

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では、小林俊行氏による \mathfrak{h} 射影の有界性に対する次の問題 1 について、 G の実階数や H の次元が低い場合に肯定的な結果を得た (\mathfrak{h} 射影の定義や記号は後述する).

問題 1 (小林俊行氏による) $X \in \mathfrak{p}$ に対し $Y(\mathbf{R} X)$ が $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合であることと「 $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ もしくは $\llbracket [X_1, X_2] \neq 0 \text{ かつ } \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(X) = 0 \text{ であること} \rrbracket$ 」は同値であるか?

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.

ここで G が実階数 1 のとき、「 $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ もしくは $\llbracket [X_1, X_2] \neq 0 \text{ かつ } \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(X) = 0 \text{ であること} \rrbracket$ 」と $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ は同値である.

この論文の基本設定は以下の通りである.

記号と定義 2

- G を非コンパクト実簡約 Lie 群, H は G の非コンパクトな閉部分群で, G の Cartan 対合 Θ に対して $H = \Theta H$ を満たすものとする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$, $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e を G の単位元とし, $o_K := eK \in G/K$ とする.
- $\langle -, - \rangle$ を, \mathfrak{g} 上の G -不変な非退化対称双線型形式で, 「 \mathfrak{k} 上負定値, \mathfrak{p} 上正定値で $\mathfrak{k} \perp \mathfrak{p}$ 」なるものとし, $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{g} \mid \langle W, \mathfrak{h} \rangle = \{0\}\}$ とする.

本修士論文の主題である $X \in \mathfrak{p}$ の \mathfrak{h} 射影 $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は, 次の定理 3 により $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義される.

定理 3 ([Kob89, Lemma 6.1]) $\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

$e^{Y(X)} \cdot o_K$ は「 $e^X \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足」であり, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であるか否かという問いは, 幾何的には「 $e^{tX} \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足全体の集合が有界であるか」という問いに対応する.

以下では (G, H) がどのような場合に, どのような証明方法でを示したかを具体的に述べる.

$G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合がトイモデルとなって G が実階数 1 の場合の問題 1 に対する肯定的な結果が得られた.

$G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合の証明は背理法による. 例えば $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ に対して $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界, より具体的に $Y(tX) = s(t)Y$, $s(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ なるとする. $G/K \simeq \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ であることを用いて $e^{Y(tX)} e^{Z(tX)} \cdot o_K$ を計算すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $t_\varepsilon \in \mathbf{R}$ が存在して「 $e^{Y(t_\varepsilon X)} e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線」が「 $e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線」が o_K でなす角が ε 未満となる. これは X と $\mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のなす角度の最小値が非零であることに矛盾し, 問題 1 と同値な「 $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ であることと $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であることが同値である」ということが証明できる.

これを踏まえて G が実階数 1 の実半単純 Lie 群, $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合には次の命題を用いて問題 1 に対して肯定的な結果を得た.

命題 4 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群とする. 任意の $0 \neq Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ と任意の $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathbf{R}Y$ を固定したとき, X, Y を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ で, $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$ あるいは $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$ なるものが存在する. また \mathfrak{g}_0 の G における解析的部分群 G_0 は G の閉部分群である.

命題 4 は $SU(2, 1)$ -reduction, [Hel01] と [Yos38] の定理を併せて示される.

G が実階数 1 の Lie 群の積であり, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の各成分が 1 次元であるときも, 成分ごとに見ることで G が実階数 1 の実半単純 Lie 群, $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合に帰着でき, 問題 1 に対する肯定的な結果を得られる.

問題 1 の背景を説明するために [Ber88] の内容のごく一部を述べる.

まずいくつか用語を準備する. G を実簡約 Lie 群, H を G の閉部分群とし, G/H には左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ が存在すると仮定する. 局所有界関数 $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ が proper な radial function であるとは, r が次の 4 条件を満たすことである.

1. $e \in G$ を単位元とすると $r(e) = 0$ である. ^{*1}
2. 任意の $g \in G$ に対し $r(g) = r(g^{-1}) \geq 0$ である.
3. 任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し $r(g_1 g_2) \leq r(g_1) + r(g_2)$ である.
4. 任意の $R \geq 0$ に対し, $B(R) := \{g \in G \mid r(g) \leq R\}$ は G の相対コンパクト集合である.

proper な radial function $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ から $r_{G/H}(gH) := \inf_{h \in H} \{r(gh)\}$ により定まる $r_{G/H}: G/H \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ を G/H 上の radial function という.

G/H には standard measure と呼ばれる, 次を満たす非自明な Borel 測度 m_X が存在する. 単位元のコンパクトな近傍で $B = B^{-1}$ なる任意の $B \subset G$ と任意の $g \in B$, $x \in G/H$ に対し, ある定数 $C_B \geq 0$ が存在して $g \cdot m_X \leq C_B m_X$, $C_B^{-1} < m_X(Bx) < C_B$ である.

$d = \inf\{d' \geq 0 \mid \text{ある } C > 0 \text{ が存在して } m_X(B(r)) \leq C(1+r)^{d'}\}$ であるとき, G/H のランクは d であると言う.

G の既約ユニタリ表現 V が G の正則表現 $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は, 非自明な G -絡作用素 $\alpha_V: (C_c(G/H))^\infty \rightarrow V$ が存在し, 任意の $v \in V^\infty$, $d' > d$ に対して $\int_{G/H} \left| \beta_V(v)(x)(1+r(x))^{-d'/2} \right|^2 dx < \infty$ なることである. ただし β_V は次の命題により α_V と対応する G -絡作用素 $\beta_V: V^\infty \rightarrow C(G/H)^\infty$ とする.

命題 5 ([Ber88, p. 678]) G/H の左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ を 1 つ固定する. 同型写像 $\text{Hom}_G((C_c(G/H))^\infty, V) \rightarrow \text{Hom}_G(V^\infty, C(G/H)^\infty)$, $\alpha_V \mapsto \beta_V$ ただし任意の $v \in V$, $\varphi \in (C_c(G/H))^\infty$ に対し $\langle v, \alpha_V(\varphi) \rangle_V = \int_{G/H} \beta_V(v) \varphi d\mu_X$ が存在する.

G を実簡約 Lie 群, H を G の閉部分群とし, ある可換部分群 $B \subset G$ が存在して $G = KBH$ という Cartan 分解を持つとする. 任意の $X \in \text{Lie } B$ に対して $Y(\mathbf{R}X)$ が有界であれば, G/H がランク $d := \dim B$ となるための条件のうちの 1 つである, 「ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $X \in \text{Lie } B$ に対し, $d_{G/K}(\exp(-X) \cdot o_K, o_K) - \inf\{d_{G/K}(\exp(-X) \cdot o_K, h \cdot o_K) \mid h \in H\} \leq C$ であること」が満たされる.

以上が本修士論文の表現論的な背景である.

^{*1} これは [Ber88] には明示されていません.

参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.
- [Hel01] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.
- [KK16] F. Kassel and T. Kobayashi, *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces*, Adv. Math., Vol. 287, 2016, pp. 123–236.
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [小林 95] 小林俊行, 球等質多様体上の調和解析入門, 第 3 回整数論サマースクール ‘等質空間と保型形式’ 所収, 佐藤文広 編, 長野, 1995, pp. 22-41.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.
- [Yos38] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.