論文内容の要旨

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では，小林俊行氏による $\mathfrak{h}$ 射影の有界性に対する次の問題 1 について，G の実階数や H の次元が低い場合に肯定的な結果を得た ($\mathfrak{h}$ 射影の定義や記号は後述する).

問題 1 (小林俊行氏による) $X \in \mathfrak{p}$ に対し $Y(\mathbf{R}\,X)$ が $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合であることと「$X \in \mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}$ もしくは『$[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = 0$ であること』」は同値であるか？

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^{\perp})$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.

ここで G が実階数 1 のとき，「$X \in \mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}$ もしくは『$[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = 0$ であること』」と $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ は同値である.

この論文の基本設定は以下の通りである.

記号と定義 2

- G を非コンパクト実簡約 Lie 群，H は G の非コンパクトな閉部分群で，G の Cartan 対合 Θ に対して $H = \Theta H$ を満たすものとする.
- $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\, G$, $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}\, H$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e を G の単位元とし，$o_K := eK \in G/K$ とする.
- B を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とし，$\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(W, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) = \{0\}\}$ とする.

本修士論文の主題である $X \in \mathfrak{p}$ の $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は，次の定理 3 により $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p})$ と定義される.

定理 3 ([**Kob89, Lemma 6.1**]) $\pi \colon (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

$e^{Y(X)} \cdot o_K$ は「$e^X \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足」であり，$Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界であるか否かという問いは，幾何的には「$e^{tX} \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足全体の集合が有界であるか」という問いに対応する.

問題 1 の背景を説明するために [**Ber88**] の内容のごく一部を述べる.[*1] G を実簡約 Lie 群，H を G の閉部分群とする．$r \colon G/H \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ が radial function であるとは，r が次を満たすことである.

「$\mathbf{R}^d$ と同じ増大度」を持つとき，G/H のランクが d であると言う.

G の既約ユニタリ表現 V が G の正則表現 $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は，非自明な G-絡作用素 $\alpha \colon (C_c(G/H))^{\infty} \to V$ が存在し，α の「双対」を $\beta \colon V^{\infty} \to C(G/H)^{\infty}$ とすると，任意の $v \in V^{\infty}$，$d' > d$ に対して $\displaystyle\int_{G/H} \left| \beta(v)(x)(1 + r(x))^{-d/2} \right|^2 dx < \infty$ なることである.

[*1] もう少し自然な言い回しを考えます．2022/01/11

ここで G が $G=KAH$ という Cartan 分解を持つときに，G/H がランク $d \coloneqq \dim A$ となる可能性がある条件の 1 つを $X \in \mathfrak{a}$ に対する $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(\mathbf{R}\,X)$ の有界性として定式化することができる．これが本修士論文の背景である．[*2]

以下では (G,H) がどのような場合に，どのような証明方法でを示したかを具体的に述べる．

$G=SU(1,2)$，$H=SO(1,1)$ の場合がトイモデルとなって G が実階数 1 の場合の問題 1 に対する肯定的な結果が得られた．

$G=SU(1,2)$，$H=SO(1,1)$ の場合の証明は背理法による．具体的には次のとおりである; 例えば $X \in \mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h}$ に対して $Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界，より具体的に $Y(tX)=s(t)Y$，$s(t)\to\infty$，$t\to\infty$ なるとき，$G/K \simeq \{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$ であることを用いて $e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}\cdot o_K$ を計算すると，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $t_\varepsilon\in\mathbf{R}$ が存在して $e^{Y(t_\varepsilon X)}e^{Z(t_\varepsilon X)}\cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線が $e^{Y(t_\varepsilon X)}\cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線が o_K でなす角が ε 未満となる．これは X と $\mathfrak{h}\setminus\{0\}$ のなす角度の最小値が非零であることに矛盾し，問題 1 と同値な「$X=0\vee X\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h}$ であることと $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界であることが同値である」ということが証明できる．

これを踏まえて G が実階数 1，$\dim\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}=1$ の場合には次の命題を用いて問題 1 に対して肯定的な結果を得た．

命題 4 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群とする．任意の $0\neq Y\in\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ と任意の $X\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{a}$ を固定したとき，X,Y を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}$ で，$\mathfrak{g}_0\simeq\mathfrak{su}(1,1)$ か $\mathfrak{g}_0\simeq\mathfrak{su}(2,1)$ なるものが存在する．

また，$\mathfrak{g}_0$ の G における解析的部分群 G_0 は G の閉部分群である．

この命題は $SU(2,1)$-reduction，[**Hel01**] と [**Yos38**] の定理を併せて示される．

G が実階数 1 の Lie 群の積である場合も，成分ごとに見れば G の実階数が 1 の場合と同様であるから，こちらも $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ の各成分が 1 次元であれば

*2 「」部分は 正確に定式化する予定です & もうすこしちゃんと [**Ber88**] を復習します． 2022/01/10

参考文献

[**Ber88**] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.

[**BH99**] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Grundlehren der mathematischen Wissensschaften, Vol. 319, Springer, 1999.

[**Ebe72a**] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, 1972, pp. 492–510.

[**Ebe72b**] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, 1972, pp. 151–70.

[**Hel01**] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.

[**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.

[**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant mesures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.

[**Yos38**] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.