

2021 年度

修士論文題目

Riemann 対称空間上における測地線の簡約部分 Lie 代数への射影に対する有界性

—低階数・低次元の場合—

学生証番号	<u>45-196010</u>
フリガナ	オクダ タカコ
氏名	<u>奥田 堯子</u>

目次

導入	2
謝辞	3
1 設定と \mathfrak{h} 射影の基本的な性質および問題 1.3 の観察	4
1.1 記号の設定	4
1.2 問題 1.3 の観察: $G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ の場合	7
1.3 問題 1.3 の観察: 類似の問いとその反例	11
2 G の実階数が 1 の場合	15
2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群	15
2.2 G の実階数が 1 の場合	19
2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面	25
2.3 G が実階数 1 の実半単純 Lie 群の直積の場合	26
参考文献	27

導入

G を非コンパクトな実半単純 Lie 群, K を G の極大コンパクト部分群で G の Cartan 対合 Θ に対して $K = \Theta K$ なるものとする. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Θ の微分 $d\Theta$ による \mathfrak{g} の Cartan 分解とすると, G/K は \mathfrak{p} と $\mathfrak{p} \ni X \mapsto e^X K \in G/K$ により微分同相である.

H を G の非コンパクトな閉部分群で, $H = \Theta H$ を満たすものとし, $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{g} \mid B(W, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$ とするとき, G/K と \mathfrak{p} の微分同相についてより強い次の構造定理が知られている.

定理 ([Kob89, Lemma 6.1]) $\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$ は上への微分同相である.

この定理を用いて $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ と定義する.

G/K に \mathfrak{g} の Killing 形式 B から定まる Riemann 計量によって Riemann 多様体の構造を定める. G の単位元の G/K での像 eK を通る G/K の極大測地線は $B(X, X) = 1$ なる $X \in \mathfrak{p}$ によって $e^{tX} K$, $t \in \mathbf{R}$ と書ける. 定理 1.2 より任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $e^{tX} K = e^{Y(tX)} e^{Z(tX)} K$ である.

$G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ とするとき, $t \in \mathbf{R}$ に対し, $Y(tX)$ は図 1 に図示するような幾何学的な意味を持つ. 図 1 は Poincaré 円板における測地線 $e^{tX} K$ (赤色の斜め線) とその上の一点 $e^{tX} K$ から eK の H 軌道 (中央の直線) に下ろした垂線の足 (緑の丸) が $e^{Y(tX)} K$ である.



図 1: Poincaré 円板における $Y(tX)$ の幾何学的意味

本論文では小林俊行氏による次の問題 (後述問題 1.3) について考察し, G が実階数 1 の実半単純 Lie 群の場合に肯定的な結果を得た.

問題 $Y(\mathbf{R} X)$ が $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の有界な部分集合であることと「 $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ もしくは『 $[X_1, X_2] \neq 0$ かつ $\mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = 0$ であること』」は同値であるか?

ただし $X = X_1 + X_2$ はベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^\perp)$ に対応する $X \in \mathfrak{p}$ の分解とする.

謝辞

1 設定と \mathfrak{h} 射影の基本的な性質および問題 1.3 の観察

1.1 記号の設定

本論文の基本的な設定は次のとおりであり、この他に必要な条件は都度明示することとする。

記号と定義 1.1

- $\mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ をそれぞれ 0 を含む自然数全体, 実数全体, 複素数全体, 四元数全体の集合とする。
- G を非コンパクト実簡約 Lie 群, H を G の非コンパクトな閉部分群で, G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ なるものとする。
- $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$, $\mathfrak{h} := \text{Lie } H$ とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\theta := d\Theta$ による Cartan 分解とする。
- $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) := \{Y \in \mathfrak{h} \mid [Y, \mathfrak{h}] = \{0\}\}$ とする。
- e を G の単位元とし, $o_K := eK \in G/K$ とする。
- $B(-, -)$ を \mathfrak{g} の Killing 形式とし, $\mathfrak{h}^\perp := \{W \in \mathfrak{g} \mid B(W, \mathfrak{h}) = \{0\}\}$ とする。
- $X \in \mathfrak{p}$ に対し, ベクトル空間としての分解 $\mathfrak{p} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$ に対応した分解を $X = X_1 + X_2$, $X_1 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$, $X_2 \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ とする。
- (M, d_M) を M の上の任意の 2 点に対し一意的な測地線が存在する Riemann 多様体と M 上の計量から定まる距離とする。相異なる点 $p, q, r \in M$ に対し,
 - $\gamma_{p,q}: [0, d_M(p, q)] \rightarrow M$ を, $\gamma(0) = p$, $\gamma(d_M(p, q)) = q$ なる測地線とする。
 - $\angle_p(q, r)$ を $\gamma_{p,q}$ と $\gamma_{p,r}$ が p においてなす角とする。

以下の定理 1.2 を用いて, $X \in \mathfrak{p}$ に対し,

$$(Y(X), Z(X)) := \pi^{-1}(e^X \cdot o_K) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p})$$

と定義する。

定理 1.2 ([Kob89, Lemma 6.1])

$$\pi: (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G/K$$

は上への微分同相である。

ここで、 $Y(\mathbf{R} X)$ の有界性について、次の問題 1.3 が小林俊行氏によって提起された。

問題 1.3 (by T. Kobayashi) $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} := \{X \in \mathfrak{p} \mid Y(\mathbf{R} X) \text{ が } \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} \text{ の有界集合である.}\}$ と定めるとき、

1.
$$\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} = (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \cup \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ かつ } \mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = \{0\} \text{ である.}\} \quad (1.1)$$

であるか？

2. G が実半単純 Lie 群ならば $\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}}$ は測度 0 であるか？

問題 1.3 についての基本的な事項を挙げる。

補題 1.4

1. $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} \subset (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \cup \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ かつ } \mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = \{0\} \text{ である.}\}$ が成り立つ。
2. $X \in \mathfrak{p}$ が $X_1 = 0$ を満たすならば $X \in \mathfrak{p}_{H,\text{bdd}}$ である。
3. G が実階数 1 ならば、問題 1.3 と「 $\mathfrak{p}_{H,\text{bdd}} = \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ 」は同値である。

補題 1.4 の証明

1. $X \notin \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ なる $X \in \mathfrak{p}$ に対し、 $[X_1, X_2] = 0$ ならば $e^{tX_1} e^{tX_2} \cdot o_K = e^{t(X_1+X_2)} \cdot o_K = e^{tX} \cdot o_K$ である。したがって定理 1.2 より $Y(tX) = tX_1$, $Z(tX) = tX_2$ であることから $Y(\mathbf{R} X) = \mathbf{R} X_1$ となり、 $X_1 \neq 0$ より $Y(\mathbf{R} X)$ は有界集合とならない。
2. $X_1 = 0$ であることと $X \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ であることが同値であることから従う。
3. 次を示せばよい。

$$\{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} = (\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}) \cup \{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0 \text{ かつ } \mathfrak{p} \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}(X) = \{0\} \text{ である.}\} \quad (1.2)$$

G の実階数が 1 かつ H が非コンパクトであるから $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ は極大分裂可換部分代数であり、右辺の 2 つ目の集合は $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{p} \subset \mathbf{R} X_1 \neq \{0\}$ より $\{X \in \mathfrak{p} \mid [X_1, X_2] \neq 0\}$ となる。よって (1.2) の右辺は $\{X \in \mathfrak{p} \mid X_1 =$

0 または $[X_1, X_2] \neq 0$ である.} と同値である. この集合はさらに $X \in \{0\} \cup \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ と同値であるから (1.2) が示された.

■

$Y(\mathbf{R} X)$ の有界性は $\text{Ad}(k)$ -不変である. 具体的には補題 1.5 が成り立つ.

補題 1.5 $k \in K$, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $X' := \text{Ad}(k)X$, $\mathfrak{h}' := \text{Ad}(k)\mathfrak{h}$ とする. $Y'(X'), Z'(X')$ を, 微分同相 $\pi: (\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}) \ni (Y', Z') \mapsto e^{Y'} e^{Z'} \cdot o_K$ を用いて, $X' \in \mathfrak{p}$ に対し, $(Y'(X'), Z'(X')) = \pi'^{-1}(e^{X'} \cdot o_K)$ と定める.

このとき $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であることと $Y'(\mathbf{R} X')$ が有界であることは同値である.

補題 1.5 の証明 主張は (X, \mathfrak{h}) と (X', \mathfrak{h}') に対して対称的であるから, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界ならば $Y'(\mathbf{R} X')$ が有界であることのみを示せば十分である.

任意に $r \in \mathbf{R}$ を取る. $e^{rX'} \cdot o_K = e^{Y'(rX')} e^{Z'(rX')} \cdot o_K$ であり, 両辺に左から k^{-1} を掛けると, $e^{rX} = e^{\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX'))} e^{\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX'))} \cdot o_K$ を得る. ここで $Y'(rX') \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}$, $Z'(rX') \in \mathfrak{h}'^\perp \cap \mathfrak{p}$ であるから $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$, $\text{Ad}(k^{-1})(Z'(rX')) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ である.

定理 1.2 により π は微分同相であるから, 任意の $r \in \mathbf{R}$ に対して $\text{Ad}(k^{-1})(Y'(rX')) = Y(rX)$ である. $Y'(\mathbf{R} X) = \text{Ad}(k)(Y(\mathbf{R} X))$ であり, $\text{Ad}(k)$ は有限次元空間の間の線型写像であるから有界性を保つ.

以上から補題 1.5 が示された.

■

$Y(\mathbf{R} X)$ の有界性を判定しようとする問題 1.3 と比較して $Z(\mathbf{R} X)$ の有界性については次の定理が知られており, 有界性の判定は Lie 環の言葉のみで行える.

定理 1.6 ([Kob97, Lemma 5.4]) $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $\|Z(X)\| \geq \|X\| \sin \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ である. ここに $\varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ は X と $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ の元がなす角度の最小値 $0 \leq \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \leq \frac{\pi}{2}$ であり, $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \iff \varphi(X, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \neq 0$ である.

定理 1.6 より, $X \in \mathfrak{h}$ と $Z(\mathbf{R} X)$ が有界であることが同値である.

1.2 問題 1.3 の観察: $G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ の場合

$G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1) := \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$ の場合に問題 1.3 が正しいことは直接計算により確かめられる.

命題 1.7 $G = SU(1, 1)$, $H = SO(1, 1)$ のとき問題 1.3 は正しい.

補題 1.8 $\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(1, 1)$ の Killing 形式から定まる Poincaré 円板 $G/K = \{x + \sqrt{-1}y \mid x^2 + y^2 < 1\}$ の計量は $\frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ である.

補題 1.8 の証明 \mathfrak{g} の元を G/K 上の左不変ベクトル場と同一視すると

$$\begin{aligned} X' &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}, \\ Y' &:= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

である. \mathfrak{g} の Killing 形式 B から定まる \mathfrak{p} 上のノルム $\|-\|$ に対して $\|X'\|^2 = \|Y'\|^2 = 8$, $B(X', Y') = 0$ であって, $0 \in G/K = \{x + \sqrt{-1}y \mid x^2 + y^2 < 1\}$ で主張が成り立つ.

したがって $k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$, $a_r := \begin{pmatrix} \cosh r & \sinh r \\ \sinh r & \cosh r \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} &g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X')) \\ &= g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) \\ &= 8, \\ &g(d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})X'), d\tau(k_{\theta/2}a_r)(d\tau(k_{-\theta/2})Y')) = 0 \end{aligned}$$

なるような計量 g が Killing 形式から誘導される計量であるが, それが主張の形であることを示せば良い (これらのベクトルが何を表しているかは図 2 参照).

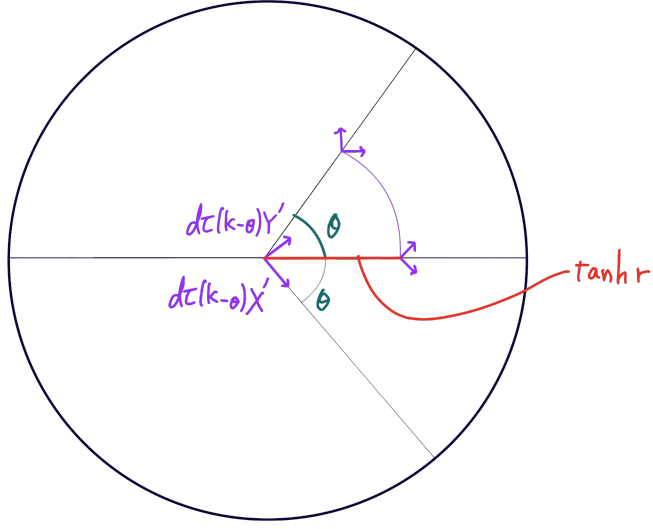


図 2

$t = 0$ での接ベクトルが $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X'$ を与える曲線は

$$\gamma_x(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \tanh t + \cosh r}$$

であるから,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_x(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})X' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial x} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x}$$

である.

同様に $t = 0$ での接ベクトルが $d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y'$ を与える曲線は

$$\gamma_y(t) := e^{\sqrt{-1}\theta} \frac{\cosh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \sinh r}{\sinh r \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta} \sqrt{-1} \tanh t + \cosh r}$$

であるから,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_y(t) = d\tau(k_{\theta/2}a_r)d\tau(k_{-\theta/2})Y' = (1 - \tanh^2 r) \frac{\partial}{\partial y} = (1 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

である.

以上より $g = \frac{8(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ が示された. ■

命題 1.7 の証明 $k_\theta := \text{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta}, e^{-\sqrt{-1}\theta})$, $X_\theta := k_{\theta/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} k_{-\theta/2}$ とすると, $\mathfrak{p} \setminus \{0\} = \{tX_\theta \mid t \in \mathbf{R}_{>0}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ である. この X_θ と $t \in \mathbf{R}$ に対して $Y(tX_\theta) = s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なる $s \in \mathbf{R}$ を求める.

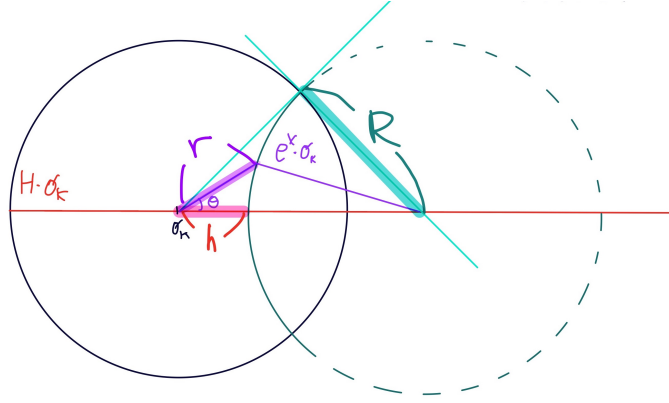


図 3

右の円の Euclid 距離での半径を R とし, $e^{tX_\theta} \cdot o_K$ から $H \cdot o_K$ への垂線の足の o_K からの Euclid 距離を h とするとき, 外側の青色の直角三角形に対して三平方の定理を用いて $(h + R)^2 = R^2 + 1$ より $R = \frac{1 - h^2}{2h}$, $R + h = \frac{1 + h^2}{2h}$ を得る.

さらに下の紫色の三角形に対して余弦定理を用いて $R^2 = (R + h)^2 + r^2 - 2(R + h) \cos \theta$ を得,

$$\frac{2r \cos \theta}{r^2 + 1} = \frac{2h}{h^2 + 1} \quad (1.3)$$

を得る.

$r = \tanh t$, $h = \tanh s$ であるから (1.3) は $\cos \theta \tanh 2t = \tanh 2s$ と書き直せる. したがって X_θ に対して $Y(\mathbf{R} X)$ が有界 $\iff |\cos \theta| \neq 1 \iff X \notin \mathfrak{h}$ である. ■

補足 1.9 命題 1.7 は角度を用いた議論によっても示すことができる. 具体的には, 計算により次の補題 1.10 が示せる.

補題 1.10 $e^{sY} e^{rZ} \cdot o_K = \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix} \sqrt{-1} \tanh r \in SU(1, 1)/U(1)$, $s > 0$,

$r \in \mathbf{R}$ に対し, $\varphi_{s,r} := \angle_{o_K}(e^{sY}e^{rZ} \cdot o_K, e^{sY} \cdot o_K)$ は, $\tan \varphi_{s,r} = \frac{\tanh 2r}{\sinh 2s}$ を満たす. ただし $Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Z := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ とする.

補題 1.10 により命題 1.7 は次のように証明できる. 任意の $0 \neq s \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R}$ に対し,

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \tan \varphi_{|s|,r} = \frac{-1}{\sinh 2|s|} \leq \tan \varphi_{s,r} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \tan \varphi_{|s|,r} = \frac{1}{\sinh 2|s|} \quad (1.4)$$

であるから, $X \notin \mathbf{R}Y$ の元に対して $Y(\mathbf{R}X)$ が非有界であるとする, $0 < \varepsilon < \varphi(X, \mathfrak{h})$ なる ε に対し, ある $t \in \mathbf{R}$ が存在して, $Y(tX) = s_t Y$, $\sinh 2|s_t| > \frac{1}{\tan \varepsilon}$ である. $Z(tX) = r_t Z$ とすると (1.4) より $|\tan \varphi_{s_t, r_t}| < \tan \varepsilon$, したがって

$$-\varepsilon < \angle_{o_K}(e^{s_t Y} e^{r_t Z} \cdot o_K, e^{s_t Y} \cdot o_K) < \varepsilon < \varphi(X, \mathfrak{h})$$

となる. しかし定義より $\angle_{o_K}(e^{s_t Y} e^{r_t Z} \cdot o_K, e^{s_t Y} \cdot o_K) = \angle_{o_K}(e^{tX} \cdot o_K, e^{Y(tX)} \cdot o_K)$ であり, $\angle_{o_K}(e^{tX} \cdot o_K, e^{Y(tX)} \cdot o_K) = \varphi(X, \mathfrak{h})$ であるから矛盾する.

系 1.11 $G = SO(1, n)$, $H = SO(1, k)$, $1 \leq k \leq n-1$ に対して問題 1.3 は正しい.

系 1.11 の証明 より正確に記述せよ $SO(1, n)/SO(n)$ の開球としての実現を考える. 「 $e^X \cdot o_K$ と o_K を結ぶ直線」と $H \cdot o_K$ で張られる超平面で $SO(1, n)/SO(n)$ を切った際の断面を考える.

$n=3, k=1$ の例

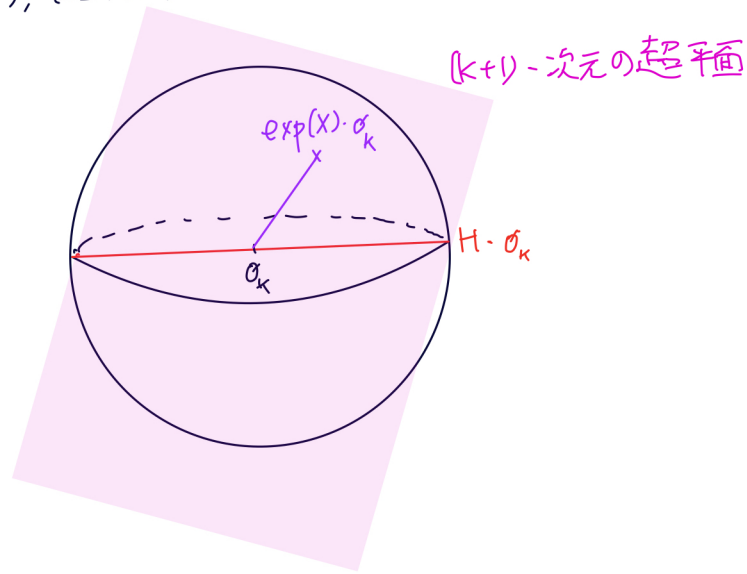


図 4

この断面に現れるのは図 3 と同じであるから、同様の計算により系 1.11 を得る.

■

1.3 問題 1.3 の観察: 類似の問いとその反例

問題 1.3 は, G の実階数が 1 の場合は

問題 1.12 $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \text{ である.}\}$ となるか?

と同値であった. しかし, この問題には G の実階数が 2 の場合の反例が存在する. G の実階数が 2 のとき問題 1.3 には次の反例が存在する.

命題 1.13 $G = SL(3, \mathbf{R})$, $H = \{\text{diag}(e^a, e^b, e^c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0\}$,

$X := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ に対し $Y(\mathbf{R} X)$ は非有界である.

$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0\}$ であるから $X_1 = \text{diag}(1, 0, -1)$,
 $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ であり, $[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ より X は (1.1)
の右辺の集合の元ではあるが $X \notin \mathfrak{p}_{H, \text{bdd}}$ であるから, 命題 1.13 は問題 1.3 の反例
となっている.

1 つ補題を用意してから命題 1.13 を証明する.

補題 1.14 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し

$$\exp\left(2t \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{3} & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} & \frac{e^{2t} + 2e^{-4t}}{3} \end{pmatrix}$$

である.

補題 1.14 の証明 θ を $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$, $\sin 2\theta = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$ を満たす実数として任意に 1 つ
固定する. このとき

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{2}{3}, \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である. $k := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} k \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} k^{-1} &= \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta & \sqrt{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \cos \theta \sin \theta \\ \sqrt{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \cos \theta \sin \theta & 2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin 2\theta - \sin^2 \theta & \sqrt{2} \cos 2\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \\ \sqrt{2} \cos 2\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} & \sqrt{2} \sin 2\theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

したがって

$$k \exp \left(2t \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \right) k^{-1} = \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -4t \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \exp \left(2t \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \right) &= k^{-1} \exp \left(\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & -4t \end{pmatrix} \right) k \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} \cos^2 \theta + e^{-4t} \sin^2 \theta & (e^{-4t} - e^{2t}) \sin \theta \cos \theta \\ (e^{-4t} - e^{2t}) \sin \theta \cos \theta & e^{2t} \sin^2 \theta + e^{-4t} \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{3} & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} & \frac{e^{2t} + 2e^{-4t}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

命題 1.13 の証明 行列式 1 の 3×3 正定値実対称行列全体の集合 $\text{Symm}^+(3)$ と G/K は $gK \mapsto g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t g$ により微分同相である.

補題 1.14 より

$$\begin{aligned} e^{tX} \cdot o_K &= e^{tX} {}^t(e^{tX}) = e^{2tX} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{3} & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}(e^{2t} - e^{-4t})}{3} & \frac{e^{2t} + 2e^{-4t}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.5}$$

である.

$$Y := \text{diag}(a, b, c), \quad a + b + c = 0, \quad Z := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とすると, } r \in \mathbf{R} \text{ に対し,}$$

$$\begin{aligned} e^Y e^{rZ} \cdot o_K &= e^Y e^{2rZ} e^Y \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2r & \sinh 2r \\ 0 & \sinh 2r & \cosh 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2b} \cosh 2r & e^{b+c} \sinh 2r \\ 0 & e^{b+c} \sinh 2r & e^{2c} \cosh 2r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2b} \cosh 2r & e^{-a} \sinh 2r \\ 0 & e^{-a} \sinh 2r & e^{-2a-2b} \cosh 2r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.6)$$

である．ただし最後の変形には $a + b + c = 0$ を用いた．

(1.5) と (1.6) を見比べると,

$$\begin{aligned} a &= t, \\ \sinh 2r &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \sinh 3t, \\ e^{2b} &= \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{\sqrt{9 + 8 \sinh^2 3t}} \end{aligned}$$

とすると $e^Y e^{rZ} \cdot o_K = e^{tX} \cdot o_K$ を得る．つまり任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し

- $Y(tX) = \text{diag}(a(t), b(t), -a(t) - b(t))$
ただし $a(t) = t$, $b(t) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{\sqrt{9 + 8 \sinh^2 3t}} \right)$,
- $Z(tX) = r(t)Z$ ただし $r(t) = \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sinh 3t \right)$

であるから, $Y(\mathbf{R}X)$ は非有界である. ■

G が実階数 1 の場合に限っても問題 1.12 と類似の問題はいくつか考えられる．例えば $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ を \mathfrak{h} に置き換えた次の問題が立てられる．

問題 1.15 $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp \mathfrak{h} \text{ である.}\}$ となるか？

しかし問題 1.15 にも反例が存在する.

補題 1.16 $G = SL(3, \mathbf{R})$, $Y_1 := \text{diag}(1, 1, -2)$, $Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathfrak{h} = \mathbf{R}Y_1 \oplus \mathbf{R}Y_2$, $X = \text{diag}(1, 0, -1)$ に対し, $[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ であるが $Y(\mathbf{R}X) = \mathbf{R}Y_1$ であり, 非有界である.

補題 1.16 の計算 \mathfrak{h} は可換 Lie 環であり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$ の Cartan 対合 $\theta W := -{}^t W$ に対し $\mathfrak{h} = \theta \mathfrak{h}$ である.

$[X, \mathfrak{h}] \neq 0$ は, $[X, Y_2] \neq 0$ より従う.

ここで $Z_1 := \text{diag}(1, -1, 0) \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ であり, 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対し, $e^{2tX} = e^{tY_1} e^{tZ_1}$ であるから, $Y(\mathbf{R}X) = \mathbf{R}Y_1$ となり, 補題 1.16 が示された. ■

補題 1.16 において X と \mathfrak{h} は, $[X, \mathfrak{h}] \neq \{0\}$ だが $[X, (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})] = \{0\}$ かつ $X \not\perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$ となるように取った.

つまり問題 1.15 の右辺を次の問題 1.17 のように少し弱めても補題 1.16 はその反例になっている.

問題 1.17 $\mathfrak{p}_{H, \text{bdd}} = \{X \in \mathfrak{p} \mid [X, \mathfrak{h}] \neq \{0\} \text{ あるいは } X \perp (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \text{ である.}\}$ となるか?

2 G の実階数が 1 の場合

2.1 具体例: 実階数 1 の古典型単純 Lie 群

命題 2.1 $G = SO(1, n)$, $SU(1, n)$, $Sp(1, n)$, $H = SO(1, 1)$, $n \geq 2$ に対して問題 1.3 は正しい.

$G = Sp(1, 2)$, $\mathfrak{h} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合にのみ示す. その他の場合も全く同様の議論である.

命題 2.2 $G = Sp(1, 2)$, $H = SO(1, 1)$, $X \in \mathfrak{p}$ に対し, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界 $\iff X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ or $X = 0$ である.

ただし, H は G の左上に入っている. すなわち, $\text{Lie } H = \mathfrak{h} = \mathbf{R} Y$, $Y := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

記号と定義 2.3 \mathbf{H} を四元数体とする. $Sp(1, 2)$ の定義と自然表現の定義 $Sp(1, 2)/Sp(1) \times Sp(2) \simeq \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{H}, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\} =: \mathbf{H}\mathbb{H}^2$ である. なぜならば ${}^t(1, 0, 0)$ の自然表現 $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^2$ による軌道を考え, 第 2, 第 3 成分に第 1 成分の逆数を右からかけた空間が $\mathbf{H}\mathbb{H}^2$ と微分同相であるためであり, $Sp(1, 2) \curvearrowright \mathbf{H}^3$ の ${}^t(1, 0, 0)$ 軌道の点 $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ に対応する $\mathbf{H}\mathbb{H}^2$ の点を

$$\left[\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ z_1 z_0^{-1} \\ z_2 z_0^{-1} \end{pmatrix} \right] \text{ と書く.}$$

愚直な行列計算により, 次が示される.

$$\text{補題 2.4 } \forall z, w \in \mathbf{H} \text{ に対し, } \exp \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & * & * \\ \frac{\bar{z}}{r} \sinh r & * & * \\ \frac{\bar{w}}{r} \sinh r & * & * \end{pmatrix}, \text{ ただし}$$

$r := \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$, である.

命題 2.2 の証明 $X = 0 \Rightarrow Y(\mathbf{R} X) = \{0\}$ と $X \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ のときに $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であることは明らかであるから, $X \notin \mathfrak{h}$ の場合にのみ議論すればよい.

G の Cartan 対合を $\Theta(g) = (g^*)^{-1}$ (g^* は g の共役転置) とするとき, $\Theta(e^{Y(tX)} e^{Z(tX)}) \cdot o_K = e^{-Y(tX)} e^{-Z(tX)} \cdot o_K = \Theta(e^X) \cdot o_K = e^{-X} \cdot o_K$ より, 「 $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界 $\iff Y(\mathbf{R} X) \subset \mathbf{R} Y$ が上に非有界」である.

したがって, $Y(\mathbf{R}X)$ が非有界であるとき, 列 $\{t_n \in \mathbf{R}\}_{n \in \mathbf{N}}$ で, $s_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$,
ただし $Y(t_n X) = s_n Y$, なるものが存在する.

また, 任意の $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ の元はある $Z = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ \bar{z} & 0 & 0 \\ \bar{w} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$, $z, w \in \mathbf{H}$ s.t. $|z|^2 +$

$|w|^2 = 1$ と $r \in \mathbf{R}$ により rZ と表せる. $Z(t_n X) = r_n Z_n$, $Z_n := \begin{pmatrix} 0 & z_n & w_n \\ \bar{z}_n & 0 & 0 \\ \bar{w}_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$z_n, w_n \in \mathbf{H}$ s.t. $|z_n|^2 + |w_n|^2 = 1$ とすると, $X \notin \mathfrak{h}$ であるから定理 1.6 より
 $|r_n| \rightarrow \infty$ である. $z_n, w_n \in \mathbf{H}$ s.t. $|z_n|^2 + |w_n|^2 = 1$ より, $\{t_n\}$ の部分列を取

るとある Z_∞ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z_\infty = \begin{pmatrix} 0 & z_\infty & w_\infty \\ \bar{z}_\infty & 0 & 0 \\ \bar{w}_\infty & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p}$ な

ようにできる. $Z \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ より $\operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$ であることに注意する ($\operatorname{Re}: \mathbf{H} \ni$
 $a + bi + cj + dk \mapsto a \in \mathbf{R}$ とする).

補題 2.4 より,

$$\begin{aligned} e^{s_n Y} e^{r_n Z_n} \cdot o_K &= \begin{pmatrix} \cosh s_n & \sinh s_n & 0 \\ \sinh s_n & \cosh s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \\ \pm \bar{w}_n \tanh |r_n| \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} \cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n \\ \sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n \\ \pm \bar{w}_n \tanh |r_n| \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

複号は r_n の符号 \pm と同順, である. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh s_n = 1 =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh |r_n|$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$ に注意すると次を得る. 具体的
な計算は後述する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} = 1 \quad (2.1)$$

である.

したがって, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルと, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ か
ら
 $\left((\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh |r_n| \sinh s_n)^{-1} \right) \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ への
*

ベクトルがなす Euclidean な内積の値を I_n とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$ である.

しかし, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルと, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ から $e^{t_n X} \cdot o_K \in \mathbf{H} \mathbb{H}^2$ へのベクトルがなす Euclidean な内積の値 J_n は, $X := \begin{pmatrix} 0 & z_0 & w_0 \\ \bar{z}_0 & 0 & 0 \\ \bar{w}_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z_0, w_0 \in \mathbf{H}$ s.t. $|z_0|^2 + |w_0|^2 = 1$ とするとき $J_n = \frac{\bar{z}_0}{r_0} \tanh(tr_0)$,

$r_0 := \sqrt{|z_0|^2 + |w_0|^2}$ であり, $X \notin \mathfrak{h} \iff z_0 \neq 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{\bar{z}_0}{r_0} \neq 1$ である.

以上 2 つの議論を合わせると $e^{s_n Y} e^{r_n Z_n} \cdot o_K = e^{t_n X} \cdot o_K \implies 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n \neq 1$ となり矛盾する.

以上より「 $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h} \Rightarrow Y(\mathbf{R} X)$ 有界」, したがって 命題 2.2 を得る. ■

命題 2.2 の計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| = 0$ を示せば主張が得られる. 具体的に計算すると,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} |(\sinh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \cosh s_n)(\cosh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \sinh s_n)^{-1} - 1| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|)(1 \pm z_n \tanh|r_n| \tanh s_n)}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)|^2} - 1 \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|)z'_n - (1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)|^2} \quad (*) \end{aligned}$$

である. ここで $z'_n := 1 \pm z_n \tanh|r_n| \tanh s_n$ とすると,

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\tanh s_n \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|)z'_n - (1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|)z'_n|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|)|}{|(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)|} \end{aligned}$$

であり, $0 < \min |1 \pm \operatorname{Re} z_n| \leq |(1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n| \tanh s_n)| \leq \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ と $\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z_n|\} \leq |-1 \pm \bar{z}_n \tanh|r_n|| \leq \sqrt{5}$ であることと $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n =$

$\operatorname{Re} z_\infty \neq \pm 1$ より,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\min\{|-1 \pm \operatorname{Re} z_n|\}}{\sqrt{5}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1 - \tanh s_n)(-1 \pm \overline{z_n} \tanh |r_n|)|}{|(1 \pm \overline{z_n} \tanh |r_n| \tanh s_n)|} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tanh s_n) \frac{\sqrt{5}}{\min\{|1 \pm \operatorname{Re} z_n|\}} = 0 \end{aligned}$$

より, (2.1) が成り立つ. ■

2.2 G の実階数が 1 の場合

定理 2.5 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群, H を G の非コンパクトな閉部分 Lie 群で, G の Cartan 対合 Θ に対して $\Theta H = H$ かつ $\dim \mathfrak{h} = 1$ とするとき, 問題 1.3 が成り立つ.

定理 2.6 ([Hel01, p. 409, Theorem 3.1]) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を実半単純 Lie 環 \mathfrak{g} の Cartan 対合 θ に対する Cartan 分解とし, $\alpha, 2\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ と仮定する. $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $0 \neq X_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$ を任意に固定したとき, $X_\alpha, X_{2\alpha}, \theta X_\alpha, \theta X_{2\alpha}$ から生成される Lie 環 \mathfrak{g}^* は $\mathfrak{su}(2, 1)$ と同型である.

以下で定理 2.6 を示すための補題や記号を設定し, 定理 2.6 を示す.

記号と定義 2.7

- $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ を極大分裂可換部分代数, $\mathfrak{m} := \mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a}) := \{W \in \mathfrak{k} \mid [W, \mathfrak{a}] = \{0\}\}$ とする. B を \mathfrak{g} の Killing 形式とする.
- $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ を \mathfrak{a} に関する制限ルート系とする. \mathfrak{g}_λ を $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ のルート空間とする.
- $Y_\alpha := [\theta X_\alpha, X_{2\alpha}]$ とする.
- $A_\alpha \in \mathfrak{a}$ を, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, A_\alpha) = \alpha(H)$ を満たす元とする. このとき, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, [X_\alpha, \theta X_\alpha]) = \alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$ である. したがって

$$\begin{aligned} [X_\alpha, \theta X_\alpha] &= B(X_\alpha, \theta X_\alpha)A_\alpha, \\ [Y_\alpha, \theta Y_\alpha] &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)A_\alpha, \\ [X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}] &= 2B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})A_\alpha \end{aligned}$$

である.

$$\bullet \quad c_\alpha := \sqrt{\frac{-2}{\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)}}, \quad c_{2\alpha} := \sqrt{\frac{-2}{\alpha(A_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})}} \text{ とし,}$$

$$\begin{aligned} X_\alpha^* &:= c_\alpha X_\alpha, \\ X_{2\alpha}^* &:= c_{2\alpha} X_{2\alpha}, \\ Y_\alpha^* &:= [\theta X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] = c_\alpha c_{2\alpha} Y_\alpha, \\ A_\alpha^* &:= \frac{1}{12\alpha(A_\alpha)} A_\alpha \end{aligned}$$

とする.

補題 2.8 $c := 2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$ とすると, $[X_\alpha, Y_\alpha] = cX_{2\alpha}$ である. 特に $0 \neq Y_\alpha \neq X_\alpha$ である.

補題 2.8 の証明 [Jacobi 恒等式と \$3\alpha \notin \Sigma\(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}\)\$ による.](#) ■

補題 2.9 $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ である. また $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], X_\alpha] = -3\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)Y_\alpha$ である.

補題 2.9 の証明 $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ より $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} + \mathfrak{a}$ であり, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\begin{aligned} B(H, [X_\alpha, \theta Y_\alpha]) &= B([H, X_\alpha], Y_\alpha) = \alpha(H)B(X_\alpha, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]) \\ &= \alpha(H)B([X_\alpha, X_\alpha], X_{2\alpha}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

であることより $[X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m}$ である.

さらに,

$$\begin{aligned} [[\theta X_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] &= -[[Y_\alpha, X_\alpha], \theta X_\alpha] - [[X_\alpha, \theta X_\alpha], Y_\alpha] \\ &= c[X_{2\alpha}, \theta X_\alpha] - B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha \\ &= -cY_\alpha - B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\alpha(A_\alpha)Y_\alpha \\ &= -3\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)Y_\alpha \neq 0 \end{aligned}$$

より, $\theta[\theta X_\alpha, Y_\alpha] = [X_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$ である. ■

補題 2.10 $\mathbf{R} X_\alpha + \mathbf{R} Y_\alpha$ は $\text{ad}_{\mathfrak{g}}([X_\alpha, \theta Y_\alpha])$ で不変である. さらに

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= -6\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha, \\ [Y_\alpha, \theta Y_\alpha] &= -2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})A_\alpha \end{aligned}$$

である.

補題 2.10 の証明 $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] \in \mathbf{R} X_\alpha$ を示せば, 補題 2.9 と併せて 補題 2.10 が従う.

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= -[[\theta Y_\alpha, Y_\alpha], X_\alpha] - [[Y_\alpha, X_\alpha], \theta Y_\alpha] \\ &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha + c[X_{2\alpha}, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]] \\ &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - c[X_\alpha, [\theta X_{2\alpha}, X_{2\alpha}]] - c[\theta X_{2\alpha}, [X_{2\alpha}, X_\alpha]] \\ &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - cB(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})\alpha(A_{2\alpha})X_\alpha \end{aligned}$$

であり ($\mathfrak{g}_{3\alpha} = \{0\}$ による), $A_{2\alpha} = 2A_\alpha$ であるから,

$$[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] = B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha$$

を得る.

さらに,

$$\begin{aligned} B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha) &= B(Y_\alpha, [X_\alpha, \theta X_{2\alpha}]) = -B([X_\alpha, Y_\alpha], \theta X_{2\alpha}) \\ &= -2\alpha(A_\alpha)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}) \end{aligned}$$

であるから, 最終的に

$$\begin{aligned} [[X_\alpha, \theta Y_\alpha], Y_\alpha] &= B(Y_\alpha, \theta Y_\alpha)\alpha(A_\alpha)X_\alpha - 4\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha \\ &= -6\alpha(A_\alpha)^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})X_\alpha \end{aligned}$$

を得る. ■

補題 2.11 $[[X_\alpha, \theta Y_\alpha], X_{2\alpha}] = 0$ である.

補題 2.11 の証明 [補題 2.8–2.10](#) と Jacobi 恒等式による. ■

補題 2.12 $[Y_\alpha, \theta X_{2\alpha}] = 2\alpha(A_\alpha)B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha})\theta X_\alpha$ である.

補題 2.12 の証明 Jacobi 恒等式を用いて与式を変形し計算することにより示せる. ■

定理 2.6 の証明 $\mathfrak{g}_0^* := \mathbf{R} A_\alpha \oplus \mathbf{R}[X_\alpha, \theta Y_\alpha]$, $\mathfrak{g}_\alpha^* := \mathbf{R} X_\alpha \oplus \mathbf{R} Y_\alpha$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}^* := \mathbf{R} \theta X_\alpha \oplus \mathbf{R} \theta Y_\alpha$, $\mathfrak{g}_{2\alpha}^* := \mathbf{R} X_{2\alpha}$, $\mathfrak{g}_{-2\alpha}^* := \mathbf{R} \theta X_{2\alpha}$ とすると, 補題 2.8–2.12 より, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_0^* \oplus \mathfrak{g}_\alpha^* \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}^* \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}^*$ が示される.

非自明な \mathfrak{g}^* の Lie 括弧の関係は以下の通りである (残りの関係式はこの両辺に θ をつけることで得られる).

$$\begin{aligned}
[X_\alpha^*, Y_\alpha^*] &= -4X_{2\alpha}^*, & (\text{補題 2.8 による}), \\
[X_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] &= -6Y_\alpha^*, & (\text{補題 2.9 による}), \\
[X_\alpha^*, \theta X_\alpha^*] &= -24A_\alpha^*, & (\text{定義による}), \\
[X_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] &= 0, & (\mathfrak{g}_{3\alpha} = 0 \text{ による}), \\
[X_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] &= \theta Y_\alpha^*, & (\text{定義による}), \\
[Y_\alpha^*, X_{2\alpha}^*] &= 0, & (\text{補題 2.11 による}), \\
[Y_\alpha^*, \theta X_{2\alpha}^*] &= -4\theta X_\alpha^*, & (\text{補題 2.12 による}), \\
[Y_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*] &= -96A_\alpha^*, & (\text{補題 2.10 による}), \\
[Y_\alpha^*, [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*]] &= 24X_\alpha^*, & (\text{補題 2.10 による}), \\
[[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*], X_{2\alpha}^*] &= [[X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*], \theta X_{2\alpha}^*] = 0, & (\text{補題 2.12 による}), \\
[X_{2\alpha}^*, \theta X_{2\alpha}^*] &= -48A_\alpha^*, & (\text{定義による})
\end{aligned}$$

これらを踏まえて \mathfrak{g}^* と $\mathfrak{su}(2, 1)$ の対応を,

$$\begin{aligned}
X_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & X_{2\alpha}^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\
\theta X_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \theta X_{2\alpha}^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\
Y_\alpha^* &\leftrightarrow -2 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & -\sqrt{-1} \\ 0 & \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, & \theta Y_\alpha^* &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 & \sqrt{-1} \\ 0 & -\sqrt{-1} & -0 \end{pmatrix}, \\
A_\alpha^* &\leftrightarrow \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & [X_\alpha^*, \theta Y_\alpha^*] &\leftrightarrow -4 \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

でつける. この対応が Lie 環としての同型であること (上の関係式が満たされること) は計算することにより従う.

以上より定理 2.6 が示された. ■

補題 2.13 $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ の場合, 任意に固定した $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と θX_α により生成される部分 Lie 環 \mathfrak{g}' は $\mathfrak{su}(1, 1)$ と同型である.

補題 2.13 の証明 $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \mathfrak{g}_{-2\alpha} = \{0\}$ より, $[X_\alpha, X_\alpha] = [X_{-\alpha}, X_{-\alpha}] = 0$ である. $A_\alpha \in \mathfrak{a}$ を任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, A_\alpha) = \alpha(H)$ を満たす元とする. 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して $B(H, [X_\alpha, \theta X_\alpha]) = \alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)$ である. 任意の $0 \neq W \in \mathfrak{g}$ に対し $-B(W, \theta W) > 0$ より $[X_\alpha, \theta X_\alpha] = B(X_\alpha, \theta X_\alpha)A_\alpha \neq 0$ である.

以上より X_α と θX_α により生成される \mathfrak{g} の部分 Lie 環 \mathfrak{g}' は $\mathfrak{g}' = \mathbf{R} A_\alpha \oplus \mathbf{R} X_\alpha \oplus \mathbf{R} X_{-\alpha}$ である.

$c_\alpha := \frac{2}{\alpha(A_\alpha)}$ を用いて \mathfrak{g}' と $\mathfrak{su}(1, 1)$ の対応を

$$\begin{aligned} A_\alpha &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & c_\alpha X_\alpha &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\ c_\alpha X_{-\alpha} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

により与えると, これは \mathfrak{g}' と $\mathfrak{su}(1, 1)$ の間の同型になっている. ■

系 2.14 G を実階数 1 の実半単純 Lie 群とする. 任意の $Y \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ と任意の $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ を固定したとき, X, Y を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ で, $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$ か $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$ なるものが存在する.

系 2.14 の証明 G は実階数 1 より, 極大分裂可換部分代数 $\mathfrak{a} := \mathbf{R} Y \subset \mathfrak{g}$ に対しある $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ が存在して $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ あるいは $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ であるから, それぞれ定理 2.6 と補題 2.13 より系 2.14 の主張が従う. 以下で $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ の形で場合分けしてこの議論を確認する.

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha\}$ の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ より $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ をこの分解に対応して $X = X_0 + X_\alpha + X_{-\alpha}$ と分解すると, $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ より $X_{-\alpha} = -\theta X_\alpha \neq 0$ である. $Y \in \mathbf{R}[X_\alpha, \theta X_\alpha]$ であるからこの $X_\alpha \neq 0$ に補題 2.13 を適用することにより $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$ で $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ なるものが存在する.

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ の場合

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-2\alpha}$, $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ より $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{a}$ をこの分解に対応して $X = X_0 + X_\alpha + X_{-\alpha} + X_{2\alpha} + X_{-2\alpha}$ と書くと, $X \in \mathfrak{p}$ より $X_{-\alpha} = -\theta X_\alpha$, $X_{-2\alpha} = -\theta X_{2\alpha}$ である.

ここで $X \notin \mathfrak{a}$ より,

1. $X_\alpha \neq 0$ かつ $X_{2\alpha} \neq 0$
2. $X_\alpha \neq 0$ かつ $X_{2\alpha} = 0$
3. $X_\alpha = 0$ かつ $X_{2\alpha} \neq 0$

のいずれかである.

- 1 の場合はこの $X_\alpha, X_{2\alpha}$ と Y に,
- 2 の場合はこの X_α と, 適当な $0 \neq X'_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$ と Y に,
- 3 の場合はこの $X_{2\alpha}$ と, 適当な $0 \neq X'_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ と Y に,

定理 2.6 を適用することにより $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{su}(2, 1)$ で $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ なるものが存在する.

■

系 2.14 で定めた \mathfrak{g}_0 とその G における解析部分群 G_0 について次の 3 つが成り立つ.

補題 2.15 [Hel01, p. 409, Lemma 2.2] \mathfrak{g} の Cartan 対合 θ に対して $\mathfrak{g}_0 = \theta\mathfrak{g}_0$ であり, \mathfrak{g}_0 への θ の制限は \mathfrak{g}_0 の Cartan 分解を与える.

補題 2.16 ([Yos38, p. 82]) 系 2.14 の \mathfrak{g}_0 の G における解析的部分群を G_0 とする. G_0 は G の閉部分群である.

補題 2.17 ([Hel01, p. 409, Lemma 2.3]) 系 2.14 の \mathfrak{g}_0 の G における解析的部分群を G_0 とする. $G = KAN$ を G の岩澤分解, $G_0 = K_0A_0N_0$ を G の岩澤分解とすると,

$$K_0 := G_0 \cap K, \quad A_0 := G_0 \cap A, \quad N_0 := G_0 \cap N,$$

であり, $G_0/K_0 \simeq G_0/K$ は G/K の全測地的な部分 Riemann 多様体である.

以上のことを用いて, G が実階数 1 の場合を $SU(1, 2)$ ないし $SU(1, 1)$ に帰着させることにより定理 2.5 を示す.

定理 2.5 の証明 おそらく $\dim H = 1$ 出ない場合も背理法で示せる気がする. \mathfrak{g} の

極大分裂可換部分代数 \mathfrak{h} の定めるルート系を $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ とし, $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の形によって 2 通りに場合分けして証明する.

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\pm\alpha\}$ のとき

系 2.14 により X と \mathfrak{h} を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$ で $\mathfrak{su}(1, 1)$ に同型なものが存在する. \mathfrak{g}' に対応する G の解析的部分群を G' とし, その岩澤分解を $G' = K'A'N'$ とする. このとき $e^{Z(tX)} \cdot o_K = e^{-Y(tX)}e^{tX} \cdot o_K \in G'/K$ であるから $Z(tX) \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ であり, $Y(\mathbf{R}X)$ の有界性は全測地的な部分 Riemann 多様体 $G'/K' \subset G/K$ に対して行えば良いことがわかる. したがって命題 1.7 により $X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd}} \iff X = 0$ あるいは $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ が言え, 定理 2.5 が示された.

$\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ のとき

系 2.14 により X と \mathfrak{h} を含む部分 Lie 環 $\mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{g}$ で $\mathfrak{su}(2, 1)$ に同型なものが存在する. \mathfrak{g}^* に対応する G の解析的部分群を G^* とし, その岩澤分解を $G^* = K^*A^*N^*$ とする. このとき $e^{Z(tX)} \cdot o_K = e^{-Y(tX)}e^{tX} \cdot o_K \in G^*/K$ であるから $Z(tX) \in \mathfrak{g}^* \cap \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ であり, $Y(\mathbf{R}X)$ の有界性は全測地的な部分 Riemann 多様体 $G^*/K^* \subset G/K$ に対して行えば良いことがわかる. したがって命題 2.1 により $X \in \mathfrak{p}_{H, \text{bdd}} \iff X = 0$ あるいは $X \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{h}$ が言え, 定理 2.5 が示された.

■

2.2.1 補足: 定理 2.5 の微分幾何的側面

定義 2.18 [Ebe72a, Definition 1.3]

M が完備かつ非正曲率をもつ 1-連結 Riemann 多様体であるとき, M を Hadamard 多様体といい, Hadamard 多様体 M が visibility manifold であるとは, $\forall p \in M, \forall \varepsilon > 0$ に対し, ある $r(p, \varepsilon) > 0$ が存在して, 測地線 $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow M$ が任意の $t \in [t_0, t_1]$ に対し $d_M(p, \gamma(t)) \geq r(p, \varepsilon)$ を満たすならば, $\angle_p(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) \leq \varepsilon$ であることである.

後に示すように Poincaré 円板は visibility manifold であるが, 補題 1.10 よりその片鱗を見ることはできる. 具体的には $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ に対し $t_\varepsilon := \frac{1}{2} \sinh^{-1} \frac{1}{|\tan \varepsilon|}$ とし, 測地線 $\gamma_\varepsilon(s) = e^{t_\varepsilon Y} e^{sZ} \cdot o_K$ とすると, 補題 1.10 より任意の $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$ に対し

$\angle_{o_K}(\gamma_\varepsilon(s_0), \gamma_\varepsilon(s_1)) \leq \varepsilon$ である．この様子を図示すると図 5 のようになる．

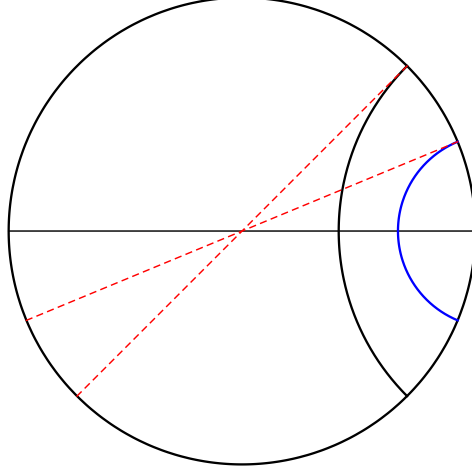


図 5: visibility manifold のイメージ

定理 2.19 [BH99, p. 296, 9.33 Theorem], originally [Ebe72b, Theorem 4.1]

$\exists C \subset M$ s.t. $M = \bigcup_{\text{cpt.}} \{f(C) \mid f \in \text{Isom}(M)\}$ なる Hadamard 多様体 M に対し，次は同値である．

- (i) M は visibility manifold である．
- (ii) 全測地的な部分 Riemann 多様体 $M' \subset M$ で \mathbf{R}^2 と等長同型なものが存在しない．

ここで Riemann 対称空間は Hadamard 多様体であり，定理 2.19 の (ii) は G の実階数が 1 以下であることと同値である．したがって G の実階数が 1 の場合 G/K は visibility manifold であり， $G = SU(1, 2)$ ， $H = SO(1, 1)$ の場合の証明と全く同様にして背理法により問題 1.3 が示される．

2.3 G が実階数 1 の実半単純 Lie 群の直積の場合

定理 2.5 の系として次が示される．

系 2.20 $n \in \mathbf{N}$ を固定し， $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$ を実階数 1 の実半単純 Lie 群の族， Θ_i を G_i の Cartan 対合とする．

G を $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$ の直積からなる Lie 群 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ とし, H を G の非コンパクトな部分 Lie 群で, G の Cartan 対合 $\Theta: G \rightarrow G$, $G \ni (g_1, \dots, g_n) \mapsto (\Theta_1 g_1, \dots, \Theta_n g_n) \in G$ に対して $\Theta H = H$ で $\dim \mathfrak{h} = 1$ なるものとする. このとき問題 1.3 が成り立つ.

系 2.20 の証明 各 G_i を G の部分 Lie 群と自然にみなす. このとき $H_i := G_i \cap H$ とすると, $H \simeq H_1 \times \cdots \times H_n$ である. 同様に $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}_i$ とみなすと $\mathfrak{h}_i := \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{h}$ は H_i の Lie 環である.

K_i を $\Theta K_i = K_i$ なる G_i の極大コンパクト部分群とすると, $K := K_1 \times \cdots \times K_n$ は G の極大コンパクト部分群で $\Theta K = K$ を満たす.

$G/K \simeq G_1/K_1 \times \cdots \times G_n/K_n$ であり, 定理 1.2 により各 $1 \leq i \leq n$ の (G_i, H_i, Θ_i) に対し上への微分同相 $\pi_i: (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i) \oplus (\mathfrak{h}_i^\perp \cap \mathfrak{p}_i) \ni (Y, Z) \mapsto e^Y e^Z \cdot o_K \in G_i/K_i$ が存在する. $X_i \in \mathfrak{p}_i$ に対し $(Y_i(X_i), Z_i(X_i)) := \pi_i^{-1}(e^{X_i} K_i)$ と定める.

$X \in \mathfrak{p}$ に対し, $X = X^{(1)} + \cdots + X^{(n)}$ を $\mathfrak{p} = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{p}_i$ に対応する X の分解とすると, $Y(\mathbf{R} X)$ が有界であることは各 $Y_i(\mathbf{R} X^{(i)})$ が有界であることと同値である. また定理 2.5 より $Y_i(\mathbf{R} X^{(i)})$ が有界であることと $[X_1^{(i)}, X_2^{(i)}] \neq 0$ あるいは $X_1^{(i)} = 0$ であることが同値である. ここで $X^{(i)} = X_1^{(i)} + X_2^{(i)}$ は $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i) \oplus (\mathfrak{h}_i^\perp \cap \mathfrak{p}_i)$ に対応する $X^{(i)} \in \mathfrak{p}_i$ の分解とする.

したがって, $Y(\mathbf{R} X)$ が非有界であることと $[X_1, X_2] = 0$ かつ $X_1 \neq 0$ であることが同値であり, 系 2.20 が示された. ■

参考文献

- [Ber88] J. N. Bernstein, *On the support of Plancherel measure*, J. Geom. Phys., Vol. 5, n. 4, 1988, pp. 663–710.
- [BBE85] W. Ballmann, M. Brin and P. Eberlein, *Structure of manifolds of nonpositive curvature. I*, Ann. of Math. (2), Vol. 122, No. 1, 1985, pp. 171–203.
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 319, Springer,

- 1999.
- [**Borel–Ji**] A. Borel and L. Ji, Compactifications of Symmetric and Locally Symmetric Spaces, *Mathematics: Theory & Applications*, Birkhäuser Boston, 2006.
 - [**Ebe72a**] P. Eberlein, *Geodesic Flows on Negatively Curved Manifolds I*, *Ann. of Math. (2)*, Vol. 95, 1972, pp. 492–510.
 - [**Ebe72b**] P. Eberlein, *Geodesic Flow in Certain Manifolds without Conjugate Points*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 167, 1972, pp. 151–70.
 - [**EO73**] P. Eberlein and B. O’Neill, *Visibility Manifolds*, *Pacific J. Math.*, Vol. 46, No. 1, 1973, pp. 45–109.
 - [**Hel84**] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis—Integral Geometry, Invariant Differential Operators, and Spherical Functions*, *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol. 83, AMS, 1984.
 - [**Hel01**] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, *GSM*, Vol. 34, AMS, 2001.
 - [**Kob89**] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, *Math. Ann.*, Vol. 285, Issue. 2, 1989, pp. 249–263.
 - [**Kob97**] T. Kobayashi, *Invariant measures on homogeneous manifolds of reductive type*, *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 1997, No. 490–1, 1997, pp. 37–54.
 - [**Yos37**] K. Yosida, *A problem concerning the second fundamental theorem of Lie*, *Proc. Imp. Acad.*, Vol. 13, No. 5, 1937, pp. 152–155.
 - [**Yos38**] K. Yosida, *A Theorem concerning the Semi-Simple Lie Groups*, *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, Vol. 44, 1938, pp. 81–84.