

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文には小林俊行氏による \mathfrak{h} 射影の有界性に対する次の問題 1 について, G の実階数や H の次元が低い場合に肯定的な結果をいくつか記した (\mathfrak{h} 射影や記号の定義は後述する).

問題 1 (小林俊行氏による) $X \in \mathfrak{p}$ に対し $Y(\mathbf{R} X)$ が $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合であることと次の条件は同値であるか?

条件 2 $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$, もしくは $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $X \in \mathfrak{g}'_s$, もしくは $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \not\subset \mathfrak{h}$ である.

ただし

- $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.
- \mathfrak{g}' は \mathfrak{h} と X が生成する \mathfrak{g} の部分 Lie 環とし, $\mathfrak{g}'_s := [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$ は \mathfrak{g}' の中心とする.

ここで G が実階数 1 のとき, 条件 2 と $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ は同値である.

この論文の基本設定は以下の通りである.

記号と定義 3

- G を非コンパクト実簡約 Lie 群, H は G の非コンパクトかつ連結成分有限個の閉部分群で, G の Cartan 対合 Θ に対して $H = \Theta H$ を満たすものとする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$, $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e を G の単位元とし, $o_K := eK \in G/K$ とする.
- $\langle -, - \rangle$ を, \mathfrak{g} 上の G 不変な非退化対称双線型形式で, \mathfrak{k} 上負定値, \mathfrak{p} 上正定値で $\mathfrak{k} \perp \mathfrak{p}$ なるものとし, $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{g} \mid \langle W, \mathfrak{h} \rangle = \{0\}\}$ とする.

本修士論文の主題である $X \in \mathfrak{p}$ の \mathfrak{h} 射影 $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は, 次の定理 4 により $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義される.

定理 4 ([Kob89, Lemma 6.1]) 記号と定義 3 の設定において $\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

$e^{Y(X)} \cdot o_K$ は「 $e^X \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足」という幾何学的意味を持つ. したがって $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であるか否かという問は, 幾何的には「 $e^{tX} \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足全体の集合が有界であるか」という問に対応する.

以下では (G, H) がどのような場合に問題 1 が肯定的であったかとその証明方法を具体的に述べる.

G が実階数 1 の実線型半単純 lie 群, $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合は $G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合に帰着することで問題 1 が肯定的であることを証明した.

$G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合の証明の流れを荒っぽく述べる. $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ に対して $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であるとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $t_\varepsilon \in \mathbf{R}$ が存在して「 $e^{Y(t_\varepsilon X)} e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線」が「 $e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線」が o_K でなす角が ε 未満となる.

しかしこれは X と $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \setminus \{0\}$ の元がなす角度の最小値が非零であることに矛盾する．したがって $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ ならば $Y(\mathbf{R} X)$ は有界であることが言える．

これを踏まえて G が実階数 1 の実線型半単純 Lie 群, $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合には次の命題を用いて $G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合に帰着した．

命題 5 G を実階数 1 の実線型半単純 Lie 群とする．任意の $0 \neq Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ と任意の $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathbf{R} Y$ を固定したとき, X, Y を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ で, $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$ あるいは $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$ なるものが存在する．また \mathfrak{g}_0 の G における解析的部分群 G_0 は G の閉部分群である．

命題 5 は [Hel01, p. 409] の $SU(2, 1)$ -reduction と [Yos38] の定理をあわせて示される．

G が実階数 1 の実線型半単純 Lie 群の有限個の積であり, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の各成分が 1 次元であるときも問題 1 に対する肯定的な結果を得られる．なぜならば成分ごとに見ることで G が実階数 1 の実半単純 Lie 群, $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合に帰着できるためである．

問題 1 と関係する話題として [Ber88] の内容についてふれる．

まずいくつか用語と命題を準備する．以下では G を実簡約 Lie 群, H を G の閉部分群とし, G/H には左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ が存在すると仮定する．

定義 6 ([Ber88])

- 局所有界関数 $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ が proper な radial function であるとは, r が次の 4 条件を満たすことである.
 1. $e \in G$ を単位元とすると $r(e) = 0$ である．
 2. 任意の $g \in G$ に対し $r(g) = r(g^{-1}) \geq 0$ である．
 3. 任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し $r(g_1 g_2) \leq r(g_1) + r(g_2)$ である．
 4. 任意の $R \geq 0$ に対し, $B(R) := \{g \in G \mid r(g) \leq R\}$ は G の相対コンパクト集合である．
- proper な radial function $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ から $r_{G/H}(gH) := \inf_{h \in H} \{r(gh)\}$ により定まる $r_{G/H}: G/H \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ を G/H 上の radial function という．
- $d = \inf\{d' \geq 0 \mid \text{ある } C > 0 \text{ が存在して } m_X(B(r)) \leq C(1+r)^{d'}\}$ であるとき, G/H のランクは d であると言う．
- G の連続表現 \mathcal{V} の smooth vector 全体の集合を \mathcal{V}^∞ とする．

定理と定義 7 ([Ber88, p. 683]) G/H には次を満たす非自明な Borel 測度 m_X (standard measure) が定数倍を除いて一意的に存在する．

単位元のコンパクトな近傍で $B = B^{-1}$ なる任意の $B \subset G$ と任意の $g \in B$, $x \in G/H$ に対し, ある定数 $C_B \geq 0$ が存在して $g \cdot m_X \leq C_B m_X$, $C_B^{-1} < m_X(Bx) < C_B$ である．

定理と定義 8 ([Ber88, p. 678]) G/H の左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ を 1 つ固定する．次の同型写像が存在する． $\text{Hom}_G((C_c(G/H))^\infty, V) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(V^\infty, C(G/H)^\infty)$, $\alpha_V \mapsto \beta_V$ ただし任意の $v \in V$, $\varphi \in (C_c(G/H))^\infty$ に対し $\langle v, \alpha_V(\varphi) \rangle_V = \int_{G/H} \beta_V(v)(x) \varphi d\mu_X$ である．

定理 9 ([Ber88, pp. 665–6]) G/H のランクが d であるとき, G の既約ユニタリ表現 V が G の正則表現 $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は, 非自明な G 絡作用素 $\alpha_V: (C_c(G/H))^\infty \rightarrow V$ が存在し, かつ任意の $v \in V^\infty$, $d' > d$ に対して $\int_{G/H} \left| \beta_V(v)(x) (1+r(x))^{-d'/2} \right|^2 dx < \infty$ なることである．

$L^2(G/H)$ の既約分解に現れる表現を定理 9 を用いて分析するためには G/H のランクを知る必

要があり, $Y(\mathbf{R} X)$ の有界性と G/H の判定には関係がある.

参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.
- [Hel01] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.
- [KK16] F. Kassel and T. Kobayashi, *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces*, Adv. Math., Vol. 287, 2016, pp. 123–236.
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [小林 95] 小林俊行, 球等質多様体上の調和解析入門, 第 3 回整数論サマースクール ‘等質空間と保型形式’ 所収, 佐藤文広 編, 長野, 1995, pp. 22-41.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.
- [Yos38] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.