ÚSTAV ROBOTIKY A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

júl 2024
github.com/PracovnyBod/KUT
MT

KUT010

Mini zbierka riešených úloh: analytické riešenie diferenciálnych rovníc

ÚLOHY sú zamerané na analytické riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc metódou charakteristickej rovnice a s využitím Laplaceovej transformácie. Táto zbierka je predovšetkým doplnkom k predchádzajúcim textom:

KUT006 O riešení homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami

KUT008 O využití Laplaceovej transformácie pri riešení diferenciálnych rovníc

1 Úvodné poznámky

Pri hľadaní riešenia metódou charakteristickej rovnice je možné využiť nasledujúce konštatovania:

1. Ak má charakteristická rovnica n navzájom rôznych riešení s_i pre $i = 1, \dots, n$, potom zodpovedajúce fundamentálne riešenia (módy) sú: $e^{s_1 t}$, $e^{s_2 t}$, …, $e^{s_n t}$.
2. Ak sa medzi n koreňmi charakteristického polynómu vyskytne k-násobný koreň, vytvoríme k lineárne závislých riešení: $e^{s_i t}$, $te^{s_i t}$, …, $t^{k-1}e^{s_i t}$
3. V prípade výskytu dvojice komplexne združených koreňov charakteristického polynómu, $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, kde j je imaginárna jednotka, využijeme na určenie fundamentálnych riešení Eulerov vzťah
$$e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t} \left(\cos \beta t \pm j \sin \beta t\right)$$
Preto potom možno písať príslušné fundamentálne riešenie v tvare
$$c_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)t} = e^{\alpha t} \left(c' \cos \beta t + c'' \sin \beta t\right)$$
kde sú imaginárne časti nulové.

Pri využití Laplaceovej transformácie je potrebné využiť tabuľku Laplaceových obrazov signálov, ktorá je dostupná napríklad v predchádzajúcom texte KUT009. Vybrané položky sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

$f(t)$	$F(s)$
$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$
$\dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
1	$\dfrac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$

2 Otázky

Otázka 1 Čo je riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice (vo všeobecnosti)?

Riešením diferenciálnej rovnice je *funkcia* pričom v kontexte dynamických systémov ide o *funkciu času*. Inými slovami, neznámou v rovnici je funkcia času (časová závislosť, signál). Diferenciálnou sa rovnica nazýva preto, že sa v nej nachádzajú aj derivácie neznámej funkcie. Obyčajnou sa diferenciálna rovnica nazýva preto, že neznámou je funkcia len jednej premennej (času).

Otázka 2 Aký je rozdiel medzi homogénnou a nehomogénnou obyčajnou diferenciálnou rovnicou?

Homogénnou nazývame diferenciálnu rovnicu vtedy, keď v nej figuruje len samotná neznáma funkcia. Nefigurujú v nej iné funkcie. V kontexte dynamických systémov ide typicky o prípad, keď systém nemá žiadny vstupný signál (vstupný signál je nulový). Ak sa členy rovnice obsahujúce neznámu a jej derivácie presunú na ľavú stranu rovnice, pravá strana bude nulová

Nehomogénnou nazývame diferenciálnu rovnicu vtedy, keď v nej figuruje aj iná funkcia ako samotná neznáma funkcia. V kontexte dynamických systémov ide o prípad, keď systém má vstupný signál. Ak sa členy rovnice obsahujúce neznámu a jej derivácie presunú na ľavú stranu rovnice, pravá strana bude nenulová, bude obsahovať členy obsahujúce vstupný signál (vrátane jeho derivácií).

3 Úlohy

Úloha 1 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad a \in \mathbb{R}$$

Riešenie:

Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. Tú je možné určiť nahradením derivácií neznámej funkcie mocninami pomocnej premennej, označme ju s. Napríklad prvú deriváciu $\dot{y}(t)$ nahradíme s^1, nultú deriváciu $y(t)$ nahradíme s^0. Charakteristická rovnica pre danú diferenciálnu rovnicu bude

$$s + a = 0 \tag{1}$$

Druhým krokom je stanovenie fundamentálnych riešení diferenciálnej rovnice, ktoré sú dané riešeniami charakteristickej rovnice. Riešením charakteristickej rovnice je

$$s_1 = -a \tag{2}$$

Fundamentálne riešenie je teda len jedno

$$y_{f1}(t) = e^{-at} \tag{3}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-at} \tag{4}$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$ je konštanta.

Štvrtým krokom je stanovenie konkrétneho riešenia dif. rovnice v prípade, ak sú dané začiatočné podmienky. Konkrétne ide o stanovenie hodnoty konštanty c_1. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1 \, e^{(-a)0} = c_1 \tag{5}$$

Samotná hodnota $y(0)$ je známa, keďže máme začiatočnú podmienku $y(0) = y_0$. Takže

$$c_1 = y_0 \tag{6}$$

To znamená, že riešenie úlohy je:

$$y(t) = y_0 \, e^{(-a)t} \tag{7}$$

Úloha 2 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\ddot{y}(t) + (a+b)\dot{y}(t) + aby(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = z_0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Riešenie:

Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. V tomto prípade

$$s^2 + (a+b)s + ab = 0 \tag{8}$$

V druhom kroku pre stanovenie fundamentálnych riešení hľadáme riešenia charakteristickej rovnice. Vo všeobecnosti

$$s_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} \tag{9}$$

avšak v tomto prípade tiež vidíme, že

$$s^2 + (a+b)s + ab = (s+a)(s+b) \tag{10}$$

Riešenia charakteristickej rovnice teda sú

$$s_1 = -a \tag{11a}$$
$$s_2 = -b \tag{11b}$$

Zodpovedajúce fundamentálne riešenia sú

$$y_{f1}(t) = e^{-at} \tag{12a}$$
$$y_{f2}(t) = e^{-bt} \tag{12b}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{-bt} \tag{13}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú konštanty.

Vo štvrtom kroku je možné na základe začiatočných podmienok stanoviť konkrétne riešenie. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1\, e^{(-a)0} + c_2\, e^{(-b)0} = c_1 + c_2 \tag{14}$$

Derivácia všeobecného riešenia je

$$\dot{y}(t) = -ac_1 e^{-at} - bc_2 e^{-bt} \tag{15}$$

Pre čas $t = 0$ má derivácia všeobecného riešenia tvar

$$\dot{y}(0) = -ac_1 - bc_2 \tag{16}$$

Z uvedeného vyplýva sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych konštantách c_1 a c_2

$$c_1 + c_2 = y_0 \tag{17a}$$
$$-ac_1 - bc_2 = z_0 \tag{17b}$$

Do druhej rovnice dosaďme $c_1 = y_0 - c_2$

$$-a(y_0 - c_2) - bc_2 = z_0 \tag{18a}$$
$$-ay_0 + ac_2 - bc_2 = z_0 \tag{18b}$$
$$c_2(a-b) = z_0 + ay_0 \tag{18c}$$
$$c_2 = \frac{z_0 + ay_0}{a-b} \tag{18d}$$

potom

$$c_1 = y_0 - c_2 \tag{19a}$$
$$c_1 = y_0 - \frac{z_0 + ay_0}{a - b} \tag{19b}$$
$$c_1 = \frac{y_0(a-b) - z_0 - ay_0}{a - b} \tag{19c}$$
$$c_1 = \frac{y_0 a - y_0 b - z_0 - ay_0}{a - b} \tag{19d}$$
$$c_1 = \frac{-y_0 b - z_0}{a - b} \tag{19e}$$

Konkrétne riešenie úlohy teda je

$$y(t) = \frac{-y_0 b - z_0}{a - b} e^{-at} + \frac{z_0 + ay_0}{a - b} e^{-bt} \tag{20}$$

Úloha 3 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0 \qquad y(0) = 3 \qquad \dot{y}(0) = -2$$

Riešenie:

Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. V tomto prípade

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \tag{21}$$

V druhom kroku pre stanovenie fundamentálnych riešení hľadáme riešenia charakteristickej rovnice. Riešením charakteristickej rovnice sú

$$s_1 = -1 \tag{22a}$$
$$s_2 = -2 \tag{22b}$$

Zodpovedajúce fundamentálne riešenia sú

$$y_{f1}(t) = e^{-t} \tag{23a}$$
$$y_{f2}(t) = e^{-2t} \tag{23b}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \tag{24}$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú konštanty.

Vo štvrtom kroku je možné na základe začiatočných podmienok stanoviť konkrétne riešenie. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1\, e^{(-1)0} + c_2\, e^{(-2)0} = c_1 + c_2 \tag{25}$$

Tým sme takpovediac zúžitkovali informáciu o začiatočnej hodnote $y(0) = 3$. Druhá začiatočná podmienka sa týka derivácie riešenia. Derivácia všeobecného riešenia je

$$\dot{y}(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \tag{26}$$

Pre čas $t = 0$ má derivácia všeobecného riešenia tvar

$$\dot{y}(0) = -c_1 - 2c_2 \tag{27}$$

Z uvedeného vyplýva sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych konštantách c_1 a c_2

$$c_1 + c_2 = 3 \tag{28a}$$
$$-c_1 - 2c_2 = -2 \tag{28b}$$

Platí $c_2 = 3 - c_1$, a teda

$$-c_1 - 2(3 - c_1) = -2 \tag{29a}$$
$$-c_1 - 6 + 2c_1 = -2 \tag{29b}$$
$$c_1 = 4 \tag{29c}$$

potom

$$c_2 = 3 - c_1 \tag{30a}$$
$$c_2 = 3 - 4 \tag{30b}$$
$$c_2 = -1 \tag{30c}$$

Našli sme funkciu $y(t)$, ktorá je riešením diferenciálnej rovnice pre konkrétne začiatočné podmienky

$$y(t) = 4e^{-t} - e^{-2t} \tag{31}$$

Úloha 4 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\ddot{y}(t) + (a+b)\dot{y}(t) + aby(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = z_0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Riešenie:

Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \tag{32a}$$
$$\mathcal{L}\{(a+b)\dot{y}(t)\} = (a+b)(sY(s) - y(0)) \tag{32b}$$
$$\mathcal{L}\{aby(t)\} = abY(s) \tag{32c}$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + (a+b)(sY(s) - y(0)) + abY(s) = 0 \tag{33a}$$
$$s^2Y(s) - sy_0 - z_0 + (a+b)(sY(s) - y_0) + abY(s) = 0 \tag{33b}$$
$$s^2Y(s) - sy_0 - z_0 + asY(s) + bsY(s) - ay_0 - by_0 + abY(s) = 0 \tag{33c}$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s^2 + as + bs + ab) = sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0 \tag{34}$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0}{s^2 + (a+b)s + ab} \tag{35}$$

Zaujíma nás však originál tohto obrazu. V uvedenom tvare obrazu však nie je možné nájsť jeho originál s využitím tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Obraz je potrebné prepísať na jednoduchšie výrazy, typicky je účelným rozklad na parciálne zlomky. Menovateľ $s^2 + (a+b)s + ab$ je kvadratický polynóm, ktorý má dva rôzne korene a tie sú

$$s_1 = -a \tag{36a}$$
$$s_2 = -b \tag{36b}$$

Takže platí

$$Y(s) = \frac{sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0}{s^2 + (a+b)s + ab} = \frac{sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} \tag{37}$$

kde A a B sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0 = A(s+b) + B(s+a) \tag{38}$$

Uvedené platí pre akékoľvek s, teda aj pre $s = -a$ a $s = -b$. Pre $s = -a$ dostaneme

$$-ay_0 + z_0 + ay_0 + by_0 = A(-a+b) + B(-a+a) \tag{39a}$$
$$z_0 + by_0 = A(-a+b) \tag{39b}$$
$$A = \frac{z_0 + by_0}{-a+b} \tag{39c}$$

Pre $s = -b$ dostaneme

$$-by_0 + z_0 + ay_0 + by_0 = A(-b+b) + B(-b+a) \tag{40a}$$
$$z_0 + ay_0 = B(-b+a) \tag{40b}$$
$$B = \frac{z_0 + ay_0}{-b+a} \tag{40c}$$

Obraz riešenia dif. rovnice potom je v tvare

$$Y(s) = \frac{z_0 + by_0}{-a+b}\left(\frac{1}{s+a}\right) + \frac{z_0 + ay_0}{-b+a}\left(\frac{1}{s+b}\right) \tag{41}$$

Originálom k výrazu $\frac{1}{s+a}$ je v zmysle tabuľky Laplaceových obrazov signálov funkcia e^{-at}. Originálom k výrazu $\frac{1}{s+b}$ je v zmysle tabuľky Laplaceových obrazov signálov funkcia e^{-bt}. Preto originálom obrazu riešenia dif. rovnice je

$$y(t) = \frac{z_0 + by_0}{-a+b}e^{-at} + \frac{z_0 + ay_0}{-b+a}e^{-bt} \tag{42}$$

Našli sme riešenie diferenciálnej rovnice pre dané začiatočné podmienky.

Úloha 5 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \qquad y(0) = 0 \qquad u(t) = \delta(t) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

kde $\delta(t)$ je Diracków impulz.

Riešenie:

Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0) \tag{43a}$$
$$\mathcal{L}\{ay(t)\} = aY(s) \tag{43b}$$
$$\mathcal{L}\{bu(t)\} = bU(s) = b \cdot 1 \tag{43c}$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = b \tag{44a}$$
$$sY(s) + aY(s) = b \tag{44b}$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s+a) = b \tag{45}$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{b}{s+a} = b\,\frac{1}{s+a} \tag{46}$$

Zaujíma nás však originál tohto obrazu. V tomto prípade je priamo z tabuľky Laplaceových obrazov signálov zrejmé, že originálom je funkcia

$$y(t) = b\,e^{-at} \tag{47}$$

čím sme našli riešenie diferenciálnej rovnice.

Úloha 6 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \qquad y(0) = y_0 \qquad u(t) = 1 \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

kde $u(t)$ je v tejto súvislosti skoková zmena vstupného signálu v čase $t = 0$.

Riešenie:

Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0) \tag{48a}$$
$$\mathcal{L}\{ay(t)\} = aY(s) \tag{48b}$$
$$\mathcal{L}\{bu(t)\} = bU(s) = b \cdot \frac{1}{s} \tag{48c}$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = b\frac{1}{s} \tag{49a}$$
$$sY(s) - y_0 + aY(s) = b\frac{1}{s} \tag{49b}$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s + a) = y_0 + b\frac{1}{s} \tag{50}$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{y_0}{s + a} + b\frac{1}{s(s + a)} \tag{51}$$

Zaujíma nás však originál tohto obrazu. Prvý výraz je

$$Y_1(s) = \frac{y_0}{s + a} \tag{52}$$

Súvisí so začiatočnou podmienkou a jeho originálom (podľa tabuľky Laplaceových obrazov) je funkcia

$$y_1(t) = y_0 e^{-at} \tag{53}$$

Druhý výraz je

$$Y_2(s) = \frac{b}{s(s + a)} \tag{54}$$

Súvisí so vstupným signálom $u(t)$ a nie je možné priamo určiť jeho originál z tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Preto je potrebné využiť rozklad na parciálne zlomky. V tomto prípade

$$Y_2(s) = \frac{b}{s(s + a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + a} \tag{55}$$

kde A a B sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$b = A(s + a) + Bs \tag{56}$$

Uvedené platí pre akékoľvek s, teda aj pre $s = 0$ a $s = -a$. Pre $s = 0$ dostaneme

$$b = Aa \tag{57a}$$
$$A = \frac{b}{a} \tag{57b}$$

Pre $s = -a$ dostaneme

$$b = B(-a) \tag{58a}$$
$$B = \frac{-b}{a} \tag{58b}$$

Teda

$$Y_2(s) = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{b}{a}\left(\frac{1}{s+a}\right) \tag{59}$$

a originálna funkcia je

$$y_2(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \tag{60}$$

Súčet $y_1(t) + y_2(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a}e^{-at} \tag{61}$$

Úloha 7 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \qquad y(0) = 3 \qquad \dot{y}(0) = -2 \qquad u(t) = 1$$

Riešenie:

Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \tag{62a}$$
$$\mathcal{L}\{4\dot{y}(t)\} = 4(sY(s) - y(0)) \tag{62b}$$
$$\mathcal{L}\{3y(t)\} = 3Y(s) \tag{62c}$$
$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \frac{1}{s} \tag{62d}$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 3Y(s) = \frac{1}{s} \tag{63a}$$
$$s^2Y(s) - s\cdot 3 - (-2) + 4sY(s) - 4\cdot 3 + 3Y(s) = \frac{1}{s} \tag{63b}$$
$$s^2Y(s) - 3s + 2 + 4sY(s) - 12 + 3Y(s) = \frac{1}{s} \tag{63c}$$
$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = 3s + 10 + \frac{1}{s} \tag{63d}$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s^2 + 4s + 3) = 3s + 10 + \frac{1}{s} \tag{64}$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{3s+10}{s^2+4s+3} + \frac{1}{s(s^2+4s+3)} \tag{65}$$

Zaujíma nás však originál tohto obrazu. Prvý výraz je

$$Y_1(s) = \frac{3s+10}{s^2+4s+3} \tag{66}$$

Súvisí so začiatočnými podmienkami a nie je možné priamo určiť jeho originál z tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Preto je potrebné využiť rozklad na parciálne zlomky. Výraz v menovateli $s^2 + 4s + 3$ je kvadratický polynóm, ktorý má dva rôzne korene a tie sú

$$s_{1,2} = \frac{-(4) \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \tag{67}$$

teda

$$s_1 = -1 \tag{68a}$$
$$s_2 = -3 \tag{68b}$$

Potom v tomto prípade

$$Y_1(s) = \frac{3s+10}{s^2+4s+3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \tag{69}$$

kde A a B sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$3s+10 = A(s+3) + B(s+1) \tag{70}$$

Uvedené platí pre akékoľvek s, teda aj pre $s=-1$ a $s=-3$. Pre $s=-1$ dostaneme

$$-3+10 = A(-1+3) \tag{71a}$$
$$7 = 2A \tag{71b}$$
$$A = \frac{7}{2} \tag{71c}$$

Pre $s=-3$ dostaneme

$$-9+10 = B(-3+1) \tag{72a}$$
$$1 = -2B \tag{72b}$$
$$B = -\frac{1}{2} \tag{72c}$$

Teda

$$Y_1(s) = \frac{3s+10}{s^2+4s+3} = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+3}\right) \tag{73}$$

a originálna funkcia je

$$y_1(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \tag{74}$$

Druhý výraz je

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+3)} \tag{75}$$

Súvisí so vstupným signálom $u(t)$ a nie je možné priamo určiť jeho originál z tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Preto je potrebné využiť rozklad na parciálne zlomky. V tomto prípade

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+3)} = \frac{C}{s} + \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s+3} \tag{76}$$

kde C, D a E sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$1 = C(s+1)(s+3) + Ds(s+3) + Es(s+1) \tag{77}$$

Uvedené platí pre akékoľvek s, teda aj pre $s=0$, $s=-1$ a $s=-3$. Pre $s=0$ dostaneme

$$1 = C(0+1)(0+3) \tag{78a}$$
$$1 = 3C \tag{78b}$$
$$C = \frac{1}{3} \tag{78c}$$

Pre $s=-1$ dostaneme

$$1 = D(-1)(-1+3) \tag{79a}$$
$$1 = 2D \tag{79b}$$
$$D = \frac{1}{2} \tag{79c}$$

Pre $s=-3$ dostaneme

$$1 = E(-3)(-3+1) \tag{80a}$$
$$1 = 6E \tag{80b}$$
$$E = \frac{1}{6} \tag{80c}$$

Teda

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{s+3}\right) \tag{81}$$

a originálna funkcia je

$$y_2(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \tag{82}$$

Súčet $y_1(t) + y_2(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$y(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \tag{83a}$$

$$y(t) = 4e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3} \tag{83b}$$