

O vektorových priestoroch

1 Vektorový priestor

Definícia 1.1 (Vektorový priestor). Vektorový priestor V nad polom K je neprázdna množina s dvomi definovanými operáciami $\oplus : V \times V \rightarrow V$ a $\odot : K \times V \rightarrow V$, ktorá spĺňa nasledujúcich 8 axiémov:

1. Asociatívnosť:

$$\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

2. Komutatívnosť:

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

3. Prvok identity vektorového súčtu:

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{0} \in V$$

4. Inverzný prvok:

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{0} \in V$$

5. Kompatibilita skalárneho násobenia s násobením poľa

$$\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{u}) = (\alpha\beta) \odot \mathbf{u}, \quad \alpha, \beta \in K, \quad \mathbf{u} \in V$$

6. Prvok identity skalárneho násobenia:

$$\mathbb{1} \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \mathbb{1} \in K, \quad \mathbf{u} \in V$$

7. Distributívnosť vzhľadom na vektorový súčet:

$$\alpha \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \alpha \odot \mathbf{v}, \quad \alpha \in K, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

8. Distributívnosť vzhľadom na súčet poľa:

$$(\alpha + \beta) \odot \mathbf{u} = \alpha \odot \mathbf{u} \oplus \beta \odot \mathbf{u}, \quad \alpha, \beta \in K, \quad \mathbf{u} \in V$$

V definícii (1.1) sme zámerne označili operácie $+$ a \cdot v krúžku, aby sme ich rozlíšili od štandardne definovaného súčtu a súčinu, je možné ale používať aj označenie bez krúžku. Prvky $\mathbf{0}$ a $\mathbb{1}$ sú špeciálne a pre každý vektorový priestor originálne, nemusia nutne zodpovedať číselnej 0 a 1.

Príklad 1.1. Vyšetrite či komplexné čísla $\mathbf{z} = \alpha + i\beta$ so štandardne definovanými operáciami $+$, \cdot tvoria vektorový priestor V nad reálnymi číslami \mathbb{R} , $\mathbf{z} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 + i\beta_1 + (\alpha_2 + i\beta_2 + \alpha_3 + i\beta_3) &= \alpha_1 + i\beta_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 + i(\beta_2 + \beta_3)) \\
 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\
 (\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2) + \alpha_3 + i\beta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + i(\beta_1 + \beta_2)) + \alpha_3 + i\beta_3 \\
 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + i(\beta_1 + \beta_2) \\ \alpha_2 + i\beta_2 + \alpha_1 + i\beta_1 &= \alpha_2 + \alpha_1 + i(\beta_2 + \beta_1) \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + i(\beta_1 + \beta_2)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\alpha + i\beta + o_r + io_i &= \alpha + i\beta \\ \alpha + o_r &= \alpha \implies o_r = 0 \\ \beta + o_i &= \beta \implies o_i = 0 \\ \mathbf{0} &= 0 + i0\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 &= 0 + i0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \implies \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 &= 0 \implies \beta_1 = -\beta_2 \\ \mathbf{z} + (-\mathbf{z}) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

5. $\mu, \nu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mu(\nu(\alpha + i\beta)) &= \mu(\nu\alpha + i\nu\beta) = \mu\nu\alpha + i\mu\nu\beta \\ (\mu\nu)(\alpha + i\beta) &= \mu\nu\alpha + i\mu\nu\beta\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\mathbb{1}\alpha + i\mathbb{1}\beta &= \alpha + i\beta \\ \mathbb{1}\alpha &= \alpha \implies \mathbb{1} = 1 \\ \mathbb{1}\beta &= \beta \implies \mathbb{1} = 1 \\ \mathbb{1} &= 1\end{aligned}$$

7. $\mu, \nu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mu(\alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2) &= \mu(\alpha_1 + \alpha_2 + i(\beta_1 + \beta_2)) \\ &= \mu(\alpha_1 + \alpha_2) + i\mu(\beta_1 + \beta_2) \\ &= \mu\alpha_1 + \mu\alpha_2 + i(\mu\beta_1 + \mu\beta_2) \\ \mu(\alpha_1 + i\beta_1) + \mu(\alpha_2 + i\beta_2) &= \mu\alpha_1 + i\mu\beta_1 + \mu\alpha_2 + i\mu\beta_2 \\ &= \mu\alpha_1 + \mu\alpha_2 + i(\mu\beta_1 + \mu\beta_2)\end{aligned}$$

8. $\mu, \nu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\mu + \nu)(\alpha + i\beta) &= (\mu + \nu)\alpha + i(\mu + \nu)\beta \\ &= \mu\alpha + \nu\alpha + i(\mu\beta + \nu\beta) \\ \mu(\alpha + i\beta) + \nu(\alpha + i\beta) &= \mu\alpha + i\mu\beta + \nu\alpha + i\nu\beta \\ &= \mu\alpha + \nu\alpha + i(\mu\beta + \nu\beta)\end{aligned}$$

Vidíme, že všetky axiomy sú splnené a môžeme teda tvrdiť, že komplexné čísla tvoria vektorový priestor nad reálnymi číslami.