論文内容の要旨

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文には小林俊行氏による $\mathfrak{h}$ 射影の有界性に対する次の問題 1 について，G の実階数や H の次元が低い場合に肯定的な結果をいくつか記した ($\mathfrak{h}$ 射影や記号の定義は後述する).

問題 1 (小林俊行氏による) $X \in \mathfrak{p}$ に対し $Y(\mathbf{R}\,X)$ が $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合であることと次の条件は同値であるか？

条件 2 $X \in \mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}$，もしくは $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $X \in \mathfrak{g}'_s$，もしくは $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \not\subset \mathfrak{h}$ である.

ただし

- $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^{\perp})$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.
- $\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{h}$ と X が生成する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環とし，$\mathfrak{g}'_s := [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$，$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$ は $\mathfrak{g}'$ の中心とする.

ここで G が実階数 1 のとき，条件 2 と $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ は同値である.

この論文の基本設定は以下の通りである.

記号と定義 3

- G を非コンパクト実線型簡約 Lie 群，H は G の非コンパクトかつ連結成分有限個の閉部分群で，G の Cartan 対合 Θ に対して $H = \Theta H$ を満たすものとする.
- $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\, G$, $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}\, H$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e を G の単位元とし，$o_K := eK \in G/K$ とする.
- $\langle -, - \rangle$ を，$\mathfrak{g}$ 上の G 不変な非退化対称双線型形式で，$\mathfrak{k}$ 上負定値，$\mathfrak{p}$ 上正定値で $\mathfrak{k} \perp \mathfrak{p}$ なるものとし，$\mathfrak{h}^{\perp} := \{W \in \mathfrak{g} \mid \langle W, \mathfrak{h} \rangle = \{0\}\}$ とする.

本修士論文の主題である $X \in \mathfrak{p}$ の $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は，次の定理 4 の π を用いて $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p})$ と定義される.

定理 4 ([**Kob89, Lemma 6.1**]) 記号と定義 3 の設定において $\pi\colon (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

$e^{Y(X)} \cdot o_K$ は $e^X \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足という幾何学的意味を持つ．したがって $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界であるか否かという問は，幾何的には $e^{\mathbf{R}\,X} \cdot o_K$ 上の点から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足全体の集合が有界であるか否かという問に対応する.

以下では (G, H) がどのような場合が問題 1 の肯定的な例であったかとその証明方法を具体的に述べる.

まず G が実階数 1 の実線型半単純 Lie 群，$\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合は $G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ あるいは $G = SU(1,1)$，$H = SO(1,1)$ の場合に帰着することで問題 1 の肯定的な例であることを証明した.

$G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合の証明の流れを荒っぽく述べる．$X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ に対して $Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界であるとすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $t_\varepsilon \in \mathbf{R}$ が存在して「$e^{Y(t_\varepsilon X)} e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線」と「$e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線」が o_K でなす角が ε 未満となる．し

かしこれは X と $(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p})\setminus\{0\}$ の元が $\mathfrak{p}$ においてなす角度の最小値が非零であることに矛盾する．したがって $X\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h}$ ならば $Y(\mathbf{R}\,X)$ は有界であることが言える．

これを踏まえて G が実階数 1 の実線型半単純 Lie 群，$\dim\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}=1$ の場合には次の命題を用いて $G=SU(1,2)$，$H=SO(1,1)$ あるいは $G=SU(1,1)$，$H=SO(1,1)$ の場合に帰着した．

命題 5 G を実階数 1 の実線型半単純 Lie 群とする．任意の $0\neq Y\in\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ と任意の $X\in\mathfrak{p}\setminus\mathbf{R}\,Y$ を固定したとき，X,Y を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}$ で，$\mathfrak{g}_0\simeq\mathfrak{su}(1,1)$ あるいは $\mathfrak{g}_0\simeq\mathfrak{su}(2,1)$ なるものが存在する．また $\mathfrak{g}_0$ の G における解析的部分群 G_0 は G の閉部分群である．

命題 5 は [**Hel01, p. 409**] の $SU(2,1)$-reduction と [**Yos38**] の定理をあわせて示される．

G が実階数 1 の実線型半単純 Lie 群の有限個の積であり，$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ の各成分が 1 次元であるときも問題 1 に対する肯定的な結果を得られる．なぜならば成分ごとに見ることで G が実階数 1 の実線型半単純 Lie 群，$\dim\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}=1$ の場合に帰着できるためである．

問題 1 と関係する話題として [**Ber88**] の内容についてふれる．

まずいくつか用語と命題を準備する．以下では G を実簡約 Lie 群，H を G の閉部分群とし，G/H には左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ が存在すると仮定する．

定義 6 ([**Ber88**])

- 局所有界関数 $r\colon G\to\mathbf{R}_{\geq 0}$ が proper な radial function であるとは，r が次の 4 条件を満たすことである．
  1. $e\in G$ を単位元とするとき $r(e)=0$ である．
  2. 任意の $g\in G$ に対し $r(g)=r(g^{-1})\geq 0$ である．
  3. 任意の $g_1,g_2\in G$ に対し $r(g_1g_2)\leq r(g_1)+r(g_2)$ である．
  4. 任意の $R\geq 0$ に対し，$B(R)\coloneqq\{g\in G\mid r(g)\leq R\}$ は G の相対コンパクト集合である．
- proper な radial function $r\colon G\to\mathbf{R}_{\geq 0}$ から $r_{G/H}(gH)\coloneqq\inf_{h\in H}\{r(gh)\}$ により定まる $r_{G/H}\colon G/H\to\mathbf{R}_{\geq 0}$ を G/H 上の radial function という．
- $d=\inf\{d'\geq 0\mid$ ある $C>0$ が存在し任意の $r>0$ に対して $m_X(B(r))\leq C(1+r)^{d'}$ である．$\}$ とき，G/H のランクは d であると言う．
- G の連続表現 $\mathcal{V}$ の smooth vector 全体の集合を $\mathcal{V}^\infty$ とする．

定理と定義 7 ([**Ber88, p. 683**]) G/H には次を満たす非自明な正則 Borel 測度 m_X (standard measure) が定数倍を除いて一意的に存在する．

単位元のコンパクトな近傍で $B=B^{-1}$ なる任意の $B\subset G$ と任意の $g\in B$，$x\in G/H$ に対し，ある定数 $C_B\geq 0$ が存在して $g\cdot m_X\leq C_Bm_X$，$C_B^{-1}<m_X(Bx)<C_B$ である．

定理と定義 8 ([**Ber88, p. 678**]) G/H の左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ を 1 つ固定する．次の同型写像が存在する．$\mathrm{Hom}_G((C_c(G/H))^\infty,V)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_G(V^\infty,C(G/H)^\infty)$，$\alpha_V\mapsto\beta_V$ ただし任意の $v\in V$，$\varphi\in(C_c(G/H))^\infty$ に対し $\langle v,\alpha_V(\varphi)\rangle_V=\displaystyle\int_{G/H}\beta_V(v)\varphi d\mu_X$ である．

定理 9 ([**Ber88, pp. 665–6**]) G/H のランクが d であるとき，G の既約ユニタリ表現 V が G の正則表現 $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は，非自明な G 絡作用素 $\alpha_V\colon(C_c(G/H))^\infty\to V$ が存在し，かつ任意の $v\in V^\infty$，$d'>d$ に対して $\displaystyle\int_{G/H}\left|\beta_V(v)(x)(1+r(x))^{-d/2}\right|^2dx<\infty$ なることである．

$L^2(G/H)$ の既約分解に現れる表現を定理 9 を用いて分析するためには G/H のランクを知る必要があり，$Y(\mathbf{R}\,X)$ の有界性と G/H のランクの判定には関係がある．

参考文献

[**Ber88**] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.

[**Hel01**] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.

[**KK16**] F. Kassel and T. Kobayashi, *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces*, Adv. Math., Vol. 287, 2016, pp. 123–236.

[**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.

[**小林 95**] 小林俊行，球等質多様体上の調和解析入門，第 3 回整数論サマースクール ‘等質空間と保型形式’ 所収，佐藤文広 編，長野，1995，pp. 22-41.

[**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant mesures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.

[**Yos38**] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.