

# O riešení lineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu

## 1 Lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu

Diferenciálnu rovnicu prvého rádu môžeme zapísať vo všeobecnom tvare:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t) \quad (1)$$

kde  $a(t)$  a  $b(t)$  sú koeficienty, ktoré sú premenlivé (závisia od premennej  $t$  v ponímaní modelovania systémov môže predstavovať čas) a  $u(t)$  je funkcia závislá od  $t$ . V prípade modelovania systémov predstavuje vstup do systému. Cieľom riešenia diferenciálnej rovnice (1) je nájsť také funkcie  $x(t)$ , ktoré túto rovnicu spĺňajú. Opäť v prípade modelovania systémov  $x(t)$  predstavuje stav systému.

Keďže riešime lineárnu diferenciálnu rovnicu jej všeobecné riešenie môžeme nájsť poskladaním čiastkových riešení:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2)$$

kde  $x_h$  sa nazýva homogénne riešenie a získame ho riešením zhomogenizovanej rovnice. Riešenie  $x_p$  je partikulárne riešenie, ktoré môžeme získať metódou variácie konštánt.

Najskôr získame homogénne riešenie. Rovnicu (1) zhomogenizujeme tým, že uvažujeme  $u(t) = 0$ :

$$\dot{x}_h(t) = a(t)x_h(t) \quad (3)$$

Zhomogenizovaná rovnica (3) je separovateľná:

$$\frac{dx_h(t)}{dt} = a(t)x_h(t) \longrightarrow \frac{dx(t)}{x_h(t)} = a(t)dt \quad (4)$$

Následne integrujeme obidve strany rovnice (4):

$$\ln(|x_h(t_f)|) + K = \int_{t_i}^{t_f} a(t) dt \quad (5)$$

Integráciu realizujeme na intervale  $\langle t_i, t_f \rangle$ , zaviedli sme konštantu  $K$ , ktorá vyjadruje stav v  $t_i$ .

Vyjadríme  $x_h(t_f)$ :

$$x_h(t_f) = \exp(-K) \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(t) dt\right) \quad (6)$$

keďže  $K$  je konštanta a rovnako aj "exp" tak môžeme zaviesť novú konštantu  $L = \exp(-K)$ , takéto premenovávanie konštánt budeme využívať často.

Riešenie zhomogenizovanej rovnice (3) má teda tvar:

$$x_h(t_f) = L \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(t) dt\right) \quad (7)$$

Teraz prejdeme na vyjadrenie partikulárneho riešenia. Predpokladáme, že bude v rovnakom tvare ako homogénne riešenie (7):

$$x_p(t) = L(t) \exp \left( \int_{t_i}^t a(\tau) d\tau \right) \quad (8)$$

Avšak, pripustíme, že "konštanta"  $L$  nie je konštantou ale je variabilná (variácia konštánt). Táto variabilita má zohľadniť vplyv  $u$ , ktorý sme v homogénnom riešení vypustili.

Partikulárne riešenie (8) zderivujeme:

$$\dot{x}_p(t) = \dot{L}(t) \exp \left( \int_{t_i}^t a(\tau) d\tau \right) + L(t)a(t) \exp \left( \int_{t_i}^t a(\tau) d\tau \right) \quad (9)$$

a dosadíme do (1). Po úpravách dostaneme:

$$\dot{L}(t) = \exp \left( - \int_{t_i}^t a(\tau) d\tau \right) b(t)u(t) \quad (10)$$

a po integrácii:

$$L(t_f) + M = \int_{t_i}^{t_f} \exp \left( - \int_{t_i}^t a(\tau) d\tau \right) b(t)u(t) dt \quad (11)$$

Nakoniec dosadením (11) do (8) ešte vyjadríme partikulárne riešenie  $x_p$  v bode  $t_f$ :

$$\begin{aligned} x_p(t_f) &= N \exp \left( \int_{t_i}^{t_f} a(\tau) d\tau \right) \\ &+ \int_{t_i}^{t_f} \exp \left( \int_{t_i}^{t_f} a(\tau) d\tau - \int_{t_i}^t a(\tau) d\tau \right) b(t)u(t) dt \end{aligned} \quad (12)$$

$$= N \exp \left( \int_{t_i}^{t_f} a(\tau) d\tau \right) \quad (13)$$

$$+ \int_{t_i}^{t_f} \exp \left( \int_t^{t_f} a(\tau) d\tau \right) b(t)u(t) dt \quad (14)$$

kde  $N$  je konštanta  $N = -M$ , integrály sme zjednotili na základe predpokladu, že  $t \in \langle t_i, t_f \rangle$ , teda integrály na intervale  $\langle t_i, t \rangle$  sa navzájom odčítajú.

Získané homogénne (7) a partikulárne (12) riešenie teraz sčítame podľa (2):

$$x(t_f) = C \exp \left( \int_{t_i}^{t_f} a(t) dt \right) + \int_{t_i}^{t_f} \exp \left( \int_t^{t_f} a(\tau) d\tau \right) b(t)u(t) dt \quad (15)$$

kde sme zaviedli  $C = L - N$ , pretože všetko sú to konštanty a môžeme ich ľubovoľne premenovať. Pokiaľ ešte poznáme začiatkové podmienky  $x(t_i)$ , tak môžeme tvrdiť  $C = x(t_i)$  a konečné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice 1. rádu má tvar:

$$x(t_f) = x(t_i) \exp \left( \int_{t_i}^{t_f} a(t) dt \right) + \int_{t_i}^{t_f} \exp \left( \int_t^{t_f} a(\tau) d\tau \right) b(t)u(t) dt \quad (16)$$

## 2 Sústava lineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu

Rovnako môžeme postupovať aj v prípade sústavy diferenciálnych rovníc 1. rádu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (17)$$

Tento tvar je zámerne zhodný s tvarom stavového modelu. Matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  sú konštantné, pretože v prípade, že by boli časovo premenlivé tak neexistuje analytické riešenie. A teda analytické riešenie sústavy diferenciálnych rovníc 1. rádu (17) má tvar:

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}(t_i) \exp(\mathbf{A}(t_f - t_i)) + \int_{t_i}^{t_f} \exp(\mathbf{A}(t_f - t)) \mathbf{B}\mathbf{u}(t) dt \quad (18)$$

Maticový exponent vieme rozpísať do mocninového radu:

$$\exp(\mathbf{M}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{M}^n \quad (19)$$