

2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号	<u>45-196010</u>
フリガナ	オクダ タカコ
氏名	<u>奥田 堯子</u>

目次

導入	2
謝辞	3
1 設定と基本的な補題	4
1.1 記号の設定	4
2 具体例と主定理の証明	5
2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群	5
2.2 G の実階数が 1 の場合	7
参考文献	8

導入

G を非コンパクトな実半単純 Lie 群, K を G の極大コンパクト部分群で G の Cartan 対合 Θ に対して $K = \Theta K$ なるものとするとき, G/K は \mathfrak{g} の Killing 形式 B から定まる Riemann 計量によって Riemann 多様体の構造を持つ. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Θ の微分 $d\Theta$ による \mathfrak{g} の Cartan 分解とするとき, G/K は \mathfrak{p} と微分同相であり, G の単位元の G/K での像 eK を通る G/K の極大測地線は $B(X, X) = 1$ なる $X \in \mathfrak{p}$ によって $e^{tX}K$, $t \in \mathbf{R}$ と書ける. H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で, $H = \Theta H$ を満たすものとし, \mathfrak{p} での B に対する $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の直交補空間を $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ とする. 測地線 $e^{tX}K$ の $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ 成分と $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ 成分への分解を与える定理として次の定理が知られている.

定理 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z K \in G/K$ は上への微分同相である.

この定理を用いて $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義すると, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $e^{tX}K = e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}K$ である.

$G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ とするとき, $t \in \mathbf{R}$ に対し, $Y(tX)$ は図 1 に図示するような幾何学的な意味を持つ. 図 1 は Poincaré 円板における測地線 $e^{tX}K$ (赤色の斜め線) とその上的一点 $e^{tX}K$ から eK の H 軌道 (中央の直線) に下ろした垂線の足 (緑の丸) が $e^{Y(tX)}K$ である.

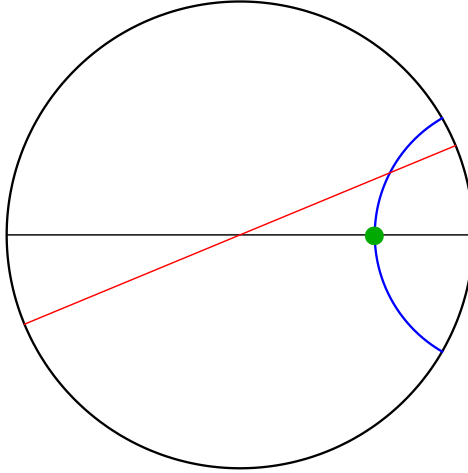


図 1: Poincaré 円板における $Y(tX)$ の幾何学的意味

本論文では小林俊行氏による次の予想について考察し, G が実階数 1 の場合の肯定的な結果を得た.

予想 $Y(\mathbf{R}X)$ は $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合である $\iff [X_1, X_2] \neq 0$ であるか $X_1 = 0$ である.

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.

謝辭

1 設定と基本的な補題

1.1 記号の設定

本論文の基本的な設定は次のとおりであり、この他に必要な条件は都度明示することとする。

記号と定義 1.1

- G を非コンパクト実半単純 Lie 群, H を G の部分 Lie 群で, G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ なるものとする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$, $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e を G の単位元とし, $o_K := eK \in G/K$ とする.
- $B(-, -)$ を \mathfrak{g} の Killing 形式とし, $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid \text{任意の } Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \text{ に対して } B(Y, W) = 0\}$ とする.

以下の定理 1.2 を用いて, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義する.

定理 1.2 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

ここで, $Y(\mathbf{R} X)$ の有界性について, 次の予想が小林俊行氏によって立てられた.

予想 1.3 (by T. Kobayashi)

ベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応して $X = X_1 + X_2$ と分解すると, $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ あるいは } X_1 = 0\}$ である.

予想 1.3 についての基本的な事項を挙げる.

補題 1.4

1. $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} \subset \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ あるいは } X_1 = 0\}$ である.
2. $X \in \mathfrak{p}$ が $X_1 = 0$ を満たすならば $X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}}$ である.
3. 1, 2 より予想 1.3 と「 $X \in \mathfrak{p}$ が $[X_1, X_2] \neq 0$ ならば $X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}}$ である」は同値である.
4. G が実階数 1 のとき, 予想 1.3 と「 $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ 」は同値である.

補題 1.4 の証明

1. 背理法による. $[X_1, X_2] = 0$ かつ $X_1 \neq 0$ なる $X \in \mathfrak{p}$ に対し,
2. $X_1 = 0 \iff X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ より $Z(tX) = tX$, $Y(tX) = 0$ であることによる.
4. $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $[X_1, X_2] \neq 0$ あるいは $X_1 = 0 \iff X = 0$ あるいは $X \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ を示せば良い.

■

$Z(\mathbf{R} X)$ の有界性については次の定理が知られており, 有界性の判定は Lie 環の言葉のみに

よる.

定理 1.5 [Kob97, Lemma 5.4]

$X \in \mathfrak{p}$ に対し, $\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ である.

ここに $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ は X と $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の元がなす角度の最小値 $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$ であり, $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$ である.

つまり $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ ならば $\|Z(tX)\| \rightarrow \infty, |t| \rightarrow \infty$ である.

2 具体例と主定理の証明

2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

命題 2.1 $G = SO(1, n), SU(1, n), Sp(1, n), H = SO(1, 1), n \geq 2$ に対して予想 1.3 は正しい.

$G = Sp(1, 2), \mathfrak{h} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合にのみ示す. その他の場合も全く同様の議論である.

命題 2.2 $G = Sp(1, 2), H = SO(1, 1), X \in \mathfrak{p}$ に対し, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界 $\iff X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ or $X = 0$ である.

ただし, H は G の左上に入っている. すなわち, $\text{Lie } H = \mathfrak{h} = \mathbf{R} A, A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と

する.

記号と定義 2.3 \mathbf{H} を四元数体とする. $Sp(1, 2)/Sp(1) \times Sp(2) \simeq \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\} =: \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ である. これは自然表現 $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^2$ の ${}^t(1, 0, 0)$ 軌道を考え, 第 2, 第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が $\mathbf{H} \mathbb{H}^2$ と微分同相であるためであり, $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^3$

の ${}^t(1, 0, 0)$ 軌道の点 $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ に対応する $\mathbf{H} \mathbb{H}^2$ の点を $\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 z_0^{-1} \\ z_2 z_0^{-1} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ と書く.

愚直な行列計算により, 次が示される.

補題 2.4 $\forall z, w \in \mathbf{H}$ に対し, $\exp \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & * & * \\ \frac{\bar{z}}{r} \sinh r & * & * \\ \frac{\bar{w}}{r} \sinh r & * & * \end{pmatrix}$, ただし $r := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$,

である.

命題 2.2 の証明

$X = 0 \Rightarrow Y(\mathbf{R}X) = \{0\}$ と $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のときに $Y(\mathbf{R}X)$ が非有界であることは明らかであるから, $X \notin \mathfrak{h}$ の場合にのみ議論すればよい. つまり $X = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$,

$z, w \in \mathbf{H}$ s.t. $|z|^2 + |w|^2 = 1$ を任意に 1 つ固定して議論して一般性を失わない. このとき, $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ より $\operatorname{Re} z \neq \pm 1$ であることに注意する ($\operatorname{Re}: \mathbf{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto a \in \mathbf{R}$ とする).

G の Cartan 対合を $\Theta(g) = (g^*)^{-1}$ (g^* は g の共役転置) とするとき, $\Theta(e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}) \cdot o_K = e^{-Y(tX)}e^{-Z(tX)} \cdot o_K = \Theta(e^X) \cdot o_K = e^{-X} \cdot o_K$ より, 「 $Y(\mathbf{R}X)$ が非有界 $\iff Y(\mathbf{R}X) \subset \mathbf{R}A$ が上に非有界」である.

したがって, $Y(\mathbf{R}X)$ が非有界であるとき, 列 $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$ で, $s_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, ただし $Y(t_n X) = s_n A$, なるものが存在する.

このとき, $\{|t_n|\}_{n \in \mathbf{N}}$ が有界 $\iff \{e^{t_n X} \cdot o_K\}_{n \in \mathbf{N}}$ が有界ならば, $G/K \ni e^X \cdot o_K \mapsto (Y(X), Z(X)) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$, $X \in \mathfrak{p}$ が微分同相であることから $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ も有界である. 従って対偶より $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \rightarrow \infty$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n| \rightarrow \infty$ である.

補題 2.4 より,

$$\begin{aligned} e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K &= \begin{pmatrix} \cosh s_n & \sinh s_n & 0 \\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm \bar{z} \tanh |t_n| \\ \pm \bar{w} \tanh |t_n| \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n \\ \pm \bar{w} \tanh |t_n| \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

複号は t_n の符号 \pm と同順, である. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh s_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh |t_n|$ と $\operatorname{Re} z \neq \pm 1$ に注意すると次を得る. 具体的な計算は後述する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n)^{-1} = 1 \quad (2.1)$$

である.

したがって, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルと, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から

$\begin{pmatrix} (\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n)^{-1} \\ * \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値を I_n とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$ である.

しかし, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルと, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $e^{W(t_n X)} \cdot o_K \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値 J_n は,

$$W(t_n X) \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & 0 & 0 \\ \bar{z}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, \& \operatorname{Re} z_1 = 0 \right\} \text{ であることと, 補題 2.4 から } \operatorname{Re} J_n =$$

0 となり, $e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K \implies \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 1$ に矛盾する.

以上より 「 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \Rightarrow Y(\mathbf{R}X)$ 有界」, したがって 命題 2.2 を得る. ■

命題 2.2 の計算:

具体的に計算すると,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| \quad (\text{これが } = 0 \text{ を示せば良い}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\tanh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n|)(1 \pm z \tanh|t_n| \tanh s_n)}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2} - 1 \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n|)z' - (1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)z'|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2}, \quad z' := 1 \pm z \tanh|t_n| \tanh s_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)z'|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|}
\end{aligned}$$

であり, $0 < \min |1 \pm \operatorname{Re} z| \leq |(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ と $\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z|\} \leq |-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|| \leq \sqrt{5}$ であることから,

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z|\}}{\sqrt{5}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \operatorname{Re} z|\}} = 0
\end{aligned}$$

より, (2.1) が成り立つ.

2.2 G の実階数が 1 の場合

定理 2.5 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群とすると, 予想 1.3 が成り立つ.

定義 2.6 [Ebe72a, Definition 1.3]

M が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき, M を Hadamard 多様体といい, Hadamard 多様体 M が visibility manifold であるとは, $\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$ に対し, ある $r(p, \varepsilon) > 0$ が存在して, 測地線 $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow X$ が $d_M(p, \gamma(t)) \geq r(p, \varepsilon), \forall t \in [t_0, t_1]$ ならば, $\angle_p(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) \leq \varepsilon$ であることである.

[図を入れる](#)

定理 2.7 [BH99, p. 296, 9.33 Theorem], originally [Ebe72b, Theorem 4.1]

$\exists C \subset M$ s.t. $M = \bigcup_{\text{cpt.}} \{f(C) \mid f \in \operatorname{Isom}(M)\}$ なる Hadamard 多様体 M に対し, 次は同値である.

- (i) M は visibility manifold である.
- (ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体 $M' \subset M$ で \mathbf{R}^2 と等長同型なものが存在しない.

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり, 定理 2.7 の (ii) は G の実階数が 1 以下であることと同値である. したがって G の実階数が 1 の場合 G/K は visibility manifold であり, $G = SU(1, 2), H = SO(1, 1)$ の場合の証明と全く同様にして背理法により予想 1.3 が示される.

参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710
- [BBE85] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer, 1999
- [Borel-Ji] A. Borel and L. Ji, *Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006
- [Ebe72a] P. Eberlein, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, pp. 492–510, 1972
- [Ebe72b] P. Eberlein, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, pp. 151–70, 1972
- [EO73] P. Eberlein and B. O’Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54