

## 修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性  
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では、小林俊行氏による次の  $\mathfrak{h}$  射影の有界性に対する予想 1 を、 $G$  の実階数や  $H$  の次元が低い場合に証明した ( $\mathfrak{h}$  射影の定義や記号は後述する).

予想 1 (by T. Kobayashi)

$Y(\mathbf{R} X)$  is bounded in  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \iff [X_1, X_2] \neq 0$  or  $X_1 = 0$ , である.

ただし  $X = X_1 + X_2$  はベクトル空間としての分解  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$  に沿った  $X \in \mathfrak{p}$  の分解とする.

この論文の基本設定は以下の通りである.

## 記号と定義

- $G$  を非コンパクト実半単純 Lie 群,  $H$  を  $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対する非コンパクトな実半単純部分 Lie 群とする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$ ,  $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$  とし,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\theta := d\Theta$  による Cartan 分解とする.
- $e_G$  を  $G$  の単位元とし,  $o_K := e_G K \in G/K$  とする.
- $B(-, -)$  を  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式とし,  $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(Y, W) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}\}$  とする.

本修士論文の主題である  $X \in \mathfrak{p}$  の  $\mathfrak{h}$  射影  $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  は、次の定理 2 により  $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  と定義される.

## 定理 2 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$  は上への微分同相である.

$Y(X)$  は図形的には、「 $e^X \cdot o_K$  から  $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$  に下ろした垂線の足」と見ることができ、 $Y(\mathbf{R} X)$  が有界であるか否かという問いは、幾何的には「 $e^{tX} \cdot o_K$  から  $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$  に下ろした垂線の足の  $t \in \mathbf{R}$  での和集合が有界であるか」という問に対応する.

予想 1 の大本は、実簡約 Lie 群  $G$  とその閉部分群  $H$  に対する  $G$  の正則表現  $L^2(G/H)$  について Plancherel 測度の台を求めることを目標とした [Ber88] にある.

[Ber88] の内容を不正確ながらまとめると次の通りである;  $G/H$  が  $eH$  を中心とする radial function  $r$  に対して「 $\mathbf{R}^d$  と同じ増大度」を持つとき、 $G/H$  のランクが  $d$  であると言い、 $G$  の既約ユニタリ表現  $V$  が  $L^2(G/H)$  の既約分解に出現する必要条件は、非自明な  $G$ -絡作用素  $\alpha: (C_c(G/H))^\infty \rightarrow V$  が存在し、 $\alpha$  の「双対」を  $\beta: V^\infty \rightarrow C(G/H)^\infty$  とすると、任意の  $v \in V^\infty$ ,  $d' > d$  に対して  $\int_{G/H} |\beta(v)(x)(1+r(x))^{-d/2}|^2 dx < \infty$  なることである.

ここで  $G$  が  $G = KAH$  という Cartan 分解を持つときに、 $G/H$  がランク  $d := \dim A$  となる可能性がある条件の 1 つを  $X \in \mathfrak{a}$  に対する  $\mathfrak{h}$  射影  $Y(\mathbf{R} X)$  の有界性として定式化することがで

きる。これが本修士論文の背景である。<sup>\*1</sup>

以下では  $(G, H)$  がどのような場合に、どのような証明方法で示したかを具体的に述べる。

$G$  が実階数 1 の場合の予想 1 の証明方針は  $G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合の証明がトイモデルとなっている。

$G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合の証明は背理法による。具体的には次のとおりである；例えば  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  に対して  $Y(\mathbf{R} X)$  が非有界、より具体的に  $Y(tX) = s(t)Y$ ,  $s(t) \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$  のとき、 $G/K \simeq \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$  であることを用いて  $e^{Y(tX)}e^{Z(tX)} \cdot o_K$  を計算すると、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $t_\varepsilon$  が存在して  $e^{Y(t_\varepsilon X)}e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$  と  $o_K$  を結ぶ測地線が  $e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$  と  $o_K$  を結ぶ測地線が  $o_K$  でなす角が  $\varepsilon$  未満となる。これは  $X$  と  $\mathfrak{h} \setminus \{0\}$  のなす角度が非零であることに矛盾し、予想 1 と同値な「 $X = 0 \vee X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff Y(\mathbf{R} X)$  が有界」であることが言える。

これを踏まえて  $G$  が実階数 1 の場合の証明には次の一般論を用いた。

### 定義 3 [Ebe72a, Definition 1.3]

$M$  が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき、 $M$  を Hadamard 多様体といい、Hadamard 多様体  $M$  が visibility manifold であるとは、 $\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$  に対し、ある  $r(p, \varepsilon) > 0$  が存在して、測地線  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow X$  が  $d_M(p, \gamma(t)) \geq r(p, \varepsilon)$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$  ならば、 $\angle_p(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) \leq \varepsilon$  であることである。

$M$  が visibility manifold であるとは、幾何的に見れば<sup>\*2</sup>

### 定理 4 [BH99, p. 296, 9.33 Theorem], originally [Ebe72b, Theorem 4.1]

$\exists C \subset M$  s.t.  $M = \bigcup_{\text{cpt.}} \{f(C) \mid f \in \text{Isom}(M)\}$  なる Hadamard 多様体  $M$  に対し、次は同値である。

- (i)  $M$  は visibility manifold である。
- (ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体  $M' \subset M$  で  $\mathbf{R}^2$  と等長同型なものが存在しない。

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり、定理 4 の (ii) は  $G$  の実階数が 1 以下であることと同値である。したがって  $G$  の実階数が 1 の場合  $G/K$  は visibility manifold であり、 $G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合の証明と全く同様にして背理法により予想 1 が示される。

$G$  が実階数 1 の Lie 群の積である場合も、成分ごとに見れば  $G$  の実階数が 1 の場合と同様である。<sup>\*3</sup>

<sup>\*1</sup> 「」部分は 正確に定式化する予定です & もうすこしちゃんと [Ber88] を復習します。 2022/01/10

<sup>\*2</sup> 図をつけようと思っています。 2022/01/10

<sup>\*3</sup> 今から示します。 2022/01/10

## 参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer, 1999
- [Ebe72a] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, pp. 492–510, 1972
- [Ebe72b] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, pp. 151–70, 1972
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54