

2025-yil 9-May

Toshkent, O'zbekistan

1-kun

1-masala. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi eng katta c butun sonni toping:

$$x^2 + 4(y + z) = y^2 + 4(z + x) = z^2 + 4(x + y) = c$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi kamida bitta (x, y, z) butun sonlar uchligi mavjud va ushbu tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi (x, y, z) haqiqiy sonlarning barchasi uchun x, y, z butun sonlardir. Javobingizni asoslang.

2-masala. $ABCD$ qavariq to'rtburchakda

$$\angle ADC = 90^\circ, \angle BCD = \angle ABC > 90^\circ, \text{ va } AB = 2CD.$$

C nuqtadan AD tomonga o'tkazilgan parallel to'g'ri chiziq $\angle ABC$ burchakning tashqi bissektrisasini T nuqtada kesadi. Isbotlang: $\angle ATB, \angle TBC, \angle BCD, \angle CDA, \angle DAT$ burchaklarni ikki guruhga ajratish mumkin, bunda ularning har biridagi burchaklar yig'indisi 270° ga teng.

3-masala. Aylana bo'ylab 100 ta savat joylashtirilgan. Ularning har birida kamida bitta shokolad bor. Ma'lumki, barcha savatlardagi jami shokoladlar soni 780 ta. Asad va Sevinch navbat bilan quyidagi o'yinni o'ynayapti, bunda o'yinni Asad boshlaydi. Asad har safar o'zining navbatida bo'sh bo'lmagan 9 ta ketma-ket savatlardagi shokoladlarning barchasini oladi. Sevinch esa har safar o'zining navbatida bo'sh bo'lmagan bitta savatdagi barcha shokoladni oladi, bunda Sevinch tanlagan savatning kamida bitta qo'shni savati bo'sh bo'lishi kerak. Dastlab shokoladlar qanday taqsimlanishidan hamda Sevinch qanday harakatlanishidan qat'iy nazar, Asad eng kamida 700 ta shokolad olishi mumkin ekanini isbotlang.

4-masala. Butun sonlardan tashkil topgan ikkita X va Y to'plamlar uchun, $X \cdot Y$ quyidagicha aniqlanadi: X to'plamdan olingan har bir sonni Y to'plamdan olingan har bir songa ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan barcha turli qiymatlar to'plami. Masalan, agar $X = \{1, 2, 4\}$ va $Y = \{3, 4, 6\}$ bo'lsa, unda $X \cdot Y = \{3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$. Agar $A \cdot B = S$ tenglikni qanoatlantiruvchi, har birida kamida ikkita musbat butun son bo'lgan A va B to'plamlar mavjud bo'lmasa bunda S to'plamni *yaxshi* to'plam deb ataymiz. 2025 dan kichik bo'lmagan barcha mukammal darajalardan tashkil topgan to'plam yaxshi to'plam ekanini isbotlang.

($A, B, A \cdot B$ to'plamlarning har birida barcha elementlar turlicha. Lekin qaydisir ikkitasi yoki uchtasida umumiy elementlari mavjud bo'lishi mumkin. Mukammal daraja — bu n^k ko'rinishidagi son bo'lib, $n > 1$ va $k > 1$ butun sonlardir.)

Til: O'zbek

Ajratilgan vaqt: 4 soat 30 daqiqa.
Har bir masala 10 ball bilan baholanadi.

2025-yil 10-May, Shanba

Toshkent, O'zbekistan

2-kun

5-masala. Sevara qizil ruchkada daftarga 8 ta har xil musbat butun sonlarni yozdi. So'ngra, u qizil ruchkada yozilgan sonlarning ikkitadan olingan barcha 28 ta juftliklarining yig'indilarini ko'k ruchkada yozdi. Ko'k ruchkada yozilgan sonlarning eng ko'pi bilan nechta tub son bo'lishi mumkin? Javobingizni asoslang.

6-masala. Ma'lumki, a, b, c haqiqiy sonlar uchun

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 = 6\sqrt{3} + ac^2 + cb^2 + ba^2$$

tenglik o'rinli. $a^2 + b^2 + c^2$ yig'indining qabul qilishi mumkin bo'lgan eng kichik qiymatini toping. Javobingizni asoslang.

7-masala. $ABCD$ to'rtburchakka markazi O nuqtada bo'lgan aylana tashqi chizilgan, bunda CD diametr emas. AD va BC to'g'ri chiziqlar P nuqtada kesishadi, bunda A nuqta D va P nuqtalar orasida joylashgan, hamda B nuqta C va P nuqtalar orasida joylashgan. Faraz qilaylik, PCD o'tkir burchakli uchburchak va uning balandliklar kesish nuqtasi H nuqta bo'lsin. E va F nuqtalar BC va AD to'g'ri chiziqlarda mos ravishda shunday tanlanganki, bunda $BD \parallel HE$ va $AC \parallel HF$. E nuqtadan o'tuvchi BC to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziq AD to'g'ri chiziqni L nuqtada kesadi, va F nuqtadan o'tuvchi AD to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziq BC to'g'ri chiziqni K nuqtada kesadi. K, L, O nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

8-masala. Stol ustida 100 ta karta teskari qilib qo'yilgan. Madina bu kartalarda 1 dan 100 gacha bo'lgan barcha butun sonlar yozilganini hamda har bir kartada bitta son yozilganini biladi. Har bir qadamda, Madina ixtiyoriy 3 ta kartani tanlaydi va unga Asad bu kartalarda yozilgan sonlardan qaysidir birini aytadi. Ammo Asad qaysi kartadagi sonni Madinaga aytganini aytmaydi. Bir nechta qadamdan so'ng, Madina imkon qadar ko'p sondagi kartalardagi sonlarni aniqlashi lozim. Asad qanday harakatlanishidan qat'iy nazar, bir nechta qadamdan so'ng, Madina eng ko'pi bilan nechta kartadagi sonlarni aniqlay oladi? Javobingizni asoslang.

Til: O'zbek tili

*Arjatilgan: 4 soat 30 daqiqa.
Har bir masala 10 ball bilan baholanadi.*