

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Новосибирский национальный исследовательский государственный  
университет»

## Анализ и восстановление комбинаторных объектов с недостающими элементами на примере латинских квадратов

7 июля 2020 г.

### Научные руководители:

Кочетов Юрий Андреевич, д. ф-м. н.

Горкунов Евгений Владимирович, к. ф-м. н.

### Студент:

Данилко Виталий Романович

НГУ ФИТ, группа 18227

- \* Актуальность исследования
- \* Задачи
- \* Определения
  - \* Латинский квадрат
  - \* Ортогональность
- \* Гипотеза и теорема
- \* Система Боуза
- \* Методы восстановления
  - \* Метод строк и столбцов
  - \* Диагональный метод
- \* Перебор конфигураций
- \* Результаты
- \* Список публикаций

## Связанные проблемы

- \* Восстановление квадратов
- \* Пересечение кодов
- \* Расстояние между функциями

## Задачи

- \* Изучение и анализ свойств системы попарно ортогональных латинских квадратов
- \* Разработка алгоритма восстановления системы ортогональных латинских квадратов
- \* Обоснование разработанного алгоритма
- \* Увеличение производительности алгоритма
- \* Анализ разработанного алгоритма

## Латинский квадрат

Латинский квадрат порядка  $n$  — это таблица  $L = (l_{ij})$  размеров  $n \times n$ , заполненная  $n$  элементами множества  $M$  таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце таблицы каждый элемент из  $M$  встречается в точности один раз.

0	1	2	3	4
4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0

## Ортогональность

Два латинских квадрата  $L = (l_{ij})$  и  $K = (k_{ij})$  порядка  $n$  называются *ортогональными*, если все  $n^2$  упорядоченных пар  $(l_{ij}, k_{ij})$  различны.

0	1	2
1	2	0
2	0	1

0	1	2
2	0	1
1	2	0

(0, 0)	(1, 1)	(2, 2)
(1, 2)	(2, 0)	(0, 1)
(2, 1)	(0, 2)	(1, 0)

Полная система содержит  $n - 1$  попарно ортогональных латинских квадратов порядка  $n$ .

## Гипотеза (С. В. Августинovich, ИМ СО РАН)

Полная система попарно ортогональных латинских квадратов порядка  $n$  при наличии не более  $2n - 1$  неизвестных элементов в каждом из квадратов однозначно восстанавливается.

## Теорема

Полная система попарно ортогональных латинских квадратов порядка  $n \in \{3, 4, 5, 7, 8\}$  при наличии не более  $2n - 1$  неизвестных элементов в каждом из квадратов однозначно восстанавливается.

$$f(x, y) = \alpha x + y, \quad \alpha \in F_p^*$$

$\alpha = 1$

0	1	2	3	4
4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0

$\alpha = 2$

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

$\alpha = 3$

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

$\alpha = 4$

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3



В каждом латинском квадрате системы ищем строку и столбец, содержащий только один неизвестный элемент. Повторяем, пока любая строка и любой столбец не будут содержать либо 0, либо не менее 2 неизвестных элементов.

			3	4	
			4	0	
2		4			
3	4	0	1	2	
4	0	1	2	3	

 $\Rightarrow$ 

			3	4	
			4	0	
2		4	0	1	
3	4	0	1	2	
4	0	1	2	3	

 $\Rightarrow$ 

			3	4	
			4	0	
2	3	4	0	1	
3	4	0	1	2	
4	0	1	2	3	

Ищем в каждом латинском квадрате системы диагонали размера  $n - 1$ . В других квадратах системы это же множество клеток образует трансверсаль, которую мы тоже можем однозначно восстановить, заполнив неизвестную клетку элементом, отсутствующим в рассматриваемой трансверсали.

0	1			
1	2			
2	3			
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

0	1			
3	4			
1	2			
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1



0	1	2		
1	2			
2	3			
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

0	1	2		
3	4			
1	2			
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

$n$	Количество конфигураций
3	126
4	11 440
5	2 042 975
7	262 596 783 764
8	159 518 999 862 720
9	128 447 994 798 305 325
11	169 758 547 725 351 091 518 726
13	495 874 093 230 232 452 749 553 398 586
16	8 283 675 595 268 374 292 919 471 912 522 442 632 960

## Программа

- \* Написана система распределённых вычислений на добровольной основе, состоящая из серверной и клиентской части
- \* Для реализации алгоритма использованы Apache MXNet и NumPy

## Доказанные свойства

- \* Если конфигурация восстанавливается, то восстанавливается конфигурация являющаяся её частью
- \* Приведенная конфигурация размера  $2n - 3$  и меньше дополняется до конфигурации размера либо  $2n - 2$ , либо  $2n - 1$
- \*  $n + 2$  неизвестных элементов восстанавливаются однозначно
- \*  $2n - 1$  неизвестных элементов, расположенных в двух строках или в двух столбцах, восстанавливаются однозначно
- \* Полная линейная система попарно ортогональных латинских квадратов порядка  $n$  и эквивалентная ей при наличии не более  $2n - 1$  неизвестных элементов однозначно восстанавливается в своём классе эквивалентности.

## Полученные результаты

- \* Изучены системы попарно ортогональных латинских квадратов и доказан ряд утверждений об их восстановлении
- \* Разработан алгоритм восстановления таких систем
- \* Доказана математическая корректность алгоритма
- \* На основе исследованных свойств достигнуто ускорение исходного алгоритма и вычислен коэффициент ускорения
- \* Подтверждена гипотеза о восстановлении системы попарно ортогональных латинских квадратов порядка  $n \in \{3, 4, 5, 7, 8\}$

- \* Данилко В. Р. Восстановление системы попарно ортогональных латинских квадратов по частичной информации // Мальцевские чтения. Международная конференция (Новосибирск, 19–22 ноября 2018 г.). Новосибирск, 2018 г. С. 87.
- \* Gorkunov E. V., Danilko V. R. Reconstructing sets of Latin squares, linear and equivalent to linear codes // Proc. XVI Int. Symp. “Problems of Redundancy in Information and Control Systems” (Moscow, Russia, Oct. 21–25, 2019). 2019. P. 47–51.

Спасибо за внимание!