Пятница, 9 мая 2025 г. *Ташкент, Узбекистан*

Day 1

Задача 1. Найдите наибольшее целое число c, для которого выполняется следующее условие: существует хотя бы одна тройка целых чисел (x, y, z) такая, что

$$x^2 + 4(y+z) = y^2 + 4(z+x) = z^2 + 4(x+y) = c,$$

и все тройки (x, y, z) вещественных чисел, удовлетворяющие этим уравнениям, также состоят только из целых чисел.

Задача 2. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, для которого:

$$\angle ADC = 90^\circ, \quad \angle BCD = \angle ABC > 90^\circ, \quad AB = 2CD.$$

Прямая, проходящая через точку C и параллельная AD, пересекает внешнюю биссектрису угла $\angle ABC$ в точке T. Докажите, что углы $\angle ATB$, $\angle TBC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAT$ можно разбить на две группы так, чтобы сумма углов в каждой группе составляла 270°.

Задача 3. Вдоль окружности расположены 100 корзин, в каждой из которых находится по крайней мере одна конфета. Общее количество конфет равно 780. Асад и Севинч делают ходы поочерёдно, первым начнет Асад. За один ход Асад может взять все конфеты из 9 последовательных непустых корзин, тогда как Севинч может взять все конфеты из одной непустой корзины, у которой хотя бы одна соседняя корзина пуста. Докажите, что Асад может собрать не менее 700 конфет независимо от начального распределения конфетов и действий Севинч.

Задача 4. Для двух множеств целых чисел X и Y определим $X \cdot Y$ как множество всех произведений элементов из X и Y. Например, если $X = \{1, 2, 4\}$ и $Y = \{3, 4, 6\}$, то $X \cdot Y = \{3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$. Множество положительных целых чисел S называется *хорошим*, если не существуют такие множества A и B положительных целых чисел (каждое с как минимум двумя элементами), что $A \cdot B = S$. Докажите, что множество всех совершенных степеней, не меньших 2025, является хорошим.

(В любом из множеств A, B, $A \cdot B$ все элементы различны, но сами множества могут иметь общие элементы. Совершенная степень — это число вида n^k, где $n > 1$ и $k > 1$ — целые числа.)

Язык: Русский

Время: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.

AL-KHWARIZMI
INTERNATIONAL MATHEMATICS AND INFORMATICS OLYMPIAD

Суббота, 10 мая 2025 г. *Ташкент, Узбекистан*

День 2

Задача 5. Севара записывает красным цветом 8 различных положительных целых чисел, а затем синим цветом — 28 сумм все возможных пар этих чисел. Какое наибольшее количество синих чисел могут быть простыми? Обоснуйте ваш ответ.

Задача 6. Пусть a, b, c — действительные числа, такие что

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 = 6\sqrt{3} + ac^2 + cb^2 + ba^2.$$

Найдите наименьшее возможное значение $a^2 + b^2 + c^2$. Обоснуйте ваш ответ.

Задача 7. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник с центром описанной окружности O, причём CD не является диаметром этой окружности. Прямые AD и BC пересекаются в точке P, при этом A лежит между D и P, а B — между C и P. Предположим, что треугольник PCD остроугольный, и пусть H — его ортоцентр. Точки E и F лежат соответственно на прямых BC и AD так, что $BD \parallel HE$ и $AC \parallel HF$. Прямая, проходящая через E и перпендикулярная BC, пересекает AD в точке L, а прямая, проходящая через F и перпендикулярная AD, пересекает BC в точке K. Докажите, что точки K, L, O лежат на одной прямой.

Задача 8. Мадине известно, что на 100 карточках написаны натуральные числа $1, 2, 3, ..., 100$, при этом сами карточки перевернуты. На каждой карточке написано ровно одно число. За один ход Мадине разрешается указать на любые 3 карточки и ей назовут одно число, которое написано на одной из указанных карточек, но не скажут, на какой из карточек конкретно это число написано. После нескольких ходов Мадина должна определить как можно больше чисел на картах. Какое наибольшее количество чисел Мадина может гарантированно определить? Обоснуйте ваш ответ.

Язык: Русский

Время: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.