1

Dynamický systém

- Fyzika
  - dynamika (klasická mechanika)
    $F = ma$
  - zotrvačnosť
    (bez zotrvačnosť ?)

diferenciálny počet
(calculus ...)
diferenciálne rovnice ...

- Matematika
  - isté trieda diferenciálnych rovníc sa aj v matematike nazýva dynamické systémy...

Matematický opis dynamického systému

⇓

diferenciálna rovnica

Analytické riešenie diferenciálnych rovnic
- obyčajných
- lineárnych
- homogénnych

Cieľ: obyčajná diferenciálna rovnica ~~XXX~~
(ODR)
(ODE (in english))

...predmet MRS tak trochu dopĺňa aj klasické matematické predmety...

RIEŠENIE Dif. ronice ← čo to je ?

- analytické riešenie
  - metódy („čiro analytické")
  - využitie Laplaceovej tranformácie
- numerické riešenie (algoritmus...)

prečo tento cieľ ?
... je to dobrý nástroj pri témach teórie systémov, teórie riadenia...

- systém
- systémová analýza
- modelovanie (systémov)
- simulácia (systémov)
- identifikácia (systémov)

[Huba2002] kap. ⊗

2

SYSTÉM ⇒ výstup systému

... to môže byť naozaj, že čokoľvek ...

„slová:" výstup systému
veličina → výstupná veličina
signál → výstupný signál

Dynamický systém ⇒ má výstup

zmena v čase

výstup sa mení v čase

t čas

y symbol pre výstupnú veličinu

$y(t)$ označenie pre výstupný signál (taká je (moja?) konvencia) ...výstupný signál sa mení v čase ... je funkciou času ...

Zmena výstupného signálu v čase:

matematicky: $\dfrac{d\,y(t)}{dt}$

mat. skrátene: $y'(t)$

„inžiniersky": $\dot{y}(t)$

„Zmena zmeny": $\dfrac{d^2 y(t)}{dt^2}$ $\ddot{y}(t)$

(druhá derivácia podľa času)

Systém určuje / udáva / stanovuje / definuje / ... aká bude zmena v čase, napríklad výstupného signálu.

Lepším pojmom je ale stav systému. Stavom systému sa rozumie jeden až viac signálov (veličín) pričom nie všetky musia byť považované za výstup systému. Samozrejme môže byť, že je len jedna stavová veličina, ktorá je aj výstupnou.

Uvažujme systém len s jednou veličinou, jedným signálom, označme $y(t)$. Dynamický systém, vo všeobecnosti, môžeme matematicky zapísať v tvare:

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \qquad (*01)$$

kde f je funkcia, ktorej argumentom je stavová veličina systému. Dáva do vzťahu stav a zmenu stavu.

Z matematického hľadiska ide o diferenciálnu rovnicu. Neznámou je $y(t)$. Je to funkcia času. Je to časová závislosť. Je to priebeh veličiny v čase. Je to signál.

Ak nájdeme takú časovú funkciu, ktorú keď dosadíme do rovnice (*01), a táto bude platiť, tak sme našli riešenie diferenciálnej rovnice.

MIMOCHODOM Schematické zobrazenie dosiaľ uvedeného - „bloková schéma":

$$\boxed{\text{SYSTÉM}} \xrightarrow{y(t)}$$

(3) Príklad dynamického systému

[dokument # MRS01]

V časti 2.2 je príklad fyzikálneho deja – vybíjanie kondenzátora.
Fyzikálny rozbor daného deja vedie na diferenciálnu rovnicu, ktorá má vo všeobecnosti (bez konkrétnych fyz. významov) tvar:

$$\dot{y}(t) = a\, y(t)$$

Ide o dif. rovnicu:

- obyčajnú dif. rovnicu (f-cia, ktorá je neznámou, je f-ciou len jednej premennej)
- prvého rádu
- lineárnu
- homogénnu

Pojem začiatočná podmienka

$y(t)$ je časová závislosť v akomkoľvek čase t. Konkrétnej hodnote „na začiatku času", teda $t=0$, hovoríme začiatočná podmienka:

$$y(0) = y_0$$

kde y_0 je hodnota (číslo).
Pre ďalšie súvislosti má zmysel hľadať pojem Cauchyho úloha.
Tiež [MRS03].

Dokumenty [MRS02, MRS03] uvádzajú aj isté metódy riešenia dif. rovníc.
V kontexte teórie sys. a teórie riadenia má zmysel pozrieť sa na metódu využívajúcu tzv. charakteristický polynóm. [MRS02], časť 2.1.

Máme ODR ...

Linearita $\dot{y}(t) = f(y(t))$

f musí byť lineárna funkcia, teda napr.

$$\dot{y}(t) = a\, y(t) \qquad (*03)$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je koeficient (číslo, parameter...)

Homogénnosť

V rovnici sa nachádza len neznáma. V našom kontexte je to funkcia času a jej derivácie. Inými slovami, v rovnici je len signál $y(t)$ (a jeho derivácie).
Formálnejšie: všetky členy s neznámou presunieme na ľavú stranu rovnice

$$\dot{y}(t) - a\, y(t) = 0$$

pravá strana je nulová ⇒ rovnica je homogénna.
Nehomogénnou rovnicou by bol prípad, ak by okrem neznámej funkcie času $y(t)$ v rovnici vystupovala aj iná funkcia času, označme $u(t)$, teda:

$$\dot{y}(t) - a\, y(t) = u(t)$$

Rád rovnice je určený najvyššou deriváciou neznámej. Napríklad rovnica (*03) je prvého rádu. Príklad rovnice druhého rádu:

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$$

MIMOCHODOM: Príkladom ODR 2. rádu, avšak nelineárnej a nehomogénnej, je kyvadlo – pozri [MRS02], časť 1.1.

Ďalšie súvisiace veci: rozklad dif. rov. vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu [KUT001].
Pojem stav systému [KUT002].

4 Charakteristická rovnica a metóda analytického riešenia lin. homog. ODR

[MRS 02], časť 2 (aj s príkladmi)

Viac príkladov: [MRS 98, MRS 99]

PRÍKLAD

Zadané:

$$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=0 \qquad y(0)=3, \quad \dot{y}(0)=-2$$

rovnica

začiatočné podmienky

Úloha:

Nájsť analytické riešenie, $y(t)=?$

Metóda:

1.) Zostavenie charakteristickej rovnice, teda:

$$s^2+3s^1+2s^0=0$$

$$\underbrace{s^2+3s+2}_{\text{charakteristický polynóm}}=0$$

Korene: $s_1=-2$ $\quad s_2=-1$

Sú reálne a navzájom rôzne.

2.) Fundamentálne riešenia:

Podľa metódy to znamená, že fundamentálne riešenia prislúchajúce k jednotlivým koreňom charakteristického polynómu sú

$$y_{f1}(t)=e^{-2t} \qquad y_{f2}(t)=e^{-t}$$

3.) Všeobecné riešenie je lineárnou kombináciou fund. riešení:

$$y(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-t}$$

kde c_1 a c_2 sú reálne čísla.

4.) Konkrétne riešenie

Dosiaľ sme pri hľadaní riešenia zohľadnili len samotnú dif. rovnicu. Ak zahrnieme aj začiatočné podmienky, konkretizujeme všeobecné riešenie.

Začiatočné podmienky sa týkajú $y(0)$ a $\dot{y}(0)$. Zaujíma nás teda $y(t)$, to máme, a $\dot{y}(t)$, to ľahko získame.

$$\dot{y}(t)=c_1e^{-2t}(-2)+c_2e^{-t}(-1)$$

Funkcie $y(t)$ a $\dot{y}(t)$ sú platné pre akúkoľvek hodnotu t, aj pre $t=0$. Vtedy ale poznáme hodnotu

$$y(0)=c_1+c_2=3$$

$$\dot{y}(0)=-2c_1-c_2=-2$$

$$c_2=3-c_1$$

$$-2c_1-3+c_1=-2$$

$$-c_1=1$$

$$c_1=-1$$

$$c_2=4$$

Konkrétne riešenie vyhovujúce začiatočným podmienkam je

$$y(t)=-e^{-2t}+4e^{-t}$$

LITERATÚRA

[Kuben 1995] časť 2.2.5

Pre istý náznak princípu: [Mihalikova 2012] časť 3.2.

Pojem charakteristická rovnica a char. polynóm takpovediac pochádzajú z lineárnej algebry z tém okolo determinantu matice. Zovšeobecnene totiž má veľký význam hovoriť o sústave dif. rovníc ~~čo vedie~~ prvého rádu čo vedie na ich maticový zápis a hľadanie riešenia súvisí s vlastnosťami týchto matíc.

Pozri [Diblík 2010], kap. 4 a 5.