

2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号	<u>45-196010</u>
フリガナ	オクダ タカコ
氏名	<u>奥田 堯子</u>

# 目次

導入 . . . . .	2
謝辞 . . . . .	3
1 設定と射影の基本的な性質, 予想 1.3 の観察 . . . . .	4
1.1 記号の設定 . . . . .	4
1.2 予想 1.3 の観察: $G = SU(1, 1)$ , $H = SO(1, 1)$ の場合 . . . . .	6
1.3 予想 1.3 の観察: 予想 1.3 はなぜこの形か? . . . . .	9
2 具体例と主定理の証明 . . . . .	9
2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群 . . . . .	9
2.2 $G$ の実階数が 1 の場合 . . . . .	12
2.3 $G$ が実階数 1 の群の直積の場合 . . . . .	13
参考文献 . . . . .	13

## 導入

$G$  を非コンパクトな実半単純 Lie 群,  $K$  を  $G$  の極大コンパクト部分群で  $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対して  $K = \Theta K$  なるものとするとき,  $G/K$  は  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式  $B$  から定まる Riemann 計量によって Riemann 多様体の構造を持つ.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\Theta$  の微分  $d\Theta$  による  $\mathfrak{g}$  の Cartan 分解とすると,  $G/K$  は  $\mathfrak{p}$  と微分同相であり,  $G$  の単位元の  $G/K$  での像  $eK$  を通る  $G/K$  の極大測地線は  $B(X, X) = 1$  なる  $X \in \mathfrak{p}$  によって  $e^{tX}K$ ,  $t \in \mathbf{R}$  と書ける.  $H$  を  $G$  の非コンパクトな部分 Lie 群で,  $H = \Theta H$  を満たすものとし,  $\mathfrak{p}$  での  $B$  に対する  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の直交補空間を  $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  とする. 測地線  $e^{tX}K$  の  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  成分と  $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  成分への分解を与える定理として次の定理が知られている.

定理 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z K \in G/K$  は上への微分同相である.

この定理を用いて  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  と定義すると, 任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対して  $e^{tX}K = e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}K$  である.

$G = SU(1, 1)$ ,  $H = SO(1, 1)$  とするとき,  $t \in \mathbf{R}$  に対し,  $Y(tX)$  は図 1 に図示するような幾何学的な意味を持つ. 図 1 は Poincaré 円板における測地線  $e^{tX}K$  (赤色の斜め線) とその上の一点  $e^{tX}K$  から  $eK$  の  $H$  軌道 (中央の直線) に下ろした垂線の足 (緑の丸) が  $e^{Y(tX)}K$  である.



図 1: Poincaré 円板における  $Y(tX)$  の幾何学的意味

本論文では小林俊行氏による次の予想について考察し， $G$  が実階数 1 の場合の肯定的な結果を得た．

予想  $Y(\mathbf{R} X)$  は  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の有界な部分集合である  $\iff [X_1, X_2] \neq 0$  であるか  $X_1 = 0$  である．

ただし  $X = X_1 + X_2$  はベクトル空間としての分解  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$  に対応する  $X \in \mathfrak{p}$  の分解とする．

謝辞

# 1 設定と $\mathfrak{h}$ 射影の基本的な性質, 予想 1.3 の観察

## 1.1 記号の設定

本論文の基本的な設定は次のとおりであり, この他に必要な条件は都度明示することとする.

### 記号と定義 1.1

- $G$  を非コンパクト実半単純 Lie 群,  $H$  を  $G$  の非コンパクトな部分 Lie 群で,  $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対して  $\Theta H = H$  なるものとする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$ ,  $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$  とし,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\theta := d\Theta$  による Cartan 分解とする.
- $e$  を  $G$  の単位元とし,  $o_K := eK \in G/K$  とする.
- $B(-, -)$  を  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式とし,  $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid \text{任意の } Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \text{ に対して } B(Y, W) = 0\}$  とする.

以下の定理 1.2 を用いて,  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  と定義する.

### 定理 1.2 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$  は上への微分同相である.

ここで,  $Y(\mathbf{R} X)$  の有界性について, 次の予想が小林俊行氏によって立てられた.

### 予想 1.3 (by T. Kobayashi)

ベクトル空間としての分解  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$  に対応して  $X = X_1 + X_2$  と分解すると,  $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ あるいは } X_1 = 0\}$  である.

予想 1.3 についての基本的な事項を挙げる.

### 補題 1.4

1.  $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} \subset \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ あるいは } X_1 = 0\}$  である. **もっと書くことはあるはず. 2022/01/11**
2.  $X \in \mathfrak{p}$  が  $X_1 = 0$  を満たすならば  $X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}}$  である.
3. 1, 2 より予想 1.3 と「 $X \in \mathfrak{p}$  が  $[X_1, X_2] \neq 0$  ならば  $X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}}$  である」は

同値である.

4.  $G$  が実階数 1 のとき, 予想 1.3 と 「 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd.}} = \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ 」 は同値である.

補題 1.4 の証明

1. 背理法による.  $[X_1, X_2] = 0$  かつ  $X_1 \neq 0$  なる  $X \in \mathfrak{p}$  に対しては  $[X_1, X_2] = 0$  より  $e^{tX_1}e^{tX_2} \cdot o_K = e^{t(X_1+X_2)} \cdot o_K = e^{tX} \cdot o_K$  であり,  $Y(tX) = tX_1$ ,  $Z(tX) = tX_2$  であることから  $Y(\mathbf{R}X) = \mathbf{R}X_1$  となり,  $X_1 \neq 0$  より  $Y(\mathbf{R}X)$  は有界集合とならない.
2.  $X_1 = 0 \iff X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  より  $Z(tX) = tX$ ,  $Y(tX) = 0$  であることによる.
4. 対偶を示す.  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $[X_1, X_2] = 0$  かつ  $X_1 \neq 0 \iff X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$  を示せば良い.  $G$  の実階数は 1 で,  $H$  は非コンパクトであるから,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$  であり,  $\mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の極大可換部分空間である. よって  $X_1 \neq 0$  かつ  $[X_1, X_2] = 0 \implies X_2 = 0$  であり,  $X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$  を得る.

■

$Y(\mathbf{R}X)$  の有界性は  $\text{Ad}(k)$ -不変である;

補題 1.5  $k \in K$ ,  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $X' := \text{Ad}(k)X$ ,  $\mathfrak{h}' := \text{Ad}(k)\mathfrak{h}$  とするとき,  $Y(\mathbf{R}X)$  が有界  $\iff Y'(\mathbf{R}X')$  が有界である.

ここで  $Y'(X')$ ,  $Z'(X')$  を, 微分同相  $\pi': (\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y', Z') \mapsto e^{Y'}e^{Z'} \cdot o_K$  を用いて,  $X' \in \mathfrak{p}$  に対し,  $(Y'(X'), Z'(X')) = \pi'^{-1}(e^{X'} \cdot o_K)$  と定める.

補題 1.5 の証明

主張は  $(X, \mathfrak{h})$  と  $(X', \mathfrak{h}')$  に対して対称的であるから,  $Y(\mathbf{R}X)$  が有界  $\implies Y'(\mathbf{R}X')$  が有界, のみを示せば十分である.

任意に  $r \in \mathbf{R}$  を取る.  $e^{rX'} \cdot o_K = e^{Y'(rX')}e^{Z'(rX')} \cdot o_K$  であり, 両辺に左から  $k^{-1}$  を掛けると,  $e^{rX} = e^{\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX'))}e^{\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX'))} \cdot o_K$  を得る. ここで  $Y'(rX') \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}$ ,  $Z'(rX') \in \mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}$  であるから  $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ ,  $\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX')) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$  である.

定理 1.2 により  $\pi$  は微分同相であるから任意の  $r \in \mathbf{R}$  に対して  $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) = Y(rX)$  であるから,  $Y'(\mathbf{R}X) = \text{Ad}(k)(Y(\mathbf{R}X))$  であり,  $\text{Ad}(k)$  は有限次元空間の間の線型写像であるから有界性を保つ.

以上から補題 1.5 が示された.

■

$Z(\mathbf{R}X)$  の有界性については次の定理が知られており、有界性の判定は Lie 環の言葉のみで行える。

**定理 1.6 [Kob97, Lemmma 5.4]**

$X \in \mathfrak{p}$  に対し、 $\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$  である。

ここに  $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$  は  $X$  と  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の元がなす角度の最小値  $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$  であり、 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$  である。

つまり  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  ならば  $\|Z(tX)\| \rightarrow \infty$ ,  $|t| \rightarrow \infty$  である。

## 1.2 予想 1.3 の観察: $G = SU(1, 1)$ , $H = SO(1, 1)$ の場合

$G = SU(1, 1)$ ,  $H = SO(1, 1) := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$  の場合に予想 1.3 が正しいことは直接計算により確かめられる。

**命題 1.7**  $G = SU(1, 1)$ ,  $H = SO(1, 1)$  のとき予想 1.3 は正しい。

**補題 1.8**  $\mathfrak{su}(1, 1)$  の Killing 形式から定まる Poincaré 円板  $G/K = \{x + \sqrt{-1}y \mid x^2 + y^2 < 1\}$  の計量は  $\frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$  である。

補題 1.8 の証明

$X' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $Y' := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}$  とすると、 $\|X'\|^2 = \|Y'\|^2 = 8$ ,  $\langle X', Y' \rangle = 0$  であって、 $0 \in G'/K'$  で主張が成り立つ。

$k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$ ,  $a_r := \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r \\ \sinh r & \cosh r \end{pmatrix}$  とすると、

$$\begin{aligned} & g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X')) \\ &= g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) \\ &= 8 \\ & g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) = 0 \end{aligned}$$

なるような計量  $g$  が Killing 形式から誘導される計量であるが、それが主張の形であることを示せば良い (これらのベクトルが何を表しているかは図 2 参照)。

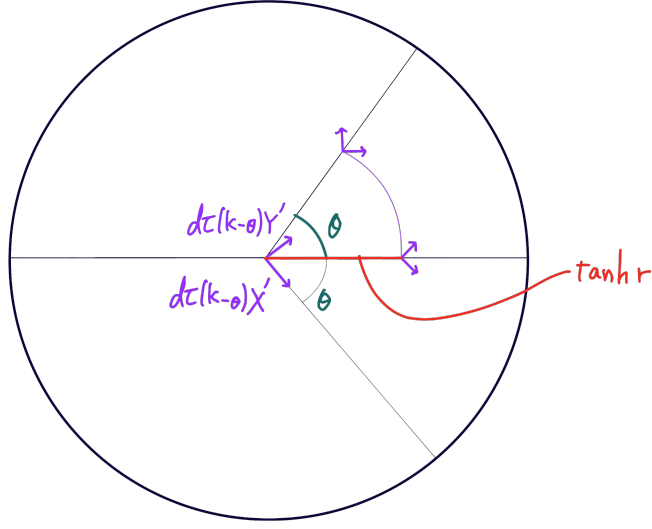


図 2

$t = 0$  の接ベクトルが  $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X'$  を与える曲線は  $\gamma_x(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \cosh r}$  であるから,  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_x(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial x} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x}$  である.

同様に  $t = 0$  の接ベクトルが  $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y'$  を与える曲線は  $\gamma_y(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \cosh r}$  であるから,  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_y(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial y} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial y}$  である.

以上より  $g = \frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$  が示された. ■

命題 1.7 の証明

$k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$ ,  $X_\theta := k_{\theta/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} k_{-\theta/2}$  とすると,  $\mathfrak{p} \setminus \{0\} = \{tX_\theta \mid$

$t \in \mathbf{R}_{>0}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$  である. この  $X_\theta$  と  $t \in \mathbf{R}$  に対して  $Y(tX_\theta) = s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  なる  $s \in \mathbf{R}$  を求める.



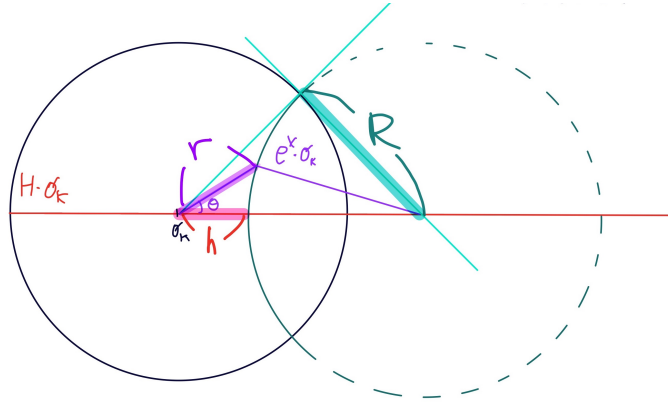


図 3

右の円の Euclid 距離での半径を  $R$  とし,  $e^{tX_\theta} \cdot o_K$  から  $H \cdot o_K$  への垂線の足の  $o_K$  からの Euclid 距離を  $h$  とするとき, 外側の青色の直角三角形に対して三平方の定理を用いて  $(h + R)^2 = R^2 + 1$  より  $R = \frac{1-h^2}{2h}$ ,  $R + h = \frac{1+h^2}{2h}$  を得る.

さらに下の紫色の三角形に対して余弦定理を用いて  $R^2 = (R + h)^2 + r^2 - 2(R + h) \cos \theta$  を得,  $\frac{2r \cos \theta}{r^2 + 1} = \frac{2h}{h^2 + 1} \cdots (1.1)$  を得る.

要確認: ここで補題 1.8 より  $\frac{r}{2\sqrt{2}} = \tanh 2\sqrt{2}t$ ,  $\frac{h}{2\sqrt{2}} = \tanh 2\sqrt{2}s$  であり (1.1) は  $\cos \theta \tanh \frac{t}{4\sqrt{2}} = \tanh \frac{s}{4\sqrt{2}}$  と書き直せる. したがって  $X_\theta$  に対して  $Y(\mathbf{R} X)$  が有界  $\iff |\cos \theta| \neq 1 \iff X \notin \mathfrak{h}$  である.

■

系 1.9  $G = SO(1, n)$ ,  $H = SO(1, k)$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$  に対して予想 1.3 は正しい.

系 1.9 の証明

「 $e^X \cdot o_K$  と  $o_K$  を結ぶ直線」と  $H \cdot o_K$  で張られる超平面で Poincaré 球  $SO(1, n)/SO(n)$  を切った際の断面を考える.

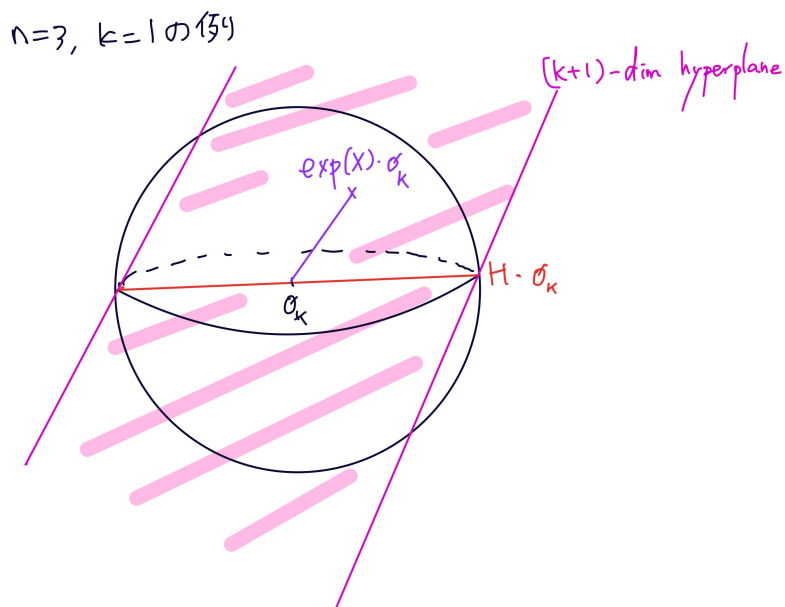


図 4

この断面に現れるのは図 3 と同じであるから、同様の計算により系 1.9 を得る。 ■

### 1.3 予想 1.3 の観察: 予想 1.3 はなぜこの形か？

予想 1.3 と次の予想 1.10 は同値である。

予想 1.10  $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd.}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \text{ あるいは } \}$

## 2 具体例と主定理の証明

### 2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

命題 2.1  $G = SO(1, n), SU(1, n), Sp(1, n), H = SO(1, 1), n \geq 2$  に対して予想 1.3 は正しい。

$G = Sp(1, 2), \mathfrak{h} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  の場合にのみ示す。その他の場合も全く同様

の議論である.

**命題 2.2**  $G = Sp(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$ ,  $X \in \mathfrak{p}$  に対し,  $Y(\mathbf{R} X)$  が有界  $\iff X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  or  $X = 0$  である.

ただし,  $H$  は  $G$  の左上に入っている. すなわち,  $\text{Lie } H = \mathfrak{h} = \mathbf{R} A$ ,  $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とする.

**記号と定義 2.3**  $\mathbf{H}$  を四元数体とする.  $Sp(1, 2)/Sp(1) \times Sp(2) \simeq \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\} =: \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  である. これは自然表現  $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^2$  の  ${}^t(1, 0, 0)$  軌道を考え, 第 2, 第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が  $\mathbf{H} \mathbb{H}^2$  と微分同相であるためであり,  $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^3$  の  ${}^t(1, 0, 0)$  軌道の点  $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  に対応する  $\mathbf{H} \mathbb{H}^2$

の点を  $\left[ \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 z_0^{-1} \\ z_2 z_0^{-1} \end{pmatrix} \right]$  と書く.

愚直な行列計算により, 次が示される.

**補題 2.4**  $\forall z, w \in \mathbf{H}$  に対し,  $\exp \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & * & * \\ \frac{\bar{z}}{r} \sinh r & * & * \\ \frac{\bar{w}}{r} \sinh r & * & * \end{pmatrix}$ , ただし

$r := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$ , である.

**命題 2.2 の証明**

$X = 0 \Rightarrow Y(\mathbf{R} X) = \{0\}$  と  $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$  のときに  $Y(\mathbf{R} X)$  が非有界であることは明らかであるから,  $X \notin \mathfrak{h}$  の場合にのみ議論すればよい. つまり  $X = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ ,  $z, w \in \mathbf{H}$  s.t.  $|z|^2 + |w|^2 = 1$  を任意に 1 つ固定して議論し

て一般性を失わない．このとき， $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  より  $\operatorname{Re} z \neq \pm 1$  であることに注意する ( $\operatorname{Re}: \mathbf{H} \ni a + bi + cj + dk \mapsto a \in \mathbf{R}$  とする)．

$G$  の Cartan 対合を  $\Theta(g) = (g^*)^{-1}$  ( $g^*$  は  $g$  の共役転置) とするとき， $\Theta(e^{Y(tX)}e^{Z(tX)}) \cdot o_K = e^{-Y(tX)}e^{-Z(tX)} \cdot o_K = \Theta(e^X) \cdot o_K = e^{-X} \cdot o_K$  より，「 $Y(\mathbf{R}X)$  が非有界  $\iff Y(\mathbf{R}X) \subset \mathbf{R}A$  が上に非有界」である．

したがって， $Y(\mathbf{R}X)$  が非有界であるとき，列  $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$  で， $s_n \rightarrow \infty$ ， $n \rightarrow \infty$ ，ただし  $Y(t_n X) = s_n A$ ，なるものが存在する．

このとき， $\{|t_n|\}_{n \in \mathbf{N}}$  が有界  $\iff \{e^{t_n X} \cdot o_K\}_{n \in \mathbf{N}}$  が有界ならば， $G/K \ni e^X \cdot o_K \mapsto (Y(X), Z(X)) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ ， $X \in \mathfrak{p}$  が微分同相であることから  $\{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  も有界である．従って対偶より  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \rightarrow \infty$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n| \rightarrow \infty$  である．

補題 2.4 より，

$$\begin{aligned} e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K &= \begin{pmatrix} \cosh s_n & \sinh s_n & 0 \\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm \bar{z} \tanh |t_n| \\ \pm \bar{w} \tanh |t_n| \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n \\ \pm \bar{w} \tanh |t_n| \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

複号は  $t_n$  の符号  $\pm$  と同順，である．このとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh s_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tanh |t_n|$  と  $\operatorname{Re} z \neq \pm 1$  に注意すると次を得る．具体的な計算は後述する．

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n)^{-1} = 1 \quad (2.1)$$

である．

したがって， $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルと， $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $\begin{pmatrix} (\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh |t_n| \sinh s_n)^{-1} \\ *$   $\end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルがなす Euclidean な内積の値を  $I_n$  とすると， $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$  である．

しかし， $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルと， $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  から  $e^{W(t_n X)} \cdot o_K \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$  へのベクトルがなす Euclidean な内積の値  $J_n$  は，

$$W(t_n X) \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & 0 & 0 \\ \bar{z}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, \& \operatorname{Re} z_1 = 0 \right\} \text{ であることと, 補題 2.4}$$

から  $\operatorname{Re} J_n = 0$  となり,  $e^{s_n A} e^{Z(t_n X)} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K \implies \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 1$  に矛盾する.

以上より「 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \Rightarrow Y(\mathbf{R} X)$  有界」, したがって 命題 2.2 を得る. ■

命題 2.2 の計算:

$\lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| = 0$   
を示せば主張が得られる. 具体的に計算すると,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\tanh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n|)(1 \pm z \tanh|t_n| \tanh s_n)}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2} - 1 \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z} \tanh|t_n|)z' - (1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)z'|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2}, \quad z' := 1 \pm z \tanh|t_n| \tanh s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)z'|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|} \end{aligned}$$

であり,  $0 < \min |1 \pm \operatorname{Re} z| \leq |(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$  と  $\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z|\} \leq |-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|| \leq \sqrt{5}$  であることから,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z|\}}{\sqrt{5}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z} \tanh|t_n|)|}{|(1 \pm \bar{z} \tanh|t_n| \tanh s_n)|} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \operatorname{Re} z|\}} = 0 \end{aligned}$$

より, (2.1) が成り立つ.

## 2.2 $G$ の実階数が 1 の場合

**定理 2.5**  $G$  を実階数 1 の実半単純 Lie 群とすると, 予想 1.3 が成り立つ.

[SU\(1, 2\)-reduction](#) については 2021/8/10 のレポートを参考にせよ

### 2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面

#### 定義 2.6 [Ebe72a, Definition 1.3]

$M$  が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき,  $M$  を Hadamard 多様体といい, Hadamard 多様体  $M$  が visibility manifold であるとは,  $\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$  に対し, ある  $r(p, \varepsilon) > 0$  が存在して, 測地線  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow X$  が  $d_M(p, \gamma(t)) \geq r(p, \varepsilon), \forall t \in [t_0, t_1]$  ならば,  $\angle_p(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) \leq \varepsilon$  であることである.

[図を入れる](#)

#### 定理 2.7 [BH99, p. 296, 9.33 Theorem], originally [Ebe72b, Theorem 4.1]

$\exists C \subset M$  s.t.  $M = \bigcup_{\text{cpt.}} \{f(C) \mid f \in \text{Isom}(M)\}$  なる Hadamard 多様体  $M$  に対し, 次は同値である.

- (i)  $M$  は visibility manifold である.
- (ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体  $M' \subset M$  で  $\mathbf{R}^2$  と等長同型なものがない.

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり, 定理 2.7 の (ii) は  $G$  の実階数が 1 以下であることと同値である. したがって  $G$  の実階数が 1 の場合  $G/K$  は visibility manifold であり,  $G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合の証明と全く同様にして背理法により予想 1.3 が示される.

## 2.3 $G$ が実階数 1 の群の直積の場合

## 参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710
- [BBE85] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer,

1999

- [**Borel–Ji**] A. Borel and L. Ji, Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, 2006
- [**Ebe72a**] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, pp. 492–510, 1972
- [**Ebe72b**] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, pp. 151–70, 1972
- [**EO73**] P. Eberlein and B. O’Neill, *Visibility Manifolds*, Pacific J. Math., Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109
- [**Hel84**] S. Helgason, Groups and Geometric Analysis—Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 83, AMS, 1984
- [**Hel01**] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, GSM, Vol. 34, AMS, 2001
- [**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54