ÚSTAV ROBOTIKY A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

urk.fei.stuba.sk
február 2024

KUT001

O lineárnych zobrazeniach

1 Lineárne zobrazenie

Lineárnosť (lineárne zobrazenie) je matematická vlastnosť funkcií/systémov. Lineárne zobrazenie je transformácia $U \to V$, ktorá zobrazí vektory z vektorového priestoru V do vektorového priestoru U, pričom zachováva operácie súčtu vektorov a násobenia vektorom skalárom.

Definícia 1.1. (Lineárne zobrazenie) Nech U a V sú vektorové priestory nad poľom K Hovoríme, že $f : V \to U$ je lineárne zobrazenie ak pre ľubovoľné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a ľubovoľný skalár $\alpha \in K$ platí:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \tag{1a}$$

$$f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \tag{1b}$$

Vlastnosť (1a) nazývame *aditivitou* a vlastnosť (1b) nazývame *homogenitou.*

Príklad 1.1. Uvedieme príklad a overíme, či funkcia:

$$f(x) = ax \tag{2a}$$

je lineárna.

Najskôr overíme aditivitu, výpočet realizujeme pre ľavú a pravú stranu rovnice (1a) zvlášť:

$$f(x + y) = a(x + y) = ax + ay \tag{2b}$$

$$f(x) + f(y) = ax + ay \tag{2c}$$

Vidíme, že obidve strany rovnice sa rovnajú, aditivita je splnená. Ďalej overujeme homogenitu (1b), keďže a a α sú čísla (reálne/komplexné), tak môžeme písať:

$$f(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax) \tag{2d}$$

$$\alpha f(x) = \alpha(ax) \tag{2e}$$

Teda aj homogenita je splnená a funkcia (2a) je lineárne zobrazenie.

Príklad 1.2. Uvedieme teraz príklad nelineárnej funkcie:

$$f(x) = x^2 \tag{3a}$$

Aditivita:

$$f(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{3b}$$

$$f(x) + f(y) = x^2 + y^2 \tag{3c}$$

Homogenita:

$$f(\alpha x) = (\alpha x)^2 = \alpha^2 x^2 \tag{3d}$$

$$\alpha f(x) = \alpha x^2 \tag{3e}$$

Ani jedna z vlastností nie je splnená, funkcia je teda nelineárna.

Príklad 1.3. Nakoniec ešte ukážeme príklad pre funkciu:

$$f(x) = ax + b \tag{4a}$$

Funkciu (2a) sme rozšírili o konštantu b a overíme teda či platí aditivita a homogenita.

Aditivita:

$$f(x+y) = a(x+y) + b = ax + ay + b \tag{4b}$$

$$f(x) + f(y) = ax + b + ay + b = ax + ay + 2b \tag{4c}$$

Homogenita:

$$f(\alpha x) = a(\alpha x) + b = \alpha(ax) + b \tag{4d}$$

$$\alpha f(x) = \alpha(ax + b) = \alpha(ax) + \alpha b \tag{4e}$$

Z výpočtu vidíme, že ani jedna z vlastností neplatí. Ak vám niekto niekedy tvrdil, že funkcie typu (4a) sú lineárne tak vám klamal. Napriek tomu je častokrát podstatné len správanie sa funkcií vzhľadom na deriváciu a funkcie (2a) a (4a) sa vzhľadom k derivácii správajú rovnako. Navyše voľbou vhodnej sústavy je možné funkciu (4a) pretransformovať na lineárnu. Táto skupina funkcií sa nazýva afínne funkcie. Tento pojem je zovšeobecnením linearity.

2 Afínne zobrazenie

Definícia 2.1. (Afínne zobrazenie) Nech U a V sú vektorové priestory nad poľom K. Hovoríme, že $f : V \to U$ je afínne zobrazenie ak pre ľubovoľné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ a ľubovoľný skalár $\alpha \in K$ platí:

$$f(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) + f(\mathbf{z}) \tag{5a}$$

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y}) \tag{5b}$$