

2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号	<u>45-196010</u>
フリガナ	オクダ タカコ
氏名	<u>奥田 堯子</u>

目次

導入	2
謝辞	3
1 設定と \mathfrak{h} 射影の基本的な性質, 予想 1.4 の観察	4
1.1 記号の設定	4
1.2 予想 1.4 の観察: $G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ の場合	6
1.3 予想 1.4 の観察: 予想 1.4 はなぜこの形になったか	9
2 具体例と主定理の証明	10
2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群	10
2.2 G の実階数が 1 の場合	13
2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面	16
2.3 G が実階数 1 の群の直積の場合	17
参考文献	17

導入

G を非コンパクトな実半単純 Lie 群, K を G の極大コンパクト部分群で G の Cartan 対合 Θ に対して $K = \Theta K$ なるものとするとき, G/K は \mathfrak{g} の Killing 形式 B から定まる Riemann 計量によって Riemann 多様体の構造を持つ. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Θ の微分 $d\Theta$ による \mathfrak{g} の Cartan 分解とすると, G/K は \mathfrak{p} と微分同相であり, G の単位元の G/K での像 eK を通る G/K の極大測地線は $B(X, X) = 1$ なる $X \in \mathfrak{p}$ によって $e^{tX}K$, $t \in \mathbf{R}$ と書ける. H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で, $H = \Theta H$ を満たすものとし, \mathfrak{p} での B に対する $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の直交補空間を $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ とする. 測地線 $e^{tX}K$ の $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ 成分と $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ 成分への分解を与える定理として次の定理が知られている.

定理 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z K \in G/K$ は上への微分同相である.

この定理を用いて $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義すると, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $e^{tX}K = e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}K$ である.

$G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ とするとき, $t \in \mathbf{R}$ に対し, $Y(tX)$ は図 1 に図示するような幾何学的な意味を持つ. 図 1 は Poincaré 円板における測地線 $e^{tX}K$ (赤色の斜め線) とその上の一点 $e^{tX}K$ から eK の H 軌道 (中央の直線) に下ろした垂線の足 (緑の丸) が $e^{Y(tX)}K$ である.



図 1: Poincaré 円板における $Y(tX)$ の幾何学的意味

本論文では小林俊行氏による次の予想について考察し， G が実階数 1 の場合の肯定的な結果を得た．

予想 $Y(\mathbf{R} X)$ は $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合である $\iff [X_1, X_2] \neq 0$ であるか $X_1 = 0$ である．

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする．

謝辞

1 設定と \mathfrak{h} 射影の基本的な性質, 予想 1.4 の観察

1.1 記号の設定

本論文の基本的な設定は次のとおりであり, この他に必要な条件は都度明示することとする.

記号と定義 1.1

- G を非コンパクト実半単純 Lie 群, H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で, G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ なるものとする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$, $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e を G の単位元とし, $o_K := eK \in G/K$ とする.
- $B(-, -)$ を \mathfrak{g} の Killing 形式とし, $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid \text{任意の } Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \text{ に対して } B(Y, W) = 0\}$ とする.

以下の定理 1.2 を用いて, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義する.

定理 1.2 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

ここで, $Y(\mathbf{R} X)$ の有界性について, 次の予想 1.4 が小林俊行氏によって立てられた.

定義 1.3 $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} := \{X \in \mathfrak{p} \mid Y(\mathbf{R} X) \text{ が } \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \text{ の有界集合である.}\}$ と定める.

予想 1.4 (by T. Kobayashi)

ベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応して $X = X_1 + X_2$ と分解すると, $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ あるいは } X_1 = 0\}$ である.

予想 1.4 についての基本的な事項を挙げる.

補題 1.5

1. $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} \subset \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ あるいは } X_1 = 0\}$ である. [もっと書くことはあるはず. 2022/01/11](#)

2. $X \in \mathfrak{p}$ が $X_1 = 0$ を満たすならば $X \in \mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}}$ である.
3. 1, 2 より予想 1.4 と「 $X \in \mathfrak{p}$ が $[X_1, X_2] \neq 0$ ならば $X \in \mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}}$ である」は同値である.
4. G が実階数 1 のとき, 予想 1.4 と「 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}} = \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ 」は同値である.

補題 1.5 の証明

1. 背理法による. $[X_1, X_2] = 0$ かつ $X_1 \neq 0$ なる $X \in \mathfrak{p}$ に対しては $[X_1, X_2] = 0$ より $e^{tX_1} e^{tX_2} \cdot o_K = e^{t(X_1+X_2)} \cdot o_K = e^{tX} \cdot o_K$ であり, $Y(tX) = tX_1$, $Z(tX) = tX_2$ であることから $Y(\mathbf{R}X) = \mathbf{R}X_1$ となり, $X_1 \neq 0$ より $Y(\mathbf{R}X)$ は有界集合とならない.
2. $X_1 = 0 \iff X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ より $Z(tX) = tX$, $Y(tX) = 0$ であることによる.
4. 対偶を示す. $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $[X_1, X_2] = 0$ かつ $X_1 \neq 0 \iff X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ を示せば良い. G の実階数は 1 で, H は非コンパクトであるから, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$ であり, \mathfrak{h} は \mathfrak{g} の極大可換部分空間である. よって $X_1 \neq 0$ かつ $[X_1, X_2] = 0 \implies X_2 = 0$ であり, $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ を得る.

■

$Y(\mathbf{R}X)$ の有界性は $\text{Ad}(k)$ -不変である;

補題 1.6 $k \in K$, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $X' := \text{Ad}(k)X$, $\mathfrak{h}' := \text{Ad}(k)\mathfrak{h}$ とするとき, $Y(\mathbf{R}X)$ が有界 $\iff Y'(\mathbf{R}X')$ が有界である.

ここで $Y'(X')$, $Z'(X')$ を, 微分同相 $\pi': (\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y', Z') \mapsto e^{Y'} e^{Z'} \cdot o_K$ を用いて, $X' \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y'(X'), Z'(X')) = \pi'^{-1}(e^{X'} \cdot o_K)$ と定める.

補題 1.6 の証明

主張は (X, \mathfrak{h}) と (X', \mathfrak{h}') に対して対称的であるから, $Y(\mathbf{R}X)$ が有界 $\implies Y'(\mathbf{R}X')$ が有界, のみを示せば十分である.

任意に $r \in \mathbf{R}$ を取る. $e^{rX'} \cdot o_K = e^{Y'(rX')} e^{Z'(rX')} \cdot o_K$ であり, 両辺に左から k^{-1} を掛けると, $e^{rX} = e^{\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX'))} e^{\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX'))} \cdot o_K$ を得る. ここで $Y'(rX') \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}$, $Z'(rX') \in \mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}$ であるから $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$, $\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX')) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ である.

定理 1.2 により π は微分同相であるから任意の $r \in \mathbf{R}$ に対して $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) = Y(rX)$ であるから, $Y'(\mathbf{R}X) = \text{Ad}(k)(Y(\mathbf{R}X))$ であ

り, $\text{Ad}(k)$ は有限次元空間の間の線型写像であるから有界性を保つ.

以上から補題 1.6 が示された. ■

$Z(\mathbf{R}X)$ の有界性については次の定理が知られており, 有界性の判定は Lie 環の言葉のみで行える.

定理 1.7 [Kob97, Lemma 5.4]

$X \in \mathfrak{p}$ に対し, $\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ である.

ここに $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ は X と $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の元がなす角度の最小値 $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$ であり, $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$ である.

つまり $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ ならば $\|Z(tX)\| \rightarrow \infty, |t| \rightarrow \infty$ である.

1.2 予想 1.4 の観察: $G = SU(1, 1), H = SO(1, 1)$ の場合

$G = SU(1, 1), H = SO(1, 1) := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$ の場合に予想 1.4 が正しいことは直接計算により確かめられる.

命題 1.8 $G = SU(1, 1), H = SO(1, 1)$ のとき予想 1.4 は正しい.

補題 1.9 $\mathfrak{su}(1, 1)$ の Killing 形式から定まる Poincaré 円板 $G/K = \{x + \sqrt{-1}y \mid x^2 + y^2 < 1\}$ の計量は $\frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ である.

補題 1.9 の証明

$X' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}, Y' := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}$ とすると, $\|X'\|^2 = \|Y'\|^2 = 8, \langle X', Y' \rangle = 0$ であって, $0 \in G'/K'$ で主張が成り立つ.

$k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta}), a_r := \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r \\ \sinh r & \cosh r \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} & g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X')) \\ &= g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) \\ &= 8 \\ & g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) = 0 \end{aligned}$$

なるような計量 g が Killing 形式から誘導される計量であるが、それが主張の形であることを示せば良い (これらのベクトルが何を表しているかは図 2 参照).

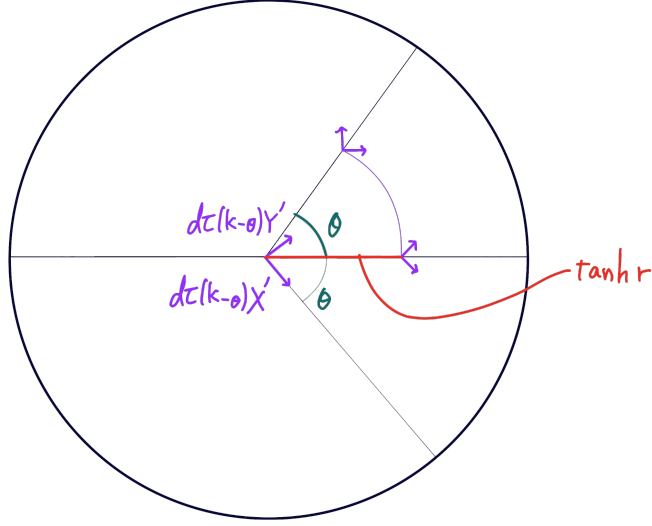


図 2

$t = 0$ の接ベクトルが $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X'$ を与える曲線は $\gamma_x(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \cosh r}$ であるから, $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_x(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial x} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x}$ である.

同様に $t = 0$ の接ベクトルが $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y'$ を与える曲線は $\gamma_y(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \cosh r}$ であるから, $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_y(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial y} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial y}$ である.

以上より $g = \frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ が示された. ■

命題 1.8 の証明

$k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$, $X_\theta := k_{\theta/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} k_{-\theta/2}$ とすると, $\mathfrak{p} \setminus \{0\} = \{tX_\theta \mid$

$t \in \mathbf{R}_{>0}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ である. この X_θ と $t \in \mathbf{R}$ に対して $Y(tX_\theta) = s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なる $s \in \mathbf{R}$ を求める.



図 3

右の円の Euclid 距離での半径を R とし, $e^{tX_\theta} \cdot o_K$ から $H \cdot o_K$ への垂線の足の o_K からの Euclid 距離を h とするとき, 外側の青色の直角三角形に対して三平方の定理を用いて $(h + R)^2 = R^2 + 1$ より $R = \frac{1-h^2}{2h}$, $R + h = \frac{1+h^2}{2h}$ を得る.

さらに下の紫色の三角形に対して余弦定理を用いて $R^2 = (R + h)^2 + r^2 - 2(R + h) \cos \theta$ を得, $\frac{2r \cos \theta}{r^2 + 1} = \frac{2h}{h^2 + 1} \cdots (1.1)$ を得る.

要確認: ここで補題 1.9 より $\frac{r}{2\sqrt{2}} = \tanh 2\sqrt{2}t$, $\frac{h}{2\sqrt{2}} = \tanh 2\sqrt{2}s$ であり (1.1) は $\cos \theta \tanh \frac{t}{4\sqrt{2}} = \tanh \frac{s}{4\sqrt{2}}$ と書き直せる. したがって X_θ に対して $Y(\mathbf{R} X)$ が有界 $\iff |\cos \theta| \neq 1 \iff X \notin \mathfrak{h}$ である.

■

系 1.10 $G = SO(1, n)$, $H = SO(1, k)$, $1 \leq k \leq n - 1$ に対して予想 1.4 は正しい.

系 1.10 の証明

「 $e^X \cdot o_K$ と o_K を結ぶ直線」と $H \cdot o_K$ で張られる超平面で Poincaré 球 $SO(1, n)/SO(n)$ を切った際の断面を考える.



図 4

この断面に現れるのは図 3 と同じであるから、同様の計算により系 1.10 を得る.

■

1.3 予想 1.4 の観察: 予想 1.4 はなぜこの形になったか

予想 1.4 と次の予想 1.11 は同値である.

予想 1.11 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})\}$

ここで似た予想として次の $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ を \mathfrak{h} に置き換えた予想が立てられる.

予想 1.12 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp \mathfrak{h}\}$

しかし予想 1.12 には反例が存在する.

補題 1.13 $G = SL(3, \mathbf{R})$, $Y_1 := \text{diag}(1, 1, -2)$, $Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathfrak{h} = \mathbf{R} Y_1 \oplus \mathbf{R} Y_2$, $X = \text{diag}(1, 0, -1)$ に対し, $[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ であるが $Y(\mathbf{R} X) = \mathbf{R} Y_1$ であり, 非有界である.

補題 1.13 の計算:

\mathfrak{h} は可換 Lie 環であり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$ の Cartan 対合 $\theta W := -{}^t W$ に対し $\mathfrak{h} = \theta \mathfrak{h}$ である.

$[X, \mathfrak{h}] \neq 0$ は, $[X, Y_2] \neq 0$ より従う.

ここで $Z_1 := \text{diag}(1, -1, 0) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ であり, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し, $e^{2tX} = e^{tY_1} e^{tZ_1}$ であるから, $Y(\mathbf{R} X) = \mathbf{R} Y_1$ となり, 補題 1.13 が示された.

補題 1.13 において X と \mathfrak{h} は, $[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ だが $[X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] = \{0\}$ かつ $X \not\perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ となるように取った.

つまり予想 1.12 の右辺を次の予想 1.14 のように少し弱めても補題 1.13 はその反例になっている.

予想 1.14 $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})\}$

以上のことから予想 1.4 が立てられた.

2 具体例と主定理の証明

2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

命題 2.1 $G = SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$, $H = SO(1, 1)$, $n \geq 2$ に対して予想 1.4 は正しい.

$G = Sp(1, 2)$, $\mathfrak{h} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合にのみ示す. その他の場合も全く同様の議論である.

命題 2.2 $G = Sp(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界 $\iff X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ or $X = 0$ である.

ただし, H は G の左上に入っている. すなわち, $\text{Lie } H = \mathfrak{h} = \mathbf{R} A$, $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

記号と定義 **2.3** \mathbf{H} を四元数体とする. $Sp(1, 2)/Sp(1) \times Sp(2) \simeq \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\} =: \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ である. これは自然表現 $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^2$ の ${}^t(1, 0, 0)$ 軌道を考え, 第 2, 第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が $\mathbf{H} \mathbb{H}^2$ と微分同相であるためであり, $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^3$ の ${}^t(1, 0, 0)$ 軌道の点 $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ に対応する $\mathbf{H} \mathbb{H}^2$

の点を $\left[\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ z_1 z_0^{-1} \\ z_2 z_0^{-1} \end{pmatrix} \right]$ と書く.

愚直な行列計算により, 次が示される.

補題 **2.4** $\forall z, w \in \mathbf{H}$ に対し, $\exp \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & * & * \\ \frac{\bar{z}}{r} \sinh r & * & * \\ \frac{\bar{w}}{r} \sinh r & * & * \end{pmatrix}$, ただし

$r := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$, である.

命題 **2.2** の証明

$X = 0 \Rightarrow Y(\mathbf{R} X) = \{0\}$ と $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のときに $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であることは明らかであるから, $X \notin \mathfrak{h}$ の場合にのみ議論すればよい. つまり $X = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$, $z, w \in \mathbf{H}$ s.t. $|z|^2 + |w|^2 = 1$ を任意に 1 つ固定して議論して一般性を失わない. このとき, $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ より $\operatorname{Re} z \neq \pm 1$ であることに注意する ($\operatorname{Re}: \mathbf{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto a \in \mathbf{R}$ とする).

G の Cartan 対合を $\Theta(g) = (g^*)^{-1}$ (g^* は g の共役転置) とするとき, $\Theta(e^{Y(tX)} e^{Z(tX)}) \cdot o_K = e^{-Y(tX)} e^{-Z(tX)} \cdot o_K = \Theta(e^X) \cdot o_K = e^{-X} \cdot o_K$ より, 「 $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界 $\iff Y(\mathbf{R} X) \subset \mathbf{R} A$ が上に非有界」である.

したがって, $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であるとき, 列 $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$ で, $s_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, ただし $Y(t_n X) = s_n A$, なるものが存在する.

このとき, $\{|t_n|\}_{n \in \mathbf{N}}$ が有界 $\iff \{e^{t_n X} \cdot o_K\}_{n \in \mathbf{N}}$ が有界ならば, $G/K \ni$

$e^X \cdot o_K \mapsto (Y(X), Z(X)) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$, $X \in \mathfrak{p}$ が微分同相であることから $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ も有界である. 従って対偶より $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \rightarrow \infty$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n| \rightarrow \infty$ である.

補題 2.4 より,

$$\begin{aligned} e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K &= \begin{pmatrix} \cosh s_n & \sinh s_n & 0 \\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \bar{z} \tanh |t_n| \\ \pm \bar{w} \tanh |t_n| \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n \\ \pm \bar{w} \tanh |t_n| \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

複号は t_n の符号 \pm と同順, である. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh s_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh |t_n|$ と $\operatorname{Re} z \neq \pm 1$ に注意すると次を得る. 具体的な計算は後述する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n)^{-1} = 1 \quad (2.1)$$

である.

したがって, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルと, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} (\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n)^{-1} \\ * \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値を I_n とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$ である.

しかし, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルと, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $e^{W(t_n X)} \cdot o_K \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値 J_n は,

$$W(t_n X) \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & 0 & 0 \\ \bar{z}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, \& \operatorname{Re} z_1 = 0 \right\} \text{ であることと, 補題 2.4}$$

から $\operatorname{Re} J_n = 0$ となり, $e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K \implies \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 1$ に矛盾する.

以上より「 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \Rightarrow Y(\mathbf{R} X)$ 有界」, したがって 命題 2.2 を得る. ■

命題 2.2 の計算:

$\lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| = 0$
を示せば主張が得られる。具体的に計算すると、

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\tanh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n|)(1 \pm z \tanh|t_n| \tanh s_n)}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2} - 1 \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n|)z' - (1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)z'|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2}, \quad z' := 1 \pm z \tanh|t_n| \tanh s_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)z'|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|}
\end{aligned}$$

であり、 $0 < \min|1 \pm \operatorname{Re} z| \leq |(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ と
 $\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z|\} \leq |-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|| \leq \sqrt{5}$ であることから、

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z|\}}{\sqrt{5}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \operatorname{Re} z|\}} = 0
\end{aligned}$$

より、(2.1) が成り立つ。

2.2 G の実階数が 1 の場合

定理 2.5 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群とすると、予想 1.4 が成り立つ。

定理 2.6 [Hel01, p. 409, Theorem 3.1]

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を実半単純 Lie 環とその Cartan 対合 θ に対する Cartan 分解とし、
 $\alpha, 2\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ と仮定する。このとき、 $X_\alpha, X_{2\alpha}, \theta X_\alpha, \theta X_{2\alpha}$ から生成される Lie 環
 \mathfrak{g}^* は $\mathfrak{su}(2, 1)$ と同型である。

記号と定義 2.7

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ を極大分裂可換代数、 $\mathfrak{m} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ とする。 B を \mathfrak{g} の Killing 形式とする。
- $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ を \mathfrak{a} に関する制限ルート系とする。 \mathfrak{g}_λ を、 $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ のルート空間とし、
 $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ 、 $0 \neq X_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$ を任意に固定する。 $Y_\alpha := [\theta X_\alpha, X_{2\alpha}]$ とする。

- $A_\alpha \in \mathfrak{a}$ を, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, A_\alpha) = \alpha(H)$ を満たす元とする.
 このとき, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, [X_\alpha, \theta X_\alpha]) = \alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$
 より $[X_\alpha, \theta X_\alpha] = B(X_\alpha, \theta X_\alpha)A_\alpha$ (同様に $[Y_\alpha, \theta Y_\alpha] = B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)A_\alpha$,
 $[X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}] = 2B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})A_\alpha$) である. @ $c_\alpha := \sqrt{\frac{-2}{\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)}}$,
 $c_{2\alpha} := \sqrt{\frac{-2}{\alpha(A_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})}}$ とする.
 また, $X_\alpha^* := c_\alpha X_\alpha$, $X_{2\alpha}^* := c_{2\alpha} X_{2\alpha}$, $Y_\alpha^* := [\theta X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = c_\alpha c_{2\alpha} Y_\alpha$, $A_\alpha^* := \frac{1}{12\alpha(A_\alpha)} A_\alpha$ とする.

補題 2.8 $c := 2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$ とすると, $[X_\alpha, Y_\alpha] = cX_{2\alpha}$ である. 特に $0 \neq Y_\alpha \neq X_\alpha$ である.

証明略, Jacobi identity と $3\alpha \notin \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ による.

補題 2.9 $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ である. 特に証明から $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], X_\alpha] = -3\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)Y_\alpha$ がわかる.

補題 2.9 の証明

$Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ より $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} + \mathfrak{a}$ であり, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して
 $B(H, [X_\alpha, \theta Y_\alpha]) = B([H, X_\alpha], Y_\alpha) = \alpha(H)B(X_\alpha, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]) = \alpha(H)B([X_\alpha, X_\alpha], X_{2\alpha}) = 0$
 であることより $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m}$ である.

さらに, $[[\theta X_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] = -[[Y_\alpha, X_\alpha], \theta X_\alpha] - [[X_\alpha, \theta X_\alpha], Y_\alpha] = c[X_{2\alpha}, \theta X_\alpha] - B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha = -cY_\alpha - B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha = -3\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)Y_\alpha \neq 0$
 より, $\theta[\theta X_\alpha, Y_\alpha] = [X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ である. ■

補題 2.10 $\mathbf{R} X_\alpha + \mathbf{R} Y_\alpha$ は $\text{ad}_{\mathfrak{g}}([X_\alpha, \theta Y_\alpha])$ で不変である.

特に証明の途中で $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] = -6\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha$,
 $[Y_\alpha, \theta Y_\alpha] = -2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})A_\alpha$ がわかる.

補題 2.10 の証明

$[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] \in \mathbf{R} X_\alpha$ を示せば, 補題 2.9 と併せて 補題 2.10 が従う.

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= -[[\theta Y_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] - [[Y_\alpha, X_\alpha], \theta Y_\alpha] = B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha + c[X_{2\alpha}, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]] \\ &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - c[X_\alpha, [\theta X_{2\alpha}, X_{2\alpha}]] - c[\theta X_{2\alpha}, [X_{2\alpha}, X_\alpha]] \\ &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - cB(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})\alpha(A_{2\alpha})X_\alpha \end{aligned}$$

であり ($\bigodot \mathfrak{g}_{3\alpha} = \{0\}$), $A_{2\alpha} = 2A_\alpha$ であるから,

$$[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] = B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha) \alpha(A_\alpha) X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha) B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}) X_\alpha$$

を得る.

$$\text{さらに, } B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha) = B(Y_\alpha, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]) = -B([X_\alpha, Y_\alpha], \theta X_{2\alpha}) = -2\alpha(A_\alpha) B(X_\alpha, \theta X_\alpha) B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}) \text{ であるから, 最終的に}$$

$$[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] = B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha) \alpha(A_\alpha) X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha) B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}) X_\alpha = -6\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha) B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}) X_\alpha$$

を得る. ■

補題 2.11 $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], X_{2\alpha}] = 0$ である.

証明略. 補題 2.8–2.10 と Jacobi identity による.

補題 2.12 $[Y_\alpha, \theta X_{2\alpha}] = 2\alpha(A_\alpha) B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}) \theta X_\alpha$ である.

証明略. Jacobi identity を用いて与式を変形し計算することによる.

定理 2.6 の証明

補題 2.8–2.12 より, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_0^* \oplus \mathfrak{g}_\alpha^* \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}^*$, ただし $\mathfrak{g}_0^* := \mathbf{R} A_\alpha \oplus \mathbf{R}[X_\alpha, \theta Y_\alpha]$, $\mathfrak{g}_\alpha^* := \mathbf{R} X_\alpha \oplus \mathbf{R} Y_\alpha$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}^* := \mathbf{R} \theta X_\alpha \oplus \mathbf{R} \theta Y_\alpha$, $\mathfrak{g}_{2\alpha}^* := \mathbf{R} X_{2\alpha}$, $\mathfrak{g}_{-2\alpha}^* := \mathbf{R} \theta X_{2\alpha}$, がわかる.

非自明な \mathfrak{g}^* の Lie 括弧の関係として, $[X_\alpha^*, Y_\alpha^*] = -4X_{2\alpha}^*$ (by 補題 2.8), $[X_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] = -6Y_\alpha^*$ (by 補題 2.9), $[X_\alpha^*, \theta X_\alpha^*] = -24A_\alpha^*$ (by def.), $[X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = 0$ ($\because \mathfrak{g}_{3\alpha} = 0$), $[X_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] = \theta Y_\alpha^*$,

$[Y_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = 0$ (by 補題 2.11), $[Y_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] = -4\theta X_\alpha^*$ (by 補題 2.12), $[Y_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*] = -96A_\alpha^*$ (by 補題 2.10), $[Y_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] = 24X_\alpha^*$ (by 補題 2.10)

$[[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*], X_{2\alpha}^*] = [[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*], \theta X_{2\alpha}^*] = 0$ (by 補題 2.12),

$[X_{2\alpha}^*, \theta X_{2\alpha}^*] = -48A_\alpha^*$ が存在する (残りの関係式はこの両辺に θ をつけることで得られる).

\mathfrak{g}^* と $\mathfrak{su}(2, 1)$ の対応を,

$$X_\alpha^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{2\alpha}^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\theta X_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \theta X_{2\alpha}^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\
Y_\alpha^* &\leftrightarrow -2 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, & \theta Y_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & -\sqrt{-1} & -0 \end{pmatrix}, \\
A_\alpha^* &\leftrightarrow \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & [X_\alpha, \theta Y_\alpha^*] &\leftrightarrow -4 \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

でつけ、この対応が Lie 環としての同型であること（上の関係式が満たされること）を愚直に計算して、定理 2.6 が示せる。

■

2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面

定義 2.13 [Ebe72a, Definition 1.3]

M が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき、 M を Hadamard 多様体といい、Hadamard 多様体 M が visibility manifold であるとは、 $\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$ に対し、ある $r(p, \varepsilon) > 0$ が存在して、測地線 $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow X$ が $d_M(p, \gamma(t)) \geq r(p, \varepsilon), \forall t \in [t_0, t_1]$ ならば、 $\angle_p(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) \leq \varepsilon$ であることである。

[図を入れる](#)

定理 2.14 [BH99, p. 296, 9.33 Theorem], originally [Ebe72b, Theorem 4.1]

$\exists C \subset M$ s.t. $M = \bigcup_{\text{cpt.}} \{f(C) \mid f \in \text{Isom}(M)\}$ なる Hadamard 多様体 M に対し、次は同値である。

- (i) M は visibility manifold である。
- (ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体 $M' \subset M$ で \mathbf{R}^2 と等長同型なものが存在しない。

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり、定理 2.14 の (ii) は G の実階数が 1 以下であることと同値である。したがって G の実階数が 1 の場合 G/K は visibility manifold であり、 $G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合の証明と全く同様にして背理法により予想 1.4 が示される。

2.3 G が実階数 1 の群の直積の場合

参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710
- [BBE85] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer, 1999
- [Borel–Ji] A. Borel and L. Ji, *Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006
- [Ebe72a] P. Eberlein, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, pp. 492–510, 1972
- [Ebe72b] P. Eberlein, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, pp. 151–70, 1972
- [EO73] P. Eberlein and B. O’Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109
- [Hel84] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis—Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 83, AMS, 1984
- [Hel01] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, GSM, Vol. 34, AMS, 2001
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54