

## 修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性  
—低階数・低次元の場合—

氏名: 奥田 堯子

本修士論文では、小林俊行氏による次の  $\mathfrak{h}$  射影の有界性に対する予想 1 を、 $G$  の実階数や  $H$  の次元が低い場合に証明した ( $\mathfrak{h}$  射影の定義や記号は後述する).

予想 1 (by T. Kobayashi)

$Y(\mathbf{R} X)$  は  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  の有界な部分集合である  $\iff [X_1, X_2] \neq 0$  であるか  $X_1 = 0$  である.

ただし  $X = X_1 + X_2$  はベクトル空間としての分解  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$  に対応する  $X \in \mathfrak{p}$  の分解とする.

この論文の基本設定は以下の通りである.

## 記号と定義

- $G$  を非コンパクト実半単純 Lie 群,  $H$  は  $G$  の非コンパクトな閉部分実半単純 Lie 群で,  $G$  の Cartan 対合  $\Theta$  に対して  $H = \Theta H$  を満たすものとする.
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$ ,  $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$  とし,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  を  $\theta := d\Theta$  による Cartan 分解とする.
- $e$  を  $G$  の単位元とし,  $o_K := eK \in G/K$  とする.
- $B(-, -)$  を  $\mathfrak{g}$  の Killing 形式とし,  $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} := \{W \in \mathfrak{p} \mid B(W, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) = \{0\}\}$  とする.

本修士論文の主題である  $X \in \mathfrak{p}$  の  $\mathfrak{h}$  射影  $Y(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$  は, 次の定理 2 により  $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$  と定義される.

## 定理 2 [Kob89, Lemma 6.1]

$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$  は上への微分同相である.

$Y(X)$  は「 $e^X \cdot o_K$  から  $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$  に下ろした垂線の足」であり,  $Y(\mathbf{R} X)$  が有界であるか否かという問いは, 幾何的には「 $e^{tX} \cdot o_K$  から  $e^{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}} \cdot o_K$  に下ろした垂線の足全体の集合が有界であるか」という問いに対応する.

予想 1 の背景を説明するために [Ber88] の内容のごく一部を述べる.\*1,  $G$  を実簡約 Lie 群,  $H$  を  $G$  の閉部分群とする.  $G/H$  が  $eH$  を中心とする radial function  $r$  に対して「 $\mathbf{R}^d$  と同じ増大度」を持つとき,  $G/H$  のランクが  $d$  であると言い,  $G$  の既約ユニタリ表現  $V$  が  $G$  の正則表現  $L^2(G/H)$  の既約分解に出現する必要条件は, 非自明な  $G$ -絡作用素  $\alpha: (C_c(G/H))^\infty \rightarrow V$  が存在し,  $\alpha$  の「双対」を  $\beta: V^\infty \rightarrow C(G/H)^\infty$  とすると, 任意の  $v \in V^\infty$ ,  $d' > d$  に対して  $\int_{G/H} \left| \beta(v)(x)(1+r(x))^{-d'/2} \right|^2 dx < \infty$  なることである.

ここで  $G$  が  $G = KAH$  という Cartan 分解を持つときに,  $G/H$  がランク  $d := \dim A$  となる可能性がある条件の 1 つを  $X \in \mathfrak{a}$  に対する  $\mathfrak{h}$  射影  $Y(\mathbf{R} X)$  の有界性として定式化することができる. これが本修士論文の背景である.\*2

\*1 もう少し自然な言い回しを考えます. 2022/01/11

\*2 「」部分は 正確に定式化する予定です & もうすこしちゃんと [Ber88] を復習します. 2022/01/10

以下では  $(G, H)$  がどのような場合に, どのような証明方法でを示したかを具体的に述べる.

$G$  が実階数 1 の場合の予想 1 の証明方針は  $G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合の証明がトイモデルとなっている.

$G = SU(1, 2)$ ,  $H = SO(1, 1)$  の場合の証明は背理法による. 具体的には次のとおりである; 例えば  $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$  に対して  $Y(\mathbf{R} X)$  が非有界, より具体的に  $Y(tX) = s(t)Y$ ,  $s(t) \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$  のとき,  $G/K \simeq \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$  であることを用いて  $e^{Y(tX)}e^{Z(tX)} \cdot o_K$  を計算すると, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある  $t_\varepsilon \in \mathbf{R}$  が存在して  $e^{Y(t_\varepsilon X)}e^{Z(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$  と  $o_K$  を結ぶ測地線が  $e^{Y(t_\varepsilon X)} \cdot o_K$  と  $o_K$  を結ぶ測地線が  $o_K$  でなす角が  $\varepsilon$  未満となる. これは  $X$  と  $\mathfrak{h} \setminus \{0\}$  のなす角度が非零であることに矛盾し, 予想 1 と同値な「 $X = 0 \vee X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff Y(\mathbf{R} X)$  が有界」であることが言える.

これを踏まえて  $G$  が実階数 1 の場合の証明には  $SU(2, 1)$ -reduction を用いた.

$G$  が実階数 1 の Lie 群の積である場合も, 成分ごとに見れば  $G$  の実階数が 1 の場合と同様である.

## 参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer, 1999
- [Ebe72a] P. Eberlien, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, Ann. of Math. (2), Vol. 95, pp. 492–510, 1972
- [Ebe72b] P. Eberlien, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 167, pp. 151–70, 1972
- [Kob89] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann., Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
- [Kob97] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, J. Reine Angew. Math., Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54