論文内容の要旨

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では，小林俊行氏による $\mathfrak{h}$ 射影の有界性に対する次の問題 1 について，G の実階数や H の次元が低い場合に肯定的な結果を得た ($\mathfrak{h}$ 射影の定義や記号は後述する).

問題 1 (小林俊行氏による) $X \in \mathfrak{p}$ に対し $Y(\mathbf{R}X)$ が $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合であることと「$X \in \mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}$ もしくは『$[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = 0$ であること』」は同値であるか？

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^{\perp})$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.

ここで G が実階数 1 のとき，「$X \in \mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}$ もしくは『$[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = 0$ であること』」と $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ は同値である.

この論文の基本設定は以下の通りである.

記号と定義 2

- G を非コンパクト実簡約 Lie 群，H は G の非コンパクトな閉部分群で，G の Cartan 対合 Θ に対して $H = \Theta H$ を満たすものとする.
- $\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G$, $\mathfrak{h} := \operatorname{Lie} H$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする.
- e を G の単位元とし，$o_K := eK \in G/K$ とする.
- B を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とし，$\mathfrak{h}^{\perp} := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(W, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$ とする.

本修士論文の主題である $X \in \mathfrak{p}$ の $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は，次の定理 3 により $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p})$ と定義される.

定理 3 (**[Kob89, Lemma 6.1]**) $\pi\colon (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

$e^{Y(X)} \cdot o_K$ は「$e^X \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足」であり，$Y(\mathbf{R}X)$ が有界であるか否かという問いは，幾何的には「$e^{tX} \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足全体の集合が有界であるか」という問いに対応する.

以下では (G, H) がどのような場合に，どのような証明方法でを示したかを具体的に述べる.

$G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合がトイモデルとなって G が実階数 1 の場合の問題 1 に対する肯定的な結果が得られた.

$G = SU(1,2)$，$H = SO(1,1)$ の場合の証明は背理法による．例えば $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ に対して $Y(\mathbf{R}X)$ が非有界，より具体的に $Y(tX) = s(t)Y$，$s(t) \to \infty$，$t \to \infty$ なるとする．$G/K \simeq \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ であることを用いて $e^{Y(tX)} e^{Z(tX)} \cdot o_K$ を計算すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $t_\varepsilon \in \mathbf{R}$ が存在して「$e^{Y(t_\varepsilon X)} e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線」が「$e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線」が o_K でなす角が ε 未満となる．これは X と $\mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のなす角度の最小値が非零であることに矛盾し，問題 1 と同値な「$X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ であることと $Y(\mathbf{R}X)$ が有界であることが同値である」ということが証明できる.

これを踏まえて G が実階数 1 の実半単純 Lie 群，$\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合には次の命題を用いて問題 1 に対して肯定的な結果を得た．

命題 4 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群とする．任意の $0 \neq Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ と任意の $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathbf{R}Y$ を固定したとき，X, Y を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ で，$\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1,1)$ あるいは $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2,1)$ なるものが存在する．

また，$\mathfrak{g}_0$ の G における解析的部分群 G_0 は G の閉部分群である．

命題 4 は $SU(2,1)$-reduction，[**Hel01**] と [**Yos38**] の定理を併せて示される．

G が実階数 1 の Lie 群の積であり，$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の各成分が 1 次元であるときも，成分ごとに見ることで G が実階数 1 の実半単純 Lie 群，$\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合に帰着でき，問題 1 に対する肯定的な結果を得られる．

問題 1 の背景を説明するために [**Ber88**] の内容のごく一部を述べる．

まずいくつか用語を準備する．G を実簡約 Lie 群，H を G の閉部分群とし，G/H には左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ が存在すると仮定する．局所有界関数 $r\colon G \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ が proper な radial function であるとは，r が次の 4 条件を満たすことである．

1. $e \in G$ を単位元とするとき $r(e) = 0$ である．[*1]
2. 任意の $g \in G$ に対し $r(g) = r(g^{-1}) \geq 0$ である．
3. 任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し $r(g_1 g_2) \leq r(g_1) + r(g_2)$ である．
4. 任意の $R \geq 0$ に対し，$B(R) \coloneqq \{g \in G \mid r(g) \leq R\}$ は G の相対コンパクト集合である．

proper な radial function $r\colon G \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ から $r_{G/H}(gH) \coloneqq \inf_{h \in H}\{r(gh)\}$ により定まる $r_{G/H}\colon G/H \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ を G/H 上の radial function という．

G/H には standard measure と呼ばれる，次を満たす非自明な Borel 測度 m_X が存在する．単位元のコンパクトな近傍で $B = B^{-1}$ なる任意の $B \subset G$ と任意の $g \in B$，$x \in G/H$ に対し，ある定数 $C_B \geq 0$ が存在して $g \cdot m_X \leq C_B m_X$，$C_B^{-1} < m_X(Bx) < C_B$ である．

$d = \inf\{d' \geq 0 \mid$ ある $C > 0$ が存在して $m_X(B(r)) \leq C(1+r)^{d'}\}$ であるとき，G/H のランクは d であると言う．

G の既約ユニタリ表現 V が G の正則表現 $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は，非自明な G-絡作用素 $\alpha_V\colon (C_c(G/H))^\infty \to V$ が存在し，任意の $v \in V^\infty$，$d' > d$ に対して $\displaystyle\int_{G/H} \left|\beta_V(v)(x)(1+r(x))^{-d/2}\right|^2 dx < \infty$ なることである．ただし β_V は次の命題により α_V と対応する G-絡作用素 $\beta_V\colon V^\infty \to C(G/H)^\infty$ とする．

命題 5 ([**Ber88, p. 678**]) G/H の左 Haar 測度 $\mu_{G/H}$ を 1 つ固定する．このとき，$\mathrm{Hom}_G((C_c(G/H))^\infty, V) \to \mathrm{Hom}_G(V^\infty, C(G/H)^\infty)$，$\alpha_V \mapsto \beta_V$ s.t. $\langle v, \alpha_V(\varphi)\rangle_V = \displaystyle\int_{G/H} \beta_V(v)\varphi d\mu_X$，$v \in V$，$\varphi \in (C_c(G/H))^\infty$ は同型写像である．

ここで G，Θ が実半単純 Lie 群とその Cartan 対合，$H = \Theta H$ ならば $G = KAH$ という Cartan 分解を持つときに，G/H がランク $d \coloneqq \dim A$ となる可能性がある条件の 1 つを $X \in \mathfrak{a}$ に対する $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(\mathbf{R}X)$ の有界性として定式化することができる．

以上が本修士論文の表現論的な背景である．

[*1] これは [**Ber88**] には明示されていません．

参考文献

[**Ber88**] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.

[**BH99**] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Grundlehren der mathematischen Wissensschaften, Vol. 319, Springer, 1999.

[**Ebe72a**] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, 1972, pp. 492–510.

[**Ebe72b**] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, 1972, pp. 151–70.

[**Hel01**] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.

[**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.

[**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant mesures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.

[**Yos38**] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.