論文内容の要旨

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では，小林俊行氏による次の $\mathfrak{h}$ 射影の有界性に対する予想 1 を，G の実階数や H の次元が低い場合に証明した ($\mathfrak{h}$ 射影の定義や記号は後述する).

予想 1 $Y(\mathbf{R}\,X)$ is bounded in $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p} \iff [X_1, X_2]\neq 0$ or $X_1 = 0$，である.

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h})\oplus(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}^{\perp})$ に沿った $X\in\mathfrak{p}$ の分解とする.

この論文の基本設定は以下の通りである.

記号と定義

- G を非コンパクト実半単純 Lie 群，H を G の Cartan 対合 Θ に対する非コンパクトな実半単純部分 Lie 群とする.
- $\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G$, $\mathfrak{h} := \operatorname{Lie} H$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e_G を G の単位元とし，$o_K := e_G K \in G/K$ とする.
- $B(-,-)$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とし，$\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p} := \{W\in\mathfrak{p} \mid B(Y,W)=0, \forall Y\in\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}\}$ とする.

本修士論文の主題である $X\in\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(X)\in\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ は，次の定理 2 により
$(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X\cdot o_K)\in(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p})\oplus(\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p})$ と定義される.

定理 2 [**Kob89, Lemma 6.1**]

$\pi\colon (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p})\oplus(\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p})\ni(Y,Z)\mapsto e^Y e^Z\cdot o_K\in G/K$ は上への微分同相である.

$Y(X)$ は図形的には,「$e^X\cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}}\cdot o_K$ に下ろした垂線の足」と見ることができ，$Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界であるか否かという問いは，幾何的には「$e^{tX}\cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}}\cdot o_K$ に下ろした垂線の足の $t\in\mathbf{R}$ での和集合が有界であるか」という問に対応する.

予想 1 の大本は，実簡約 Lie 群 G とその閉部分群 H に対する G の正則表現 $L^2(G/H)$ について Plancherel 測度の台を求めることを目標とした [**Ber88**] にある.

[**Ber88**] の内容はおおまかには次の通りである; G/H が eH を中心とする radial function r に対して「$\mathbf{R}^d$ と同じ増大度」を持つとき，G/H のランクが d であると言い，G の既約ユニタリ表現 V が $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は，非自明な G-絡作用素 $\alpha\colon (C_c(G/H))^\infty\to V$ が存在し，α の「双対」を $\beta\colon V^\infty\to C(G/H)^\infty$ とすると，任意の $v\in V^\infty$，$d' > d$ に対して $\displaystyle\int_{G/H}\left|\beta(v)(x)(1+r(x))^{-d/2}\right|^2 dx<\infty$ なることである.

ここで G が $G = KAH$ という Cartan 分解を持つときに，G/H がランク $d := \dim A$ となる可能性がある条件の 1 つを $X\in\mathfrak{a}$ に対する $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(\mathbf{R}\,X)$ の有界性として定式化することができる．これが本修士論文の背景である.[*1]

[*1] 「」部分は 正確に定式化する予定 2022/01/10

以下では (G,H) がどのような場合に，どのような証明方法でを示したかを具体的に述べる．

G が実階数 1 の場合の予想 1 の証明方針は $G=SU(1,2), H=SO(1,1)$ (ないし $G=Sp(1,2)$, $H=SO(1,1)$) の場合の証明がトイモデルとなっている．

$G=SU(1,2)$，$H=SO(1,1)$ の場合の証明は背理法による．具体的には $G/K \simeq \{(z_1,z_2)\in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$ であることを用いて $e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}\cdot o_K$ を計算すると，例えば $Y(tX)=s(t)Y$ としたとき $s(t)\to\infty$，$t\to\infty$ ならば，任意の $\varepsilon>0$ に対してある t_ε が存在して，$e^{Y(t_\varepsilon X)}e^{Z(t_\varepsilon X)}\cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線が $e^{Y(t_\varepsilon X)}\cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線が o_K でなす角が

参考文献

[**Ber88**] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710

[**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.

[**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant mesures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54