

# O základných vlastnostiach lineárnych systémov

## 1 Stabilita

### 1.1 Lineárny systém

Predpokladajme, že lineárny systém je opísateľný diferenciálnou rovnicou:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = 0 \quad (1)$$

kde  $(n)$  označuje  $n$ -tú deriváciu podľa času. Všeobecné riešenie tejto rovnice je možné nájsť ako lineárnu kombináciu všetkých riešení v tvare:

$$y = C_1(t) \exp(\lambda_1 t) + C_2(t) \exp(\lambda_2 t) + \dots + C_n(t) \exp(\lambda_n t) \quad (2)$$

kde  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sú vlastné čísla (vo všeobecnosti sú komplexné), získame ich z charakteristickej rovnice:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3)$$

Koeficienty  $C_i(t)$  sú vo všeobecnosti polynómy, ktorých koeficienty sú komplexné čísla. Stupeň jednotlivých polynómov sa určuje podľa násobnosti príslušných vlastných čísel. V prípade, že všetky vlastné čísla sú rozdielne, tak ide o konštanty. V prípade dvojnásobného vlastného čísla  $\lambda_i$  koeficient  $C_i$  bude polynóm prvého rádu a tak ďalej.

Aby všeobecné riešenie (2) bolo stabilné (konvergovalo do 0) je podstatné, aby každá exponenciála konvergovala do 0, koeficienty  $C_i(t)$  nevplyvajú na stabilitu, pretože sú to polynómy, ktoré sú dominované exponenciálnou funkciou. Každé riešenie môžeme zapísať v takomto tvare:

$$\begin{aligned} y &= C \exp(\lambda t) = C \exp(\operatorname{Re}\{\lambda\}t + i \operatorname{Im}\{\lambda\}t) \\ &= C \exp(\operatorname{Re}\{\lambda\}t) [\cos(\operatorname{Im}\{\lambda\}t) + i \sin(\operatorname{Im}\{\lambda\}t)] \end{aligned} \quad (4)$$

kde vidíme, že imaginárna časť vlastného čísla je argumentom funkcií kosínus a sínus. Tieto funkcie sú ohraničené, čiže imaginárna časť nemá vplyv na stabilitu, spôsobuje ale kmity v riešení. Reálna časť vlastného čísla je argumentom exponenciálnej funkcie. Exponenciálna funkcia konverguje do 0 v prípade, že jej argument je záporný. Z toho vyplýva nasledujúce tvrdenie:

**Veta 1.1.** Lineárny systém rádu  $n$  s vlastnými číslami  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  je

1. stabilný pokiaľ pre všetky vlastné čísla  $\lambda_i$ :

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5a)$$

2. na hranici stability pokiaľ aspoň pre jedno vlastné číslo  $\lambda_i$ :

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5b)$$

3. nestabilný pokiaľ aspoň pre jedno vlastné číslo  $\lambda_i$ :

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5c)$$

V prípade stavového systému:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (6)$$

môžeme všeobecné riešenie zapísať v tvare:

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}(t - t_i))\mathbf{x}(t_i) \quad (7)$$

Rovnako platí tvrdenie (1.1) a vlastné čísla môžeme získať z charakteristickej rovnice:

$$\det \{\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\} = 0 \quad (8)$$

## 1.2 Stabilita vo všeobecnosti - Lyapunovova teória stability

Vyšetrovanie stability tak ako je popísané v časti 1.1 platí len pre lineárne systémy. V prípade, že chceme vyšetriť stabilitu všeobecného systému v tvare:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

musíme aplikovať Lyapunovovu teóriu stability. Táto teória je použiteľná aj na lineárne systémy.

**Definícia 1.1** (Stabilita podľa Lyapunova, priama metóda). Dynamický systém (9) je lokálne stabilný pokiaľ existuje Lyapunovova funkcia  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , pre ktorú platí:

1. V rovnovážnom stave  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  platí:

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad (10a)$$

2. Lyapunovova funkcia je pozitívne definitná:

$$V(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (10b)$$

3. Časová derivácia Lyapunovovej funkcie je negatívne semidefinitná:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x^i} f^i(\mathbf{x}) = \nabla V^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (10c)$$

V prípade asymptotickej stability musí byť negatívne definitná:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \quad \dot{V}(\mathbf{0}) = 0 \quad (10d)$$

V diskretnom prípade sa derivácia nahrádza diferenciou, ostatné tvrdenia platia rovnako:

$$V(\mathbf{x}_{n+1}) - V(\mathbf{x}_n) < 0 \quad (10e)$$

4. Pokiaľ je  $V(\mathbf{x})$  radiálne neohraničená:

$$\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad (10f)$$

tak hovoríme, že je systém globálne stabilný.

## 1.3 Diskrétny systém

Vyšetríme teraz pomocou Lyapunovovej teórie stability stabilitu lineárneho diskretného systému v tvare:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n \quad (11)$$

Zvolíme kandidáta na Lyapunovovu funkciu v tvare:

$$V(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n^\top \mathbf{P} \mathbf{x}_n \quad (12)$$

kde  $\mathbf{P}$  musí byť symetrická pozitívne definitná matica, aby bola splnená podmienka (10b)

Ďalej musí byť splnená podmienka (10e), dosadíme teda (12):

$$\mathbf{x}_{n+1}^\top \mathbf{P} \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n^\top \mathbf{P} \mathbf{x}_n < 0 \quad (13)$$

a do (13) dosadíme rovnicu systému (11) a stavové vektory vyberieme pred zátvorku  $\mathbf{x}_n$ :

$$\mathbf{x}_n^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}) \mathbf{x}_n < 0 \quad (14)$$

Rovnica (14) musí platiť pre všetky  $\mathbf{x}_n$ , teda musí platiť:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} < 0 \quad (15)$$

Nerovnicu (15) je náročné riešiť, môžeme ju ale ekvivalentne zapísať ako rovnicu:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (16)$$

kde  $\mathbf{Q}$  je pozitívne definitná matica. Rovnica (16) sa nazýva diskretná Lyapunovova rovnica, pokiaľ existuje riešenie  $\mathbf{P}$ , ktoré je pozitívne definitné, tak systém (11) je stabilný.

## 1.4 Spojitý systém

Pomocou Lyapunovovej teórie stability vyšetríme aj stabilitu lineárneho spojitého systému v tvare:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (17)$$

Zvolíme kandidáta na Lyapunovovu funkciu tak, aby bola splnená podmienka (10b):

$$V = \mathbf{x}^\top \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (18)$$

kde  $\mathbf{P}$  musí byť symetrická pozitívne definitná matica.

Vypočítame časovú deriváciu (18) a vyšetríme podmienku (10d):

$$\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} < 0 \quad (19)$$

Do získaného výrazu (19) dosadíme rovnicu systému (17):

$$\mathbf{x}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} < 0 \quad (20)$$

Rovnica (20) musí byť splnená pre každý stav  $\mathbf{x}$  teda:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (21)$$

Nerovnicu (21) je náročné riešiť, môžeme ju ale ekvivalentne zapísať ako rovnicu:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (22)$$

kde  $\mathbf{Q}$  je symetrická pozitívne definitná matica. Rovnica (22) sa nazýva spojitá Lyapunovova rovnica, pokiaľ existuje riešenie  $\mathbf{P}$ , ktoré je pozitívne definitné, tak systém (17) je stabilný.