STU FEI
ÚSTAV ROBOTIKY A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

júl 2024
github.com/PracovnyBod/KUT
MT

v0.9
KUT006

O riešení homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami

Tento text je spracovaný najmä podľa učebného materiálu [1]. Cieľom je poskytnúť prehľad v oblasti klasického spôsobu riešenia homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami.

V princípe je možné tu uvedenú metódu aplikovať aj na diferenciálne rovnice iného rádu ako druhého. Rovnica druhého rádu však vhodne ilustruje podstatu hľadania riešenia.

1 Štruktúra riešení homogénnej diferenciálnej rovnice

Najprv zdôrazníme prívlastok *homogénna* v zmysle, že predmetom tohto textu je *všeobecné riešenie* dif. rovnice. Takéto riešenie je možné ďalej konkretizovať v zmysle začiatočných (prípadne okrajových) podmienok. Nezaoberáme sa tu tzv. *partikulárnym* riešením, ktoré je dané prítomnosťou inej funkcie (času) ako je hľadaná neznáma funkcia.

Uvažujme diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{1}$$

kde $y(t)$ je neznáma funkcia času. Túto funkciu hľadáme tak aby bola riešením rovnice (1), teda tak aby po dosadení $y(t)$ a jej derivácií do rovnice (1) bola rovnica platná. Pre úplnosť, $a_1 \in \mathbb{R}$ a $a_2 \in \mathbb{R}$ sú konštantné koeficienty.

1.1 Fundamentálne riešenia

Všeobecné riešenie dif. rovnice (1) nájdeme tak, že najprv hľadáme dve lineárne nezávislé riešenia. Tieto riešenia nazývame *fundamentálnymi riešeniami*. Ich lineárna kombinácia je potom všeobecným riešením dif. rovnice (1).

Nech $y_1(t)$ a $y_2(t)$ sú dve riešenia dif. rovnice (1). Potom každá ich lineárna kombinácia $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ je tiež riešením dif. rovnice (1) (vyplýva to z lineárnosti derivácie).

Špeciálne, ak $c_1 = c_2 = 0$ dostaneme riešenie $y(t) = 0$. Nazýva sa nulovým riešením alebo *triviálnym riešením*.

Urobme nasledujúcu úvahu. Zoberme dve riešenia $y_1(t)$ a $y_2(t)$, ktoré spĺňajú začiatočné podmienky

$$y_1(0) = 1 \qquad y_2(0) = 0 \tag{2a}$$

$$\dot{y}_1(0) = 0 \qquad \dot{y}_2(0) = 1 \tag{2b}$$

Tieto riešenia sú tým určené jednoznačne v zmysle, že žiadne z nich nie je násobkom druhého. Tieto dve riešenia sú teda lineárne nezávislé.

Majme teda dve riešenia $y_1(t)$ a $y_2(t)$, a uvažujme ďalšie riešenie $y_3(t)$ spĺňajúce začiatočné podmienky

$$y_3(0) = y_0 \tag{3a}$$
$$\dot{y}_3(0) = z_0 \tag{3b}$$

Skúsme ukázať, že riešenia $y_1(t)$, $y_2(t)$ a $y_3(t)$ sú navzájom lineárne závislé, teda existujú $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ také, že

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \tag{4}$$

Dosadením začiatočných podmienok do rovnice (4) dostaneme

$$y_0 = \alpha y_1(0) + \beta y_2(0) \tag{5a}$$
$$z_0 = \alpha \dot{y}_1(0) + \beta \dot{y}_2(0) \tag{5b}$$

Čísla α a β sú riešením tejto sústavy rovníc a sústava má jediné riešenie ak determinant tejto sústavy je nenulový.

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ \dot{y}_1(0) & \dot{y}_2(0) \end{vmatrix} = y_1(0)\dot{y}_2(0) - y_2(0)\dot{y}_1(0) \neq 0 \tag{6}$$

Pre prípad (2) je determinant rovný 1.

Ak by sme predpokladali, že

$$y_1(0) = 1 \qquad y_2(0) \neq 0 \tag{7a}$$
$$\dot{y}_1(0) \neq 0 \qquad \dot{y}_2(0) = 1 \tag{7b}$$

tak determinant (6) môže byť nulový. V tejto situácii ak $y_2(0) = 0$ a $\dot{y}_2(0) = 0$ tak $y_2(t) = 0$. Taktiež ak $y_2(0) = 0$ a $\dot{y}_2(0) \neq 0$ a $y_1(0) = 0$ tak existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že

$$y_1(0) = c y_2(0) \tag{8}$$
$$\dot{y}_1(0) = c \dot{y}_2(0) \tag{9}$$

a riešenia $y_1(t)$ a $y_2(t)$ by boli lineárne závislé. Pripomeňme, že hovoríme o situácii, že determinant (6) je nulový.

Inými slovami, pri nulovom determinante (6) môžeme písať

$$\frac{y_1(0)}{y_2(0)} = \frac{\dot{y}_1(0)}{\dot{y}_2(0)} = c \tag{10}$$

Zároveň vieme, že $y_2(t)$ je riešenie dif. rovnice. Potom aj $\tilde{y}(t) = c y_2(t)$ je riešenie a tiež platí $\tilde{y}(0) = c y_2(0)$, $\dot{\tilde{y}}(0) = c\dot{y}_2(0)$ a teda je možné aby $\tilde{y}(t) = y_1(t)$. Znamenalo by to, že $y_1(t)$ a $y_2(t)$ sú lineárne závislé, čo je v rozpore s východiskom, že sú lineárne nezávislé.

Ukázali sme, že determinant (6) je nenulový, tak riešenia $y_1(t)$ a $y_2(t)$ sú lineárne nezávislé.

Ďalej je možné konštatovať, že mať jedno riešenie v tomto prípade nestačí. Potrebujeme aspoň dve riešenia. Všeobecné riešenie, alebo inak povedané, všetky riešenia dif. rovnice (1), získame ako lineárnu kombináciu dvoch lineárne nezávislých riešení.

Dve lineárne nezávislé riešenia dif. rovnice nazývame *fundamentálnymi riešeniami* alebo *bázou riešení* dif. rovnice (pozri tiež [2]). Je možné ukázať, že riešenia dif. rovnice tvoria vektorový priestor a ten má vždy bázu [2].

Determinant (6) sa nazýva Wronského determinant, v tomto prípade funkcií $y_1(t)$ a $y_2(t)$, a rozhoduje o lineárnej nezávislosti týchto funkcií.

Všeobecným riešením $y(t)$ nazývame lineárnu kombináciu dvoch fundamentálnych riešení $y_{f1}(t)$ a $y_{f2}(t)$, teda $y(t) = c_1 y_{f1}(t) + c_2 y_{f2}(t)$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú ľubovoľné konštanty.

Nepoznáme všeobecnú metódu, pomocou ktorej by sme vždy vedeli nájsť fundamentálne riešenia. V praxi sa využívajú rôzne postupy, ktoré sú zvyčajne založené na skúšaní rôznych tvarov riešení. Pri lineárnej diferenciálnej rovnici s konštantnými koeficientmi je možné nájsť riešenia v tvare exponenciálnej funkcie. V prípade dif. rovnice (1) je možné hľadať riešenie v tvare $y(t) = e^{st}$, kde $s \in \mathbb{C}$.

2 Všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice

Uvažujme diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{11}$$

kde $a_1 \in \mathbb{R}$ a $a_2 \in \mathbb{R}$.

Riešenie rovnice (11) hľadajme v tvare

$$y(t) = e^{st} \tag{12}$$

kde $s \in \mathbb{C}$. Potom

$$\dot{y}(t) = se^{st} \tag{13}$$

$$\ddot{y}(t) = s^2 e^{st} \tag{14}$$

Dosadením do rovnice (11) máme

$$s^2 e^{st} + a_1 s e^{st} + a_0 e^{st} = 0 \tag{15a}$$

$$e^{st}(s^2 + a_1 s + a_0) = 0 \tag{15b}$$

Keďže $e^{st} \neq 0$, pretože nehľadáme triviálne riešenie, tak pre nájdenie riešenia musí platiť

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{16}$$

Charakteristický polynóm a korene charakteristického polynómu

Rovnica (16) sa nazýva *charakteristická rovnica* dif. rovnice (11) a jej riešenia s_1 a s_2 sú *charakteristickými číslami* dif. rovnice (11). Inými slovami polynóm $s^2 + a_1 s + a_0$ sa nazýva *charakteristický polynóm* dif. rovnice (11).

Funkcia e^{st} je riešením dif. rovnice (11) ak s je riešením algebraickej rovnice (16). Inými slovami, e^{st} je riešením dif. rovnice (11) ak s je koreňom charakteristického polynómu dif. rovnice.

Vo všeobecnosti môžeme určiť toľko navzájom odlišných funkcií e^{st}, teda riešení diferenciálnej rovnice, koľko koreňov má charakteristický polynóm. V tomto prípade dif. rovnice druhého rádu sú to dva korene. Môžu byť

- dva navzájom rôzne reálne korene,
- jeden dvojnásobný reálny koreň,
- dva komplexne združené korene.

Tieto prípady vedú k rôznym typom riešení dif. rovnice.

2.1 Prípad: dva navzájom rôzne reálne korene

Nech charakteristický polynóm má dva navzájom rôzne reálne korene s_1 a s_2. Potom všeobecné riešenie dif. rovnice (11) je

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \tag{17}$$

kde uvažujeme, že fundamentálnymi riešeniami sú

$$y_{f1}(t) = e^{s_1 t} \tag{18a}$$

$$y_{f2}(t) = e^{s_2 t} \tag{18b}$$

Ich Wronskián (Wronského determinant) je

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} e^{s_1 t} & e^{s_2 t} \\ s_1 e^{s_1 t} & s_2 e^{s_2 t} \end{vmatrix} \\ &= e^{s_1 t} s_2 e^{s_2 t} - e^{s_2} s_1 e^{s_1 t} \\ &= e^{(s_1+s_2)t}(s_2 - s_1) \neq 0 \end{aligned} \tag{19}$$

čím sme ukázali, že sú lineárne nezávislé a potvrdili, že všeobecné riešenie dif. rovnice (11) v tomto prípade je

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \tag{20}$$

2.2 Prípad: jeden dvojnásobný reálny koreň

Nech charakteristický polynóm má koreň s. Riešením dif. rovnice (11) je $y_{f1} = e^{st}$. Pre nájdenie všeobecného riešenia však potrebujeme aj druhé fundamentálne riešenie. Ukážme, že $y_{f2} = te^{st}$ je tiež riešením dif. rovnice (11). Platí

$$\dot{y}_{f2} = e^{st} + ste^{st} \tag{21a}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_{f2} &= e^{st}s + s\left(e^{st} + te^{st}s\right) \\ &= se^{st} + se^{st} + s^2te^{st} \\ &= 2se^{st} + s^2te^{st}\end{aligned} \tag{21b}$$

Dosadením do dif. rovnice (11)

$$\left(2se^{st} + s^2te^{st}\right) + a_1\left(e^{st} + ste^{st}\right) + a_0te^{st} = 0 \tag{22a}$$

$$2se^{st} + s^2te^{st} + a_1e^{st} + a_1ste^{st} + a_0te^{st} = 0 \tag{22b}$$

$$e^{st}\left(2s + s^2t + a_1 + a_1st + a_0t\right) = 0 \tag{22c}$$

$$e^{st}\left(t\left(s^2 + a_1s + a_0\right) + 2s + a_1\right) = 0 \tag{22d}$$

Keďže

$$D = a_1^2 - 4a_0 = 0 \tag{23}$$

$$s = -\frac{a_1}{2} \tag{24}$$

tak

$$2s + a_1 = 2\left(-\frac{a_1}{2}\right) + a_1 = 0 \tag{25}$$

a teda $y_{f2} = te^{st}$ je riešením dif. rovnice (11). Máme teda dve fundamentálne riešenia v tvare

$$y_{f1} = e^{st} \tag{26a}$$

$$y_{f2} = te^{st} \tag{26b}$$

a ostáva ukázať, že sú lineárne nezávislé. Ich Wronského determinant je

$$\begin{aligned}W(t) &= \begin{vmatrix} e^{st} & te^{st} \\ se^{st} & e^{st} + ste^{st}\end{vmatrix} \\ &= e^{st}\left(e^{st} + ste^{st}\right) - te^{st}se^{st} \\ &= e^{2st} + ste^{2st} - ste^{2st} \\ &= e^{2st} \neq 0\end{aligned} \tag{27}$$

čím sme ukázali, že sú lineárne nezávislé. Všeobecné riešenie dif. rovnice (11) v tomto prípade je v tvare

$$y(t) = c_1e^{st} + c_2te^{st} \tag{28}$$

2.3 Prípad: dva komplexne združené korene

Nech charakteristický polynóm má dva komplexne združené korene

$$s_1 = a + jb \tag{29a}$$

$$s_2 = a - jb \tag{29b}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a j je imaginárna jednotka.

V tomto prípade funkcie $e^{(a+jb)t}$ a $e^{(a-jb)t}$ nie sú reálne funkcie. S využitím Eulerovho vzťahu

$$\begin{aligned}e^{s_1t} = e^{at}e^{jbt} &= e^{at}\left(\cos(bt) + j\sin(bt)\right) \\ &= e^{at}\cos(bt) + je^{at}\sin(bt)\end{aligned} \tag{30a}$$

$$\begin{aligned}e^{s_2t} = e^{at}e^{-jbt} &= e^{at}\left(\cos(bt) - j\sin(bt)\right) \\ &= e^{at}\cos(bt) - je^{at}\sin(bt)\end{aligned} \tag{30b}$$

Uvedené funkcie sú teda lineárnou kombináciou funkcií

$$y_{f1}(t) = e^{at}\cos(bt) \tag{31a}$$

$$y_{f2}(t) = e^{at}\sin(bt) \tag{31b}$$

Ukážme, že $y_{f1}(t)$ a $y_{f2}(t)$ sú riešeniami dif. rovnice (11), a že sú lineárne nezávislé.

Keďže $s_1 = a + jb$ je koreňom charakteristického polynómu, tak

$$(a+jb)^2 + a_1(a+jb) + a_0 = 0 \tag{32a}$$

$$a^2 + 2ajb - b^2 + a_1 a + a_1 jb + a_0 = 0 \tag{32b}$$

odkiaľ

$$j(2ab + a_1 b) = 0 \tag{33a}$$

$$a^2 - b^2 + a_1 a + a_0 = 0 \tag{33b}$$

Vypočítajme derivácie $y_{f1}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{f1}(t) &= e^{at}a\cos(bt) + e^{at}(-\sin(bt))\,b \\ &= ae^{at}\cos(bt) - be^{at}\sin(bt) \end{aligned} \tag{34a}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{f1}(t) &= a\left(e^{at}a\cos(bt) - e^{at}b\sin(bt)\right) - b\left(e^{at}a\sin(bt) + e^{at}b\cos(bt)\right) \\ &= a^2e^{at}\cos(bt) - abe^{at}\sin(bt) - abe^{at}\sin(bt) - b^2e^{at}\cos(bt) \\ &= \left(a^2 - b^2\right)e^{at}\cos(bt) - 2abe^{at}\sin(bt) \end{aligned} \tag{34b}$$

Dosadením do dif. rovnice (11)

$$\begin{aligned} &\left(a^2 - b^2\right)e^{at}\cos(bt) - 2abe^{at}\sin(bt) + a_1\left(ae^{at}\cos(bt) - be^{at}\sin(bt)\right) \\ &+ a_0e^{at}\cos(bt) = 0 \end{aligned} \tag{35a}$$

$$\begin{aligned} &\left(a^2 - b^2\right)e^{at}\cos(bt) - 2abe^{at}\sin(bt) + a_1ae^{at}\cos(bt) - a_1be^{at}\sin(bt) \\ &+ a_0e^{at}\cos(bt) = 0 \end{aligned} \tag{35b}$$

$$\left(a^2 - b^2 + a_1a + a_0\right)e^{at}\cos(bt) - (2ab + a_1b)\,e^{at}\sin(bt) = 0 \tag{35c}$$

Vieme, že platí (33a) a (33b) a teda platí aj (35c). Analogicky je možné ukázať, že aj $y_{f2}(t)$ je riešením dif. rovnice (11). Ostáva ukázať, že tieto riešenia sú navzájom lineárne nezávislé. Ich Wronského determinant je

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{vmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\sin(bt) \\ ae^{at}\cos(bt) - be^{at}\sin(bt) & ae^{at}\sin(bt) + be^{at}\cos(bt) \end{vmatrix} \\ &= e^{at}\cos(bt)\left(ae^{at}\sin(bt) + be^{at}\cos(bt)\right) - e^{at}\sin(bt)\left(ae^{at}\cos(bt) - be^{at}\sin(bt)\right) \\ &= e^{2at}\left(a\cos(bt)\sin(bt) + b\cos^2(bt) - a\cos(bt)\sin(bt) + b\sin^2(bt)\right) \\ &= e^{2at}(b\cos^2(bt) + b\sin^2(bt)) \\ &= e^{2at}b \neq 0 \end{aligned} \tag{36}$$

čím sme ukázali, že sú lineárne nezávislé. Všeobecné riešenie dif. rovnice (11) v tomto prípade je v tvare

$$y(t) = c_1e^{at}\cos(bt) + c_2e^{at}\sin(bt) \tag{37}$$

Referencie a ďalšia literatúra

[1] Božena Mihalíková a Ivan Mojsej. *Diferenciálne rovnice*. 2012. URL: https://umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MAN2c/dif_rovnice.pdf.

[2] Jaromír Kuben. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 1995.

[3] Mikuláš Huba, Katarína Žáková a Peter Hubinský. *Teória systémov*. Dec. 2002. ISBN: SK- 80-227-1820-3. URL: https://www.researchgate.net/profile/Mikulas-Huba-3/publication/336119804_Teoria_systemov_Systems'_Theory/links/5d8f64c092851c33e9437d34/Teoria-systemov-Systems-Theory.pdf.

[4] Jozef Nagy. *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. 1980.

[5] Petra Kozielová a Bohumil Krajc. *Vybrané kapitoly z obyčejných diferenciálních rovnic*. URL: https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/stabilita_a_ou_mi21_5_2_2019.pdf.

[6] Josef Diblík et al. *Diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice*. 2010. URL: https://www.umat.fekt.vut.cz/~svobodaz/MKC-DRE/.

[7] Zdeněk Svoboda. *Sbírka příkladu z obyčejných diferenciálních rovnic*. 2018. URL: https://www.umat.fekt.vut.cz/~svobodaz/MKC-DRE/.