

## 修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性  
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文には小林俊行氏による  $\mathfrak{h}$  射影の有界性に対する次の問 1 について,  $G$  の実階数や  $H$  の次元が低い場合に肯定的な結果をいくつか記した ( $\mathfrak{h}$  射影や記号の定義は後述する).

問 1 (小林俊行氏による)  $X \in \mathfrak{p}$  に対し  $Y(\mathbf{R} X)$  が  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の有界な部分集合であることと次の条件は同値であるか?

条件 2  $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ , もしくは  $[X_1, X_2] \neq 0$  かつ  $X \in \mathfrak{g}'_s$ , もしくは  $[X_1, X_2] \neq 0$  かつ  $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') \not\subset \mathfrak{h}$  である.

ただし

- $X = X_1 + X_2$  はベクトル空間としての分解  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$  に対応する  $X \in \mathfrak{p}$  の分解とする.
- $\mathfrak{g}'$  は  $\mathfrak{h}$  と  $X$  が生成する  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 環とし,  $\mathfrak{g}'_s := [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ ,  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$  は  $\mathfrak{g}'$  の中心とする.

ここで  $G$  が実階数 1 のとき, 条件 2 と  $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  は同値である.

この論文の基本設定は以下の通りである.

## 記号と定義 3

- $G$  を非コンパクト実簡約 Lie 群,  $H$  は  $G$  の非コンパクトかつ連結成分有限個の閉部分群で,  $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対して  $H = \Theta H$  を満たすものとする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$ ,  $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$  とし,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\theta := d\Theta$  による Cartan 分解とする.
- $e$  を  $G$  の単位元とし,  $o_K := eK \in G/K$  とする.
- $\langle -, - \rangle$  を,  $\mathfrak{g}$  上の  $G$  不変な非退化対称双線型形式で,  $\mathfrak{k}$  上負定値,  $\mathfrak{p}$  上正定値で  $\mathfrak{k} \perp \mathfrak{p}$  なるものとし,  $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{g} \mid \langle W, \mathfrak{h} \rangle = \{0\}\}$  とする.

本修士論文の主題である  $X \in \mathfrak{p}$  の  $\mathfrak{h}$  射影  $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  は, 次の定理 4 により  $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  と定義される.

定理 4 ([Kob89, Lemma 6.1]) 記号と定義 3 の設定において  $\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$  は上への微分同相である.

$e^{Y(X)} \cdot o_K$  は「 $e^X \cdot o_K$  から  $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$  に下ろした垂線の足」という幾何学的意味を持つ. したがって  $Y(\mathbf{R} X)$  が有界であるか否かという問は, 幾何的には「 $e^{tX} \cdot o_K$  から  $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$  に下ろした垂線の足全体の集合が有界であるか」という問に対応する.

以下では  $(G, H)$  がどのような場合に問 1 が肯定的であったかとその証明方法を具体的に述べる.

$G$  が実階数 1 の実線型半単純 lie 群,  $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$  の場合は  $G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合に帰着することで問 1 が肯定的であることを証明した.

$G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合の証明の流れを荒っぽく述べる.  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  に対して  $Y(\mathbf{R} X)$  が非有界であるとする. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある  $t_\varepsilon \in \mathbf{R}$  が存在して「 $e^{Y(t_\varepsilon X)} e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$  と  $o_K$  を結ぶ測地線」が「 $e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$  と  $o_K$  を結ぶ測地線」が  $o_K$  でなす角が  $\varepsilon$  未満となる. しかしこれは  $X$  と  $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \setminus \{0\}$  の元がなす角度の最小値が非零であることに矛盾する. したがって

$X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  ならば  $Y(\mathbf{R} X)$  は有界であることが言える.

これを踏まえて  $G$  が実階数 1 の実線型半単純 Lie 群,  $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$  の場合には次の命題を用いて  $G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合に帰着した.

**命題 5**  $G$  を実階数 1 の実線型半単純 Lie 群とする. 任意の  $0 \neq Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  と任意の  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathbf{R} Y$  を固定したとき,  $X, Y$  を含む部分 Lie 環  $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$  で,  $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$  あるいは  $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$  なるものが存在する. また  $\mathfrak{g}_0$  の  $G$  における解析的部分群  $G_0$  は  $G$  の閉部分群である.

命題 5 は [Hel01, p. 409] の  $SU(2, 1)$ -reduction と [Yos38] の定理をあわせて示される.

$G$  が実階数 1 の実線型半単純 Lie 群の有限個の積であり,  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の各成分が 1 次元であるときも問 1 に対する肯定的な結果を得られる. なぜならば成分ごとに見ることで  $G$  が実階数 1 の実半単純 Lie 群,  $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$  の場合に帰着できるためである.

問 1 の背景を説明するために [Ber88] の内容についてふれる.

まずいくつか用語と命題を準備する. 以下では  $G$  を実簡約 Lie 群,  $H$  を  $G$  の閉部分群とし,  $G/H$  には左 Haar 測度  $\mu_{G/H}$  が存在すると仮定する.

**定義 6** ([Ber88])

- 局所有界関数  $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  が proper な radial function であるとは,  $r$  が次の 4 条件を満たすことである.
  1.  $e \in G$  を単位元とすると  $r(e) = 0$  である.
  2. 任意の  $g \in G$  に対し  $r(g) = r(g^{-1}) \geq 0$  である.
  3. 任意の  $g_1, g_2 \in G$  に対し  $r(g_1 g_2) \leq r(g_1) + r(g_2)$  である.
  4. 任意の  $R \geq 0$  に対し,  $B(R) := \{g \in G \mid r(g) \leq R\}$  は  $G$  の相対コンパクト集合である.
- proper な radial function  $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  から  $r_{G/H}(gH) := \inf_{h \in H} \{r(gh)\}$  により定まる  $r_{G/H}: G/H \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  を  $G/H$  上の radial function という.
- $d = \inf\{d' \geq 0 \mid \text{ある } C > 0 \text{ が存在して } m_X(B(r)) \leq C(1+r)^{d'}\}$  であるとき,  $G/H$  のランクは  $d$  であると言う.
- $G$  の連続表現  $\mathcal{V}$  の smooth vector 全体の集合を  $\mathcal{V}^\infty$  とする.

**定理と定義 7** ([Ber88, p. 683])  $G/H$  には次を満たす非自明な Borel 測度  $m_X$  (standard measure) が定数倍を除いて一意的に存在する.

単位元のコンパクトな近傍で  $B = B^{-1}$  なる任意の  $B \subset G$  と任意の  $g \in B$ ,  $x \in G/H$  に対し, ある定数  $C_B \geq 0$  が存在して  $g \cdot m_X \leq C_B m_X$ ,  $C_B^{-1} < m_X(Bx) < C_B$  である.

**定理と定義 8** ([Ber88, p. 678])  $G/H$  の左 Haar 測度  $\mu_{G/H}$  を 1 つ固定する. 次の同型写像が存在する.  $\text{Hom}_G((C_c(G/H))^\infty, V) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(V^\infty, C(G/H)^\infty)$ ,  $\alpha_V \mapsto \beta_V$  ただし任意の  $v \in V$ ,  $\varphi \in (C_c(G/H))^\infty$  に対し  $\langle v, \alpha_V(\varphi) \rangle_V = \int_{G/H} \beta_V(v)(\varphi) d\mu_X$  である.

**定理 9** ([Ber88, pp. 665–6])  $G/H$  のランクが  $d$  であるとき,  $G$  の既約ユニタリ表現  $V$  が  $G$  の正則表現  $L^2(G/H)$  の既約分解に出現する必要条件是, 非自明な  $G$  絡作用素  $\alpha_V: (C_c(G/H))^\infty \rightarrow V$  が存在し, かつ任意の  $v \in V^\infty$ ,  $d' > d$  に対して  $\int_{G/H} \left| \beta_V(v)(x)(1+r(x))^{-d/2} \right|^2 dx < \infty$  なることである.

$L^2(G/H)$  の既約分解に現れる表現を定理 9 を用いて分析するためには  $G/H$  のランクを知る必要があり,  $Y(\mathbf{R} X)$  の有界性と  $G/H$  の判定には  $Y(\mathbf{R} X)$  の有界性を判定しようとする問 1 にはこ

のような表現論的背景もある.

## 参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.
- [Hel01] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.
- [KK16] F. Kassel and T. Kobayashi, *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces*, Adv. Math., Vol. 287, 2016, pp. 123–236.
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [小林 95] 小林俊行, 球等質多様体上の調和解析入門, 第 3 回整数論サマースクール ‘等質空間と保型形式’ 所収, 佐藤文広 編, 長野, 1995, pp. 22-41.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.
- [Yos38] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.