathbf{R} X^{(i)})$ が有界であることと同値である. また定理 2.5 より $Y_i(\mathbf{R} X^{(i)})$ が有界であることと「 $[X_1^{(i)}, X_2^{(i)}] \neq 0$ あるいは $X_1^{(i)} = 0$ であること」が同値である. ここで $X^{(i)} = X_1^{(i)} + X_2^{(i)}$ は $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i) \oplus (\mathfrak{h}_i^\perp \cap \mathfrak{p}_i)$ に対応する $X^{(i)} \in \mathfrak{p}_i$ の分解とする.

したがって, $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であることと「 $[X_1, X_2] = 0$ かつ $X_1 \neq 0$ であること」が同値であり, 系 2.20 が示された. ■

参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.
- [BBE85] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203.
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer, 1999.
- [Borel–Ji] A. Borel and L. Ji, *Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006.
- [Ebe72a] P. Eberlein, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, 1972, pp. 492–510.
- [Ebe72b] P. Eberlein, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, 1972, pp. 151–70.
- [EO73] P. Eberlein and B. O’Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109.
- [Hel84] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis—Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 83, AMS, 1984.
- [Hel01] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.

- [Yos37] K. Yosida, *A problem concerning the second fundamental theorem of Lie*, Proc. Imp. Acad., Vol. 13, No. 5, 1937, pp. 152–155.
- [Yos38] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.