

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では、小林俊行氏による \mathfrak{h} 射影の有界性に対する次の問題 1 について、 G の実階数や H の次元が低い場合に肯定的な結果を得た (\mathfrak{h} 射影の定義や記号は後述する)。

問題 1 (小林俊行氏による) $X \in \mathfrak{p}$ に対し $Y(\mathbf{R}X)$ が $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合であることと「 $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ もしくは『 $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = 0$ であること』」は同値であるか？

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする。

ここで G が実階数 1 のとき、「 $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ しくは『 $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = 0$ であること』」と $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ は同値である。

この論文の基本設定は以下の通りである。

記号と定義 2

- G を非コンパクト実簡約 Lie 群、 H は G の非コンパクトな閉部分群で、 G の Cartan 対合 Θ に対して $H = \Theta H$ を満たすものとする。
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$, $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$ とし、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする。
- e を G の単位元とし、 $o_K := eK \in G/K$ とする。
- B を \mathfrak{g} の Killing 形式とし、 $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(W, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$ とする。

本修士論文の主題である $X \in \mathfrak{p}$ の \mathfrak{h} 射影 $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は、次の定理 3 により $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義される。

定理 3 ([Kob89, Lemma 6.1]) $\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である。

$e^{Y(X)} \cdot o_K$ は「 $e^X \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足」であり、 $Y(\mathbf{R}X)$ が有界であるか否かという問いは、幾何的には「 $e^{tX} \cdot o_K$ から $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$ に下ろした垂線の足全体の集合が有界であるか」という問いに対応する。

問題 1 の背景を説明するために [Ber88] の内容のごく一部を述べる。^{*1} G を実簡約 Lie 群、 H を G の閉部分群とする。 $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ が radial function であるとは、 r が次を満たすことである。

1. $e \in G$ を単位元とするとき $r(e) = 0$ である。
2. 任意の $g \in G$ に対し $r(g) = r(g^{-1}) \geq 0$ である。
3. 任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し $r()$

radial function $r: G \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ から $r_{G/H}(gH) := \inf_{h \in H} \{r(gh)\}$

^{*1} もう少し自然な言い回しを考えます。2022/01/11

「 \mathbf{R}^d と同じ増大度」を持つとき、 G/H のランクが d であると言う。

G の既約ユニタリ表現 V が G の正則表現 $L^2(G/H)$ の既約分解に出現する必要条件は、非自明な G -絡作用素 $\alpha: (C_c(G/H))^\infty \rightarrow V$ が存在し、 α の「双対」を $\beta: V^\infty \rightarrow C(G/H)^\infty$ とすると、任意の $v \in V^\infty$ 、 $d' > d$ に対して $\int_{G/H} \left| \beta(v)(x)(1+r(x))^{-d/2} \right|^2 dx < \infty$ なることである。

ここで G が $G = KAH$ という Cartan 分解を持つときに、 G/H がランク $d := \dim A$ となる可能性がある条件の 1 つを $X \in \mathfrak{a}$ に対する \mathfrak{h} 射影 $Y(\mathbf{R}X)$ の有界性として定式化することができる。これが本修士論文の背景である。^{*2}

以下では (G, H) がどのような場合に、どのような証明方法で示したかを具体的に述べる。

$G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合がトイモデルとなって G が実階数 1 の場合の問題 1 に対する肯定的な結果が得られた。

$G = SU(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$ の場合の証明は背理法による。具体的には次のとおりである；例えば $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ に対して $Y(\mathbf{R}X)$ が非有界、より具体的に $Y(tX) = s(t)Y$, $s(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$ となるとき、 $G/K \simeq \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ であることを用いて $e^{Y(tX)}e^{Z(tX)} \cdot o_K$ を計算すると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $t_\varepsilon \in \mathbf{R}$ が存在して $e^{Y(t_\varepsilon X)}e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線が $e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$ と o_K を結ぶ測地線が o_K でなす角が ε 未満となる。これは X と $\mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のなす角度の最小値が非零であることに矛盾し、問題 1 と同値な「 $X = 0 \vee X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ であることと $Y(\mathbf{R}X)$ が有界であることが同値である」ということが証明できる。

これを踏まえて G が実階数 1, $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = 1$ の場合には次の命題を用いて問題 1 に対して肯定的な結果を得た。

命題 4 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群とする。任意の $0 \neq Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ と任意の $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ を固定したとき、 X, Y を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ で、 $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$ か $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$ なるものが存在する。また、 \mathfrak{g}_0 の G における解析的部分群 G_0 は G の閉部分群である。

この命題は $SU(2, 1)$ -reduction, [Hel01] と [Yos38] の定理を併せて示される。

G が実階数 1 の Lie 群の積である場合も、成分ごとに見れば G の実階数が 1 の場合と同様であるから、こちらも $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の各成分が 1 次元であれば

^{*2} 「」部分は 正確に定式化する予定です & もうすこしちゃんと [Ber88] を復習します。 2022/01/10

参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer, 1999.
- [Ebe72a] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, 1972, pp. 492–510.
- [Ebe72b] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, 1972, pp. 151–70.
- [Hel01] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, GSM, Vol. 34, AMS, 2001.
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.
- [Yos38] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.