O vektorových priestoroch

1 Vektorový priestor

Definícia 1.1 (Vektorový priestor)**.** Vektorový priestor V nad poľom K je neprázdna množina s dvomi definovanými operáciami $\oplus : V \times V \to V$ a $\odot : K \times V \to V$, ktorá spĺňa nasledujúcich 8 axiómov:

1. Asociatívnosť:
   $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$
2. Komutatívnosť:
   $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
3. Prvok identity vektorového súčtu:
   $\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{0} \in V$
4. Inverzný prvok:
   $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0} \in V$
5. Kompatibilita skalárneho násobenia s násobením poľa
   $\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha\beta) \odot \mathbf{u}, \quad \alpha, \beta \in K, \quad \mathbf{u} \in V$
6. Prvok identity skalárneho násobenia:
   $\mathbb{1} \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \mathbb{1} \in K, \quad \mathbf{u} \in V$
7. Distributívnosť vzhľadom na vektorový súčet:
   $\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}, \quad \alpha \in K, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
8. Distributívnosť vzhľadom na súčet poľa:
   $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}, \quad \alpha, \beta \in K, \quad \mathbf{u} \in V$

V definícii (1.1) sme zámerne označili operácie $+$ a $\cdot$ v krúžku, aby sme ich rozlíšili od štandardne definovaného súčtu a súčinu, je možné ale používať aj označenie bez krúžku. Prvky $\mathbf{0}$ a $\mathbb{1}$ sú špeciálne a pre každý vektorový priestor originálne, nemusia nutne zodpovedať číselnej 0 a 1.

Príklad 1.1. Vyšetrite či komplexné čísla $\mathbf{z} = \alpha + i\beta$ so štandardne definovanými operáciami $+, \cdot$ tvoria vektorový priestor V nad reálnymi číslami $\mathbb{R}$, $\mathbf{z} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 + i\beta_1 + (\alpha_2 + i\beta_2 + \alpha_3 + i\beta_3) &= \alpha_1 + i\beta_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 + i(\beta_2 + \beta_3)) \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\
(\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2) + \alpha_3 + i\beta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_2 i(\beta_1 + \beta_2)) + \alpha_3 + i\beta_3 \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + i(\beta_1 + \beta_2) \\
\alpha_2 + i\beta_2 + \alpha_1 + i\beta_1 &= \alpha_2 + \alpha_1 + i(\beta_2 + \beta_1) \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 + i(\beta_1 + \beta_2)
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
&\alpha + i\beta + o_r + io_i = \alpha + i\beta \\
&\alpha + o_r = \alpha \implies o_r = 0 \\
&\beta + o_i = \beta \implies o_i = 0 \\
&\mathbf{0} = 0 + i0
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 = 0 + i0 \\
&\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \implies \alpha_1 = -\alpha_2 \\
&\beta_1 + \beta_2 = 0 \implies \beta_1 = -\beta_2 \\
&\mathbf{z} + (-\mathbf{z}) = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

5. $\mu\nu \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
&\mu(\nu(\alpha + i\beta)) = \mu(\nu\alpha + i\nu\beta)) = \mu\nu\alpha + i\mu\nu\beta \\
&(\mu\nu)(\alpha + i\beta) = \mu\nu\alpha + i\mu\nu\beta
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{1}\alpha + i\mathbb{1}\beta = \alpha + i\beta \\
&\mathbb{1}\alpha = \alpha \implies \mathbb{1} = 1 \\
&\mathbb{1}\beta = \beta \implies \mathbb{1} = 1 \\
&\mathbb{1} = 1
\end{aligned}
$$

7. $\mu\nu \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\mu(\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2) &= \mu(\alpha_1 + \alpha_2 + i(\beta_1 + \beta_2)) \\
&= \mu(\alpha_1 + \alpha_2) + i\mu(\beta_1 + \beta_2) \\
&= \mu\alpha_1 + \mu\alpha_2 + i(\mu\beta_1 + \mu\beta_2) \\
\mu(\alpha_1 + i\beta_1) + \mu(\alpha_2 + i\beta_2) &= \mu\alpha_1 + i\mu\beta_1 + \mu\alpha_2 + i\mu\beta_2 \\
&= \mu\alpha_1 + \mu\alpha_2 + i(\mu\beta_1 + \mu\beta_2)
\end{aligned}
$$

8. $\mu\nu \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
(\mu + \nu)(\alpha + i\beta) &= (\mu + \nu)\alpha + i(\mu + \nu)\beta \\
&= \mu\alpha + \nu\alpha + i(\mu\beta + \nu\beta) \\
\mu(\alpha + i\beta) + \nu(\alpha + i\beta) &= \mu\alpha + i\mu\beta + \nu\alpha + i\nu\beta \\
&= \mu\alpha + \nu\alpha + i(\mu\beta + \nu\beta)
\end{aligned}
$$

Vidíme, že všetky axiómy sú splnené a môžeme teda tvrdiť, že komplexné čísla tvoria vektorový priestor nad reálnymi číslami.