ÚSTAV ROBOTIKY A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

august 2024
github.com/PracovnyBod/KUT
MT

KUT dev240822

Systém prvého rádu: vlastnosti a charakteristiky

Cieľom textu je súhrn vlastností a charakteristík dynamického systému, ktorý má jeden vstupný signál $u(t)$ a jeden výstupný signál $y(t)$ a tieto sú spojité v čase. Uvažuje sa lineárny, časovo invariantný dynamický systém.

Pojem *rád systému* má v podstate rovnaký význam ako pri diferenciálnej rovnici. Diferenciálna rovnica n-tého rádu opisuje dynamický systém n-tého rádu. Dif. rovnica n-tého rádu je taká, v ktorej vystupuje maximálne n-tá derivácia neznámej. V kontexte prenosovej funkcie systému to znamená, že charakteristický polynóm systému je n-tého stupňa.

Osobitne uvedieme, že samozrejme uvažujeme *kauzálny systém*, teda výstup systému je následkom diania v súčastnosti a minulosti. Z matematického hľadiska na prenosovú funkciu to znamená, že pre stupne polynómov $A(s)$ a $B(s)$ platí $n \geq m$ pričom charakteristický polynóm $A(s)$ má stupeň n, polynóm $B(s)$ má stupeň m a uvažujme prenosovú funkciu v tvare

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{1}$$

Navyše, v praxi, pri matematickom modelovaní reálnych systémov, má v mnohých prípadoch význam hovoriť o systémoch, ktoré sami o sebe neobsahujú „zdroj energie“, sú len „energetickým spotrebičom“, sú *energeticky disipatívne*. V takomto prípade pre prenosovú funkciu platí, že jej relatívny stupeň $n^\star = n - m$ je $n^\star \geq 1$.

1 Matematický opis

1.1 Prenosová funkcia systému prvého rádu

Vzhľadom na predpoklady uvedené vyššie, prenosová funkcia systému prvého rádu je vo všeobecnosti v tvare

$$G(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \tag{2}$$

kde b_0, a_1 a a_0 reálne čísla. Typicky (a často veľmi užitočne) sa však uvádza $A(s)$ ako monický polynóm, taký, ktorý má pri najvyššej mocnine s koeficient rovný 1. Teda v tomto prípade

$$G(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \tag{3}$$

Pre úplnosť teda $B(s) = b_0$ je stupňa $m = 0$ a $A(s) = s + a_0$ je stupňa $n = 1$. Koeficienty týchto polynómov sú parametrami systému.

1.2 Diferenciálna rovnica systému prvého rádu

Aby sme nadviazali na predchádzajúci odsek a zároveň ukázali prepis systému z prenosovej funkcie na diferenciálnu rovnicu, tak konštatujme, že

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{4}$$

kde $Y(s)$ je Laplaceov obraz výstupného signálu a $U(s)$ je Laplaceov obraz vstupného signálu. V tomto prípade teda

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{b_0}{s + a_0}U(s) \tag{5a}$$

$$(s + a_0)\,Y(s) = b_0U(s) \tag{5b}$$

$$sY(s) + a_0Y(s) = b_0U(s) \tag{5c}$$

$$sY(s) = -a_0Y(s)b_0U(s) \tag{5d}$$

a teda diferenciálna rovnica je

$$\dot{y}(t) = -a_0y(t) + b_0u(t) \tag{6}$$

Prepis opačným smerom, z dif. rovnice na prenosovú funkciu, je samozrejme štandardné aplikovanie Laplaceovej transformácie na rovnicu (6) pri nulových začiatočných podmienkach.

1.3 Opis systému v stavovom priestore

V stavovom priestore je potrebne zaviesť stavový vektor $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Vo všeobecnosti je opis lineárneho systému v stavovom priestore v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{7a}$$

$$y(t) = c^{\mathsf{T}}x(t) \tag{7b}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}^n$ sú matica a vektory a ide o parametre systému.

Pri stanovení vektora $x(t)$ ide vo všeobecnosti o prepis diferenciálnej rovnice vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu. Vzniknú tak nové signály, ktoré sú neznámymi v sústave rovníc prvého rádu a sú prvkami stavového vektora $x(t)$. V tomto prípade máme dif. rovnicu (6) čo už je rovnica prvého rádu. Formálne teda zvoľme

$$x_1(t) = y(t) \tag{8}$$

a teda

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = -a_0x_1(t) + b_0u(t) \tag{9}$$

je vlastne „sústava“ jednej diferenciálnej rovnice. Formálne:

$$\dot{x}_1(t) = -a_0x_1(t) + b_0u(t) \tag{10a}$$

$$y(t) = x_1(t) \tag{10b}$$

je opis systému v stavovom priestore kde $x_1(t)$ je stavová veličina. Pre úplnosť, stavový vektor v tomto prípade je $x(t) = x_1(t)$ a matica $A = -a_0$, vektor $b = b_0$ a vektor $c = 1$.

2 Stabilita

Pod pomenovanim *stabilita systému* sa typicky rozumie niekoľko rôznych prípadov týkajúcich sa všeobecného riešenia diferenciálnej rovnice opisujúcej dynamický systém. Intuitívnym je termín *BIBO stabilita* (bounded input, bounded output), kde sa skúma prípad, keď vstupný signál $u(t)$ je obmedzený, jeho max. hodnota je menej ako nekonečno. Ak je potom výstupný signál $y(t)$ tiež obmedzený, hovoríme, že systém je BIBO stabilný. V podstate sa tak skúma vnútená zložka riešenia nehomogénnej diferenciálnej rovnice. Vlastnú zložku riešenia, závislú od začiatočných podmienok, je možné skúmať rovnako a súvisí to s pojmom *asymptotická stabilita*.

Pri lineárnom systéme systéme platí, že vlastnosti systému z akéhokoľvek hľadiska stability sú kompletne určené pólmi systému, teda koreňmi charakteristického polynómu. Nutnou a postačujúcou podmienkou stability lineárneho systému je, aby všetky póly systému ležali v ľavej polrovine komplexnej roviny, t.j. aby ich reálne časti boli záporné. Ak aspoň jeden pól leží na imaginárnej osi, hovoríme, že systém je na hranici stability. Ak je aspoň jeden pól v pravej polrovine, jeho reálna časť je kladná, hovoríme, že systém je nestabilný.

Stabilita systému je daná koreňmi charakteristického polynómu $A(s)$, v tomto prípade je prenosová funkcia systému prvého rádu v tvare (3) a teda charakteristický polynóm je

$$A(s) = s + a_0 \tag{11}$$

Koreň je $s_1 = -a_0$. Systém je stabilný ak $a_0 > 0$, nestabilný ak $a_0 < 0$, a ak $a_0 = 0$, tak systém je na hranici stability.

3 Statické zosilnenie a astatizmus

Pri skúmaní vlastností systému je často ako prvé potrebné poznať tzv. statické vlastnosti systému. Vo všeobecnosti sa to týka ustálených stavov systému. Typickým príkladom je situácia, keď vstupný signál $u(t)$ je konštantný, jeho hodnota sa nemení v čase. Ustálenú hodnotu vstupného signálu označme $u(\infty)$, čím sa zdôrazňuje, že ide o hodnotu akoby v čase nekonečno, čo v praxi je čas taký, keď všetky prechodné deje považujeme za skončené. Otázkou je, či sa aj hodnota výstupného signálu $y(t)$ ustáli na nejakej hodnote $y(\infty)$.

Na prvý pohľad je zrejmé, že naznačené statické vlastnosti systému nemá zmysel skúmať pre systém, ktorý je nestabilný.

3.1 Statické zosilnenie

Uvažujme systém, ktorý nie je nestabilný. Ak žiadny z pólov systému nie je nulový, potom systému dávame prívlastok statický. Stále však máme na mysli dynamický systém, ktorý ja daný v tomto prípade prenosovou funkciou systému prvého rádu v tvare (3). Súhrnne je to možné pomenovať ako *statický systém prvého rádu*, skratka SS1R.

Pre takýto systém je možné určiť jeho statické zosilnenie. Statické zosilnenie je pomer výstupu ku vstupu v ustálenom stave.

V ustálenom stave sa signály nemenia, to znamená, že ich časová derivácie sú nulové. Všimnime si diferenciálnu rovnicu (6). V ustálenom stave je $\dot{y}(\infty) = 0$, kde ∞ symbolizuje čas, v ktorom sú už signály ustálené, a teda

$$0 = -a_0 y(\infty) + b_0 u(\infty) \tag{12}$$

Pomer výstupu ku vstupu je

$$\frac{y(\infty)}{u(\infty)} = \frac{b_0}{a_0} \tag{13}$$

čo je statické zosilnenie systému. Túto hodnotu je možné označiť ako samostatný parameter systému, napr. $K = \frac{b_0}{a_0}$.

Konvenciou je tiež vo všeobecnosti uvažovať, že vstup je „jednotkový“, jednoducho, že $u(\infty) = 1$ a teda sa píše $y(\infty) = \frac{b_0}{a_0}$, ale stále sa tým myslí statické zosilnenie systému.

K rovnakému záveru prídeme, ak by sme uvažovali konštantný, ustálený signál na vstupe, a to vo všeobecnosti, teda $u(t) = 1$. To je jednotkový skok a teda $U(s) = \frac{1}{s}$. Potom

$$Y(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \frac{1}{s} \tag{14}$$

Konečná hodnota tohto obrazu signálu ($Y(s)$ je obrazom $y(t)$), je hodnota na, ktorej sa výstup systému potenciálne ustáli. S využitím vety o konečnej hodnote:

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \left(\frac{b_0}{s + a_0} \frac{1}{s} \right) \tag{15a}$$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{b_0}{s + a_0} \right) \tag{15b}$$

$$y(\infty) = \frac{b_0}{a_0} \tag{15c}$$

3.2 Astatizmus

Ak je jeden z pólov systému nulový, hovoríme, že systém je astatický („obsahuje astatizmus"). Ak práve jeden pól je nulový, hovoríme o astatizme prvého rádu (ak dva póly, potom astatizmus druhého rádu, atď). Pripomeňme, že uvažujeme systém, ktorý nie je nestabilný. Nulový pól znamená, samozrejme, že jeho reálna časť je nulová. To znamená, že systém je na hranici stability. Takýto prípad môžme pomenovať v tomto prípade ako *astatický systém prvého rádu*, skratka AS1R.

V tomto prípade máme len jeden pól a ten je nulový vtedy ak $a_0 = 0$. V takomto prípade nie je možné určiť hodnotu $y(\infty)$. Ak by sme uvažovali vstupný signál $u(t) = 1$, potom výstupná veličina $y(t)$ rastie donekonečna, neustáli sa. Je to vidieť najmä z diferenciálnej rovnice (6) pri $a_0 = 0$:

$$\dot{y}(t) = b_0 u(t) \tag{16}$$

Je zrejmé, že zmena signálu $y(t)$, čo je $\dot{y}(t)$, bude nulová len ak $u(t)$ bude nulový signál, inak sa bude $y(t)$ vo všeobecnosti meniť.

Pri $a_0 = 0$, a bez straty na všeobecnosti keď zvolíme $b_0 = 1$, máme

$$G(s) = \frac{1}{s} \tag{17}$$

čo je prenosová funkcia integrátora. Integrátor je systém prvého rádu s astatizmom prvého rádu.

3.3 Prevodová charakteristika

V kontexte statických vlastností systému má vo všeobecnosti význam hovoriť o prevodovej charakteristike systému. Prevodová charakteristika je závislosť ustálených hodnôt výstupného signálu systému od ustálených hodnôt vstupného signálu systému.

Je zrejmé, že prevodová charakteristika sa týka systémov s prívlastkom statické, teda takých, ktoré nie sú astatické.

V prípade lineárnych systémov je prevodová charakteristika priamka a bez straty na všeobecnosti môžeme uvažovať, že prechádza začiatkom súradnicového systému. Sklon priamky je daný statickým zosilnením systému, ak použijeme vyššie uvedené, sklon prevodovej charakteristiky lineárneho systému je $K = \frac{b_0}{a_0}$.

4 Prechodová charakteristika