論文内容の要旨

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文には小林俊行氏による $\mathfrak{h}$ 射影の有界性に対する次の問 1 について，G の実階数や H の次元が低い場合に肯定的な結果をいくつか記した ($\mathfrak{h}$ 射影や記号の定義は後述する).

問 1 (小林俊行氏による) $X \in \mathfrak{p}$ に対し $Y(\mathbf{R}\,X)$ が $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合であることと次の条件は同値であるか？

条件 2 $X \in \mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}$，もしくは $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $X \in \mathfrak{g}'_s$，もしくは $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \not\subset \mathfrak{h}$ である.

ただし

- $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^{\perp})$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.
- $\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{h}$ と X が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環とし，$\mathfrak{g}'_s := [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$，$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$ は $\mathfrak{g}'$ の中心とする.

ここで G が実階数 1 のとき，条件 2 と $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ は同値である.

この論文の基本設定は以下の通りである.

記号と定義 3

- G を非コンパクト実簡約 Lie 群，H は G の非コンパクトかつ連結成分有限個の閉部分群で，G の Cartan 対合 Θ に対して $H = \Theta H$ を満たすものとする.
- $\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G$, $\mathfrak{h} := \operatorname{Lie} H$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e を G の単位元とし，$o_K := eK \in G/K$ とする.
- $\langle -, - \rangle$ を，$\mathfrak{g}$ 上の G 不変な非退化対称双線型形式で，$\mathfrak{k}$ 上負定値，$\mathfrak{p}$ 上正定値で $\mathfrak{k} \perp \mathfrak{p}$ なるものとし，$\mathfrak{h}^{\perp} := \{W \in \mathfrak{g} \mid \langle W, \mathfrak{h} \rangle = \{0\}\}$ とする.

本修士論文の主題である $X \in \mathfrak{p}$ の $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は，次の定理 4 により $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p})$ と定義される.

定理 4 ([**Kob89, Lemma 6.1**]) 記号と定義 3 の設定において $\pi \colon (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

$e^{Y(X)} \cdot o_K$ は「$e^X \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足」という幾何学的意味を持つ．したがって $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界であるか否かという問いは，幾何的には「$e^{tX} \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足全体の集合が有界であるか」という問いに対応する.

以下では (G, H) がどのような場合に問 1 が肯定的であったかとその証明方法を具体的に述べる.

G が実階数 1 の実線型半単純 lie 群，$\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合は $G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合に帰着することで問 1 が肯定的であることを証明した.

$G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合の証明の流れを荒っぽく述べる．$X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ に対して $Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界であるとすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $t_\varepsilon \in \mathbf{R}$ が存在して「$e^{Y(t_\varepsilon X)} e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線」が「$e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線」が o_K でなす角が ε 未満となる．しかしこれは X と $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \setminus \{0\}$ の元がなす角度の最小値が非零であることに矛盾する．したがって

$X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ ならば $Y(\mathbf{R}\,X)$ は有界であることが言える．

これを踏まえて G が実階数 1 の実線型半単純 Lie 群，$\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合には次の命題を用いて $G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合に帰着した．

命題 5 G を実階数 1 の実線型半単純 Lie 群とする．任意の $0 \neq Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ と任意の $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathbf{R}\,Y$ を固定したとき，X, Y を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ で，$\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1,1)$ あるいは $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2,1)$ なるものが存在する．また $\mathfrak{g}_0$ の G における解析的部分群 G_0 は G の閉部分群である．

命題 5 は [**Hel01, p. 409**] の $SU(2,1)$-reduction と [**Yos38**] の定理をあわせて示される．

G が実階数 1 の実線型半単純 Lie 群の有限個の積であり，$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の各成分が 1 次元であるときも問 1 に対する肯定的な結果を得られる．なぜならば成分ごとに見ることで G が実階数 1 の実半単純 Lie 群，$\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合に帰着できるためである．

問 1 の背景を説明するために [**Ber88**] の内容についてふれる．

まずいくつか用語と命題を準備する．以下では G を実簡約 Lie 群，H を G の閉部分群とし，G/H には左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ が存在すると仮定する．

定義 6 ([**Ber88**])

- 局所有界関数 $r\colon G \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ が proper な radial function であるとは，r が次の 4 条件を満たすことである．
  1. $e \in G$ を単位元とするとき $r(e) = 0$ である．[*1]
  2. 任意の $g \in G$ に対し $r(g) = r(g^{-1}) \geq 0$ である．
  3. 任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し $r(g_1 g_2) \leq r(g_1) + r(g_2)$ である．
  4. 任意の $R \geq 0$ に対し，$B(R) \coloneqq \{g \in G \mid r(g) \leq R\}$ は G の相対コンパクト集合である．
- proper な radial function $r\colon G \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ から $r_{G/H}(gH) \coloneqq \inf_{h \in H}\{r(gh)\}$ により定まる $r_{G/H}\colon G/H \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ を G/H 上の radial function という．
- $d = \inf\{d' \geq 0 \mid$ ある $C > 0$ が存在して $m_X(B(r)) \leq C(1+r)^{d'}\}$ であるとき，G/H のランクは d であると言う．
- G の連続表現 $\mathcal{V}$ の smooth vector 全体の集合を $\mathcal{V}^\infty$ とする．

定理と定義 7 ([**Ber88, p. 683**]) G/H には次を満たす非自明な Borel 測度 m_X (standard measure) が定数倍を除いて一意的に存在する．

単位元のコンパクトな近傍で $B = B^{-1}$ なる任意の $B \subset G$ と任意の $g \in B$，$x \in G/H$ に対し，ある定数 $C_B \geq 0$ が存在して $g \cdot m_X \leq C_B m_X$，$C_B^{-1} < m_X(Bx) < C_B$ である．

定理と定義 8 ([**Ber88, p. 678**]) G/H の左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ を 1 つ固定する．次の同型写像が存在する．$\mathrm{Hom}_G((C_c(G/H))^\infty, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(V^\infty, C(G/H)^\infty)$，$\alpha_V \mapsto \beta_V$ ただし任意の $v \in V$，$\varphi \in (C_c(G/H))^\infty$ に対し $\langle v, \alpha_V(\varphi)\rangle_V = \displaystyle\int_{G/H} \beta_V(v)\varphi d\mu_X$ である．

定理 9 ([**Ber88, pp. 665–6**]) G/H のランクが d であるとき，G の既約ユニタリ表現 V が G の正則表現 $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は，非自明な G 絡作用素 $\alpha_V\colon (C_c(G/H))^\infty \to V$ が存在し，かつ任意の $v \in V^\infty$，$d' > d$ に対して $\displaystyle\int_{G/H} \left|\beta_V(v)(x)(1+r(x))^{-d/2}\right|^2 dx < \infty$ なることである．

[*1] これは [**Ber88**] には明示されていません．

G を実簡約 Lie 群，Θ を G の Cartan 対合とする．H を G の閉部分群とし，Θ と可換な G の対合 σ に対して $H = \sigma H$ であるとする．極大分裂可換部分代数 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ の positive Weyl chamber$\mathfrak{a}^+$ を 1 つ固定すると，任意の $g \in G$ に対し，ある $k \in K$ と $h \in H$ および一意的な $b_g \in \exp \overline{\mathfrak{b}^+}$ が存在して $g = k_1 b_g h$ と書ける．この事実を用いて Cartan 射影 $\nu\colon G \to \overline{\mathfrak{b}^+}$ を $\mu(g) = \log b_g$ と定める．

任意の $X \in \operatorname{Lie} B$ に対して $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界であれば，G/H がランク $d := \dim \mathfrak{a}$ となるための条件のうちの 1 つである，「ある定数 $C > 0$ が存在して，任意の $X \in \operatorname{Lie} B$ に対し，$d_{G/K}(\exp(-X) \cdot o_K, o_K) - \inf\{d_{G/K}(\exp(-X) \cdot o_K, h \cdot o_K) \mid h \in H\} \leq C$ であること」が満たされる．

以上が本修士論文の表現論的な背景である．

参考文献

[**Ber88**] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.

[**Hel01**] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.

[**KK16**] F. Kassel and T. Kobayashi, *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces*, Adv. Math., Vol. 287, 2016, pp. 123–236.

[**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.

[**小林 95**] 小林俊行，球等質多様体上の調和解析入門，第 3 回整数論サマースクール ‘等質空間と保型形式’ 所収，佐藤文広 編，長野，1995，pp. 22-41.

[**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant mesures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.

[**Yos38**] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.