STU FEI
ÚSTAV ROBOTIKY
A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

urk.fei.stuba.sk
február 2024

KUT001

O riešení lineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu

1 Lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu

Diferenciálnu rovnicu prvého rádu môžeme zapísať vo všeobecnom tvare:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t) \tag{1}$$

kde $a(t)$ a $b(t)$ sú koeficienty, ktoré sú premenlivé (závisia od premennej t v ponímaní modelovania systémov môže predstavovať čas) a $u(t)$ je funkcia závislá od t. V prípade modelovania systémov predstavuje vstup do systému. Cieľom riešenia diferenciálnej rovnice (1) je nájsť také funkcie $x(t)$, ktoré túto rovnicu spĺňajú. Opäť v prípade modelovania systémov $x(t)$ predstavuje stav systému.

Keďže riešime lineárnu diferenciálnu rovnicu jej všeobecné riešenie môžeme nájsť poskladaním čiastkových riešení:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{2}$$

kde x_h sa nazýva homogénne riešenie a získame ho riešením zhomogenizovanej rovnice. Riešenie x_p je partikulárne riešenie, ktoré môžeme získať metódou variácie konštánt.

Najskôr získame homogénne riešenie. Rovnicu (1) zhomogenizujeme tým, že uvažujeme $u(t) = 0$:

$$\dot{x}_h(t) = a(t)x_h(t) \tag{3}$$

Zhomogenizovaná rovnica (3) je separovateľná:

$$\frac{dx_h(t)}{dt} = a(t)x_h(t) \longrightarrow \frac{dx(t)}{x_h(t)} = a(t)dt \tag{4}$$

Následne integrujeme obidve strany rovnice (4):

$$\ln\left(|x_h(t_f)|\right) + K = \int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt \tag{5}$$

Integráciu realizujeme na intervale $\langle t_i, t_f \rangle$, zaviedli sme konštantu K, ktorá vyjadruje stav v t_i.

Vyjadríme $x_h(t_f)$:

$$x_h(t_f) = \exp(-K)\exp\left(+\int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt\right) \tag{6}$$

keďže K je konštanta a rovnako aj "exp" tak môžeme zaviesť novú konštantu L:

$$L = \exp(-K) \tag{7}$$

Riešenie zhomogenizovanej rovnice (3) má teda tvar:

$$x_h(t_f) = L \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt\right) \tag{8}$$

Teraz prejdeme na vyjadrenie partikulárneho riešenia. Predpokladáme, že bude v rovnakom tvare ako homogénne riešenie (8):

$$x_p(t) = L(t) \exp\left(\int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) \tag{9}$$

Avšak, pripustíme, že "konštanta" L nie je konštantou ale je variabilná (variácia konštánt). Táto variabilita má zohľadniť vplyv u, ktorý sme v homogénnom riešení vypustili.

Partikulárne riešenie (9) zderivujeme:

$$\dot{x}_p(t) = \dot{L}(t) \exp\left(\int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) + L(t)a(t) \exp\left(\int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) \tag{10}$$

a dosadíme do (1). Po úpravách dostaneme:

$$\dot{L}(t) = \exp\left(-\int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t) \tag{11}$$

a po integrácii:

$$L(t_f) + M = \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(-\int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t)\, dt \tag{12}$$

Nakoniec dosadením (12) do (9) ešte vyjadríme partikulárne riešenie x_p v bode t_f:

$$\begin{aligned} x_p(t_f) = {} & N \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(\tau)\, d\tau\right) \\ & + \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(\tau)\, d\tau - \int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t)\, dt \end{aligned} \tag{13}$$

kde N je konštanta $N = -M$.

Získané homogénne (8) a partikulárne (13) riešenie teraz sčítame podľa (2):

$$\begin{aligned} x(t_f) = {} & C \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt\right) \\ & + \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(\tau)\, d\tau - \int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t)\, dt \end{aligned} \tag{14}$$

kde sme zaviedli $C = L - N$, pretože všetko sú to konštanty a môžeme ich ľubovoľne premenovať. Pokiaľ ešte poznáme začiatočné podmienky $x(t_i)$, tak môžeme tvrdiť $C = x(t_i)$ a konečné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice 1. rádu má tvar:

$$\begin{aligned} x(t_f) = {} & x(t_i) \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt\right) \\ & + \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(\tau)\, d\tau - \int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t)\, dt \end{aligned} \tag{15}$$

2 Sústava lineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{16}$$