ÚSTAV ROBOTIKY
A KYBERNETIKY

urk.fei.stuba.sk
február 2024

KUT001

O riešení lineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu

1 Lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu

Diferenciálnu rovnicu prvého rádu môžeme zapísať vo všeobecnom tvare:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t) \tag{1}$$

kde $a(t)$ a $b(t)$ sú koeficienty, ktoré sú časovo premenlivé a $u(t)$ je časovo závislá funkcia. V prípade modelovania systémov predstavuje vstup do systému. Cieľom riešenia diferenciálnej rovnice (1) je nájsť také funkcie $x(t)$, ktoré túto rovnicu spĺňajú. Opäť v prípade modelovania systémov $x(t)$ predstavuje stav systému.

Keďže riešime lineárnu diferenciálnu rovnicu jej všeobecné riešenie môžeme nájsť poskladaním čiastkových riešení:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{2}$$

kde x_h sa nazýva homogénne riešenie a získame ho riešením zhomogenizovanej rovnice. Riešenie x_p je partikulárne riešenie, ktoré môžeme získať metódou variácie konštánt.

Najskôr získame homogénne riešenie. Rovnicu (1) zhomogenizujeme tým, že uvažujeme $u(t) = 0$:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) \tag{3}$$

Zhomogenizovaná rovnica (3) je separovateľná:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t) \longrightarrow \frac{dx(t)}{x(t)} = a(t)dt \tag{4}$$

Následne integrujeme obidve strany rovnice (4):

$$\ln\left(|x(t_f)|\right) + K = \int_{t_i}^{t_f} a(t)\,dt \tag{5}$$

$$x(t_f) = \exp(-K)\exp\left(+\int_{t_i}^{t_f} a(t)\,dt\right) \tag{6}$$

$$L = \exp(-K) \tag{7}$$

$$x_h(t) = L\exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(t)\,dt\right) \tag{8}$$

$$x_p(\tau) = L(\tau)\exp\left(\int_{t_i}^{\tau} a(t)\,dt\right) \tag{9}$$

$$\dot{x}_p(\tau) = \dot{L}(\tau)\exp\left(\int_{t_i}^{\tau} a(\tau)\,dt\right) + L(\tau)a(\tau)\exp\left(\int_{t_i}^{\tau} a(\tau)\,dt\right) \tag{10}$$

$$\dot{L}(t) = \exp\left(-\int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt\right) b(t)u(t) \tag{11}$$

$$L(t) = \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(-\int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t)\, dt + M \tag{12}$$