urk.fei.stuba.sk
február 2024

KUT002

O základných vlastnostiach lineárnych systémov

1 Pozorovateľnosť

1.1 Diskrétny systém

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n \tag{1}$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n \tag{2}$$

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\mathbf{x}_0 \tag{3a}$$
$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \tag{3b}$$
$$\vdots \tag{3c}$$
$$\mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}_0 \tag{3d}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}} \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

Veta 1.1. Diskrétny lineárny systém (1) je pozorovateľný pokiaľ matica pozorovateľnosti $\mathcal{O}$ má plnú hodnosť:

$$\operatorname{rank}\{\mathcal{O}\} = \operatorname{rank}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}\right\} = n \tag{5}$$

1.2 Spojitý systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{6}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{7}$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t_i) = \mathbf{C}\mathbf{x}_0 \tag{8a}$$

$$\ddot{\mathbf{y}}(t_i) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \tag{8b}$$

$$\vdots \tag{8c}$$

$$\mathbf{y}^{(n-1)}(t_i) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}_0 \tag{8d}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}(t_i) \\ \ddot{\mathbf{y}}(t_i) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)}(t_i) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}} \mathbf{x}(t_i) \tag{9}$$

Veta 1.2. Spojitý lineárny systém (6) je pozorovateľný pokiaľ matica pozorovateľnosti $\mathcal{O}$ má plnú hodnosť:

$$\operatorname{rank}\{\mathcal{O}\} = \operatorname{rank}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}\right\} = n \tag{10}$$