STU FEI
ÚSTAV ROBOTIKY A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

august 2024
github.com/PracovnyBod/KUT
MT

KUT dev240804

O prenosovej funkcii

PRENOSOVÁ funkcia je nástroj pre matematické modelovanie lineárnych časovo-invariantných dynamických systémov.

1 Úvod

Primárne sú dynamické systémy opisované diferenciálnymi rovnicami. Ak sú tieto rovnice lineárne, hovoríme, že systém, ktorý opisujú, je lineárny. Ak koeficienty v dif. rovnici nie sú funkciami času, hovoríme, že systém je časovo invariantný.

Vo všeobecnosti hľadáme riešenie dif. rovnice. V kontexte dynamických systémov je riešením dif. rovnice funkcia času. Z hľadiska systému hovoríme, že táto funkcia je výstupným signálom systému. Na hľadané riešenie má vplyv niekoľko faktorov. Vo všeobecnosti je riešenie dané samozrejme samotnou dif. rovnicou, jej rádom a hodnotami jej koeficientov. Konkrétne riešenia sú potom dané začiatočnými podmienkami a vstupným signálom systému.

Z hľadiska systému hovoríme o ráde dif. rovnice a o jej koeficientoch ako o parametroch systému. Hovoriť o začiatočných podmienkach systému má samozrejme tiež význam. Napokon nás zaujíma vplyv vstupného signálu na výstupný signál systému a s matematickým modelovaním tohto vplyvu súvisí pojem prenosová funkcia. Obrazne hovoríme o prenose zo vstupu na výstup systému.

2 Náčrt analytického prístupu k pojmu prenosová funkcia

Obdobne ako pri hľadaní riešenia homogénnej dif. rovnice, kde sa ko východisko predpokladá riešenie v tvare exponenciálnej funkcie e^{st}, tak pri hľadaní riešenia nehomogénnej dif. rovnice je možné skúmať predpoklad, že vstupný signál je v tvare exponenciálnej funkcie e^{st}.

Najskôr pripomeňme, že riešením homogénnej dif. rovnice

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \tag{1}$$

je

$$y(t) = e^{-at}y_0 \tag{2}$$

a ide tu o rovnicu prvého rádu.

Formálne je však aj tu možné uplatniť rozklad dif. rovnice vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu v zmysle

$$\dot{x}(t) = ax(t) \qquad x(0) = x_0 \tag{3a}$$

$$y(t) = x(t) \tag{3b}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a $x(t)$ je stavová veličina. Pri dif. rovnici vyššieho rádu by $x(t)$ bol vektor stavových veličín a udával by sústavu rovníc v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0 \tag{4a}$$

$$y(t) = c^{\mathsf{T}}x(t) \tag{4b}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je matica, $c \in \mathbb{R}^n$ je vektor a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je vektor. Riešením je

$$y(t) = c^\mathsf{T} e^{At} x_0 \tag{5}$$

kde sme využili objekt e^{At} čo je tzv. maticová exponenciálna funkcia. Tu sa jej definícii nebudeme venovať podrobne, čitateľa odkazujeme napr. na [1]. Ide zjavne o zovšeobecnenie skalárneho prípadu (systémy prvého rádu) pre vektorový prípad (systémy vyššieho rádu). Definícia a následné využívanie matice e^{At} je základom pre pojmy ako fundamentálne riešenia systému (diferenciálnej rovnice). Samotná matica e^{At} sa označuje napríklad aj ako matica fundamentálnych riešení. Takpovediac „účinok" matice e^{At} je daný maticou A, a tú možno charakterizovať jej vlastnými číslami (a vlastnými vektormi). Tieto sú následne zdrojom definície pojmu charakteristická rovnica tak ako sa to využíva pri hľadaní analytického riešenia diferenciálnej rovnice.

V prípade nehomogénnej dif. rovnice je systém daný sústavou rovníc v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \qquad x(0) = x_0 \tag{6a}$$

$$y(t) = c^\mathsf{T} x(t) \tag{6b}$$

kde $u(t)$ je vstupný signál, $b \in \mathbb{R}^n$ je vektor. Je možné ukázať, že

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

a teda samotné riešenie (výstupný signál $y(t)$) je

$$y(t) = c^\mathsf{T} x(t) \tag{8a}$$

$$y(t) = c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + \int_0^t c^\mathsf{T} e^{A(t-\tau)} bu(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8b}$$

Prvý člen (na pravej strane rovnice (8b)) sa nazýva *vlastná zložka riešenia* (je vyvolaná začiatočnými podmienkami) a druhý člen sa nazýva *vnútená zložka riešenia* (je vyvolaná vstupným signálom).

Ako sme uviedli, zámerom je skúmať predpoklad, že vstupný signál je v tvare exponenciálnej funkcie

$$u(t) = e^{st} \tag{9}$$

kde $s = \sigma + j\omega$ (vo všeobecnosti). To, že s je komplexné číslo (komplexná premenná) umožňuje považovať tento špeciálny signál vlastne za triedu signálov (rôzneho typu). Reálna časť premennej s určuje exponenciálny rast alebo pokles (dokonca ak $s = 0$ potom je špeciálny signál vlastne konštantným) a imaginárna časť určuje harmonické kmitanie signálu.

Máme (7), a teda:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t \left(e^{A(t-\tau)} b e^{s\tau} \right) \mathrm{d}\tau \tag{10}$$

kde pri manipulácii s výrazom $\left(e^{A(t-\tau)} b e^{s\tau}\right)$ treba manipulovať s ohľadom na fakt, že ide o matice a vektory. V každom prípade, po integrácii sa získa

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{(sI-A)t} - I \right) b \tag{11}$$

kde I je jednotková matica.

Celkové riešenie, inými slovami výstupný signál systému, potom je

$$\begin{aligned}
y(t) &= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + c^\mathsf{T} e^{At}\left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{(sI-A)t} - I \right) b \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + c^\mathsf{T} e^{At}\left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{st}e^{-At} - I \right) b \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + c^\mathsf{T} e^{At}\left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{st}e^{-At}b - b \right) \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + \left(c^\mathsf{T} e^{At}\left(sI - A\right)^{-1} e^{st}e^{-At}b - c^\mathsf{T} e^{At}\left(sI - A\right)^{-1} b \right) \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + \left(c^\mathsf{T} \left(sI - A\right)^{-1} e^{st}b - c^\mathsf{T} e^{At}\left(sI - A\right)^{-1} b \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

V tomto bode je možné konštatovať:

$$y(t) = \underbrace{c^\mathsf{T} e^{At} x(0)}_{\text{vlastná zložka}} + \underbrace{\left(c^\mathsf{T} \left(sI - A\right)^{-1} e^{st} b - c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} b\right)}_{\text{vnútená zložka}} \tag{13}$$

a zároveň:

$$\begin{aligned} y(t) &= c^\mathsf{T} e^{At} \left(x(0) - \left(sI - A\right)^{-1} b\right) + \left(c^\mathsf{T} \left(sI - A\right)^{-1} b e^{st}\right) \\ &= \underbrace{c^\mathsf{T} e^{At} \left(x(0) - \left(sI - A\right)^{-1} b\right)}_{\text{zložka opisujúca prechodné deje}} + \underbrace{\left(c^\mathsf{T} \left(sI - A\right)^{-1} b\right) e^{st}}_{\text{čisto exponenciálna zložka}} \end{aligned} \tag{14}$$

O vplyve samotného špeciálneho signálu e^{st} na celkové riešenie teda rozhoduje výraz $c^\mathsf{T} \left(sI - A\right)^{-1} b$. Formálne sa

$$G(s) = c^\mathsf{T} \left(sI - A\right)^{-1} b \tag{15}$$

nazýva prenosová funkcia systému.

Uvedené je založené na fakte vyjadrenom všeobecným riešením (7) pričom ide o riešenie sústavy dif. rovníc prvého rádu v tvare (6). Takpovediac pôvodná dif. rovnica vyššieho rádu je pre tento prípad v tvare

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)} y(t)}{\mathrm{d}t^{(n-1)}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m u(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} u(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t) \tag{16}$$

Potom ak na vstupe uvažujeme $u(t) = e^{st}$ a zároveň vieme, že riešenie systému je tiež nejaký exponenciálny signál, čo možno vo všeobecnosti vyjadriť ako $y(t) = y_0 e^{st}$ (kde y_0 najmä odlišuje $y(t)$ od $u(t)$). Ak $y(t)$ a $u(t)$ dosadíme do (16), vidíme, že

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^n y_0 e^{st}}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)} y_0 e^{st}}{\mathrm{d}t^{(n-1)}} + \cdots + a_0 y_0 e^{st} &= b_m \frac{\mathrm{d}^m e^{st}}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} e^{st}}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_0 e^{st} \\ y_0 e^{st} s^n + a_{n-1} y_0 e^{st} s^{(n-1)} + \cdots + a_0 y_0 e^{st} &= b_m e^{st} s^m + b_{m-1} e^{st} s^{m-1} + \cdots + b_0 e^{st} \\ \left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0\right) y_0 e^{st} &= \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right) e^{st} \\ y_0 e^{st} &= \frac{\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right)}{\left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0\right)} e^{st} \end{aligned} \tag{17}$$

a teda môžeme povedať, že riešenie systému závislé od špeciálneho signálu e^{st} je

$$y(t) = \frac{\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right)}{\left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0\right)} e^{st} \tag{18}$$

Označme

$$B(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right) \tag{19a}$$

$$A(s) = \left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0\right) \tag{19b}$$

a výraz

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{20}$$

vyjadruje prenosovú funkciu systému.

3 Definícia s využitím Laplaceovej transformácie

Referencie a ďalšia literatúra

[1] Karl Johan Åström a Richard M. Murray. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, jan. 2020. ISBN: 978-0-691-13576-2. URL: `https://fbswiki.org/wiki/index.php/Main_Page`.