

2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号	<u>45-196010</u>
フリガナ	オクダ タカコ
氏名	<u>奥田 堯子</u>

# 目次

序 . . . . .	2
謝辞 . . . . .	2
1 設定と基本的な補題 . . . . .	3
1.1 記号の設定 . . . . .	3
2 具体例と主定理の証明 . . . . .	3
2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群 . . . . .	3
2.2 $\mathbf{R}$ -rank $G = 1$ の場合 . . . . .	6
参考文献 . . . . .	6

## 序

hoge

## 謝辞

本研究および修士課程全体において常に洞察に富むご助言と丁寧なご指導を賜った指導教員の小林俊行教授に深謝の意を表する．また，文献の情報から数学的な議論にわたり様々なご助言をくださった，修了生も含む小林研究室のみなさまにも心より感謝する．特に小林研究室の田内大渡氏には幾度か議論いただいたことに御礼申し上げたい．

最後に，学部時代からセミナーに付き合ってください，ときに精神的にも支えてくださった友人と家族に感謝の意を表して謝辞とする．

# 1 設定と基本的な補題

## 1.1 記号の設定

記号を次のように定め, 必要な条件 (実階数 1 など) は証明の都度宣言することとする.

### 記号と定義 1.1

- $G$  を非コンパクト実半単純 Lie 群,  $H$  を  $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対する非コンパクトな簡約部分 Lie 群とする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$ ,  $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$  とし,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\theta := d\Theta$  による Cartan 分解とする.
- $e_G$  を  $G$  の単位元とし,  $o_K := e_G K \in G/K$  とする.
- $B(-, -)$  を  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式とし,  $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(Y, W) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$  とする.
- 以下の 定理 1.2 を用いて,  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  と定義する.

### 定理 1.2 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$  は上への微分同相である.

ここで,  $Y(\mathbf{R} X)$  の有界性について, 次の予想が小林俊行氏によって立てられた.

**予想 1.3** ベクトル空間としての分解  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$  に沿って  $X = X_1 + X_2$  と分解すると,  $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ or } X_1 = 0\}$  である.

ここで,  $Z(\mathbf{R} X)$  の有界性については次の定理が知られている.

### 定理 1.4 [Kob97, Lemma 5.4]

$X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$  である.

ここに  $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$  は  $X$  と  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の元がなす角度の最小値  $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$  であり,  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$  である.

つまり  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  ならば  $\|Z(tX)\| \rightarrow \infty$ ,  $|t| \rightarrow \infty$  である.

## 2 具体例と主定理の証明

### 2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

**命題 2.1**  $G = SO(1, n)$ ,  $SU(1, n)$ ,  $Sp(1, n)$ ,  $H = SO(1, 1)$ ,  $n \geq 2$  に対して予想 1.3 は正しい.

$G = Sp(1, 2)$ ,  $\mathfrak{h} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  の場合にのみ示す. その他の場合も全く同様の議論である.

**命題 2.2**  $G = Sp(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$ ,  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $Y(\mathbf{R} X)$  が有界  $\iff X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  or

$X = 0$  である.

ただし,  $H$  は  $G$  の左上に入っている. すなわち,  $\text{Lie } H = \mathfrak{h} = \mathbf{R} A$ ,  $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とする.

**記号と定義 2.3**  $\mathbf{H}$  を四元数体とする.  $Sp(1, 2)/Sp(1) \times Sp(2) \simeq \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\} =: \mathbf{H}\mathbb{H}^2$  である. これは自然表現  $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^2$  の  ${}^t(1, 0, 0)$  軌道を考え, 第 2, 第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が  $\mathbf{H}\mathbb{H}^2$  と微分同相であるためであり,  $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^3$

の  ${}^t(1, 0, 0)$  軌道の点  $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  に対応する  $\mathbf{H}\mathbb{H}^2$  の点を  $\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 z_0^{-1} \\ z_2 z_0^{-1} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$  と書く.

愚直な行列計算により, 次が示される.

**補題 2.4**  $\forall z, w \in \mathbf{H}$  に対し,  $\exp \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & * & * \\ \frac{\bar{z}}{r} \sinh r & * & * \\ \frac{\bar{w}}{r} \sinh r & * & * \end{pmatrix}$ , ただし  $r := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$ , である.

命題 2.2 の証明

$X = 0 \Rightarrow Y(\mathbf{R} X) = \{0\}$  と  $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$  のときに  $Y(\mathbf{R} X)$  が非有界であることは明らかであるから,  $X \notin \mathfrak{h}$  の場合にのみ議論すればよい. つまり  $X = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ ,

$z, w \in \mathbf{H}$  s.t.  $|z|^2 + |w|^2 = 1$  を任意に 1 つ固定して議論して一般性を失わない. このとき,  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  より  $\text{Re } z \neq \pm 1$  であることに注意する ( $\text{Re}: \mathbf{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto a \in \mathbf{R}$  とする).

$G$  の Cartan 対合を  $\Theta(g) = (g^*)^{-1}$  ( $g^*$  は  $g$  の共役転置) とするとき,  $\Theta(e^{Y(tX)} e^{Z(tX)}) \cdot o_K = e^{-Y(tX)} e^{-Z(tX)} \cdot o_K = \Theta(e^X) \cdot o_K = e^{-X} \cdot o_K$  より, 「 $Y(\mathbf{R} X)$  が非有界  $\iff Y(\mathbf{R} X) \subset \mathbf{R} A$  が上に非有界」である.

したがって,  $Y(\mathbf{R} X)$  が非有界であるとき, 列  $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$  で,  $s_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , ただし  $Y(t_n X) = s_n A$ , なるものが存在する.

このとき,  $\{|t_n|\}_{n \in \mathbf{N}}$  が有界  $\iff \{e^{t_n X} \cdot o_K\}_{n \in \mathbf{N}}$  が有界ならば,  $G/K \ni e^X \cdot o_K \mapsto (Y(X), Z(X)) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ ,  $X \in \mathfrak{p}$  が微分同相であることから  $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  も有界である. 従って対偶より  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \rightarrow \infty$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n| \rightarrow \infty$  である.

補題 2.4 より,

$$e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K = \begin{pmatrix} \cosh s_n & \sinh s_n & 0 \\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \bar{z} \tanh |t_n| \\ \pm \bar{w} \tanh |t_n| \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \cosh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \cosh s_n \\ \pm \bar{w} \tanh|t_n| \end{array} \right) \end{bmatrix},$$

複号は  $t_n$  の符号  $\pm$  と同順, である. このとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh s_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh|t_n|$  と  $\operatorname{Re} z \neq \pm 1$  に注意すると次を得る. 具体的な計算は後述する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \sinh s_n)^{-1} = 1 \quad (2.1)$$

である.

したがって,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルと,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から

$\begin{pmatrix} (\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \sinh s_n)^{-1} \\ * \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルがなす

Euclidean な内積の値を  $I_n$  とすると,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$  である.

しかし,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルと,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $e^{W(t_n X)} \cdot o_K \in$

$\mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルがなす Euclidean な内積の値  $J_n$  は,

$$W(t_n X) \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & 0 & 0 \\ \bar{z}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, \& \operatorname{Re} z_1 = 0 \right\} \text{ であることと, 補題 2.4 から } \operatorname{Re} J_n =$$

0 となり,  $e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K \implies \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 1$  に矛盾する.

以上より 「 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \Rightarrow Y(\mathbf{R} X)$  有界」, したがって 命題 2.2 を得る. ■

命題 2.2 の計算:

具体的に計算すると,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| \quad (\text{これが } = 0 \text{ を示せば良い}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\tanh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n|)(1 \pm z \tanh|t_n| \tanh s_n)}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2} - 1 \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n|)z' - (1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)z'|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2}, \quad z' := 1 \pm z \tanh|t_n| \tanh s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)z'|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|} \end{aligned}$$

であり,  $0 < \min |1 \pm \operatorname{Re} z| \leq |(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$  と  $\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z|\} \leq |-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|| \leq \sqrt{5}$  であることから,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z|\}}{\sqrt{5}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \operatorname{Re} z|\}} = 0 \end{aligned}$$

より, (2.1) が成り立つ.

## 2.2 $\mathbf{R}$ -rank $G = 1$ の場合

定理 2.5  $G$  を実階数 1 の非コンパクト実半単純 Lie 群とすると, 予想 1.3 が成り立つ.

補題 2.6

## 参考文献

- [BBE85] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203
- [Borel–Ji] A. Borel and L. Ji, *Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006
- [EO73] P. Eberlein and B. O’Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54