論文内容の要旨

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では，小林俊行氏による次の $\mathfrak{h}$ 射影の有界性に対する予想 1 を，G の実階数や H の次元が低い場合に証明した ($\mathfrak{h}$ 射影の定義や記号は後述する).

予想 1 (by T. Kobayashi)

$Y(\mathbf{R}\,X)$ は $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ で有界である $\iff$ $[X_1, X_2] \neq 0$ であるか $X_1 = 0$ である.

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}^{\perp})$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.

この論文の基本設定は以下の通りである.

記号と定義

- G を非コンパクト実半単純 Lie 群，H は G の非コンパクトな部分 Lie 群で，G の Cartan 対合 Θ に対して $H = \Theta H$ を満たすものとする.
- $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\,G$, $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}\,H$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e を G の単位元とし，$o_K := eK \in G/K$ とする.
- $B(-,-)$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とし，$\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(Y,W) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}\}$ とする.

本修士論文の主題である $X \in \mathfrak{p}$ の $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(X) \in \mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ は, 次の定理 2 により $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p})$ と定義される.

定理 2 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi\colon (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

$Y(X)$ は「$e^X \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足」であり，$Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界であるか否かという問いは，幾何的には「$e^{tX} \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足の $t \in \mathbf{R}$ での和集合が有界であるか」という問に対応する.

予想 1 の大本は，実簡約 Lie 群 G とその閉部分群 H に対する G の正則表現 $L^2(G/H)$ について Plancherel 測度の台を求めることを目標とした [**Ber88**] にある.

[**Ber88**] の内容を不正確ながらまとめると次の通りである; G/H が eH を中心とする radial function r に対して「$\mathbf{R}^d$ と同じ増大度」を持つとき，G/H のランクが d であると言い，G の既約ユニタリ表現 V が $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は，非自明な G-絡作用素 $\alpha\colon (C_c(G/H))^{\infty} \to V$ が存在し, α の「双対」を $\beta\colon V^{\infty} \to C(G/H)^{\infty}$ とすると, 任意の $v \in V^{\infty}$, $d' > d$ に対して $\displaystyle\int_{G/H} \left|\beta(v)(x)(1 + r(x))^{-d/2}\right|^2 dx < \infty$ なることである.

ここで G が $G = KAH$ という Cartan 分解を持つときに，G/H がランク $d := \dim A$ となる可能性がある条件の 1 つを $X \in \mathfrak{a}$ に対する $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(\mathbf{R}\,X)$ の有界性として定式化することがで

きる．これが本修士論文の背景である．[*1]

以下では (G, H) がどのような場合に，どのような証明方法でを示したかを具体的に述べる．

G が実階数 1 の場合の予想 1 の証明方針は $G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合の証明がトイモデルとなっている．

$G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合の証明は背理法による．具体的には次のとおりである; 例えば $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ に対して $Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界，より具体的に $Y(tX) = s(t)Y$，$s(t) \to \infty$，$t \to \infty$ のとき，$G/K \simeq \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ であることを用いて $e^{Y(tX)} e^{Z(tX)} \cdot o_K$ を計算すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある t_ε が存在して $e^{Y(t_\varepsilon X)} e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線が $e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線が o_K でなす角が ε 未満となる．これは X と $\mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のなす角度が非零であることに矛盾し，予想 1 と同値な「$X = 0 \vee X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界」であることが言える．

これを踏まえて G が実階数 1 の場合の証明には次の一般論を用いた．

定義 3 [**Ebe72a, Definition 1.3**]

M が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき，M を Hadamard 多様体といい，Hadamard 多様体 M が visibility manifold であるとは，$\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$ に対し，ある $r(p, \varepsilon) > 0$ が存在して，測地線 $\gamma \colon [t_0, t_1] \to X$ が $d_M(p, \gamma(t)) \geq r(p, \varepsilon)$，$\forall t \in [t_0, t_1]$ ならば，$\measuredangle_p(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) \leq \varepsilon$ であることである．

M が visibility manifold であるとは，幾何的に見れば[*2]

定理 4 [**BH99, p. 296, 9.33 Theorem**], originally [**Ebe72b, Theorem 4.1**]

$\exists C \underset{\text{cpt.}}{\subset} M$ s.t. $M = \bigcup\{f(C) \mid f \in \mathrm{Isom}(M)\}$ なる Hadamard 多様体 M に対し，次は同値である．

(i) M は visibility manifold である．

(ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体 $M' \subset M$ で $\mathbf{R}^2$ と等長同型なものが存在しない．

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり，定理 4 の (ii) は G の実階数が 1 以下であることと同値である．したがって G の実階数が 1 の場合 G/K は visibility manifold であり，$G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合の証明と全く同様にして背理法により予想 1 が示される．

G が実階数 1 の Lie 群の積である場合も，成分ごとに見れば G の実階数が 1 の場合と同様である．[*3]

[*1] 「」部分は 正確に定式化する予定です & もうすこしちゃんと [**Ber88**] を復習します． 2022/01/10

[*2] 図をつけようと思っています．2022/01/10

[*3] 今から示します．2022/01/10

参考文献

[**Ber88**] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710

[**BH99**] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Grundlehren der mathematischen Wissensschaften, Vol. 319, Springer, 1999

[**Ebe72a**] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, pp. 492–510, 1972

[**Ebe72b**] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, pp. 151–70, 1972

[**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.

[**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant mesures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54