Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Анализ и восстановление комбинаторных объектов с недостающими элементами на примере латинских квадратов

Данилко Виталий Романович

7 июля 2020 г.

Научные руководители:
Кочетов Юрий Андреевич, д. ф-м. н.
Горкунов Евгений Владимирович, к. ф-м. н.

Студент:
Данилко Виталий Романович
НГУ ФИТ, группа 18227

Актуальность исследования

Связанные проблемы

* Восстановление квадратов
* Пересечение кодов
* Расстояние между функциями

Задачи

Задачи

* Изучение и анализ свойств системы попарно ортогональных латинских квадратов
* Разработка алгоритма восстановления системы ортогональных латинских квадратов
* Обоснование разработанного алгоритма
* Увеличение производительности алгоритма
* Анализ разработанного алгоритма

Определения

Латинский квадрат

Латинский квадрат порядка n — это таблица $L = (l_{ij})$ размеров $n \times n$, заполненная n элементами множества M таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце таблицы каждый элемент из M встречается в точности один раз.

0	1	2	3	4
4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0

Определения

Ортогональность

Два латинских квадрата $L = (l_{ij})$ и $K = (k_{ij})$ порядка n называются ортогональными, если все n^2 упорядоченных пар (l_{ij}, k_{ij}) различны.

0	1	2
1	2	0
2	0	1

0	1	2
2	0	1
1	2	0

$(0,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$
$(1,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$
$(2,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$

Полная система содержит $n - 1$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n.

Гипотеза и теорема

Гипотеза (С. В. Августинович, ИМ СО РАН)

Полная система попарно ортогональных латинских квадратов порядка n при наличии не более $2n-1$ неизвестных элементов в каждом из квадратов однозначно восстанавливается.

Теорема

Полная система попарно ортогональных латинских квадратов порядка $n \in \{3, 4, 5, 7, 8\}$ при наличии не более $2n-1$ неизвестных элементов в каждом из квадратов однозначно восстанавливается.

Система Боуза

$$f(x, y) = \alpha x + y, \quad \alpha \in F_p^*$$

$\alpha = 1$

0	1	2	3	4
4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0

$\alpha = 2$

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

$\alpha = 3$

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

$\alpha = 4$

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

Метод строк и столбцов

В каждом латинском квадрате системы ищем строку и столбец, содержащий только один неизвестный элемент. Повторяем, пока любая строка и любой столбец не будут содержать либо 0, либо не менее 2 неизвестных элементов.

			3	4
			4	0
2		4		
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

$\Rightarrow$

			3	4
			4	0
2		4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

$\Rightarrow$

			3	4
			4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

Диагональный метод

Ищем в каждом латинском квадрате системы диагонали размера $n-1$. В других квадратах системы это же множество клеток образует трансверсаль, которую мы тоже можем однозначно восстановить, заполнив неизвестную клетку элементом, отсутствующим в рассматриваемой трансверсали.

0	1			
1	**2**			
2	3			
3	4	0	1	**2**
4	0	1	**2**	3

0	1			
3	**4**			
1	2			
4	0	1	2	**3**
2	3	4	**0**	1

$\Downarrow$

0	1	**2**		
1	**2**			
2	3			
3	4	0	1	**2**
4	0	1	**2**	3

0	1	**2**		
3	**4**			
1	2			
4	0	1	2	**3**
2	3	4	**0**	1

Полный перебор

n	Количество конфигураций
3	126
4	11 440
5	2 042 975
7	262 596 783 764
8	159 518 999 862 720
9	128 447 994 798 305 325
11	169 758 547 725 351 091 518 726
13	495 874 093 230 232 452 749 553 398 586
16	8 283 675 595 268 374 292 919 471 912 522 442 632 960

Программа

Программа

* Написана система распределённых вычислений на добровольной основе, состоящая из серверной и клиентской части
* Для реализации алгоритма использованы Apache MXNet и NumPy

Доказанные свойства

Доказанные свойства

* Если конфигурация восстанавливается, то восстанавливается конфигурация являющаяся её частью
* Приведенная конфигурация размера $2n-3$ и меньше дополняется до конфигурации размера либо $2n-2$, либо $2n-1$
* $n+2$ неизвестных элементов восстанавливаются однозначно
* $2n-1$ неизвестных элементов, расположенных в двух строках или в двух столбцах, восстанавливаются однозначно
* Полная линейная система попарно ортогональных латинских квадратов порядка n и эквивалентная ей при наличии не более $2n-1$ неизвестных элементов однозначно восстанавливается в своём классе эквивалентности.

Полученные результаты

- Изучены системы попарно ортогональных латинских квадратов и доказан ряд утверждений об их восстановлении
- Разработан алгоритм восстановления таких систем
- Доказана математическая корректность алгоритма
- На основе исследованных свойств достигнуто ускорение исходного алгоритма и вычислен коэффициент ускорения
- Подтверждена гипотеза о восстановлении системы попарно ортогональных латинских квадратов порядка $n \in \{3, 4, 5, 7, 8\}$

Публикации

* Данилко В. Р. Восстановление системы попарно ортогональных латинских квадратов по частичной информации // Мальцевские чтения. Международная конференция (Новосибирск, 19–22 ноября 2018 г.). Новосибирск, 2018 г. С. 87.
* Gorkunov E. V., Danilko V. R. Reconstructing sets of Latin squares, linear and equivalent to linear codes // Proc. XVI Int. Symp. “Problems of Redundancy in Information and Control Systems” (Moscow, Russia, Oct. 21–25, 2019). 2019. P. 47–51.

Спасибо за внимание!

Новосибирский государственный университет
*Настоящая наука