

## 修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性  
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では, 小林俊行氏による  $\mathfrak{h}$  射影の有界性に対する次の問題 1 について,  $G$  の実階数や  $H$  の次元が低い場合に肯定的な結果を得た ( $\mathfrak{h}$  射影の定義や記号は後述する).

**問題 1** (小林俊行氏による)  $X \in \mathfrak{p}$  に対し  $Y(\mathbf{R}X)$  が  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の有界な部分集合であることと「 $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  もしくは『 $[X_1, X_2] \neq 0$  かつ  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = 0$  であること』」は同値であるか?

ただし  $X = X_1 + X_2$  はベクトル空間としての分解  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$  に対応する  $X \in \mathfrak{p}$  の分解とする.

ここで  $G$  が実階数 1 のとき, 「 $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  しくは『 $[X_1, X_2] \neq 0$  かつ  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = 0$  であること』」と  $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  は同値である.

この論文の基本設定は以下の通りである.

## 記号と定義 2

- $G$  を非コンパクト実簡約 Lie 群,  $H$  は  $G$  の非コンパクトな閉部分群で,  $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対して  $H = \Theta H$  を満たすものとする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$ ,  $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$  とし,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\theta := d\Theta$  による Cartan 分解とする.
- $e$  を  $G$  の単位元とし,  $o_K := eK \in G/K$  とする.
- $B$  を  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式とし,  $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(W, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$  とする.

本修士論文の主題である  $X \in \mathfrak{p}$  の  $\mathfrak{h}$  射影  $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  は, 次の定理 3 により  $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  と定義される.

**定理 3** ([Kob89, Lemma 6.1])  $\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$  は上への微分同相である.

$e^{Y(X)} \cdot o_K$  は「 $e^X \cdot o_K$  から  $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$  に下ろした垂線の足」であり,  $Y(\mathbf{R}X)$  が有界であるか否かという問いは, 幾何的には「 $e^{tX} \cdot o_K$  から  $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$  に下ろした垂線の足全体の集合が有界であるか」という問いに対応する.

問題 1 の背景を説明するために [Ber88] の内容のごく一部を述べる.

まずいくつか用語を準備する.  $G$  を実簡約 Lie 群,  $H$  を  $G$  の閉部分群とし,  $G/H$  には左  $G$  不変測度  $\mu_{G/H}$  が存在するとする. 局所有界関数  $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  が proper な radial function であるとは,  $r$  が次を満たすことである.

1.  $e \in G$  を単位元とするととき  $r(e) = 0$  である.
2. 任意の  $g \in G$  に対し  $r(g) = r(g^{-1}) \geq 0$  である.
3. 任意の  $g_1, g_2 \in G$  に対し  $r(g_1 g_2) \leq r(g_1) + r(g_2)$  である.
4. 任意の  $R \geq 0$  に対し,  $B(R) := \{g \in G \mid r(g) \leq R\}$  は  $G$  の相対コンパクト集合である.

proper な radial function  $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  から  $r_{G/H}(gH) := \inf_{h \in H} \{r(gh)\}$  により定まる  $r_{G/H}: G/H \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  を  $G/H$  上の radial function という.

$G/H$  には standard measure と呼ばれる, 次を満たす非自明な Borel 測度  $m_X$  が存在する.  $e$  のコンパクトな近傍で  $B = B^{-1}$  なる任意の  $B \subset G$  と任意の  $g \in B$ ,  $x \in G/H$  に対し, ある定数  $C_B \geq 0$  が存在して  $g \cdot m_X \leq C_B m_X$ ,  $C_B^{-1} < m_X(Bx) < C_B$  である.

$d = \inf\{d' \geq 0 \mid \text{ある } C > 0 \text{ が存在して } m_X(B(r)) \leq C(1+r)^{d'}\}$  であるとき,  $G/H$  のランクは  $d$  であると言う.

$G$  の既約ユニタリ表現  $V$  が  $G$  の正則表現  $L^2(G/H)$  の既約分解に出現する必要条件は, 非自明な  $G$ -絡作用素  $\alpha: (C_c(G/H))^\infty \rightarrow V$  が存在し,  $\beta$  を  $\beta: V^\infty \rightarrow C(G/H)^\infty$  とすると, 任意の  $v \in V^\infty$ ,  $d' > d$  に対して  $\int_{G/H} \left| \beta(v)(x)(1+r(x))^{-d/2} \right|^2 dx < \infty$  なることである.

ここで  $G$  が  $G = KAH$  という Cartan 分解を持つときに,  $G/H$  がランク  $d := \dim A$  となる可能性がある条件の 1 つを  $X \in \mathfrak{a}$  に対する  $\mathfrak{h}$  射影  $Y(\mathbf{R}X)$  の有界性として定式化することができる. これが本修士論文の背景である.\*<sup>1</sup>

以下では  $(G, H)$  がどのような場合に, どのような証明方法で示したかを具体的に述べる.

$G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合がトイモデルとなって  $G$  が実階数 1 の場合の問題 1 に対する肯定的な結果が得られた.

$G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合の証明は背理法による. 具体的には次のとおりである; 例えば  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  に対して  $Y(\mathbf{R}X)$  が非有界, より具体的に  $Y(tX) = s(t)Y$ ,  $s(t) \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$  なるとき,  $G/K \simeq \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$  であることを用いて  $e^{Y(tX)}e^{Z(tX)} \cdot o_K$  を計算すると, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある  $t_\varepsilon \in \mathbf{R}$  が存在して  $e^{Y(t_\varepsilon X)}e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$  と  $o_K$  を結ぶ測地線が  $e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$  と  $o_K$  を結ぶ測地線が  $o_K$  でなす角が  $\varepsilon$  未満となる. これは  $X$  と  $\mathfrak{h} \setminus \{0\}$  のなす角度の最小値が非零であることに矛盾し, 問題 1 と同値な「 $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  であることと  $Y(\mathbf{R}X)$  が有界であることが同値である」ということが証明できる.

これを踏まえて  $G$  が実階数 1,  $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$  の場合には次の命題を用いて問題 1 に対して肯定的な結果を得た.

**命題 4**  $G$  を実階数 1 の実半単純 Lie 群とする. 任意の  $0 \neq Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  と任意の  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathbf{R}Y$  を固定したとき,  $X, Y$  を含む部分 Lie 環  $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$  で,  $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$  か  $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$  なるものが存在する.

また,  $\mathfrak{g}_0$  の  $G$  における解析的部分群  $G_0$  は  $G$  の閉部分群である.

この命題は  $SU(2, 1)$ -reduction, [Hel01] と [Yos38] の定理を併せて示される.

$G$  が実階数 1 の Lie 群の積である場合も, 成分ごとに見れば  $G$  の実階数が 1 の場合と同様であるから, こちらも  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の各成分が 1 次元であれば

\*<sup>1</sup> 「」部分は 正確に定式化する予定です & もうすこしちゃんと [Ber88] を復習します. 2022/01/10

## 参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer, 1999.
- [Ebe72a] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, 1972, pp. 492–510.
- [Ebe72b] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, 1972, pp. 151–70.
- [Hel01] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.
- [Yos38] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.