

2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号	<u>45-196010</u>
フリガナ	オクダ タカコ
氏名	<u>奥田 堯子</u>

目次

導入	2
1 設定と \mathbb{H} 射影の基本的な性質および問 1.3 の観察	6
1.1 記号の設定	6
1.2 問 1.3 の観察: $G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ の場合	10
1.3 問 1.3 の観察: 類似の問いとその反例	15
2 G の実階数が 1 の場合	20
2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群	20
2.2 G の実階数が 1 の場合	23
2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面	30
2.3 G が実階数 1 の実半単純 Lie 群の直積の場合	31
謝辞	32
参考文献	33

導入

G を非コンパクトな実半単純 Lie 群, K を G の極大コンパクト部分群で G の Cartan 対合 Θ に対して $K = \Theta K$ なるものとする. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Θ の微分 $d\Theta$ による \mathfrak{g} の Cartan 分解とすると, G/K は \mathfrak{p} と $\mathfrak{p} \ni X \mapsto e^X K \in G/K$ により微分同相である.

H を G の非コンパクトかつ連結成分有限個の閉部分群で, $H = \Theta H$ を満たすものとし, \mathfrak{g} の Killing 形式を B とする. $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{g} \mid B(W, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$ とするとき, G/K と \mathfrak{p} の微分同相についてより強い次の構造定理が知られている.

定理 ([Kob89, Lemma 6.1]) $\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

この定理を用いて $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義する.

G/K に \mathfrak{g} の Killing 形式 B から定まる Riemann 計量によって Riemann 多様体の構造を定める. G の単位元の G/K での像 eK を通る G/K の極大測地線は $B(X, X) = 1$ なる $X \in \mathfrak{p}$ によって $e^{tX} K$, $t \in \mathbf{R}$ と書ける. 定理 1.2 より任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $e^{tX} K = e^{Y(tX)} e^{Z(tX)} K$ である.

$G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ とするとき, $t \in \mathbf{R}$ に対し, $Y(tX)$ は図 1 に図示するような幾何学的な意味を持つ. 図 1 は Poincaré 円板における測地線 $e^{tX} K$ (赤色の斜め線) とその上の一点 $e^{tX} K$ から eK の H 軌道 (中央の直線) に下ろした垂線の足 (緑の丸) が $e^{Y(tX)} K$ である.



図 1: Poincaré 円板における $Y(tX)$ の幾何学的意味

本論文では小林俊行氏による次の問題 (後述の問 1.3) について考察し, G が実階数 1 の実半単純 Lie 群の場合に肯定的な結果を得た.

問 (小林俊行氏による) $X \in \mathfrak{p}$ に対して, $Y(\mathbf{R} X)$ が $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合であることと次の条件は同値であるか?

Condition

- $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$
もしくは
- $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $X \in \mathfrak{g}'_s$,
もしくは
- $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \not\subset \mathfrak{h}$

である.

記号は次のとおりとする.

- $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.
- \mathfrak{g}' は \mathfrak{h} と X が生成する \mathfrak{g} の部分 Lie 環とする. $\mathfrak{h} = \theta \mathfrak{h}$ より $\theta \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'$ である. $\mathfrak{g}'_s := [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ とすると $\mathfrak{g}' = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{g}'_s$ と分解される.

ここで G が実階数 1 のとき, 「 $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ もしくは $\llbracket [X_1, X_2] \neq 0 \text{ かつ } \mathfrak{z}_3(\mathfrak{h})(X) = 0 \text{ であること} \rrbracket$ と $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ は同値である (後述する補題 1.6 の 3).

問 1.3 の背景を説明するために [Ber88] の内容についてふれる.

まずいくつか用語を準備する. G を実簡約 Lie 群, H を G の閉部分群とし, G/H には左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ が存在すると仮定する. 局所有界関数 $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ が proper な radial function であるとは, r が次の 4 条件を満たすことである.

1. $e \in G$ を単位元とするとき $r(e) = 0$ である. ^{*1}
2. 任意の $g \in G$ に対し $r(g) = r(g^{-1}) \geq 0$ である.
3. 任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し $r(g_1 g_2) \leq r(g_1) + r(g_2)$ である.
4. 任意の $R \geq 0$ に対し, $B(R) := \{g \in G \mid r(g) \leq R\}$ は G の相対コンパクト集合である.

proper な radial function $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ から $r_{G/H}(gH) := \inf_{h \in H} \{r(gh)\}$ により定まる $r_{G/H}: G/H \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ を G/H 上の radial function という.

G/H には standard measure と呼ばれる, 次を満たす非自明な Borel 測度 m_X が存在する. 単位元のコンパクトな近傍で $B = B^{-1}$ なる任意の $B \subset G$ と任意の $g \in B$, $x \in G/H$ に対し, ある定数 $C_B \geq 0$ が存在して $g \cdot m_X \leq C_B m_X$, $C_B^{-1} < m_X(Bx) < C_B$ である.

$d = \inf\{d' \geq 0 \mid \text{ある } C > 0 \text{ が存在して } m_X(B(r)) \leq C(1+r)^{d'}\}$ であるとき, G/H のランクは d であると言う.

G の既約ユニタリ表現 V が G の正則表現 $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は, 非自明な G -絡作用素 $\alpha_V: (C_c(G/H))^\infty \rightarrow V$ が存在し, 任意の $v \in V^\infty$, $d' > d$ に対して $\int_{G/H} \left| \beta_V(v)(x)(1+r(x))^{-d/2} \right|^2 dx < \infty$ なることである. ただし β_V は次の命題により α_V と対応する G -絡作用素 $\beta_V: V^\infty \rightarrow C(G/H)^\infty$ とする.

命題 ([Ber88, p. 678]) G/H の左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ を 1 つ固定する. 次の同型写像が存在する. $\text{Hom}_G((C_c(G/H))^\infty, V) \rightarrow \text{Hom}_G(V^\infty, C(G/H)^\infty)$, $\alpha_V \mapsto \beta_V$ ただし任意の $v \in V$, $\varphi \in (C_c(G/H))^\infty$ に対し $\langle v, \alpha_V(\varphi) \rangle_V = \int_{G/H} \beta_V(v) \varphi d\mu_X$ である.

^{*1} これは [Ber88] には明示されていません.

G を実簡約 Lie 群, H を G の閉部分群とし, ある可換部分群 $B \subset G$ が存在して $G = KBH$ という Cartan 分解を持つとする. 任意の $X \in \text{Lie } B$ に対して $Y(\mathbf{R}X)$ が有界であれば, G/H がランク $d := \dim B$ となるための条件のうちの 1 つである, 「ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $X \in \text{Lie } B$ に対し, $d_{G/K}(\exp(-X) \cdot o_K, o_K) - \inf\{d_{G/K}(\exp(-X) \cdot o_K, h \cdot o_K) \mid h \in H\} \leq C$ であること」が満たされる.

以上が本修士論文の表現論的な背景である.

1 設定と \mathfrak{h} 射影の基本的な性質および問 1.3 の観察

1.1 記号の設定

本論文の基本的な設定は次のとおりであり、この他に必要な条件は都度明示することとする。

記号と定義 1.1

- $\mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ をそれぞれ 0 を含む自然数全体, 実数全体, 複素数全体, 四元数全体の集合とする。
- G を非コンパクト実簡約 Lie 群, H を G の非コンパクトかつ連結成分有限個の閉部分群で, G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ なるものとする。
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$, $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする。
- $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) := \{Y \in \mathfrak{h} \mid [Y, \mathfrak{h}] = \{0\}\}$ とする。
- e を G の単位元とし, $o_K := eK \in G/K$ とする。
- $\langle -, - \rangle$ を, \mathfrak{g} 上の G -不変な非退化対称双線型形式で, \mathfrak{k} 上負定値, \mathfrak{p} 上正定値で $\mathfrak{k} \perp \mathfrak{p}$ なるものとする。
- $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{g} \mid \langle W, \mathfrak{h} \rangle = \{0\}\}$ とする。
- $X \in \mathfrak{p}$ に対し, ベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ に対応した分解を $X = X_1 + X_2$, $X_1 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$, $X_2 \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ とする。
- (M, d_M) を M の上の任意の 2 点に対し一意的な測地線が存在する Riemann 多様体と M 上の計量から定まる距離とする。相異なる点 $p, q, r \in M$ に対し,
 - $\gamma_{p,q} : [0, d_M(p, q)] \rightarrow M$ を, $\gamma(0) = p$, $\gamma(d_M(p, q)) = q$ なる測地線とする。
 - $\angle_p(q, r)$ を $\gamma_{p,q}$ と $\gamma_{p,r}$ が p においてなす角とする。

以下の定理 1.2 を用いて, $X \in \mathfrak{p}$ に対し,

$$(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$$

と定義する。

定理 1.2 ([Kob89, Lemma 6.1])

$$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$$

は上への微分同相である.

ここで, $Y(\mathbf{R} X)$ の有界性について, 次の問 1.3 が小林俊行氏によって提起された.

問 1.3 (小林俊行氏による) $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} := \{X \in \mathfrak{p} \mid Y(\mathbf{R} X) \text{ が } \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \text{ の有界集合である.}\}$ と定めるとき,

1. G が実半単純 Lie 群ならば $\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}}$ は測度 0 であるか?
2. $X \in \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}}$ であることと次の条件 1.4 は同値であるか?

条件 1.4 $X \in \mathfrak{p}$ は次のいずれかを満たす.

- ① $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$
- ② $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $X \in \mathfrak{g}'_s$ である.
- ③ $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \not\subset \mathfrak{h}$ である.

ただし \mathfrak{g}' は \mathfrak{h} と X により生成される \mathfrak{g}' の部分 Lie 環とする. \mathfrak{g}' は θ 不変であるから $\mathfrak{g}'_s := [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ とすると $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{g}'_s$ である.

条件 1.4 で定めた \mathfrak{g}' の元 X に対して次の記法を導入する.

定義 1.5 $X \in \mathfrak{g}'$ に対し, ベクトル空間としての分解 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{g}'_s$ に対応した分解を $X = X_c + X_s$, $X_c \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$, $X_s \in \mathfrak{g}'_s$ とする.

問 1.3 についての基本的な事項を挙げる.

補題 1.6

1. 問 1.3 において, 2. が成り立つならば 1. が成り立つ.
2. $X \in \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}}$ ならば X は条件 1.4 を満たす.
3. $X \in \mathfrak{p}$ が $X_1 = 0$ を満たすならば $X \in \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}}$ である.
4. G が実階数 1 ならば, 条件 1.4 と 「 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} = \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ 」 は同値である.

いくつか補題を用意してから補題 1.6 を示す.

補題 1.7 $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{h}$ ならば \mathfrak{g}'_s における $\mathfrak{g}'_s \cap \mathfrak{h}$ の直交補空間は \mathfrak{h}^\perp に含まれる.

補題 1.7 の証明

■

補題 1.8 補題 1.7 の仮定のもとで $X = X_c + X_s \in \mathfrak{g}'$ と任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し $Y(tX) = tX_c + Y(tX_s)$ である.

補題 1.8 の証明

■

補題 1.6 の証明

1. 次が測度 0 であることを示せば十分である. ^{*2}
2. $X \in \mathfrak{p}$ が条件 1.4 を満たさないとき, $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}}$ であることを示せば良い.
 $X \in \mathfrak{p}$ が条件 1.4 の ① を満たさないことから $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}^\perp$ である.
 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}^\perp$ なる X に対し $[X_1, X_2] = 0$ ならば $e^{tX_1} e^{tX_2} \cdot o_K = e^{t(X_1+X_2)} \cdot o_K = e^{tX} \cdot o_K$ である. したがって定理 1.2 より $Y(tX) = tX_1$, $Z(tX) = tX_2$ であることから $Y(\mathbf{R} X) = \mathbf{R} X_1$ となり, $X_1 \neq 0$ より $Y(\mathbf{R} X)$ は有界集合とならない. つまり $X \notin \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}}$ である.
次に $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}^\perp$ かつ $[X_1, X_2] \neq 0$ なる X を考える.
このとき条件 1.4 の ②, ③ が成り立たないことから $X \notin \mathfrak{g}'_s$ かつ $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{h}$ である. このとき $X = X_c + X_s$ に対し $X_c \neq 0$ であるから補題 1.8 より $Y(\mathbf{R} X)$ は非有界であり, $X \notin \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}}$ である.
以上より主張が従う.
3. $X_1 = 0$ であることと $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ であることが同値であることから従う.
4. G が実階数 1 のときに $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ であることと条件 1.4 を満たすことが同値であることを示せば良い.
 $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ ならば条件 1.4 を満たさないことは明らかであるから, 条件 1.4 を満たさないならば $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ であることを示せば良い.
 G の実階数が 1 かつ H が非コンパクトであるから $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は極大分裂可換部分代数である.
条件 1.4 を満たさない $X \in \mathfrak{p}$ を任意に 1 つ固定する. 条件 1.4 の ① が成り立たないことから $X \notin \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}^\perp$ である. また X は条件 1.4 の ②, ③ を満た

*2 示せていません.

さない. もし $[X_1, X_2] = 0$ ならば $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ であるから, $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ が言える.

以上より $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $X \notin \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}^\perp$ なる X のみを考えれば十分である. このときさらに $X \notin \mathfrak{g}'_s$ かつ $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{h}$ である. 後者より $X = X_c + X_s$ に対し, 後者より $X_s \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \subset \mathfrak{h}$

補題 1.6 が示された. ■

$Y(\mathbf{R} X)$ の有界性は $\text{Ad}(k)$ -不変である. 具体的には補題 1.9 が成り立つ.

補題 1.9 $k \in K$, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $X' := \text{Ad}(k)X$, $\mathfrak{h}' := \text{Ad}(k)\mathfrak{h}$ とする. $Y'(X'), Z'(X')$ を, 微分同相 $\pi': (\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y', Z') \mapsto e^{Y'} e^{Z'} \cdot o_K$ を用いて, $X' \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y'(X'), Z'(X')) = \pi'^{-1}(e^{X'} \cdot o_K)$ と定める.

このとき $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であることと $Y'(\mathbf{R} X')$ が有界であることは同値である.

補題 1.9 の証明 主張は (X, \mathfrak{h}) と (X', \mathfrak{h}') に対して対称的であるから, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界ならば $Y'(\mathbf{R} X')$ が有界であることのみを示せば十分である.

任意に $r \in \mathbf{R}$ を取る. $e^{rX'} \cdot o_K = e^{Y'(rX')} e^{Z'(rX')} \cdot o_K$ であり, 両辺に左から k^{-1} を掛けると, $e^{rX} = e^{\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX'))} e^{\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX'))} \cdot o_K$ を得る. ここで $Y'(rX') \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}$, $Z'(rX') \in \mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}$ であるから $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$, $\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX')) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ である.

定理 1.2 により π は微分同相であるから, 任意の $r \in \mathbf{R}$ に対して $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) = Y(rX)$ である. $Y'(\mathbf{R} X) = \text{Ad}(k)(Y(\mathbf{R} X))$ であり, $\text{Ad}(k)$ は有限次元空間の間の線型写像であるから有界性を保つ.

以上から補題 1.9 が示された. ■

$Y(\mathbf{R} X)$ の有界性を判定しようとする問 1.3 と比較して $Z(\mathbf{R} X)$ の有界性については次の定理が知られており, 有界性の判定は Lie 環の言葉のみで行える.

定理 1.10 ([Kob97, Lemma 5.4]) $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ である. ここに $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ は X と $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の 0 でない元がなす角度の最小値 $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$ であり, $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ と $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$ は同値である.

定理 1.10 より, $X \in \mathfrak{h}$ と $Z(\mathbf{R} X)$ が有界であることが同値である.

1.2 問 1.3 の観察: $G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ の場合

$G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1) := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$ の場合に問 1.3 が正しいことは直接計算により確かめられる.

命題 1.11 $G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ のとき問 1.3 は正しい.

補題 1.12 $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(1, 1)$ の Killing 形式から定まる Poincaré 円板 $G/K = \{x + \sqrt{-1}y \mid x^2 + y^2 < 1\}$ の計量は $\frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ である.

補題 1.12 の証明 \mathfrak{g} の元を G/K 上の左不変ベクトル場と同一視すると

$$\begin{aligned} X' &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}, \\ Y' &:= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

である. \mathfrak{g} の Killing 形式 B から定まる \mathfrak{p} 上のノルム $\|-\|$ に対して $\|X'\|^2 = \|Y'\|^2 = 8$, $B(X', Y') = 0$ であって, $0 \in G/K = \{x + \sqrt{-1}y \mid x^2 + y^2 < 1\}$ で主張が成り立つ.

したがって $k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$, $a_r := \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r \\ \sinh r & \cosh r \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} &g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X')) \\ &= g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) \\ &= 8, \\ &g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) = 0 \end{aligned}$$

なるような計量 g が Killing 形式から誘導される計量であるが, それが主張の形であることを示せば良い (これらのベクトルが何を表しているかは図 2 参照).

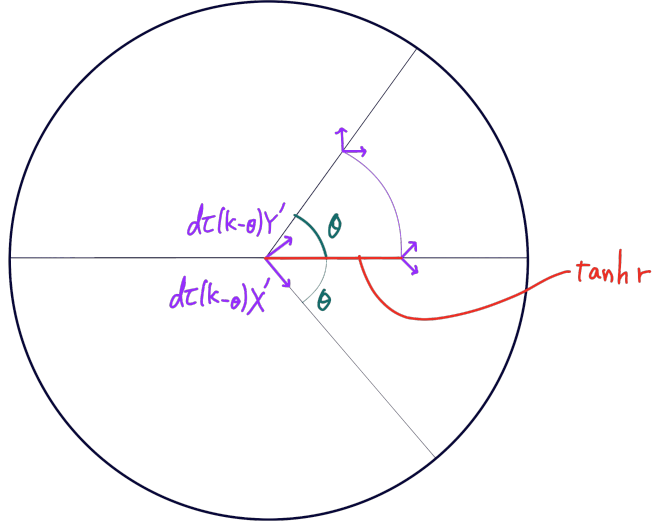


図 2

$t = 0$ での接ベクトルが $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X'$ を与える曲線は

$$\gamma_x(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \cosh r}$$

であるから,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_x(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial x} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x}$$

である.

同様に $t = 0$ での接ベクトルが $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y'$ を与える曲線は

$$\gamma_y(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \cosh r}$$

であるから,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_y(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial y} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

である.

以上より $g = \frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ が示された. ■

命題 1.11 の証明 $k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$, $X_\theta := k_{\theta/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} k_{-\theta/2}$ とすると, $\mathfrak{p} \setminus \{0\} = \{tX_\theta \mid t \in \mathbf{R}_{>0}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ である. この X_θ と $t \in \mathbf{R}$ に対して $Y(tX_\theta) = s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なる $s \in \mathbf{R}$ を求める.

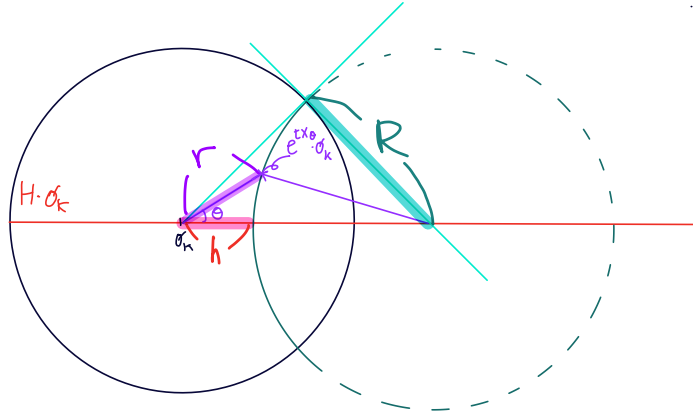


図 3

右の円の Euclid 距離での半径を R とし, $e^{tX_\theta} \cdot o_K$ から $H \cdot o_K$ への垂線の足の o_K からの Euclid 距離を h とするとき, 外側の青色の直角三角形に対して三平方の定理を用いて $(h+R)^2 = R^2 + 1$ より $R = \frac{1-h^2}{2h}$, $R+h = \frac{1+h^2}{2h}$ を得る.

さらに下の紫色の三角形に対して余弦定理を用いて $R^2 = (R+h)^2 + r^2 - 2r(R+h) \cos \theta$ を得,

$$\begin{aligned} R^2 &= (R+h)^2 + r^2 - 2(R+h) \cos \theta \\ &= R^2 + 1 + r^2 - 2r(R+h) \cos \theta \\ &= R^2 + 1 + r^2 - 2r \frac{1+h^2}{2h} \cos \theta \end{aligned}$$

より

$$\frac{2r \cos \theta}{r^2 + 1} = \frac{2h}{h^2 + 1} \quad (1.1)$$

を得る.

$r = \tanh t$, $h = \tanh s$ であるから (1.1) は $\cos \theta \tanh 2t = \tanh 2s$ と書き直せる. したがって X_θ に対して $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であることと $|\cos \theta| \neq 1 \iff X \notin \mathfrak{h}$ であることが同値である. \blacksquare

補足 1.13 命題 1.11 は角度を用いた議論によっても示すことができる. 具体的には, 計算により次の補題 1.14 が示せる.

補題 1.14 $e^{sY} e^{rZ} \cdot o_K = \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix} \sqrt{-1} \tanh r \in SU(1, 1)/U(1)$, $s > 0$, $r \in \mathbf{R}$ に対し, $\varphi_{s,r} := \angle_{o_K}(e^{sY} e^{rZ} \cdot o_K, e^{sY} \cdot o_K)$ は, $\tan \varphi_{s,r} = \frac{\tanh 2r}{\sinh 2s}$ を満たす. ただし $Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Z := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ とする.

補題 1.14 により命題 1.11 は次のように証明できる. 任意の $0 \neq s \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \tan \varphi_{|s|,r} = \frac{-1}{\sinh 2|s|} \leq \tan \varphi_{s,r} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \tan \varphi_{|s|,r} = \frac{1}{\sinh 2|s|} \quad (1.2)$$

であるから, $X \notin \mathbf{R} Y$ の元に対して $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であるとする, $0 < \varepsilon < \varphi(X, \mathfrak{h})$ なる ε に対し, ある $t \in \mathbf{R}$ が存在して, $Y(tX) = s_t Y$, $\sinh 2|s_t| > \frac{1}{\tan \varepsilon}$ である. $Z(tX) = r_t Z$ とすると (1.2) より $|\tan \varphi_{s_t, r_t}| < \tan \varepsilon$, したがって

$$-\varepsilon < \angle_{o_K}(e^{s_t Y} e^{r_t Z} \cdot o_K, e^{s_t Y} \cdot o_K) < \varepsilon < \varphi(X, \mathfrak{h})$$

となる. しかし定義より $\angle_{o_K}(e^{s_t Y} e^{r_t Z} \cdot o_K, e^{s_t Y} \cdot o_K) = \angle_{o_K}(e^{tX} \cdot o_K, e^{Y(tX)} \cdot o_K)$ であり, $\angle_{o_K}(e^{tX} \cdot o_K, e^{Y(tX)} \cdot o_K) = \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ であるから矛盾する.

系 1.15 $G = SO(1, n)$, $H = SO(1, k)$, $1 \leq k \leq n - 1$ に対して問 1.3 は正しい. より具体的には次の命題 1.16 が成り立つ.

命題 1.16 $G = SO(1, n)$, $H = SO(1, k)$, $1 \leq k \leq n - 1$, とする.

$$Y(X) = \begin{cases} \frac{1}{4} \tanh^{-1}[\tanh(4\|X\|) \cos \theta] \frac{X_1}{\|X_1\|}, & X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}^\perp \\ 0, & X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} \end{cases}$$

である.

系 1.17 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}^\perp$ ならば $0 < \cos \theta \leq 1$ であり,

$$Y(\mathbf{R} X) = \left\{ s \frac{X_1}{\|X_1\|} \mid -\frac{\tanh^{-1}(\cos \theta)}{4} < s < \frac{\tanh^{-1}(\cos \theta)}{4} \right\}$$

であるから, $X \notin \mathfrak{p}_{H, \text{bdd}}$ と $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は同値である. したがってこの場合も $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd}} = \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ である.

定義 1.18

- Poincaré ball の計量は $4 \frac{\sum_i dx_i^2}{(1 - x_i^2)^2}$ とする.
- $\cos \theta := \frac{\langle X, \text{pr}(X) \rangle}{\|X\| \|\text{pr}(X)\|} \geq 0$, ただし $\langle -, - \rangle$ は $\mathfrak{so}(n, 1)$ の Killing 形式とする.

補題 1.19 $Z \in \mathfrak{p}$ に対し, $e^Z \cdot o_K$ が o_K から Euclid 距離で $\tanh p$, $p \geq 0$ の位置にある場合, $\|Z\| = \frac{p}{2}$ である.

系 1.15 の証明 [make it precise](#) $SO(1, n)/SO(n)$ の開球としての実現を考える. 「 $e^X \cdot o_K$ と o_K を結ぶ直線」と $H \cdot o_K$ で張られる超平面で $SO(1, n)/SO(n)$ を切った際の断面を考える.

$n=3, k=1$ の例

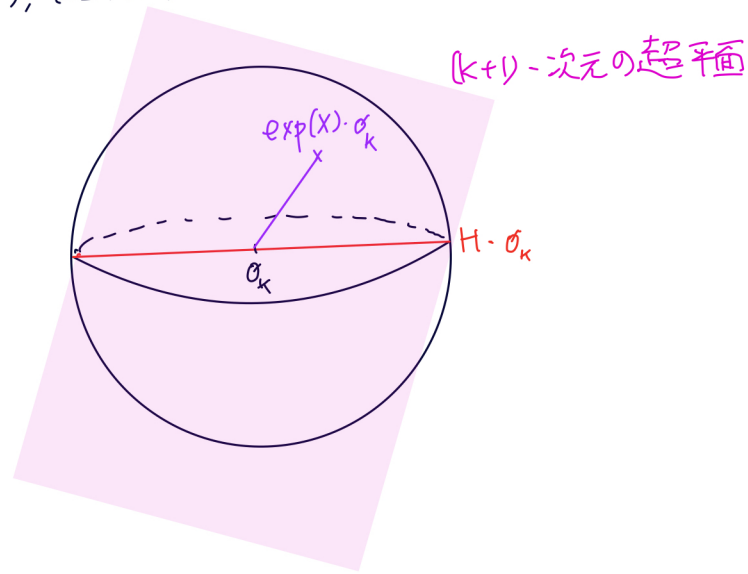


図 4

この断面に現れるのは図 3 と同じであるから、同様の計算により系 1.15 を得る.

よって補題 1.19 より, $\|Y(X)\| = \frac{s}{2} = \frac{1}{4} \tanh^{-1}(\cos \theta \tanh 2t)$ を得る. 再び補題 1.19 より $4\|X\| = 2t$ であるから, $\|Y(X)\| = \frac{1}{4} \tanh^{-1}[\tanh(4\|X\|) \cos \theta]$ を得, 命題 1.16 の主張が従う. ■

1.3 問 1.3 の観察: 類似の問いとその反例

問 1.3 は, G の実階数が 1 の場合は

問 1.20 $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \text{ である.}\}$ となるか?

と同値であった. しかし問 1.20 には G の実階数が 2 の場合の反例が存在する.

命題 1.21 $G = SL(3, \mathbf{R})$, $H = \{\text{diag}(e^a, e^b, e^c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0\}$,

$X := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ に対し $Y(\mathbf{R} X)$ は非有界である.

$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0\}$ であるから $X_1 = \text{diag}(1, 0, -1)$,
 $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ であり, $[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ より X は??の
 右辺の集合の元ではあるが $X \notin \mathfrak{p}_{H, \text{bdd}}$ であるから, 命題 1.21 は問 1.3 の反例と
 なっている.

1 つ補題を用意してから命題 1.21 を証明する.

補題 1.22 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し

$$\exp\left(2t \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{3} & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} & \frac{e^{2t} + 2e^{-4t}}{3} \end{pmatrix}$$

である.

補題 1.22 の証明 θ を $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$, $\sin 2\theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ を満たす実数として任意に 1 つ
 固定する. このとき

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{2}{3}, \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である. $k := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} k \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} k^{-1} &= \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta & \sqrt{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \cos \theta \sin \theta \\ \sqrt{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \cos \theta \sin \theta & 2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin 2\theta - \sin^2 \theta & \sqrt{2} \cos 2\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \\ \sqrt{2} \cos 2\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} & \sqrt{2} \sin 2\theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

したがって

$$k \exp \left(2t \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \right) k^{-1} = \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -4t \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \exp \left(2t \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \right) &= k^{-1} \exp \left(\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -4t \end{pmatrix} \right) k \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} \cos^2 \theta + e^{-4t} \sin^2 \theta & (e^{-4t} - e^{2t}) \sin \theta \cos \theta \\ (e^{-4t} - e^{2t}) \sin \theta \cos \theta & e^{2t} \sin^2 \theta + e^{-4t} \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{3} & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} & \frac{e^{2t} + 2e^{-4t}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

命題 1.21 の証明 行列式 1 の 3×3 正定値実対称行列全体の集合 $\text{Symm}^+(3)$ と G/K は $gK \mapsto g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t g$ により微分同相である.

補題 1.22 より

$$\begin{aligned}
e^{tX} \cdot o_K &= e^{tX} {}^t(e^{tX}) = e^{2tX} \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{3} & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} & \frac{e^{2t} + 2e^{-4t}}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

である.

$$Y := \text{diag}(a, b, c), \quad a + b + c = 0, \quad Z := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とすると, } r \in \mathbf{R} \text{ に対し,}$$

$$\begin{aligned}
e^Y e^{rZ} \cdot o_K &= e^Y e^{2rZ} e^Y \\
&= \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2r & \sinh 2r \\ 0 & \sinh 2r & \cosh 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{2a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2b} \cosh 2r & e^{b+c} \sinh 2r \\ 0 & e^{b+c} \sinh 2r & e^{2c} \cosh 2r \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{2a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2b} \cosh 2r & e^{-a} \sinh 2r \\ 0 & e^{-a} \sinh 2r & e^{-2a-2b} \cosh 2r \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

である. ただし最後の変形には $a + b + c = 0$ を用いた.

(1.3) と (1.4) を見比べると,

$$\begin{aligned}
a &= t, \\
\sinh 2r &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \sinh 3t, \\
e^{2b} &= \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{\sqrt{9 + 8 \sinh^2 3t}}
\end{aligned}$$

とすると $e^Y e^{rZ} \cdot o_K = e^{tX} \cdot o_K$ を得る. つまり任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し

- $Y(tX) = \text{diag}(a(t), b(t), -a(t) - b(t))$
ただし $a(t) = t, \quad b(t) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{\sqrt{9 + 8 \sinh^2 3t}} \right),$

- $Z(tX) = r(t)Z$ ただし $r(t) = \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sinh 3t \right)$

であるから, $Y(\mathbf{R}X)$ は非有界である. ■

G が実階数 1 の場合に限っても問 1.20 と類似の問題はいくつか考えられる. 例えば $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ を \mathfrak{h} に置き換えた次の問題が立てられる.

問 1.23 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp \mathfrak{h} \text{ である.}\}$ となるか?

しかし問 1.23 にも反例が存在する.

補題 1.24 $G = SL(3, \mathbf{R})$, $Y_1 := \text{diag}(1, 1, -2)$, $Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathfrak{h} = \mathbf{R}Y_1 \oplus \mathbf{R}Y_2$, $X = \text{diag}(1, 0, -1)$ に対し, $[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ であるが $Y(\mathbf{R}X) = \mathbf{R}Y_1$ であり, 非有界である.

補題 1.24 の計算 \mathfrak{h} は可換 Lie 環であり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$ の Cartan 対合 $\theta W := -{}^t W$ に対し $\mathfrak{h} = \theta \mathfrak{h}$ である.

$[X, \mathfrak{h}] \neq 0$ は, $[X, Y_2] \neq 0$ より従う.

ここで $Z_1 := \text{diag}(1, -1, 0) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ であり, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し, $e^{2tX} = e^{tY_1} e^{tZ_1}$ であるから, $Y(\mathbf{R}X) = \mathbf{R}Y_1$ となり, 補題 1.24 が示された. ■

補題 1.24 において X と \mathfrak{h} は, $[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ だが $[X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] = \{0\}$ かつ $X \not\perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ となるように取った. したがって問 1.23 の右辺を次の問 1.25 のように少し弱めても補題 1.24 はその反例になっている.

問 1.25 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \text{ である.}\}$ となるか?

2 G の実階数が 1 の場合

2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

命題 2.1 $G = SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$, $H = SO(1, 1)$, $n \geq 2$ に対して問 1.3 は正しい.

$G = Sp(1, 2)$, $\mathfrak{h} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合にのみ示す. その他の場合も全く同様の議論である.

命題 2.2 $G = Sp(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界 $\iff X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ or $X = 0$ である.

ただし, H は G の左上に入っている. すなわち, $\text{Lie } H = \mathfrak{h} = \mathbf{R} Y$, $Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

記号と定義 2.3 \mathbf{H} を四元数体とする. $Sp(1, 2) := \{g \in GL(3, \mathbf{H}) \mid {}^t \bar{g} I_{1,2} g = I_{1,2}\}$, $I_{1,2} := \text{diag}(-1, 1, 1)$ とし, $Sp(1, 2)$ の \mathbf{H}^3 への自然表現

を, $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}a + x_{12}b + x_{13}c \\ x_{21}a + x_{22}b + x_{23}c \\ x_{31}a + x_{32}b + x_{33}c \end{pmatrix}$ により定める.

$Sp(1, 2)/Sp(1) \times Sp(2) \simeq \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\} =: \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ である. なぜならば ${}^t(1, 0, 0)$ の自然表現 $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^2$ による軌道を考え, 第 2, 第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が $\mathbf{H} \mathbb{H}^2$ と微分同相であるためであり, $Sp(1, 2) \curvearrowright {}^t(1, 0, 0)$ による軌道上の点 $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ に対応する $\mathbf{H} \mathbb{H}^2$ の点を

$$\left[\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ z_1 z_0^{-1} \\ z_2 z_0^{-1} \end{pmatrix} \right] \text{ と書く.}$$

行列計算により, 次が示される.

$$\text{補題 2.4 } \forall z, w \in \mathbf{H} \text{ に対し, } \exp \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & * & * \\ \frac{\bar{z}}{r} \sinh r & * & * \\ \frac{\bar{w}}{r} \sinh r & * & * \end{pmatrix}, \text{ ただし}$$

$r := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$, である.

命題 2.2 の証明 $X = 0 \Rightarrow Y(\mathbf{R} X) = \{0\}$ と $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のときに $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であることは明らかであるから, $X \notin \mathfrak{h}$ の場合にのみ議論すればよい.

G の Cartan 対合を $\Theta(g) = (g^*)^{-1}$ (g^* は g の共役転置) とするとき, $\Theta(e^{Y(tX)} e^{Z(tX)}) \cdot o_K = e^{-Y(tX)} e^{-Z(tX)} \cdot o_K = \Theta(e^X) \cdot o_K = e^{-X} \cdot o_K$ より, 「 $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界 $\iff Y(\mathbf{R} X) \subset \mathbf{R} Y$ が上に非有界」である.

したがって, $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であるとき, 列 $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$ で, $s_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, ただし $Y(t_n X) = s_n Y$, なるものが存在する.

また, 任意の $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ の元はある $Z = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}, z, w \in \mathbf{H} \text{ s.t. } |z|^2 +$

$|w|^2 = 1$ と $r \in \mathbf{R}$ により rZ と表せる. $Z(t_n X) = r_n Z_n, Z_n := \begin{pmatrix} 0 & z_n & w_n \\ \bar{z}_n & 0 & 0 \\ \bar{w}_n & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$z_n, w_n \in \mathbf{H} \text{ s.t. } |z_n|^2 + |w_n|^2 = 1$ とすると, $X \notin \mathfrak{h}$ であるから定理 1.10 より $|r_n| \rightarrow \infty$ である. $z_n, w_n \in \mathbf{H} \text{ s.t. } |z_n|^2 + |w_n|^2 = 1$ より, $\{t_n\}$ の部分列を取

るとある Z_∞ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z_\infty = \begin{pmatrix} 0 & z_\infty & w_\infty \\ \bar{z}_\infty & 0 & 0 \\ \bar{w}_\infty & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ な

るようにできる. $Z \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ より $\operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$ であることに注意する ($\operatorname{Re}: \mathbf{H} \ni$

$a + bi + cj + dk \mapsto a \in \mathbf{R}$ とする).

補題 2.4 より,

$$\begin{aligned} e^{s_n Y} e^{r_n Z_n} \cdot o_K &= \begin{pmatrix} \cosh s_n & \sinh s_n & 0 \\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \\ \pm \bar{w}_n \tanh |r_n| \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} \cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n \\ \pm \bar{w}_n \tanh |r_n| \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

複号は r_n の符号 \pm と同順, である. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh s_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh |r_n|$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$ に注意すると次を得る. 具体的な計算は後述する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} = 1 \quad (2.1)$$

である.

したがって, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルと, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} (\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} \\ * \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値を I_n とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$ である.

しかし, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルと, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $e^{t_n X} \cdot o_K \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値 J_n は, $X := \begin{pmatrix} 0 & z_0 & w_0 \\ \bar{z}_0 & 0 & 0 \\ \bar{w}_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z_0, w_0 \in \mathbf{H}$ s.t. $|z_0|^2 + |w_0|^2 = 1$ とするとき $J_n = \frac{\bar{z}_0}{r_0} \tanh(tr_0)$,

$r_0 := \sqrt{|z_0|^2 + |w_0|^2}$ であり, $X \notin \mathfrak{h} \iff z_0 \neq 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{\bar{z}_0}{r_0} \neq 1$ である.

以上 2 つの議論を合わせると $e^{s_n Y} e^{r_n Z_n} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K \implies 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n \neq 1$ となり矛盾する.

以上より「 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \Rightarrow Y(\mathbf{R} X)$ 有界」, したがって 命題 2.2 を得る. ■

命題 2.2 の計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| = 0$ を示せば主張が得られる．具体的に計算すると，

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)(1 \pm z_n \tanh |r_n| \tanh s_n)}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|^2} - 1 \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)z'_n - (1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|^2} \quad (*) \end{aligned}$$

である．ここで $z'_n := 1 \pm z_n \tanh |r_n| \tanh s_n$ とすると，

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)z'_n - (1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|} \end{aligned}$$

であり， $0 < \min |1 \pm \operatorname{Re} z_n| \leq |(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ と $\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z_n|\} \leq |-1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|| \leq \sqrt{5}$ であることと $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$ より，

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z_n|\}}{\sqrt{5}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n|)|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \tanh s_n)|} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \operatorname{Re} z_n|\}} = 0 \end{aligned}$$

より，(2.1) が成り立つ． ■

2.2 G の実階数が 1 の場合

定理 2.5 G を実階数 1 の実線型半単純 Lie 群， H を G の非コンパクトな閉部分 Lie 群で， G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ かつ $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ なるものとするとき，問 1.3 が成り立つ．

定理 2.6 ([Hel01, p. 409, Theorem 3.1], $SU(2, 1)$ -reduction) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を実半単純 Lie 環 \mathfrak{g} の Cartan 対合 θ に対する Cartan 分解とし， $\alpha, 2\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ と仮定

する. $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $0 \neq X_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$ を任意に固定したとき, $X_\alpha, X_{2\alpha}, \theta X_\alpha, \theta X_{2\alpha}$ から生成される Lie 環 \mathfrak{g}^* は $\mathfrak{su}(2, 1)$ と同型である.

以下で定理 2.6 を示すための補題や記号を設定し, 定理 2.6 を示す.

記号と定義 2.7

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ を極大分裂可換部分代数, $\mathfrak{m} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) := \{W \in \mathfrak{k} \mid [W, \mathfrak{a}] = \{0\}\}$ とする. B を \mathfrak{g} の Killing 形式とする.
- $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ を \mathfrak{a} に関する制限ルート系とする. \mathfrak{g}_λ を $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ のルート空間とする.
- $Y_\alpha := [\theta X_\alpha, X_{2\alpha}]$ とする.
- $A_\alpha \in \mathfrak{a}$ を, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, A_\alpha) = \alpha(H)$ を満たす元とする. このとき, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, [X_\alpha, \theta X_\alpha]) = \alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$ である. したがって

$$\begin{aligned} [X_\alpha, \theta X_\alpha] &= B(X_\alpha, \theta X_\alpha)A_\alpha, \\ [Y_\alpha, \theta Y_\alpha] &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)A_\alpha, \\ [X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}] &= 2B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})A_\alpha \end{aligned}$$

である.

- $c_\alpha := \sqrt{\frac{-2}{\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)}}$, $c_{2\alpha} := \sqrt{\frac{-2}{\alpha(A_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})}}$ とし,

$$\begin{aligned} X_\alpha^* &:= c_\alpha X_\alpha, \\ X_{2\alpha}^* &:= c_{2\alpha} X_{2\alpha}, \\ Y_\alpha^* &:= [\theta X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = c_\alpha c_{2\alpha} Y_\alpha, \\ A_\alpha^* &:= \frac{1}{12\alpha(A_\alpha)} A_\alpha \end{aligned}$$

とする.

補題 2.8 $c := 2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$ とすると, $[X_\alpha, Y_\alpha] = cX_{2\alpha}$ である. 特に $0 \neq Y_\alpha \neq X_\alpha$ である.

補題 2.8 の証明 Jacobi 恒等式と Y_α の定義より

$$\begin{aligned} 0 &= [X_\alpha, [\theta X_\alpha, X_{2\alpha}]] + [\theta X_\alpha, [X_{2\alpha}, X_\alpha]] + [X_{2\alpha}, [X_\alpha, \theta X_\alpha]] \\ &= [X_\alpha, Y_\alpha] + [X_{2\alpha}, B(X_\alpha, \theta X_\alpha)A_\alpha] \end{aligned}$$

であり, $3\alpha \notin \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ より第二項が 0 となることから補題 2.8 が従う. ■

補題 2.9 $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ である. また $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], X_\alpha] = -3\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)Y_\alpha$ である.

補題 2.9 の証明 $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ より $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} + \mathfrak{a}$ であり, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\begin{aligned} B(H, [X_\alpha, \theta Y_\alpha]) &= B([H, X_\alpha], Y_\alpha) = \alpha(H)B(X_\alpha, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]) \\ &= \alpha(H)B([X_\alpha, X_\alpha], X_{2\alpha}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることより $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m}$ である.

さらに,

$$\begin{aligned} [[\theta X_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] &= -[[Y_\alpha, X_\alpha], \theta X_\alpha] - [[X_\alpha, \theta X_\alpha], Y_\alpha] \\ &= c[X_{2\alpha}, \theta X_\alpha] - B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha \\ &= -cY_\alpha - B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha \\ &= -3\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)Y_\alpha \neq 0 \end{aligned}$$

より, $\theta[\theta X_\alpha, Y_\alpha] = [X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ である. ■

補題 2.10 $\mathbf{R} X_\alpha + \mathbf{R} Y_\alpha$ は $\text{ad}_{\mathfrak{g}}([X_\alpha, \theta Y_\alpha])$ で不変である. さらに

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= -6\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha, \\ [Y_\alpha, \theta Y_\alpha] &= -2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})A_\alpha \end{aligned}$$

である.

補題 2.10 の証明 $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] \in \mathbf{R} X_\alpha$ を示せば, 補題 2.9 と併せて補題 2.10 が従う.

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= -[[\theta Y_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] - [[Y_\alpha, X_\alpha], \theta Y_\alpha] \\ &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha + c[X_{2\alpha}, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]] \\ &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - c[X_\alpha, [\theta X_{2\alpha}, X_{2\alpha}]] - c[\theta X_{2\alpha}, [X_{2\alpha}, X_\alpha]] \\ &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - cB(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})\alpha(A_{2\alpha})X_\alpha \end{aligned}$$

であり ($\mathfrak{g}_{3\alpha} = \{0\}$ による), $A_{2\alpha} = 2A_\alpha$ であるから,

$$[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] = B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha$$

を得る.

さらに,

$$\begin{aligned} B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha) &= B(Y_\alpha, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]) = -B([X_\alpha, Y_\alpha], \theta X_{2\alpha}) \\ &= -2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}) \end{aligned}$$

であるから, 最終的に

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha \\ &= -6\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha \end{aligned}$$

を得る. ■

補題 2.11 $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], X_{2\alpha}] = 0$ である.

補題 2.11 の証明 補題 2.8–2.10 と Jacobi 恒等式による. 具体的には, $T := [X_\alpha, \theta Y_\alpha]$ とすると, 補題 2.9 と補題 2.10 よりそれぞれ

$$[T, X_\alpha] \in \mathbf{R} Y_\alpha, \quad [T, Y_\alpha] \in \mathbf{R} X_\alpha \quad (2.2)$$

である. Jacobi 恒等式より

$$[T, [X_\alpha, Y_\alpha]] = -[X_\alpha, [Y_\alpha, T]] - [Y_\alpha, [X_\alpha, T]] \quad (2.3)$$

であり, (2.2) より (2.3) の右辺は 0 となる. 補題 2.8 より $[X_\alpha, Y_\alpha] = cX_{2\alpha}$ であり, これを用いることで補題 2.11 の主張を得る. ■

補題 2.12 $[Y_\alpha, \theta X_{2\alpha}] = 2\alpha(A_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})\theta X_\alpha$ である.

補題 2.12 の証明 Jacobi 恒等式を用いて与式を変形し計算することにより示せる. ■

定理 2.6 の証明 $\mathfrak{g}_0^* := \mathbf{R} A_\alpha \oplus \mathbf{R}[X_\alpha, \theta Y_\alpha]$, $\mathfrak{g}_\alpha^* := \mathbf{R} X_\alpha \oplus \mathbf{R} Y_\alpha$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}^* := \mathbf{R} \theta X_\alpha \oplus \mathbf{R} \theta Y_\alpha$, $\mathfrak{g}_{2\alpha}^* := \mathbf{R} X_{2\alpha}$, $\mathfrak{g}_{-2\alpha}^* := \mathbf{R} \theta X_{2\alpha}$ とすると, 補題 2.8–2.12 より, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_0^* \oplus \mathfrak{g}_\alpha^* \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}^*$ が示される.

非自明な \mathfrak{g}^* の Lie 括弧の関係は以下の通りである (残りの関係式はこの両辺に θ をつけることで得られる).

$$\begin{aligned}
[X_\alpha^*, Y_\alpha^*] &= -4X_{2\alpha}^*, & (\text{補題 2.8 による}), \\
[X_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] &= -6Y_\alpha^*, & (\text{補題 2.9 による}), \\
[X_\alpha^*, \theta X_\alpha^*] &= -24A_\alpha^*, & (\text{定義による}), \\
[X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] &= 0, & (\mathfrak{g}_{3\alpha} = 0 \text{ による}), \\
[X_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] &= \theta Y_\alpha^*, & (\text{定義による}), \\
[Y_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] &= 0, & (\text{補題 2.11 による}), \\
[Y_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] &= -4\theta X_\alpha^*, & (\text{補題 2.12 による}), \\
[Y_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*] &= -96A_\alpha^*, & (\text{補題 2.10 による}), \\
[Y_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] &= 24X_\alpha^*, & (\text{補題 2.10 による}), \\
[[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*], X_{2\alpha}^*] &= [[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*], \theta X_{2\alpha}^*] = 0, & (\text{補題 2.12 による}), \\
[X_{2\alpha}^*, \theta X_{2\alpha}^*] &= -48A_\alpha^*, & (\text{定義による})
\end{aligned}$$

これらを踏まえて \mathfrak{g}^* と $\mathfrak{su}(2, 1)$ の対応を,

$$\begin{aligned}
X_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & X_{2\alpha}^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\
\theta X_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \theta X_{2\alpha}^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\
Y_\alpha^* &\leftrightarrow -2 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, & \theta Y_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & -\sqrt{-1} & -0 \end{pmatrix}, \\
A_\alpha^* &\leftrightarrow \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*] &\leftrightarrow -4 \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

でつづける．この対応が Lie 環としての同型であること（上の関係式が満たされること）は計算することにより従う．

以上より定理 2.6 が示された． ■

補題 2.13 $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ の場合，任意に固定した $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と θX_α により生成される部分 Lie 環 \mathfrak{g}' は $\mathfrak{su}(1, 1)$ と同型である．

補題 2.13 の証明 $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} = \{0\}$ より， $[X_\alpha, X_\alpha] = [X_{-\alpha}, X_{-\alpha}] = 0$ である．

$A_\alpha \in \mathfrak{a}$ を任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, A_\alpha) = \alpha(H)$ を満たす元とする．任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, [X_\alpha, \theta X_\alpha]) = \alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$ である．任意の $0 \neq W \in \mathfrak{g}$ に対し $-B(W, \theta W) > 0$ より $[X_\alpha, \theta X_\alpha] = B(X_\alpha, \theta X_\alpha)A_\alpha \neq 0$ である．

以上より X_α と θX_α により生成される \mathfrak{g} の部分 Lie 環 \mathfrak{g}' は $\mathfrak{g}' = \mathbf{R} A_\alpha \oplus \mathbf{R} X_\alpha \oplus \mathbf{R} X_{-\alpha}$ である．

$c_\alpha := \frac{2}{\alpha(A_\alpha)}$ を用いて \mathfrak{g}' と $\mathfrak{su}(1, 1)$ の対応を

$$\begin{aligned} A_\alpha &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & c_\alpha X_\alpha &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\ c_\alpha X_{-\alpha} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

により与えると、これは \mathfrak{g}' と $\mathfrak{su}(1, 1)$ の間の同型になっている． ■

系 2.14 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群とする．任意の $0 \neq Y \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ と任意の $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ を固定したとき、 X, Y を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ で、 $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$ か $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$ なるものが存在する．

系 2.14 の証明 G は実階数 1 より、極大分裂可換部分代数 $\mathfrak{a} := \mathbf{R} Y \subset \mathfrak{g}$ に対しある $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ が存在して $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ あるいは $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ であるから、それぞれ定理 2.6 と補題 2.13 より系 2.14 の主張が従う．以下で $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ の形で場合分けしてこの議論を確認する．

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ より $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ をこの分解に対応して $X = X_0 + X_\alpha + X_{-\alpha}$ と分解すると、 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ より $X_{-\alpha} = -\theta X_\alpha \neq 0$ である． $Y \in \mathbf{R}[X_\alpha, \theta X_\alpha]$ であるからこの $X_\alpha \neq 0$ に補題 2.13 を適用することにより $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$ で $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ なるものが存在する．

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$, $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ より $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ をこの分解に対応して $X = X_0 + X_\alpha + X_{-\alpha} + X_{2\alpha} + X_{-2\alpha}$ と書くと、 $X \in \mathfrak{p}$ より $X_{-\alpha} = -\theta X_\alpha$, $X_{-2\alpha} = -\theta X_{2\alpha}$ である．

ここで $X \notin \mathfrak{a}$ より、

1. $X_\alpha \neq 0$ かつ $X_{2\alpha} \neq 0$
2. $X_\alpha \neq 0$ かつ $X_{2\alpha} = 0$
3. $X_\alpha = 0$ かつ $X_{2\alpha} \neq 0$

のいずれかである.

- 1 の場合はこの $X_\alpha, X_{2\alpha}$ と Y に,
- 2 の場合はこの X_α と, 適当な $0 \neq X'_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$ と Y に,
- 3 の場合はこの $X_{2\alpha}$ と, 適当な $0 \neq X'_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と Y に,

定理 2.6 を適用することにより $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$ で $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ なるものが存在する.

■

系 2.14 で定めた \mathfrak{g}_0 とその G における解析部分群 G_0 について次の 3 つが成り立つ.

補題 2.15 ([Hel01, p. 409, Lemma 2.2]) \mathfrak{g} の Cartan 対合 θ に対して $\mathfrak{g}_0 = \theta \mathfrak{g}_0$ であり, \mathfrak{g}_0 への θ の制限は \mathfrak{g}_0 の Cartan 分解を与える.

補題 2.16 ([Yos38, p. 82]) G を線型 Lie 群, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ は実半単純な部分 Lie 環とする. このとき \mathfrak{h} の G における解析的部分群は閉部分群である.

系 2.17 系 2.14 の \mathfrak{g}_0 の G における解析的部分群を G_0 とする. G_0 は G の閉部分群である.

補題 2.18 ([Hel01, p. 409, Lemma 2.3]) 系 2.14 の \mathfrak{g}_0 の G における解析的部分群を G_0 とする. $G = KAN$ を G の岩澤分解, $G_0 = K_0 A_0 N_0$ を G の岩澤分解とすると,

$$K_0 := G_0 \cap K, \quad A_0 := G_0 \cap A, \quad N_0 := G_0 \cap N,$$

であり, $G_0/K_0 \simeq G_0/K$ は G/K の全測地的な部分 Riemann 多様体である.

以上のことを用いて, G が実階数 1, $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合を $SU(1, 2)$ ないし $SU(1, 1)$ に帰着させることにより定理 2.5 を示す.

定理 2.5 の証明 おそらく $\dim H = 1$ でない場合も背理法で示せる気がする. \mathfrak{g} の極大分裂可換部分代数 $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の定めるルート系を $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし, $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の形によって 2 通りに場合分けして証明する.

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm\alpha\}$ のとき

系 2.14 により X と $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ で $\mathfrak{su}(1, 1)$ に同型なものが存在する. \mathfrak{g}' に対応する G の解析的部分群を G' とし, その岩澤分解を $G' = K'A'N'$ とする. このとき $e^{Z(tX)} \cdot o_K = e^{-Y(tX)} e^{tX} \cdot o_K \in G'/K$ であるから $Z(tX) \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{p}$ であり, $Y(\mathbf{R}X)$ の有界性は全測地的な部分 Riemann 多様体 $G'/K' \subset G/K$ に対して行えば良いことがわかる. したがって命題 1.11 により $X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd}}$ であることと $X = 0$ あるいは $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ が同値であることが言え, 定理 2.5 が示された.

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ のとき

系 2.14 により X と $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{g}$ で $\mathfrak{su}(2, 1)$ に同型なものが存在する. \mathfrak{g}^* に対応する G の解析的部分群を G^* とし, その岩澤分解を $G^* = K^*A^*N^*$ とする. このとき $e^{Z(tX)} \cdot o_K = e^{-Y(tX)} e^{tX} \cdot o_K \in G^*/K$ であるから $Z(tX) \in \mathfrak{g}^* \cap \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}^* \cap \mathfrak{p}$ であり, $Y(\mathbf{R}X)$ の有界性は全測地的な部分 Riemann 多様体 $G^*/K^* \subset G/K$ に対して行えば良いことがわかる. したがって命題 2.1 により $X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd}}$ であることと $X = 0$ あるいは $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ が同値であることが言え, 定理 2.5 が示された. ■

2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面

定義 2.19 ([Ebe72a, Definition 1.3]) M が完備かつ非正の断面曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき, M を Hadamard 多様体といい, Hadamard 多様体 M が visibility manifold であるとは, $\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$ に対し, ある $r(p, \varepsilon) > 0$ が存在して, 測地線 $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow X$ が任意の $t \in [t_0, t_1]$ に対し $d_M(p, \gamma(t)) \geq r(p, \varepsilon)$ を満たすならば, $\angle_p(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) \leq \varepsilon$ であることである.

後に示すように Poincaré 円板は visibility manifold であるが, 補題 1.14 よりその片鱗を見ることはできる. 具体的には $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ に対し $t_\varepsilon := \frac{1}{2} \sinh^{-1} \frac{1}{|\tan \varepsilon|}$ とし, 測地線 $\gamma_\varepsilon(s) = e^{t_\varepsilon Y} e^{sZ} \cdot o_K$ とすると, 補題 1.14 より任意の $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$ に対し

$\angle_{o_K}(\gamma_\varepsilon(s_0), \gamma_\varepsilon(s_1)) \leq \varepsilon$ である．この様子を図示すると図 5 のようになる．



図 5: visibility manifold のイメージ

定理 2.20 ([BH99, p. 296, 9.33 Theorem], originally [Ebe72b, Theorem 4.1]) $\exists C \subset M$ s.t. $M = \bigcup_{\text{cpt.}} \{f(C) \mid f \in \text{Isom}(M)\}$ なる Hadamard 多様体 M に対し，次は同値である．

- (i) M は visibility manifold である．
- (ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体 $M' \subset M$ で \mathbf{R}^2 と等長同型なものが存在しない．

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり，定理 2.20 の (ii) は G の実階数が 1 以下であることと同値である．したがって G の実階数が 1 の場合 G/K は visibility manifold であり， $G = SU(1, 2)$ ， $H = SO(1, 1)$ の場合の証明と全く同様にして背理法により問 1.3 が示される．

2.3 G が実階数 1 の実半単純 Lie 群の直積の場合

定理 2.5 の系として次が示される．

系 2.21 $n \in \mathbf{N}$ を固定し， $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$ を実階数 1 の実半単純 Lie 群の族， Θ_i を G_i の Cartan 対合とする．

G を $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$ の直積からなる Lie 群 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ とし, $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ を G の非コンパクトな閉部分群で $\Theta_i H_i = H_i$ かつ $\dim \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i = 1$ なるものとする. このとき問 1.3 が成り立つ.

系 2.21 の証明 各 G_i を G の部分 Lie 群と自然にみなす. K_i を $\Theta K_i = K_i$ なる G_i の極大コンパクト部分群とすると, $K := K_1 \times \cdots \times K_n$ は G の極大コンパクト部分群で $\Theta K = K$ を満たす.

$G/K \simeq G_1/K_1 \times \cdots \times G_n/K_n$ であり, 定理 1.2 により各 $1 \leq i \leq n$ の (G_i, H_i, Θ_i) に対し上への微分同相 $\pi_i: (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i) \oplus (\mathfrak{h}_i^\perp \cap \mathfrak{p}_i) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G_i/K_i$ が存在する. $X_i \in \mathfrak{p}_i$ に対し $(Y_i(X_i), Z_i(X_i)) := \pi_i^{-1}(e^{X_i} K_i)$ と定める.

$X \in \mathfrak{p}$ に対し, $X = X^{(1)} + \cdots + X^{(n)}$ を $\mathfrak{p} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{p}_i$ に対応する X の分解とすると, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であることは各 $Y_i(\mathbf{R} X^{(i)})$ が有界であることと同値である. また定理 2.5 より $Y_i(\mathbf{R} X^{(i)})$ が有界であることと「 $[X_1^{(i)}, X_2^{(i)}] \neq 0$ あるいは $X_1^{(i)} = 0$ であること」が同値である. ここで $X^{(i)} = X_1^{(i)} + X_2^{(i)}$ は $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i) \oplus (\mathfrak{h}_i^\perp \cap \mathfrak{p}_i)$ に対応する $X^{(i)} \in \mathfrak{p}_i$ の分解とする.

したがって, $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であることと「 $[X_1, X_2] = 0$ かつ $X_1 \neq 0$ であること」が同値であり, 系 2.21 が示された. ■

謝辞

本研究および修士課程全体において常に洞察に富むご助言と丁寧なご指導を賜った指導教員の小林俊行教授に深謝の意を表する. また, 文献の情報から数学的な議論にわたり様々なご助言をくださった, 修了生も含む小林研究室のみなさまにも心より感謝する. 特に小林研究室の田内大渡氏には幾度も議論いただいたことに御礼申し上げたい.

最後に, 学部時代からセミナーに付き合ってください, ときに精神的にも支えてくださった友人に, 特に近藤彪生氏には同じ「修士 3 年生」として修士論文の締め切り前に多大な励ましをいただいたことに感謝の意を表して謝辞とする.

参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.
- [BBE85] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203.
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer, 1999.
- [Borel–Ji] A. Borel and L. Ji, *Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006.
- [Ebe72a] P. Eberlein, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, 1972, pp. 492–510.
- [Ebe72b] P. Eberlein, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, 1972, pp. 151–70.
- [EO73] P. Eberlein and B. O’Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109.
- [Hel84] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis—Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 83, AMS, 1984.
- [Hel01] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.
- [KK16] F. Kassel and T. Kobayashi, *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces*, Adv. Math., Vol. 287, 2016, pp. 123–236.
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.

- [小林 95] 小林俊行, 球等質多様体上の調和解析入門, 第 3 回整数論サマースクール
‘等質空間と保型形式’ 所収, 佐藤文広 編, 長野, 1995, pp. 22-41.
- [小林 & 大島] 小林俊行・大島利雄, リー群と表現論, 岩波書店, 2005.
- [Yos37] K. Yosida, *A problem concerning the second fundamental theorem of*
Lie, Proc. Imp. Acad., Vol. 13, No. 5, 1937, pp. 152–155.
- [Yos38] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*,
Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.