ÚSTAV ROBOTIKY
A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

júl 2024
github.com/PracovnyBod/KUT
MT

KUT000

# Riešené otázky a úlohy: analytické riešenie diferenciálnych rovníc

ÚLOHY sú zamerané na analytické riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc metódou charakteristickej rovnice a s využitím Laplaceovej transformácie. Táto zbierka je predovšetkým doplnkom k predchádzajúcim textom:

KUT006 O riešení homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami

KUT008 O využití Laplaceovej transformácie pri riešení diferenciálnych rovníc

## 1 Úvodné poznámky

Pri hľadaní riešenia metódou charakteristickej rovnice je možné využiť nasledujúce konštatovania:

1. Ak má charakteristická rovnica $n$ navzájom rôznych riešení $s_i$ pre $i = 1, \dots, n$, potom zodpovedajúce fundamentálne riešenia (módy) sú: $e^{s_1 t}$, $e^{s_2 t}$, …, $e^{s_n t}$.
2. Ak sa medzi $n$ koreňmi charakteristického polynómu vyskytne $k$-násobný koreň, vytvoríme $k$ lineárne závislých riešení: $e^{s_i t}$, $te^{s_i t}$, …, $t^{k-1}e^{s_i t}$
3. V prípade výskytu dvojice komplexne združených koreňov charakteristického polynómu, $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, kde $j$ je imaginárna jednotka, využijeme na určenie fundamentálnych riešení Eulerov vzťah
$$e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t \pm j \sin\beta t\right)$$
Preto potom možno písať príslušné fundamentálne riešenie v tvare
$$c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t} = e^{\alpha t}\left(c' \cos\beta t + c'' \sin\beta t\right)$$
kde sú imaginárne časti nulové.

Pri využití Laplaceovej transformácie je potrebné využiť tabuľku Laplaceových obrazov signálov, ktorá je dostupná napríklad v predchádzajúcom texte KUT009. Vybrané položky sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $\dot{f}(t)$ | $sF(s) - f(0)$ |
| $\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$ | $s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$ |
| $1$ | $\dfrac{1}{s}$ |
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $e^{-at}$ | $\dfrac{1}{s+a}$ |

## 2 Otázky

**Otázka 1** Čo je riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice (vo všeobecnosti)?

Riešením diferenciálnej rovnice je *funkcia* pričom v kontexte dynamických systémov ide o *funkciu času*. Inými slovami, neznámou v rovnici je funkcia času (časová závislosť, signál). Diferenciálnou sa rovnica nazýva preto, že sa v nej nachádzajú aj derivácie neznámej funkcie. Obyčajnou sa diferenciálna rovnica nazýva preto, že neznámou je funkcia len jednej premennej (času).

**Otázka 2** Aký je rozdiel medzi homogénnou a nehomogénnou obyčajnou diferenciálnou rovnicou?

Homogénnou nazývame diferenciálnu rovnicu vtedy, keď v nej figuruje len samotná neznáma funkcia. Nefigurujú v nej iné funkcie. V kontexte dynamických systémov ide typicky o prípad, keď systém nemá žiadny vstupný signál (vstupný signál je nulový). Ak sa členy rovnice obsahujúce neznámu a jej derivácie presunú na ľavú stranu rovnice, pravá strana bude nulová

Nehomogénnou nazývame diferenciálnu rovnicu vtedy, keď v nej figuruje aj iná funkcia ako samotná neznáma funkcia. V kontexte dynamických systémov ide o prípad, keď systém má vstupný signál. Ak sa členy rovnice obsahujúce neznámu a jej derivácie presunú na ľavú stranu rovnice, pravá strana bude nenulová, bude obsahovať členy obsahujúce vstupný signál (vrátane jeho derivácií).

## 3 Úlohy

**Úloha 1** Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad a \in \mathbb{R}$$

Riešenie:

Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. Tú je možné určiť nahradením derivácií neznámej funkcie mocninami pomocnej premennej, označme ju $s$. Napríklad prvú deriváciu $\dot{y}(t)$ nahradíme $s^1$, nultú deriváciu $y(t)$ nahradíme $s^0$. Charakteristická rovnica pre danú diferenciálnu rovnicu bude

$$s + a = 0 \tag{1}$$

Druhým krokom je stanovenie fundamentálnych riešení diferenciálnej rovnice, ktoré sú dané riešeniami charakteristickej rovnice. Riešením charakteristickej rovnice je

$$s_1 = -a \tag{2}$$

Fundamentálne riešenie je teda len jedno

$$y_{f1}(t) = e^{-at} \tag{3}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-at} \tag{4}$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$ je konštanta.

Štvrtým krokom je stanovenie konkrétneho riešenia dif. rovnice v prípade, ak sú dané začiatočné podmienky. Konkrétne ide o stanovenie hodnoty konštanty $c_1$. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1\, e^{(-a)0} = c_1 \tag{5}$$

Samotná hodnota $y(0)$ je známa, keďže máme začiatočnú podmienku $y(0) = y_0$. Takže

$$c_1 = y_0 \tag{6}$$

To znamená, že riešenie úlohy je:

$$y(t) = y_0\, e^{(-a)t} \tag{7}$$

**Úloha 2** Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\ddot{y}(t) + (a+b)\dot{y}(t) + aby(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = z_0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Riešenie:

Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. V tomto prípade

$$s^2 + (a+b)s + ab = 0 \tag{8}$$

V druhom kroku pre stanovenie fundamentálnych riešení hľadáme riešenia charakteristickej rovnice. Vo všeobecnosti

$$s_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} \tag{9}$$

avšak v tomto prípade tiež vidíme, že

$$s^2 + (a+b)s + ab = (s+a)(s+b) \tag{10}$$

Riešenia charakteristickej rovnice teda sú

$$s_1 = -a \tag{11a}$$
$$s_2 = -b \tag{11b}$$

Zodpovedajúce fundamentálne riešenia sú

$$y_{f1}(t) = e^{-at} \tag{12a}$$
$$y_{f2}(t) = e^{-bt} \tag{12b}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{-bt} \tag{13}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú konštanty.

Vo štvrtom kroku je možné na základe začiatočných podmienok stanoviť konkrétne riešenie. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1\, e^{(-a)0} + c_2\, e^{(-b)0} = c_1 + c_2 \tag{14}$$

Derivácia všeobecného riešenia je

$$\dot{y}(t) = -ac_1 e^{-at} - bc_2 e^{-bt} \tag{15}$$

Pre čas $t = 0$ má derivácia všeobecného riešenia tvar

$$\dot{y}(0) = -ac_1 + bc_2 \tag{16}$$

Z uvedeného vyplýva sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych konštantách $c_1$ a $c_2$

$$c_1 + c_2 = y_0 \tag{17a}$$
$$-ac_1 + bc_2 = z_0 \tag{17b}$$

Do druhej rovnice dosaďme $c_1 = y_0 - c_2$

$$-a(y_0 - c_2) + bc_2 = z_0 \tag{18a}$$
$$-ay_0 + ac_2 + bc_2 = z_0 \tag{18b}$$
$$c_2(a+b) = z_0 + ay_0 \tag{18c}$$
$$c_2 = \frac{z_0 + ay_0}{a+b} \tag{18d}$$