

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では, 小林俊行氏による次の \mathfrak{h} 射影の有界性に対する予想 1 を, G の実階数や H の次元が低い場合に証明した (\mathfrak{h} 射影の定義や記号は後述する).

予想 1 (by T. Kobayashi)

$Y(\mathbf{R} X)$ は $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ で有界である $\iff [X_1, X_2] \neq 0$ であるか $X_1 = 0$ である.

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に沿った $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.

この論文の基本設定は以下の通りである.

記号と定義

- G を非コンパクト実半単純 Lie 群, H を G の Cartan 対合 Θ に対する非コンパクトな実半単純部分 Lie 群とする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$, $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e_G を G の単位元とし, $o_K := e_G K \in G/K$ とする.
- $B(-, -)$ を \mathfrak{g} の Killing 形式とし, $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(Y, W) = 0, \forall Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}\}$ とする.

本修士論文の主題である $X \in \mathfrak{p}$ の \mathfrak{h} 射影 $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は, 次の定理 2 により $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義される.

定理 2 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

図示すると $Y(X)$ を, 「 $e^X \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足」であり, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であるか否かという問いは, 幾何的には「 $e^{tX} \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足の $t \in \mathbf{R}$ での和集合が有界であるか」という問に対応する.

予想 1 の大本は, 実簡約 Lie 群 G とその閉部分群 H に対する G の正則表現 $L^2(G/H)$ について Plancherel 測度の台を求めることを目標とした [Ber88] にある.

[Ber88] の内容を不正確ながらまとめると次の通りである; G/H が eH を中心とする radial function r に対して「 \mathbf{R}^d と同じ増大度」を持つとき, G/H のランクが d であると言い, G の既約ユニタリ表現 V が $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は, 非自明な G -絡作用素 $\alpha: (C_c(G/H))^\infty \rightarrow V$ が存在し, α の「双対」を $\beta: V^\infty \rightarrow C(G/H)^\infty$ とすると, 任意の $v \in V^\infty$, $d' > d$ に対して $\int_{G/H} |\beta(v)(x)(1+r(x))^{-d/2}|^2 dx < \infty$ なることである.

ここで G が $G = KAH$ という Cartan 分解を持つときに, G/H がランク $d := \dim A$ となる可能性がある条件の 1 つを $X \in \mathfrak{a}$ に対する \mathfrak{h} 射影 $Y(\mathbf{R} X)$ の有界性として定式化することがで

きる。これが本修士論文の背景である。^{*1}

以下では (G, H) がどのような場合に、どのような証明方法で示したかを具体的に述べる。

G が実階数 1 の場合の予想 1 の証明方針は $G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合の証明がトイモデルとなっている。

$G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合の証明は背理法による。具体的には次のとおりである；例えば $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ に対して $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界、より具体的に $Y(tX) = s(t)Y$, $s(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ のとき、 $G/K \simeq \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ であることを用いて $e^{Y(tX)}e^{Z(tX)} \cdot o_K$ を計算すると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある t_ε が存在して $e^{Y(t_\varepsilon X)}e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線が $e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線が o_K でなす角が ε 未満となる。これは X と $\mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のなす角度が非零であることに矛盾し、予想 1 と同値な「 $X = 0 \vee X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff Y(\mathbf{R} X)$ が有界」であることが言える。

これを踏まえて G が実階数 1 の場合の証明には次の一般論を用いた。

定義 3 [Ebe72a, Definition 1.3]

M が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき、 M を Hadamard 多様体といい、Hadamard 多様体 M が visibility manifold であるとは、 $\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$ に対し、ある $r(p, \varepsilon) > 0$ が存在して、測地線 $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow X$ が $d_M(p, \gamma(t)) \geq r(p, \varepsilon)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$ ならば、 $\angle_p(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) \leq \varepsilon$ であることである。

M が visibility manifold であるとは、幾何的に見れば^{*2}

定理 4 [BH99, p. 296, 9.33 Theorem], originally [Ebe72b, Theorem 4.1]

$\exists C \subset M$ s.t. $M = \bigcup_{\text{cpt.}} \{f(C) \mid f \in \text{Isom}(M)\}$ なる Hadamard 多様体 M に対し、次は同値である。

- (i) M は visibility manifold である。
- (ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体 $M' \subset M$ で \mathbf{R}^2 と等長同型なものが存在しない。

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり、定理 4 の (ii) は G の実階数が 1 以下であることと同値である。したがって G の実階数が 1 の場合 G/K は visibility manifold であり、 $G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合の証明と全く同様にして背理法により予想 1 が示される。

G が実階数 1 の Lie 群の積である場合も、成分ごとに見れば G の実階数が 1 の場合と同様である。^{*3}

^{*1} 「」部分は 正確に定式化する予定です & もうすこしちゃんと [Ber88] を復習します。 2022/01/10

^{*2} 図をつけようと思っています。 2022/01/10

^{*3} 今から示します。 2022/01/10

参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer, 1999
- [Ebe72a] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, pp. 492–510, 1972
- [Ebe72b] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, pp. 151–70, 1972
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54