2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号	45-196010
フリガナ	オクダ タカコ
氏名	奥田 堯子

目次

導入 2

謝辞 3

1 設定と $\mathfrak{h}$ 射影の基本的な性質，予想 1.4 の観察 4

1.1 記号の設定 4

1.2 予想 1.4 の観察: $G = SU(1,1)$，$H = SO(1,1)$ の場合 6

1.3 予想 1.4 の観察: 予想 1.4 はなぜこの形になったか 9

2 具体例と主定理の証明 10

2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群 10

2.2 G の実階数が 1 の場合 14

2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面 19

2.3 G が実階数 1 の群の直積の場合 20

参考文献 20

導入

G を非コンパクトな実半単純 Lie 群，K を G の極大コンパクト部分群で G の Cartan 対合 Θ に対して $K = \Theta K$ なるものとするとき，G/K は $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B から定まる Riemann 計量によって Riemann 多様体の構造を持つ．$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Θ の微分 $d\Theta$ による $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とするとき，G/K は $\mathfrak{p}$ と微分同相であり，G の単位元の G/K での像 eK を通る G/K の極大測地線は $B(X, X) = 1$ なる $X \in \mathfrak{p}$ によって $e^{tX}K$，$t \in \mathbf{R}$ と書ける．H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で，$H = \Theta H$ を満たすものとし，$\mathfrak{p}$ での B に対する $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の直交補空間を $\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}$ とする．測地線 $e^{tX}K$ の $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ 成分と $\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}$ 成分への分解を与える定理として次の定理が知られている．

定理 [**Kob89, Lemma 6.1**]
$\pi \colon (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z K \in G/K$ は上への微分同相である．

この定理を用いて $X \in \mathfrak{p}$ に対し，$(Y(X), Z(X)) \coloneqq \pi^{-1}(e^X \cdot K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p})$ と定義すると，任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $e^{tX}K = e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}K$ である．

$G = SU(1,1)$，$H = SO(1,1)$ とするとき，$t \in \mathbf{R}$ に対し，$Y(tX)$ は図 1 に図示するような幾何学的な意味を持つ．図 1 は Poincaré 円板における測地線 $e^{tX}K$ (赤色の斜め線) とその上の一点 $e^{tX}K$ から eK の H 軌道 (中央の直線) に下ろした垂線の足 (緑の丸) が $e^{Y(tX)}K$ である．

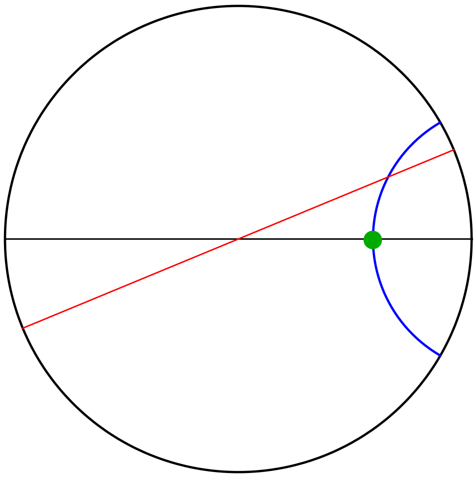

図 1: Poincaré 円板における $Y(tX)$ の幾何学的意味

本論文では小林俊行氏による次の予想について考察し，G が実階数 1 の場合の肯定的な結果を得た．

予想 $Y(\mathbf{R}\,X)$ は $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ の有界な部分集合である $\iff$ $[X_1, X_2] \neq 0$ であるか $X_1 = 0$ である．

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}^{\perp})$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする．

謝辞

1　設定と $\mathfrak{h}$ 射影の基本的な性質，予想 1.4 の観察

1.1　記号の設定

本論文の基本的な設定は次のとおりであり，この他に必要な条件は都度明示することとする．

記号と定義 1.1

- G を非コンパクト実半単純 Lie 群，H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で，G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ なるものとする．
- $\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G$, $\mathfrak{h} := \operatorname{Lie} H$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする．
- e を G の単位元とし，$o_K := eK \in G/K$ とする．
- $B(-,-)$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とし，$\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid$ 任意の $Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ に対して $B(Y, W) = 0\}$ とする．

以下の定理 1.2 を用いて，$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義する．

定理 1.2 [**Kob89, Lemma 6.1**]
$\pi \colon (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である．

ここで，$Y(\mathbf{R}\, X)$ の有界性について，次の予想 1.4 が小林俊行氏によって立てられた．

定義 1.3 $\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} := \{X \in \mathfrak{p} \mid Y(\mathbf{R}\, X)$ が $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界集合である.$\}$ と定める．

予想 1.4 (by T. Kobayashi)
ベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応して $X = X_1 + X_2$ と分解すると，$\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0$ あるいは $X_1 = 0\}$ である．

予想 1.4 についての基本的な事項を挙げる．

補題 1.5

1. $\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} \subset \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0$ あるいは $X_1 = 0\}$ である．もっと書くことはあるはず．2022/01/11

2. $X \in \mathfrak{p}$ が $X_1 = 0$ を満たすならば $X \in \mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}}$ である．
3. 1，2 より予想 1.4 と「$X \in \mathfrak{p}$ が $[X_1, X_2] \neq 0$ ならば $X \in \mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}}$ である」は同値である．
4. G が実階数 1 のとき，予想 1.4 と「$\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} = \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$」は同値である．

補題 1.5 の証明

1. 背理法による．$[X_1, X_2] = 0$ かつ $X_1 \neq 0$ なる $X \in \mathfrak{p}$ に対しては $[X_1, X_2] = 0$ より $e^{tX_1} e^{tX_2} \cdot o_K = e^{t(X_1+X_2)} \cdot o_K = e^{tX} \cdot o_K$ であり，$Y(tX) = tX_1$，$Z(tX) = tX_2$ であることから $Y(\mathbf{R}\,X) = \mathbf{R}\,X_1$ となり，$X_1 \neq 0$ より $Y(\mathbf{R}\,X)$ は有界集合とならない．
2. $X_1 = 0 \iff X \in \mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}$ より $Z(tX) = tX$，$Y(tX) = 0$ であることによる．
4. 対偶を示す．$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$[X_1, X_2] = 0$ かつ $X_1 \neq 0 \iff X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ を示せば良い．G の実階数は 1 で，H は非コンパクトであるから，$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$ であり，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間である．よって $X_1 \neq 0$ かつ $[X_1, X_2] = 0 \implies X_2 = 0$ であり，$X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ を得る．

■

$Y(\mathbf{R}\,X)$ の有界性は $\mathrm{Ad}(k)$-不変である;

補題 1.6 $k \in K$, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $X' := \mathrm{Ad}(k)X$, $\mathfrak{h}' := \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{h}$ とするとき, $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界 $\iff$ $Y'(\mathbf{R}\,X')$ が有界である．

ここで $Y'(X'), Z'(X')$ を，微分同相 $\pi' \colon (\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}'^{\perp} \cap \mathfrak{p}) \ni (Y', Z') \mapsto e^{Y'} e^{Z'} \cdot o_K$ を用いて，$X' \in \mathfrak{p}$ に対し，$(Y'(X'), Z'(X')) = \pi'^{-1}(e^{X'} \cdot o_K)$ と定める．

補題 1.6 の証明

主張は $(X, \mathfrak{h})$ と $(X', \mathfrak{h}')$ に対して対称的であるから, $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界 $\Rightarrow Y'(\mathbf{R}\,X')$ が有界，のみを示せば十分である．

任意に $r \in \mathbf{R}$ を取る．$e^{rX'} \cdot o_K = e^{Y'(rX')} e^{Z'(rX')} \cdot o_K$ であり，両辺に左から k^{-1} を掛けると，$e^{rX} = e^{\mathrm{Ad}(k^{-1})(Y'(rX'))} e^{\mathrm{Ad}(k^{-1})(Z'(rX'))} \cdot o_K$ を得る．ここで $Y'(rX') \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}$，$Z'(rX') \in \mathfrak{h}'^{\perp} \cap \mathfrak{p}$ であるから $\mathrm{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$，$\mathrm{Ad}(k^{-1})(Z'(rX')) \in \mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}$ である．

定理 1.2 により π は微分同相であるから任意の $r \in \mathbf{R}$ に対して $\mathrm{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) = Y(rX)$ であるから，$Y'(\mathbf{R}\,X) = \mathrm{Ad}(k)(Y(\mathbf{R}\,X))$ であ

り，$\mathrm{Ad}(k)$ は有限次元空間の間の線型写像であるから有界性を保つ．

以上から補題 1.6 が示された．

■

$Z(\mathbf{R}\,X)$ の有界性については次の定理が知られており，有界性の判定は Lie 環の言葉のみで行える．

定理 1.7 [**Kob97, Lemmma 5.4**]

$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin\varphi(X, \mathfrak{h}\cap\mathfrak{p})$ である．

ここに $\varphi(X, \mathfrak{h}\cap\mathfrak{p})$ は X と $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ の元がなす角度の最小値 $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$ であり，$X \in \mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}) \neq 0$ である．

つまり $X \in \mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h}$ ならば $\|Z(tX)\| \to \infty$，$|t| \to \infty$ である．

1.2　予想 1.4 の観察: $G = SU(1,1)$，$H = SO(1,1)$ の場合

$G = SU(1,1)$，$H = SO(1,1) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbf{R} \right\}$ の場合に予想 1.4 が正しいことは直接計算により確かめられる．

命題 1.8 $G = SU(1,1)$，$H = SO(1,1)$ のとき予想 1.4 は正しい．

補題 1.9 $\mathfrak{su}(1,1)$ の Killing 形式から定まる Poincaré 円板 $G/K = \{x + \sqrt{-1}y \mid x^2 + y^2 < 1\}$ の計量は $\dfrac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ である．

補題 1.9 の証明

$X' \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial x}$，$Y' \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial y}$ とすると，$\|X'\|^2 = \|Y'\|^2 = 8$，$\langle X', Y' \rangle = 0$ であって，$0 \in G'/K'$ で主張が成り立つ．

$k_\theta \coloneqq \mathrm{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$，$a_r \coloneqq \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r \\ \sinh r & \cosh r \end{pmatrix}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X')) \\
&= g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) \\
&= 8 \\
&g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) = 0
\end{aligned}
$$

なるような計量 g が Killing 形式から誘導される計量であるが，それが主張の形であることを示せば良い (これらのベクトルが何を表しているかは図 2 参照).

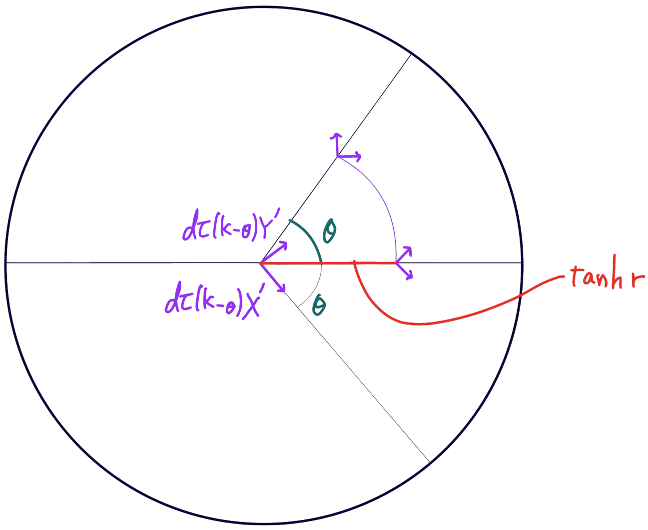

図 2

$t = 0$ での接ベクトルが $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X'$ を与える曲線は $\gamma_x(t) := e^{\sqrt{-1}\theta}\dfrac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta}\tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta}\tanh t + \cosh r}$ であるから，$\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma_x(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X' = (1-\tanh^2 r)\dfrac{\partial}{\partial x} = (1-x^2-y^2)\dfrac{\partial}{\partial x}$ である.

同様に $t = 0$ での接ベクトルが $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y'$ を与える曲線は $\gamma_y(t) := e^{\sqrt{-1}\theta}\dfrac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta}\sqrt{-1}\tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta}\sqrt{-1}\tanh t + \cosh r}$ であるから，$\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}\gamma_y(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y' = (1-\tanh^2 r)\dfrac{\partial}{\partial y} = (1-x^2-y^2)\dfrac{\partial}{\partial y}$ である.

以上より $g = \dfrac{8(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$ が示された.

■

命題 1.8 の証明

$k_\theta := \mathrm{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$, $X_\theta := k_{\theta/2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}k_{-\theta/2}$ とすると, $\mathfrak{p}\setminus\{0\} = \{tX_\theta \mid$

$t \in \mathbf{R}_{>0},\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ である．この X_θ と $t \in \mathbf{R}$ に対して $Y(tX_\theta) = s\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なる $s \in \mathbf{R}$ を求める．

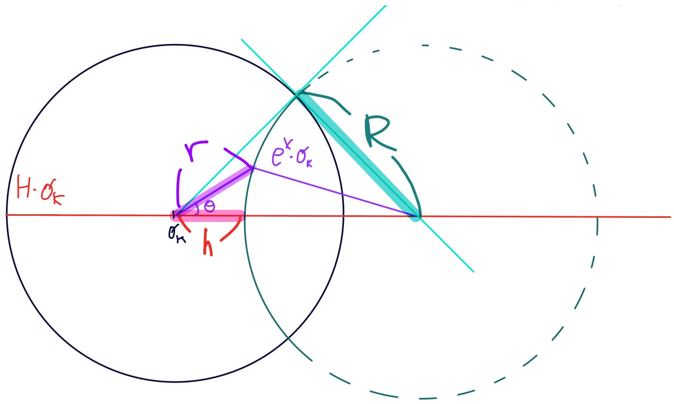

図 3

右の円の Euclid 距離での半径を R とし，$e^{tX_\theta} \cdot o_K$ から $H \cdot o_K$ への垂線の足の o_K からの Euclid 距離を h とするとき，外側の青色の直角三角形に対して三平方の定理を用いて $(h+R)^2 = R^2 + 1$ より $R = \frac{1-h^2}{2h}, R + h = \frac{1+h^2}{2h}$ を得る．

さらに下の紫色の三角形に対して余弦定理を用いて $R^2 = (R+h)^2 + r^2 - 2(R+h)\cos\theta$ を得，$\dfrac{2r\cos\theta}{r^2+1} = \dfrac{2h}{h^2+1} \cdots (1.1)$ を得る．

要確認: ここで補題 1.9 より $\dfrac{r}{2\sqrt{2}} = \tanh 2\sqrt{2}t$，$\dfrac{h}{2\sqrt{2}} = \tanh 2\sqrt{2}s$ であり (1.1) は $\cos\theta \tanh \dfrac{t}{4\sqrt{2}} = \tanh \dfrac{s}{4\sqrt{2}}$ と書き直せる．したがって X_θ に対して $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界 $\iff$ $|\cos\theta| \neq 1$ $\iff$ $X \notin \mathfrak{h}$ である．

■

系 1.10 $G = SO(1,n)$，$H = SO(1,k)$，$1 \leq k \leq n-1$ に対して予想 1.4 は正しい．

系 1.10 の証明

「$e^X \cdot o_K$ と o_K を結ぶ直線」と $H \cdot o_K$ で張られる超平面で Poincaré 球 $SO(1,n)/SO(n)$ を切った際の断面を考える．

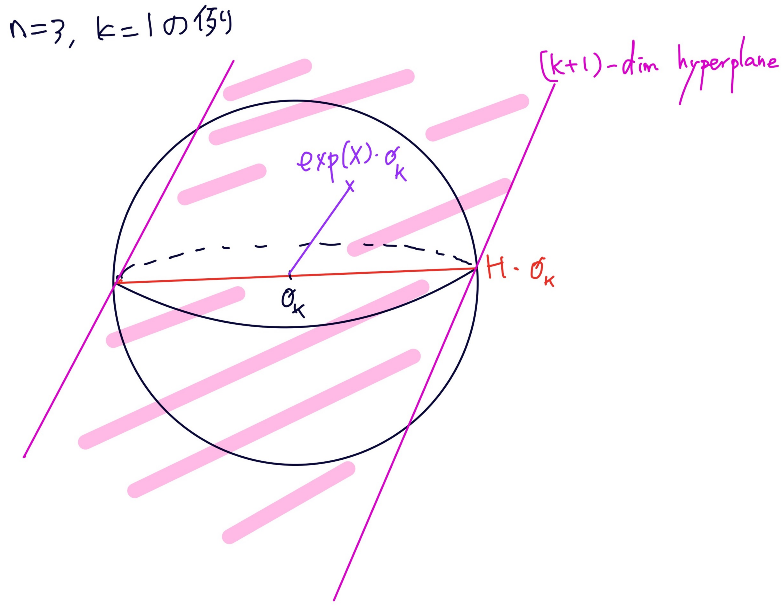

図 4

この断面に現れるのは図 3 と同じであるから，同様の計算により系 1.10 を得る．

■

1.3　予想 1.4 の観察: 予想 1.4 はなぜこの形になったか

予想 1.4 と次の予想 1.11 は同値である．

予想 1.11 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] \neq \{0\}$ あるいは $X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})\}$

ここで似た予想として次の $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{h}$ に置き換えた予想が立てられる．

予想 1.12 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ あるいは $X \perp \mathfrak{h}\}$

しかし予想 1.12 には反例が存在する．

補題 1.13 $G = SL(3, \mathbf{R})$，$Y_1 \coloneqq \text{diag}(1, 1, -2)$，$Y_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathfrak{h} = \mathbf{R}\, Y_1 \oplus \mathbf{R}\, Y_2$，$X = \text{diag}(1, 0, -1)$ に対し，$[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ であるが $Y(\mathbf{R}\, X) = \mathbf{R}\, Y_1$ であり，非有界である．

補題 1.13 の計算:

$\mathfrak{h}$ は可換 Lie 環であり，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$ の Cartan 対合 $\theta W := -{}^t W$ に対し $\mathfrak{h} = \theta\,\mathfrak{h}$ である．

$[X, \mathfrak{h}] \neq 0$ は，$[X, Y_2] \neq 0$ より従う．

ここで $Z_1 := \mathrm{diag}(1, -1, 0) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ であり，任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し，$e^{2tX} = e^{tY_1} e^{tZ_1}$ であるから，$Y(\mathbf{R}\,X) = \mathbf{R}\,Y_1$ となり，補題 1.13 が示された．

補題 1.13 において X と $\mathfrak{h}$ は，$[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ だが $[X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] = \{0\}$ かつ $X \not\perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ となるように取った．

つまり予想 1.12 の右辺を次の予想 1.14 のように少し弱めても補題 1.13 はその反例になっている．

予想 1.14 $\mathfrak{p}_{H,\mathrm{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ あるいは $X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})\}$

以上のことから予想 1.4 が立てられた．

2 具体例と主定理の証明

2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

命題 2.1 $G = SO(1, n)$，$SU(1, n)$，$Sp(1, n)$，$H = SO(1, 1)$，$n \geq 2$ に対して予想 1.4 は正しい．

$G = Sp(1, 2)$，$\mathfrak{h} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合にのみ示す．その他の場合も全く同様の議論である．

命題 2.2 $G = Sp(1, 2)$，$H = SO(1, 1)$，$X \in \mathfrak{p}$ に対し，$Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界 $\iff$ $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ or $X = 0$ である．

ただし，H は G の左上に入っている．すなわち，$\mathrm{Lie}\,H = \mathfrak{h} = \mathbf{R}\,A$，$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

記号と定義 2.3 $\mathbf{H}$ を四元数体とする．$Sp(1,2)/Sp(1)\times Sp(2)\simeq\{(z_1,z_2)\mid z_1,z_2\in\mathbf{H},\ |z_1|^2+|z_2|^2<1\}=:\mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ である．これは自然表現 $Sp(1,2)\curvearrowright\mathbf{H}^2$ の ${}^t(1,0,0)$ 軌道を考え，第 2，第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が $\mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ と微分同相であるためであり，$Sp(1,2)\curvearrowright\mathbf{H}^3$ の ${}^t(1,0,0)$ 軌道の点 $\begin{pmatrix} z_0\\ z_1\\ z_2\end{pmatrix}$ に対応する $\mathbf{H}\,\mathbb{H}^2$ の点を $\left[\begin{pmatrix} z_0\\ z_1\\ z_2\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix} 1\\ z_1z_0^{-1}\\ z_2z_0^{-1}\end{pmatrix}\right]$ と書く．

愚直な行列計算により，次が示される．

補題 2.4 $\forall z,w\in\mathbf{H}$ に対し，$\exp\begin{pmatrix} 0 & z & w\\ \overline{z} & 0 & 0\\ \overline{w} & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cosh r & * & *\\ \dfrac{\overline{z}}{r}\sinh r & * & *\\ \dfrac{\overline{w}}{r}\sinh r & * & *\end{pmatrix}$，ただし $r:=\sqrt{|z|^2+|w|^2}$，である．

命題 2.2 の証明

$X=0\Rightarrow Y(\mathbf{R}\,X)=\{0\}$ と $X\in\mathfrak{h}\setminus\{0\}$ のときに $Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界であることは明らかであるから，$X\notin\mathfrak{h}$ の場合にのみ議論すればよい．

G の Cartan 対合を $\Theta(g)=(g^*)^{-1}$ (g^* は g の共役転置) とするとき，$\Theta(e^{Y(tX)}e^{Z(tX)})\cdot o_K=e^{-Y(tX)}e^{-Z(tX)}\cdot o_K=\Theta(e^X)\cdot o_K=e^{-X}\cdot o_K$ より，「$Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界 $\iff$ $Y(\mathbf{R}\,X)\subset\mathbf{R}\,A$ が上に非有界」である．

したがって，$Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界であるとき，列 $\{t_n\in\mathbf{R}\}_{n\in\mathbf{N}}$ で，$s_n\to\infty,\ n\to\infty$，ただし $Y(t_nX)=s_nA$，なるものが存在する．

また，任意の $\mathfrak{h}^\perp\cap\mathfrak{p}$ の元はある $Z=\begin{pmatrix} 0 & z & w\\ \overline{z} & 0 & 0\\ \overline{w} & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{h}^\perp\cap\mathfrak{p}$，$z,w\in\mathbf{H}$ s.t. $|z|^2+|w|^2=1$ と $r\in\mathbf{R}$ により rZ と表せる．$Z(t_nX)=r_nZ_n$，$Z_n:=\begin{pmatrix} 0 & z_n & w_n\\ \overline{z_n} & 0 & 0\\ \overline{w_n} & 0 & 0\end{pmatrix}$，

$z_n, w_n \in \mathbf{H}$ s.t. $|z_n|^2 + |w_n|^2 = 1$ とすると，$X \notin \mathfrak{h}$ であるから定理 1.7 より $|r_n| \to \infty$ である．$z_n, w_n \in \mathbf{H}$ s.t. $|z_n|^2 + |w_n|^2 = 1$ より，$\{t_n\}$ の部分列を取るとある Z_∞ が存在して $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_\infty = \begin{pmatrix} 0 & z_\infty & w_\infty \\ \overline{z_\infty} & 0 & 0 \\ \overline{w_\infty} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ なるようにできる．$Z \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ より $\mathrm{Re}\, z_\infty \neq \pm 1$ であることに注意する (Re: $\mathbf{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto a \in \mathbf{R}$ とする).

補題 2.4 より，

$$\begin{aligned} e^{s_n A} e^{r_n Z_n} \cdot o_K &= \begin{pmatrix} \cosh s_n & \sinh s_n & 0 \\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \\ \pm \overline{w_n} \tanh |r_n| \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} \cosh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \cosh s_n \\ \pm \overline{w_n} \tanh |r_n| \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

複号は r_n の符号 $\pm$ と同順，である．このとき $\lim_{n\to\infty} \tanh s_n = 1 = \lim_{n\to\infty} \tanh |r_n|$ と $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n = \mathrm{Re}\, z_\infty \neq \pm 1$ に注意すると次を得る．具体的な計算は後述する．

$$\lim_{n\to\infty} (\sinh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} = 1 \tag{2.1}$$

である．

したがって，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\mathbb{H}^2$ へのベクトルと，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} (\sinh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} \\ * \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値を I_n とすると，$\lim_{n\to\infty} I_n = 1$ である．

しかし，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\mathbb{H}^2$ へのベクトルと，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}\mathbb{H}^2$ から $e^{t_n X} \cdot o_K \in \mathbf{H}\mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値 J_n は，$X := \begin{pmatrix} 0 & z_0 & w_0 \\ \overline{z_0} & 0 & 0 \\ \overline{w_0} & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$z_0, w_0 \in \mathbf{H}$ s.t. $|z_0|^2 + |w_0|^2 = 1$ とするとき $J_n = \dfrac{\overline{z_0}}{r_0} \tanh(t r_0)$,

$r_0 := \sqrt{|z_0|^2+|w_0|^2}$ であり，$X \notin ha \iff z_0 \neq 1$ より $\lim_{n\to\infty} J_n = \dfrac{\overline{z_0}}{r_0} \neq 1$ である．

以上 2 つの議論を合わせると $e^{s_n A} e^{r_n Z_n} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K \implies 1 = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} J_n \neq 1$ となり矛盾する．

以上より「$X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \Rightarrow Y(\mathbf{R}\,X)$ 有界」，したがって 命題 2.2 を得る．

■

命題 **2.2** の計算:

$\lim_{n\to\infty} |(\sinh s_n \pm \overline{z_n} \tanh|r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z_n} \tanh|r_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| = 0$ を示せば主張が得られる．具体的に計算すると，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} |(\sinh s_n \pm \overline{z_n} \tanh|r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \overline{z_n} \tanh|r_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\tanh s_n \pm \overline{z_n} \tanh|r_n|)(1 \pm z_n \tanh|r_n| \tanh s_n)}{|(1 \pm \overline{z_n} \tanh|r_n| \tanh s_n)|^2} - 1 \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \overline{z_n} \tanh|r_n|) z_n' - (1 \pm \overline{z_n} \tanh|r_n| \tanh s_n) z_n'|}{|(1 \pm \overline{z_n} \tanh|r_n| \tanh s_n)|^2}, \\
&\quad (\text{ただし } z_n' := 1 \pm z_n \tanh|r_n| \tanh s_n \text{ とする．}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \overline{z_n} \tanh|r_n|) z_n'|}{|(1 \pm \overline{z_n} \tanh|r_n| \tanh s_n)|^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \overline{z_n} \tanh|r_n|)|}{|(1 \pm \overline{z_n} \tanh|r_n| \tanh s_n)|}
\end{aligned}$$

であり，$0 < \min |1 \pm \mathrm{Re}\, z_n| \leq |(1 \pm \overline{z_n} \tanh|r_n| \tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ と $\min\{|-1 \pm \mathrm{Re}\, z_n|\} \leq |-1 \pm \overline{z_n} \tanh|r_n|| \leq \sqrt{5}$ であることと $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n = \mathrm{Re}\, z_\infty \neq \pm 1$ より，

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{n\to\infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\min\{|-1 \pm \mathrm{Re}\, z_n|\}}{\sqrt{5}} &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \overline{z_n} \tanh|r_n|)|}{|(1 \pm \overline{z_n} \tanh|r_n| \tanh s_n)|} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \mathrm{Re}\, z_n|\}} = 0
\end{aligned}$$

より，(2.1) が成り立つ．

2.2　G の実階数が 1 の場合

定理 2.5 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群，H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で，G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ で $\dim \mathfrak{h} = 1$ とするとき，予想 1.4 が成り立つ．

定理 2.6 [**Hel01, p. 409, Theorem 3.1**]

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を実半単純 Lie 環とその Cartan 対合 θ に対する Cartan 分解とし，$\alpha, 2\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ と仮定する．このとき，$X_\alpha, X_{2\alpha}, \theta X_\alpha, \theta X_{2\alpha}$ から生成される Lie 環 $\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{su}(2,1)$ と同型である．

以下で定理 2.6 を示すための補題や記号を設定し，定理 2.6 を示す．

記号と定義 2.7

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ を極大分裂可換代数，$\mathfrak{m} \coloneqq \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \coloneqq \{W \in \mathfrak{k} \mid [W, \mathfrak{a}] = \{0\}\}$ とする．B を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とする．
- $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系とする．$\mathfrak{g}_\lambda$ を，$\lambda \in \mathfrak{a}^*$ のルート空間とし，$0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$，$0 \neq X_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$ を任意に固定する．$Y_\alpha \coloneqq [\theta X_\alpha, X_{2\alpha}]$ とする．
- $A_\alpha \in \mathfrak{a}$ を，任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, A_\alpha) = \alpha(H)$ を満たす元とする．
  このとき，任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, [X_\alpha, \theta X_\alpha]) = \alpha(H) B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$ より $[X_\alpha, \theta X_\alpha] = B(X_\alpha, \theta X_\alpha) A_\alpha$ (同様に $[Y_\alpha, \theta Y_\alpha] = B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha) A_\alpha$，$[X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}] = 2B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}) A_\alpha$) である．
- $c_\alpha \coloneqq \sqrt{\dfrac{-2}{\alpha(A_\alpha) B(X_\alpha, \theta X_\alpha)}}$，$c_{2\alpha} \coloneqq \sqrt{\dfrac{-2}{\alpha(A_\alpha) B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})}}$ とする．
  また，$X_\alpha^* \coloneqq c_\alpha X_\alpha$，$X_{2\alpha}^* \coloneqq c_{2\alpha} X_{2\alpha}$，$Y_\alpha^* \coloneqq [\theta X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = c_\alpha c_{2\alpha} Y_\alpha$，$A_\alpha^* \coloneqq \dfrac{1}{12\alpha(A_\alpha)} A_\alpha$ とする．

補題 2.8 $c \coloneqq 2\alpha(A_\alpha) B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$ とすると，$[X_\alpha, Y_\alpha] = c X_{2\alpha}$ である．特に $0 \neq Y_\alpha \neq X_\alpha$ である．

証明略，Jacobi 恒等式と $3\alpha \notin \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ による．

補題 2.9 $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} \backslash \{0\}$ である．特に証明から $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], X_\alpha] = -3\alpha(A_\alpha) B(X_\alpha, \theta X_\alpha) Y_\alpha$ がわかる．

補題 2.9 の証明

$Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ より $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m}+\mathfrak{a}$ であり，任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H,[X_\alpha,\theta Y_\alpha]) = B([H,X_\alpha],Y_\alpha) = \alpha(H)B(X_\alpha,[X_\alpha,\theta X_{2\alpha}]) = \alpha(H)B([X_\alpha,X_\alpha],X_{2\alpha}) = 0$ であることより $[X_\alpha,\theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m}$ である．

さらに，$[[\theta X_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] = -[[Y_\alpha,X_\alpha],\theta X_\alpha] - [[X_\alpha,\theta X_\alpha],Y_\alpha] = c[X_{2\alpha},\theta X_\alpha] - B(X_\alpha,\theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha = -cY_\alpha - B(X_\alpha,\theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha = -3\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha,\theta X_\alpha)Y_\alpha \neq 0$ より，$\theta[\theta X_\alpha, Y_\alpha] = [X_\alpha,\theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m}\setminus\{0\}$ である．

■

補題 2.10 $\mathbf{R}\,X_\alpha + \mathbf{R}\,Y_\alpha$ は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}([X_\alpha,\theta Y_\alpha])$ で不変である．
特に証明の途中で $[[X_\alpha,\theta Y_\alpha],Y_\alpha] = -6\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha,\theta X_\alpha)B(X_{2\alpha},\theta X_{2\alpha})X_\alpha$，$[Y_\alpha,\theta Y_\alpha] = -2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha,\theta X_\alpha)B(X_{2\alpha},\theta X_{2\alpha})A_\alpha$ がわかる．

補題 2.10 の証明

$[[X_\alpha,\theta Y_\alpha],Y_\alpha] \in \mathbf{R}\,X_\alpha$ を示せば，補題 2.9 と併せて 補題 2.10 が従う．

$$\begin{aligned}
[[X_\alpha,\theta Y_\alpha],Y_\alpha] &= -[[\theta Y_\alpha,Y_\alpha],X_\alpha] - [[Y_\alpha,X_\alpha],\theta Y_\alpha] \\
&= B(Y_\alpha,\theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha + c[X_{2\alpha},[X_\alpha,\theta X_{2\alpha}]] \\
&= B(Y_\alpha,\theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - c[X_\alpha,[\theta X_{2\alpha},X_{2\alpha}]] - c[\theta X_{2\alpha},[X_{2\alpha},X_\alpha]] \\
&= B(Y_\alpha,\theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - cB(X_{2\alpha},\theta X_{2\alpha})\alpha(A_{2\alpha})X_\alpha
\end{aligned}$$

であり（$\because$ $\mathfrak{g}_{3\alpha} = \{0\}$），$A_{2\alpha} = 2A_\alpha$ であるから，
$[[X_\alpha,\theta Y_\alpha],Y_\alpha] = B(Y_\alpha,\theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2B(X_\alpha,\theta X_\alpha)B(X_{2\alpha},\theta X_{2\alpha})X_\alpha$ を得る．

さらに，$B(Y_\alpha,\theta Y_\alpha) = B(Y_\alpha,[X_\alpha,\theta X_{2\alpha}]) = -B([X_\alpha,Y_\alpha],\theta X_{2\alpha}) = -2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha,\theta X_\alpha)B(X_{2\alpha},\theta X_{2\alpha})$ であるから，最終的に

$$\begin{aligned}
&[[X_\alpha,\theta Y_\alpha],Y_\alpha] = B(Y_\alpha,\theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2B(X_\alpha,\theta X_\alpha)B(X_{2\alpha},\theta X_{2\alpha})X_\alpha \\
&= -6\alpha(A_\alpha)^2B(X_\alpha,\theta X_\alpha)B(X_{2\alpha},\theta X_{2\alpha})X_\alpha
\end{aligned}$$

を得る．

■

補題 2.11 $[[X_\alpha,\theta Y_\alpha],X_{2\alpha}] = 0$ である．

証明略．補題 2.8–2.10 と Jacobi 恒等式による．

補題 2.12 $[Y_\alpha,\theta X_{2\alpha}] = 2\alpha(A_\alpha)B(X_{2\alpha},\theta X_{2\alpha})\theta X_\alpha$ である．

証明略．Jacobi 恒等式を用いて与式を変形し計算することによる．

定理 2.6 の証明

補題 2.8–2.12 より，$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_0^* \oplus \mathfrak{g}_\alpha^* \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}^*$，ただし $\mathfrak{g}_0^* := \mathbf{R}\, A_\alpha \oplus \mathbf{R}[X_\alpha, \theta Y_\alpha]$, $\mathfrak{g}_\alpha^* := \mathbf{R}\, X_\alpha \oplus \mathbf{R}\, Y_\alpha$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}^* := \mathbf{R}\, \theta X_\alpha \oplus \mathbf{R}\, \theta Y_\alpha$, $\mathfrak{g}_{2\alpha}^* := \mathbf{R}\, X_{2\alpha}$, $\mathfrak{g}_{-2\alpha}^* := \mathbf{R}\, \theta X_{2\alpha}$，がわかる．

非自明な $\mathfrak{g}^*$ の Lie 括弧の関係として，$[X_\alpha^*, Y_\alpha^*] = -4X_{2\alpha}^*$ ($\because$ 補題 2.8), $[X_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] = -6Y_\alpha^*$ ($\because$ 補題 2.9)，$[X_\alpha^*, \theta X_\alpha^*] = -24A_\alpha^*$ ($\because$ 定義による), $[X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = 0$ ($\because$ $\mathfrak{g}_{3\alpha} = 0$)，$[X_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] = \theta Y_\alpha^*$，
$[Y_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = 0$ ($\because$ 補題 2.11)，$[Y_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] = -4\theta X_\alpha^*$ ($\because$ 補題 2.12)，$[Y_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*] = -96A_\alpha^*$ ($\because$ 補題 2.10)，$[Y_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] = 24X_\alpha^*$ ($\because$ 補題 2.10)
$[[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha], X_{2\alpha}^*] = [[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha], \theta X_{2\alpha}^*] = 0$ ($\because$ 補題 2.12),
$[X_{2\alpha}^*, \theta X_{2\alpha}^*] = -48A_\alpha^*$ が存在する (残りの関係式はこの両辺に θ をつけることで得られる).

$\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{su}(2,1)$ の対応を，

$$X_\alpha^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_{2\alpha}^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

$$\theta X_\alpha^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta X_{2\alpha}^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

$$Y_\alpha^* \leftrightarrow -2 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta Y_\alpha^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & -\sqrt{-1} & -0 \end{pmatrix},$$

$$A_\alpha^* \leftrightarrow \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [X_\alpha, \theta Y_\alpha^*] \leftrightarrow -4 \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{-1} & 0 \\ & 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

でつけ，この対応が Lie 環としての同型であること (上の関係式が満たされること) を愚直に計算して，定理 2.6 が示せる．

■

補題 2.13 証明せよ

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ の場合，$0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と θX_α により生成される部分 Lie 環 $\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{su}(1,1)$ と同型である．

系 2.14 任意の $Y \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ と任意の $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ を固定したとき，G が実階数 1 ならば，極大分裂可換代数 $\mathfrak{a} \coloneqq \mathbf{R}Y \subset \mathfrak{g}$ に対し $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ あるいは $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ であるから，それぞれ定理 2.6 と補題 2.13 より，X, Y を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ で，$\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1,1)$ か $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2,1)$ なるものが存在する．

系 2.14 の証明

場合 1 $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$，$\mathfrak{g}_0 \coloneqq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ より，$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{g}_{-\alpha} \cap \mathfrak{p})$ である．$X\,\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ をこの分解に対応して $X = X_0 + X_\alpha + X_{-\alpha}$ と分解すると，$X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ より $X_{-\alpha} = -\theta X_\alpha \neq 0$ である．したがってこの $X_\alpha \neq 0$ と Y に補題 2.13 を適用することにより $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1,1)$ で $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ なるものが存在する．

場合 2 $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$，$\mathfrak{g}_0 \coloneqq \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ より，$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{g}_{-\alpha} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{g}_{2\alpha} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{g}_{-2\alpha} \cap \mathfrak{p})$ である．$X\,\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ をこの分解に対応して $X = X_0 + X_\alpha + X_{-\alpha} + X_{2\alpha} + X_{-2\alpha}$ と分解すると，$X \in \mathfrak{p}$ より $X_{-\alpha} = -\theta X_\alpha$，$X_{-2\alpha} = -\theta X_{2\alpha}$ である．

ここで $X \notin \mathfrak{a}$ より，

1. $X_\alpha \neq 0$ かつ $X_{2\alpha} \neq 0$
2. $X_\alpha \neq 0$ かつ $X_{2\alpha} = 0$
3. $X_\alpha = 0$ かつ $X_{2\alpha} \neq 0$

のいずれかである．

1 の場合はこの $X_\alpha, X_{2\alpha}$ と Y に，
2 の場合はこの X_α と，適当な $0 \neq X'_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$ と Y に，
3 の場合はこの $X_{2\alpha}$ と，適当な $0 \neq X'_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と Y に，

定理 2.6 を適用することにより $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2,1)$ で $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ なるものが存在する．

■

系 2.14 で定めた $\mathfrak{g}_0$ について次の 2 つが成り立つ．

補題 2.15 [Hel01, p. 409, Lemma 2.2] $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合 θ に対して $\mathfrak{g}_0 = \theta\mathfrak{g}_0$

であり，$\mathfrak{g}_0$ への θ の制限は $\mathfrak{g}_0$ の Cartan 分解を与える．

補題 2.16 [Hel01, p. 409, Lemma 2.3]

系 2.14 の $\mathfrak{g}_0$ の G における解析的部分群を G_0 とする．$G = KAN$ を G の岩澤分解，$G_0 = K_0 A_0 N_0$ を G の岩澤分解とするとき，

$$K_0 \coloneqq G_0 \cap K,\ A_0 \coloneqq G_0 \cap A,\ N_0 \coloneqq G_0 \cap N,$$

であり，$G_0/K_0 \simeq G_0/K$ は G/K の全測地的な部分 Riemann 多様体である．

以上のことを用いて，G が実階数 1 の場合を $SU(1,2)$ ないし $SU(1,1)$ に帰着させることにより定理 2.5 を示す．

定理 2.5 の証明

$X \notin \mathfrak{h}$ に対して $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界であることを背理法により示す．$\mathfrak{g}$ の極大分裂可換代数 $\mathfrak{h}$ の定めるルート系を $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし，$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の形によって 2 通りに場合分けして証明する．

場合 3 $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm\alpha\}$ のとき

系 2.14 により X と $\mathfrak{h}$ を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ で $\mathfrak{su}(1,1)$ に同型なものが存在する．$\mathfrak{g}'$ に対応する G の解析的部分群を G' とし，その岩澤分解を $G' = K'A'N'$ とする．

$A_\alpha \in \mathfrak{h}$ を任意の $H \in \mathfrak{h}$ に対して $B(H, A_\alpha) = \alpha(H)$ を満たす元とすると， 任意の固定した $\tau \in \mathbf{R}$ に対し，$Y(\tau X)$ に対応する $\mathfrak{g}_\tau$ の元は $\dfrac{B(Y(\tau X), A_\alpha)}{\|A_\alpha\|} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\cdots$ (2.2) である．

$Y(\mathbf{R}\,X)$ の非有界性より，適当に列 $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$，$t_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ を取ると $0 < \|Y(t_n X)\| = s_n$，$\forall n \in \mathbf{N}$ かつ $s_n \to \infty$，$n \to \infty$ とできる．さらに $Z(t_n X) = r_n Z_n$，$Z_n \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$，$\|Z_n\| = 1$，$r_n \in \mathbf{R}$ と書くと，定理 1.7 より $|r_n| \to \infty$，$n \to \infty$ である．$\|Z_n\| = 1$ より，必要なら $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$ の部分列を取ることで $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z_\infty \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$，$\|Z_\infty\| = 1$ なる Z_∞ が存在する．

必要なら positive system を取り替えることで $B(Y(t_n X), A_\alpha) > 0$ と仮定する．このとき $B(Y(t_n X), A_\alpha) = s_n$ であるから，(2.2) より $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{su}(1,2)$ の同型におい

て $Y(t_n X)$ は $s_n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対応する．

以上の性質を満たす $\{t_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，$\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，$\{r_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，$\{Z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，Z_∞ に対して

場合 4 $\Sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ のとき

場合 1 と同様に，任意の固定した $\tau \in \mathbf{R}$ に対し $\mathfrak{a}_\tau := \mathbf{R}\,Y(\tau X)$ が定める制限ルート系も，ある $\alpha_\tau \in \mathfrak{a}_\tau^*$，$\|\alpha_\tau\| = 1$ により $\Sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{a}_\tau) = \{\pm\alpha_\tau, \pm 2\alpha_\tau\}$ となるが，$Y(\mathbf{R}\,X)$ の非有界性より，ある $T \in \mathbf{R}$ で $|\alpha_t(Y(tX))| >$ 埋めよ，$\forall t \geq T$ なるものが存在する．

■

2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面

定義 2.17 [**Ebe72a, Definition 1.3**]

M が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき，M を Hadamard 多様体といい，Hadamard 多様体 M が visibility manifold であるとは，$\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$ に対し，ある $r(p,\varepsilon) > 0$ が存在して，測地線 $\gamma\colon [t_0,t_1] \to X$ が $d_M(p,\gamma(t)) \geq r(p,\varepsilon)$，$\forall t \in [t_0,t_1]$ ならば，$\measuredangle_p(\gamma(t_0),\gamma(t_1)) \leq \varepsilon$ であることである．

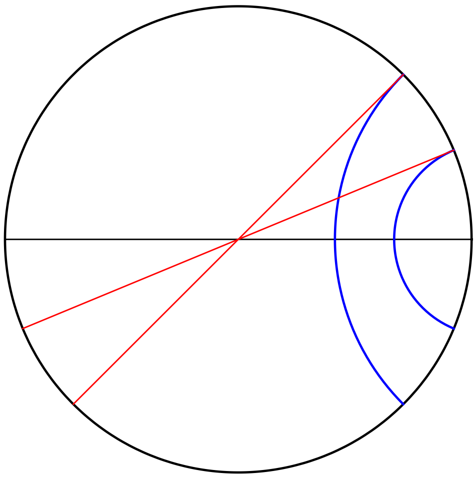

図 5: visibility manifold のイメージ

定理 2.18 [**BH99, p. 296, 9.33 Theorem**], originally [**Ebe72b, Theorem 4.1**]

$\exists C \underset{\text{cpt.}}{\subset} M$ s.t. $M = \bigcup\{f(C) \mid f \in \mathrm{Isom}(M)\}$ なる Hadamard 多様体 M に対し，次は同値である．

(i) M は visibility manifold である．

(ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体 $M' \subset M$ で $\mathbf{R}^2$ と等長同型なものが存在しない．

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり，定理 2.18 の (ii) は G の実階数が 1 以下であることと同値である．したがって G の実階数が 1 の場合 G/K は visibility manifold であり，$G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合の証明と全く同様にして背理法により予想 1.4 が示される．

2.3 G が実階数 1 の群の直積の場合

参考文献

[**Ber88**] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710

[**BBE85**] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203

[**BH99**] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Grundlehren der mathematischen Wissensschaften, Vol. 319, Springer, 1999

[**Borel–Ji**] A. Borel and L. Ji, Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006

[**Ebe72a**] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, pp. 492–510, 1972

[**Ebe72b**] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, pp. 151–70, 1972

[**EO73**] P. Eberlein and B. O'Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol.

46, No. 1, 1973, pp. 45–109

[**Hel84**] S. Helgason, Groups and Geometric Analysis—Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 83, AMS, 1984

[**Hel01**] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, GSM, Vol. 34, AMS, 2001

[**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.

[**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant mesures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54