ÚSTAV ROBOTIKY
A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

apríl 2024
github.com/PracovnyBod/KUT
RM

v0.9
KUTooX

O základných vlastnostiach lineárnych systémov

1 Stabilita

Systém je stabilný pokiaľ sa po vychýlení z rovnovážneho stavu a po odznení všetkých síl, ktoré toto vychýlenie spôsobili, vráti v konečnom čase do pôvodného rovnovážneho stavu. Alebo pokiaľ sa vstup systému pohybuje v konečných medziach daných systémom, výstup systému sa bude tiež pohybovať v určitých konečných medziach.

1.1 Lineárny systém

Predpokladajme, že lineárny systém je opísateľný diferenciálnou rovnicou:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = 0 \tag{1}$$

kde (n) označuje n-tú deriváciu podľa času. Všeobecné riešenie tejto rovnice je možné nájsť ako lineárnu kombináciu všetkých riešení v tvare:

$$y = C_1(t)\exp(\lambda_1 t) + C_2(t)\exp(\lambda_2 t) + \cdots + C_n(t)\exp(\lambda_n t) \tag{2}$$

kde $\lambda_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ sú vlastné čísla (vo všeobecnosti sú komplexné), získame ich z charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice (1):

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{3}$$

Koeficienty $C_i(t)$ sú vo všeobecnosti polynómy, ktorých koeficienty sú komplexné čísla. Stupeň jednotlivých polynómov sa určuje podľa násobnosti príslušných vlastných čísel. V prípade, že všetky vlastné čísla sú rozdielne, tak ide o konštanty. V prípade dvojnásobného vlastného čísla λ_i koeficient C_i bude polynóm prvého rádu a tak ďalej.

Aby všeobecné riešenie (2) bolo stabilné (konvergovalo do 0) je podstatné, aby každá exponenciála konvergovala do 0, koeficienty $C_i(t)$ nevplývajú na stabilitu, pretože sú to polynómy, ktoré sú dominované exponenciálnou funkciou. Každé riešenie môžeme zapísať v takomto tvare:

$$\begin{aligned} y &= C\exp(\lambda t) = C\exp(\mathrm{Re}\{\lambda\}t + i\,\mathrm{Im}\{\lambda\}t) \\ &= C\exp(\mathrm{Re}\{\lambda\}t)\ \left[\cos(\mathrm{Im}\{\lambda\}t) + i\sin(\mathrm{Im}\{\lambda\}t)\right] \end{aligned} \tag{4}$$

kde vidíme, že imaginárna časť vlastného čísla je argumentom funkcií kosínus a sínus. Tieto funkcie sú ohraničené, čiže imaginárna časť nemá vplyv na stabilitu, spôsobuje ale kmity v riešení. Reálna časť vlastného čísla je argumentom exponenciálnej funkcie. Exponenciálna funkcia konverguje do 0 v prípade, že jej argument je záporný. Z toho vyplýva nasledujúce tvrdenie:

Veta 1.1. Lineárny systém rádu n s vlastnými číslami $\lambda_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$ je

1. stabilný pokiaľ pre všetky vlastné čísla λ_i:

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5a}$$

2. na hranici stability pokiaľ aspoň pre jedno vlastné číslo λ_i:

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5b}$$

3. nestabilný pokiaľ aspoň pre jedno vlastné číslo λ_i:

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i\} > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{5c}$$

V prípade stavového systému:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{6}$$

môžeme všeobecné riešenie zapísať v tvare:

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}(t - t_i))\mathbf{x}(t_i) \tag{7}$$

Rovnako platí tvrdenie (1.1) a vlastné čísla môžeme získať z charakteristickej rovnice:

$$\det\{\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\} = 0 \tag{8}$$

1.2 Stabilita vo všeobecnosti - Lyapunovova teória stability

Vyšetrovanie stability tak ako je popísané v časti 1.1 platí len pre lineárne systémy. V prípade, že chceme vyšetriť stabilitu všeobecného systému v tvare:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{9}$$

musíme aplikovať Lyapunovovu teóriu stability. Táto teória je použiteľná aj na lineárne systémy.

Definícia 1.1 (Stabilita podľa Lyapunova, priama metóda)**.** Dynamický systém (9) je lokálne stabilný pokiaľ existuje Lyapunovova funkcia $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pre ktorú platí:

1. V rovnovážnom stave $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ platí:

$$V(\mathbf{0}) = 0 \tag{10a}$$

2. Lyapunovova funkcia je pozitívne definitná:

$$V(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \tag{10b}$$

3. Časová derivácia Lyapunovovej funkcie je negatívne semidefinitná:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x^i} f^i(\mathbf{x}) = \nabla V^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0 \tag{10c}$$

V prípade asymptotickej stability musí byť negatívne definitná:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \quad \dot{V}(\mathbf{0}) = 0 \tag{10d}$$

V diskrétnom prípade sa derivácia nahrádza diferenciou, ostatné tvrdenia platia rovnako:

$$V(\mathbf{x}_{n+1}) - V(\mathbf{x}_n) < 0 \tag{10e}$$

4. Pokiaľ je $V(\mathbf{x})$ radiálne neohraničená:

$$||\mathbf{x}|| \to \infty \;\Rightarrow\; V(\mathbf{x}) \to \infty \tag{10f}$$

tak hovoríme, že je systém globálne stabilný.

1.3 Diskrétny systém

Vyšetríme teraz pomocou Lyapunovovej teórie stability stabilitu lineárneho diskrétneho systému v tvare:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n \tag{11}$$

Zvolíme kandidáta na Lyapunovovu funkciu v tvare:

$$V(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n^\top \mathbf{P}\mathbf{x}_n \tag{12}$$

kde $\mathbf{P}$ musí byť symetrická pozitívne definitná matica, aby bola splnená podmienka (10b)

Ďalej musí byť splnená podmienka (10e), dosadíme teda (12):

$$\mathbf{x}_{n+1}^\top \mathbf{P}\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n^\top \mathbf{P}\mathbf{x}_n < 0 \tag{13}$$

a do (13) dosadíme rovnicu systému (11) a stavové vektory vyberieme pred zátvorku $\mathbf{x}_n$:

$$\mathbf{x}_n^\top \left(\mathbf{A}^\top \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\right) \mathbf{x}_n < 0 \tag{14}$$

Rovnica (14) musí platiť pre všetky $\mathbf{x}_n$, teda musí platiť:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} < 0 \tag{15}$$

Nerovnicu (15) je náročné riešiť, môžeme ju ale ekvivalentne zapísať ako rovnicu:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \tag{16}$$

kde $\mathbf{Q}$ je pozitívne definitná matica. Rovnica (16) sa nazýva diskrétna Lyapunovova rovnica, pokiaľ existuje riešenie $\mathbf{P}$, ktoré je pozitívne definitné, tak systém (11) je stabilný.

1.4 Spojitý systém

Pomocou Lyapunovovej teórie stability vyšetríme aj stabilitu lineárneho spojitého systému v tvare:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{17}$$

Zvolíme kandidáta na Lyapunovovu funkciu tak, aby bola splnená podmienka (10b):

$$V = \mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} \tag{18}$$

kde $\mathbf{P}$ musí byť symetrická pozitívne definitná matica.

Vypočítame časovú deriváciu (18) a vyšetríme podmienku (10d):

$$\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} < 0 \tag{19}$$

Do získaného výrazu (19) dosadíme rovnicu systému (17):

$$\mathbf{x}^\top \left(\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}\right) \mathbf{x} < 0 \tag{20}$$

Rovnica (20) musí byť splnená pre každý stav $\mathbf{x}$ teda:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < 0 \tag{21}$$

Nerovnicu (21) je náročné riešiť, môžeme ju ale ekvivalentne zapísať ako rovnicu:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q} \tag{22}$$

kde $\mathbf{Q}$ je symetrická pozitívne definitná matica. Rovnica (22) sa nazýva spojitá Lyapunovova rovnica, pokiaľ existuje riešenie $\mathbf{P}$, ktoré je pozitívne definitné, tak systém (17) je stabilný.