marec 2024
github.com/PracovnyBod/KUT
MT

KUT002

O stave a začiatočných podmienkach dynamického systému

STAV systému a začiatočné podmienky systému sú relatívne široké pojmy. Cieľom je tu načrtnúť pohľad klasickej Teórie systémov.

Zotrvačnosť

Ak hovoríme o dynamickom systéme, obvykle máme na mysli *zotrvačný* systém.

Bezzotrvačný systém je taký, ktorého výstup závisí len od okamžitej hodnoty vstupu. Minulé hodnoty vstupu nemajú vplyv na aktuálnu hodnotu výstupu. Príkladom bezzotrvačného systému môže byť odporový delič napätia.

O *zotrvačnom* systéme možno premýšľať ako o systéme „s pamäťou". Jeho aktuálny výstup závisí od okamžitej hodnoty vstupu a aj od hodnôt vstupu v minulosti. Takýto systém je *kauzálny*.

Mimochodom, teoreticky je možné hovoriť aj o nekauzálnych systémoch. v takom prípade výstup závisí aj od budúcich hodnôt vstupu. Slová *zotrvačnosť* a *kauzalita* tu odporúčame vnímať najmä z fyzikálneho hľadiska.

Príkladom zotrvačného kauzálneho systému môže byť elektrický kondenzátor. Aktuálny elektrický náboj $Q(t)$ na kondenzátore je daný takpovediac celou „históriou" elektrického prúdu $I(t)$ cez kondenzátor. Formálne, náboj v čase t_0 bude

$$Q(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} I(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

Stav systému

Predošlý príklad navádza na otázky typu ako ďaleko do minulosti ešte ovplyvňujú hodnoty vstupu terajší výstup? Je azda potrebné poznať takpovediac úplnú minulosť systému? Ukazuje sa tu pojem *stav systému*.

Spomínaný náboj Q na kondenzátore má v čase t_0 nejakú hodnotu. Označme ju Q_0. Kondenzátor ako systém je teda v takom stave, že jeho veličina má hodnotu Q_0. Je to tak presne v čase t_0.

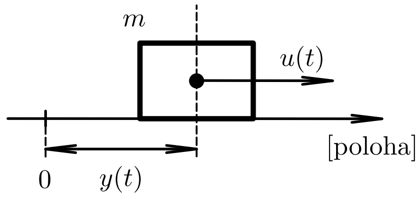
Ak by sme prišli k tomuto systému v čase t_0, vedeli by sme zistiť, že je v nejakom stave. v tomto prípade vyjadriteľnom hodnotou Q_0. Ak by sme chceli zmeniť hodnotu náboja na kondenzátore, teda to v akom je stave, musíme nejaký čas pôsobiť na vstupe tohto systému (priviesť napätie na svorky kondenzátora).

Poznáme stav systému na začiatku nášho pôsobenia na vstupe a následne na konci pôsobenia bude vo všeobecnosti systém v inom stave ako na začiatku. Systém je v každom čase v nejakom stave.

Na rozdiel od značne intuitívneho stavu systému v prípade kondenzátora, určiť ktoré veličiny udávajú stav systému a či ich vieme merať je samostatná otázka.

Príklad s mechanickým systémom

Uvažujme posuvný pohyb telesa s hmotnosťou m, na ktoré pôsobí sila $u(t)$. Vo všeobecnosti časovo premenlivá sila je vstupom systému. Teleso sa pohybuje po priamke. Poloha tohto telesa, teda jeho vzdialenosť od stanoveného bodu nula nech je výstupnou veličinou systému. Označme $y(t)$.



Obr. 1: Posuvný pohyb telesa s hmotnosťou m.

Pohybová rovnica v tomto prípade je[1]

$$m\ddot{y}(t) = u(t) \tag{2}$$

Opisuje uvedenú situáciu ako dynamický systém. Dáva do vzťahu vstup a výstup systému. Je to diferenciálna rovnica druhého rádu.

Ako však určiť v akom stave je systém?

Čo potrebujeme poznať, aby sme dokázali určiť výstup systému od nejakého začiatočného času t_0 ďalej, teda na intervale $\langle t_0, t \rangle$?

Poloha, výstup systému, je daná začiatočnou polohou v čase t_0, označme y_0, a ďalej je daná integrálom rýchlosti telesa $\dot{y}(t)$ na uvedenom intervale.

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{y}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

kde samozrejme $\tau \in \langle t_0, t \rangle$.

Čím je však potom daný priebeh rýchlosti $\dot{y}(t)$? Na intervale $\langle t_0, t \rangle$ zjavne musí platiť

$$\dot{y}(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} \ddot{y}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

kde z_0 je začiatočná rýchlosť telesa v čase t_0 a $\ddot{y}(t)$ je časový priebeh zrýchlenia telesa.

Poznáme časový priebeh zrýchlenia na intervale $\langle t_0, t \rangle$? Áno. Priamo vďaka diferenciálnej rovnici opisujúcej samotný systém. Z rovnice (2) priamo vyplýva

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

Časový priebeh vstupného signálu $u(t)$ vo všeobecnosti poznáme. Vstupnú veličinu máme v moci my.

Na určenie výstupu systému v čase t sme teda potrebovali poznať nasledovné: začiatočnú polohu, začiatočnú rýchlosť a časový priebeh vstupnej veličiny od začiatku po čas t.

Stav systému na začiatku ale nie len na začiatku je daný dvomi veličinami. Polohou a rýchlosťou. Ich hodnoty je možné považovať za stav systému. Tieto veličiny možno označiť ako stavové veličiny systému.

Stav systému sa zmení ak nejaký čas bude pôsobiť vstupný signál.

Stavový vektor

Stavových veličín je vo všeobecnosti niekoľko. Minimálne toľko akého rádu je diferenciálna rovnica opisujúca dynamický systém. Hovoríme tak o ráde systému. V predchádzajúcom príklade je systém druhého rádu, $n = 2$.

Je praktické usporiadať stavové veličiny do stavového vektora. V predchádzajúcom príklade sa stavový vektor skladá z dvoch stavových veličín. Stavový vektor označme $x(t)$, formálne sa jeho rozmer uvádza ako $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

[1]Newtonove $F = ma$

kde sme uviedli stavové veličiny z predchádzajúceho príkladu. Zvyčajne sa stavové veličiny označujú samostatnými symbolmi, typicky

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Prvky stavového vektora $x(t)$ môžu nadobúdať rôzne hodnoty, inými slovami vektor $x(t)$ je v nejakom priestore, hovoríme o *stavovom priestore*.

Opis systému v stavovom priestore

Okrem diferenciálnej rovnice, v ktorej figurujú vstup a výstup systému, je možné systém opísať aj sústavou diferenciálnych rovníc, v ktorých figurujú stavové veličiny. Ide o sústavu sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu, v ktorých neznámou premenou je stavová veličina. Hovoríme o opise systému v stavovom priestore.

V nadväznosti na predchádzajúci príklad uvážme opis mechanického systému v stavovom priestore. Stavové veličiny máme označené x_1 a x_2. Hľadáme sústavu diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \ ? \\ \dot{x}_2(t) &= \ ? \end{aligned}$$

pričom na pravej strane rovníc môžu vystupovať len stavové veličiny a vstupný signál.

Veličina $x_1(t)$ je poloha. Veličina $x_2(t)$ je jej časová derivácia, teda rýchlosť. Časová derivácia rýchlosti je zrýchlenie a zo samotnej pohybovej rovnice plynie, že zrýchlenie sa rovná výrazu $\frac{1}{m}u(t)$, teda je dané vstupom systému. Takže

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{8a}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}u(t) \tag{8b}$$

je sústava diferenciálnych rovníc prvého rádu opisujúca predmetný dynamický systém. Vzťah výstupu systému a stavových veličín je pri tom tiež jasný

$$y(t) = x_1(t) \tag{9}$$

Ak uvážime stavový vektor $x(t)$, uvedené je možné zapísať vo vektorovo-maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \tag{10a}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{10b}$$

V takýchto prípadoch sa opis systému v stavovom priestore zapisuje v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{11a}$$

$$y(t) = c^\mathsf{T} x(t) \tag{11b}$$

kde A je matica, b a c sú vektory. V predchádzajúcom príklade $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, $b \in \mathbb{R}^2$ a $c \in \mathbb{R}^2$.

Odporúčaná literatúra

Huba, Mikuláš, Katarína Žáková a Peter Hubinský. *Teória systémov.* Dec. 2002. ISBN: SK- 80-227-1820-3.