

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では, 小林俊行氏による次の \mathfrak{h} 射影の有界性に対する予想 1 を, G の実階数や H の次元が低い場合に証明した (\mathfrak{h} 射影の定義や記号は後述する).

予想 1 $Y(\mathbf{R} X)$ is bounded in $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \iff [X_1, X_2] \neq 0$ or $X_1 = 0$, である.

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に沿った $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.

この論文の基本設定は以下の通りである.

記号と定義

- G を非コンパクト実半単純 Lie 群, H を G の Cartan 対合 Θ に対する非コンパクトな実半単純部分 Lie 群とする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$, $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e_G を G の単位元とし, $o_K := e_G K \in G/K$ とする.
- $B(-, -)$ を \mathfrak{g} の Killing 形式とし, $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(Y, W) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}\}$ とする.

本修士論文の主題である $X \in \mathfrak{p}$ の \mathfrak{h} 射影 $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は, 次の定理 2 により $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義される.

定理 2 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

$Y(X)$ は図形的には, 「 $e^X \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足」と見ることができ, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であるか否かという問いは, 幾何的には 「 $e^{tX} \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足の $t \in \mathbf{R}$ での和集合が有界であるか」という問に対応する.

参考文献

- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54