STU FEI
ÚSTAV ROBOTIKY A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

august 2024
github.com/PracovnyBod/KUT
MT

KUTdev240822

Systém prvého rádu: vlastnosti a charakteristiky

Cieľom textu je súhrn vlastností a charakteristík dynamického systému, ktorý má jeden vstupný signál $u(t)$ a jeden výstupný signál $y(t)$ a tieto sú spojité v čase. Uvažuje sa lineárny, časovo invariantný dynamický systém.

Pojem *rád systému* má v podstate rovnaký význam ako pri diferenciálnej rovnici. Diferenciálna rovnica n-tého rádu opisuje dynamický systém n-tého rádu. Dif. rovnica n-tého rádu je taká, v ktorej vystupuje maximálne n-tá derivácia neznámej. V kontexte prenosovej funkcie systému to znamená, že charakteristický polynóm systému je n-tého stupňa.

Osobitne uvedieme, že samozrejme uvažujeme *kauzálny systém*, teda výstup systému je následkom diania v súčastnosti a minulosti. Z matematického hľadiska na prenosovú funkciu to znamená, že pre stupne polynómov $A(s)$ a $B(s)$ platí $n \geq m$ pričom charakteristický polynóm $A(s)$ má stupeň n, polynóm $B(s)$ má stupeň m a uvažujme prenosovú funkciu v tvare

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{1}$$

Navyše, v praxi, pri matematickom modelovaní reálnych systémov, má v mnohých prípadoch význam hovoriť o systémoch, ktoré sami o sebe neobsahujú „zdroj energie“, sú len „energetickým spotrebičom“, sú *energeticky disipatívne*. V takomto prípade pre prenosovú funkciu platí, že jej relatívny stupeň $n^\star = n - m$ je $n^\star \geq 1$.

1 Matematický opis

1.1 Prenosová funkcia systému prvého rádu

Vzhľadom na predpoklady uvedené vyššie, prenosová funkcia systému prvého rádu je vo všeobecnosti v tvare

$$G(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \tag{2}$$

kde b_0, a_1 a a_0 reálne čísla. Typicky (a často veľmi užitočne) sa však uvádza $A(s)$ ako monický polynóm, taký, ktorý má pri najvyššej mocnine s koeficient rovný 1. Teda v tomto prípade

$$G(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \tag{3}$$

Pre úplnosť teda $B(s) = b_0$ je stupňa $m = 0$ a $A(s) = s + a_0$ je stupňa $n = 1$. Koeficienty týchto polynómov sú parametrami systému.

1.2 Diferenciálna rovnica systému prvého rádu

Aby sme nadviazali na predchádzajúci odsek a zároveň ukázali prepis systému z prenosovej funkcie na diferenciálnu rovnicu, tak konštatujme, že

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{4}$$

kde $Y(s)$ je Laplaceov obraz výstupného signálu a $U(s)$ je Laplaceov obraz vstupného signálu. V tomto prípade teda

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0}{s + a_0} U(s) \tag{5a}$$

$$(s + a_0) Y(s) = b_0 U(s) \tag{5b}$$

$$sY(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s) \tag{5c}$$

$$sY(s) = -a_0 Y(s) b_0 U(s) \tag{5d}$$

a teda diferenciálna rovnica je

$$\dot{y}(t) = -a_0 y(t) + b_0 u(t) \tag{6}$$

Prepis opačným smerom, z dif. rovnice na prenosovú funkciu, je samozrejme štandardné aplikovanie Laplaceovej transformácie na rovnicu (6) pri nulových začiatočných podmienkach.

1.3 Opis systému v stavovom priestore

V stavovom priestore je potrebne zaviesť stavový vektor $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Vo všeobecnosti je opis lineárneho systému v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{7a}$$

$$y(t) = c^\mathsf{T} x(t) \tag{7b}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}^n$ sú matica a vektory a ide o parametre systému.

Pri stanovení vektora $x(t)$ ide vo všeobecnosti o prepis diferenciálnej rovnice vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu. V tomto prípade máme dif. rovnicu (6) čo už je rovnica prvého rádu. Formálne teda zvoľme

$$x_1(t) = y(t) \tag{8}$$

a teda

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = -a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \tag{9}$$

je vlastne „sústava" jednej diferenciálnej rovnice. Formálne:

$$\dot{x}_1(t) = -a_0 x_1(t) + b_0 u(t) \tag{10a}$$

$$y(t) = x_1(t) \tag{10b}$$

je opis systému v stavovom priestore kde $x_1(t)$ je stavová veličina. Pre úplnosť, stavový vektor v tomto prípade je $x(t) = x_1(t)$ a matica $A = -a_0$, vektor $b = b_0$ a vektor $c = 1$.

2 Stabilita

TODO