論文内容の要旨

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では，小林俊行氏による次の $\mathfrak{h}$ 射影の有界性に対する問題 1 を，$G$ の実階数や $H$ の次元が低い場合に証明した ($\mathfrak{h}$ 射影の定義や記号は後述する)．

**問題 1** (by T. Kobayashi)

$Y(\mathbf{R}\,X)$ が $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ の有界な部分集合であることと「$[X_1, X_2] \neq 0$ あるいは $X_1 = 0$ である」ことは同値である．

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p})$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする．

この論文の基本設定は以下の通りである．

**記号と定義**

- $G$ を非コンパクト実半単純 Lie 群，$H$ は $G$ の非コンパクトな閉部分実半単純 Lie 群で，$G$ の Cartan 対合 $\Theta$ に対して $H = \Theta H$ を満たすものとする．
- $\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G$, $\mathfrak{h} := \operatorname{Lie} H$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする．
- $e$ を $G$ の単位元とし，$o_K := eK \in G/K$ とする．
- $B$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とし，$\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(W, \mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}) = \{0\}\}$ とする．

本修士論文の主題である $X \in \mathfrak{p}$ の $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(X) \in \mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}$ は，次の定理 2 により $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p})$ と定義される．

**定理 2 [Kob89, Lemma 6.1]**

$\pi\colon (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である．

$Y(X)$ は「$e^X \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足」であり，$Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界であるか否かという問いは，幾何的には「$e^{tX} \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足全体の集合が有界であるか」という問いに対応する．

問題 1 の背景を説明するために [**Ber88**] の内容のごく一部を述べる．[*1]，$G$ を実簡約 Lie 群，$H$ を $G$ の閉部分群とする．$G/H$ が $eH$ を中心とする radial function $r$ に対して「$\mathbf{R}^d$ と同じ増大度」を持つとき，$G/H$ のランクが $d$ であると言い，$G$ の既約ユニタリ表現 $V$ が $G$ の正則表現 $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は，非自明な $G$-絡作用素 $\alpha\colon (C_c(G/H))^{\infty} \to V$ が存在し，$\alpha$ の「双対」を $\beta\colon V^{\infty} \to C(G/H)^{\infty}$ とすると，任意の $v \in V^{\infty}$，$d' > d$ に対して $\displaystyle\int_{G/H} \left|\beta(v)(x)(1 + r(x))^{-d/2}\right|^2 dx < \infty$ なることである．

ここで $G$ が $G = KAH$ という Cartan 分解を持つときに，$G/H$ がランク $d := \dim A$ となる可能性がある条件の 1 つを $X \in \mathfrak{a}$ に対する $\mathfrak{h}$ 射影 $Y(\mathbf{R}\,X)$ の有界性として定式化することがで

*1 もう少し自然な言い回しを考えます．2022/01/11

きる．これが本修士論文の背景である．[*2]

以下では $(G,H)$ がどのような場合に，どのような証明方法でを示したかを具体的に述べる．

$G$ が実階数 1 の場合の問題 1 の証明方針は $G=SU(1,2)$，$H=SO(1,1)$ の場合の証明がトイモデルとなっている．

$G=SU(1,2)$，$H=SO(1,1)$ の場合の証明は背理法による．具体的には次のとおりである; 例えば $X\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h}$ に対して $Y(\mathbf{R}\,X)$ が非有界，より具体的に $Y(tX)=s(t)Y$，$s(t)\to\infty$，$t\to\infty$ なるとき，$G/K\simeq\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$ であることを用いて $e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}\cdot o_K$ を計算すると，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $t_\varepsilon\in\mathbf{R}$ が存在して $e^{Y(t_\varepsilon X)}e^{Z(t_\varepsilon X)}\cdot o_K$ と $o_K$ を結ぶ測地線が $e^{Y(t_\varepsilon X)}\cdot o_K$ と $o_K$ を結ぶ測地線が $o_K$ でなす角が $\varepsilon$ 未満となる．これは $X$ と $\mathfrak{h}\setminus\{0\}$ のなす角度の最小値が非零であることに矛盾し，問題 1 と同値な「$X=0\vee X\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{h}$ であることと $Y(\mathbf{R}\,X)$ が有界であることが同値である」ということが証明できる．

これを踏まえて $G$ が実階数 1 の場合には次の命題を用いて証明した．

この命題は $SU(2,1)$-reduction，[**Hel01**] と [**Yos38**] の定理を用いて証明した．

**命題 3** $G$ を実階数 1 の実半単純 Lie 群とする．任意の $Y\in\mathfrak{h}\setminus\{0\}$ と任意の $X\in\mathfrak{p}\setminus\mathfrak{a}$ を固定したとき，$X,Y$ を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}$ で，$\mathfrak{g}_0\simeq\mathfrak{su}(1,1)$ か $\mathfrak{g}_0\simeq\mathfrak{su}(2,1)$ なるものが存在する．

また，$\mathfrak{g}_0$ の $G$ における解析的部分群 $G_0$ は $G$ の閉部分群である．

$G$ が実階数 1 の Lie 群の積である場合も，成分ごとに見れば $G$ の実階数が 1 の場合と同様である．

[*2] 「」部分は 正確に定式化する予定です & もうすこしちゃんと [**Ber88**] を復習します． 2022/01/10

# 参考文献


[**Ber88**] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.

[**BH99**] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Grundlehren der mathematischen Wissensschaften, Vol. 319, Springer, 1999.

[**Ebe72a**] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, 1972, pp. 492–510.

[**Ebe72b**] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, 1972, pp. 151–70.

[**Hel01**] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.

[**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.

[**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant mesures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.

[**Yos38**] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.