STU FEI
ÚSTAV ROBOTIKY
A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

júl 2024
github.com/PracovnyBod/KUT
MT

KUT008

O využití Laplaceovej transformácie pri riešení diferenciálnych rovníc

Laplaceova transformácia ako taká je širší pojem avšak v tomto texte sa zameriavame len na jej využitie pri riešení diferenciálnych rovníc.

Laplaceova transformácia umožňuje efektívne pracovať s lineárnymi dynamickými systémami. Transformuje a tým zjednodušuje operácie súvisiace s hľadaním riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc. Predovšetkým zjednodušuje prácu s konvolučným integrálom alebo konvolučnou rovnicou. Tieto pojmy súvisia s hľadaním riešenia nehomogénnej diferenciálnej rovnice. Sú však nad rámec tohto textu a nebudeme ich tu uvádzať.

1 Definícia

V hrubých črtách je možné o definícii Laplaceovej transformácie uviesť nasledovné.

Majme časovú funkciu $f(t)$ (s vhodnými vlastnosťami, ktoré tu nebudeme uvádzať). Laplaceova transformácia (LT) transformuje, či mapuje, túto funkciu na inú funkciu. Inú funkciu označme $F(s)$. LT je definovaná podľa vzťahu

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{1}$$

kde s je komplexná premenná (komplexné číslo).

Hovoríme, že ide o transformáciu z časovej oblasti (domény) do domény komplexnej premennej s. Premenná s sa často nazýva aj Laplaceov operátor (súvislosti sa ukážu neskôr). Keďže $s = \sigma + j\omega$ a teda $e^{-(\sigma+j\omega)t}$ je signál obsahujúci vo všeobecnosti aj harmonickú (kmitavú) zložku, v tejto súvislosti hovoríme tiež, že pri LT ide o transformáciu z časovej oblasti do frekvenčnej oblasti.

Výslednej transformovanej funkcii $F(s)$ sa hovorí tiež *obraz* pôvodného signálu $f(t)$ (alebo Laplaceov obraz signálu).

LT je lineárna transformácia, t.j. ak by sme chceli transformovať súčet dvoch signálov (dvoch časových funkcií) $f(t) + g(t)$ ako celok, tak je to možné urobiť transformáciou signálov jednotlivo a až následne sčítať transformované funkcie $F(s) + G(s)$.

2 Laplaceove obrazy signálov

Majme signál $f(t)$. Laplaceovym obrazom (L-obrazom) tohto signálu je $F(s)$ (samozrejme v zmysle definície LT) a samotnú operáciu transformácie značíme ako

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{2}$$

2.1 Derivácia

Nájdime L-obraz signálu $\frac{\mathrm{d}f(t)}{dt}$ (alebo teda signálu $\dot{f}(t)$), teda

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{-st}\mathrm{d}t \tag{3}$$

Tento integrál je možné nájsť metódou per partes, pri ktorej vo všeobecnosti platí

$$\int_0^\infty u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^\infty - \int_0^\infty u'(t)v(t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

Uvažujme tu $u(t) = e^{-st}$ a $v(t) = f(t)$, potom

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{-st}\mathrm{d}t &= \left[e^{-st}f(t)\right]_0^\infty - (-s)\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= 0 - f(0) + sF(s) \\ &= sF(s) - f(0)\end{aligned} \tag{5}$$

je L-obraz signálu $\frac{\mathrm{d}f(t)}{dt}$.

2.2 Integrál

Obdobne by sme mohli hľadať aj obraz signálu $\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$, teda

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) e^{-st}\mathrm{d}t \tag{6}$$

Hľadajme L-obraz tak, že zavedieme signál $g(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$ čo potom znamená, že $\dot{g}(t) = f(t)$. Hľadáme $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$. Najskôr si však všimnime, že

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot{g}(t)\} =& sG(s) - g(0) \\ sG(s) - g(0) =& F(s)\end{aligned} \tag{7}$$

a k tomu vidíme, že $g(0) = \int_0^0 f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$. Teda

$$sG(s) = F(s) \tag{8a}$$

$$G(s) = \frac{1}{s}F(s) \tag{8b}$$

čím sme našli

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s) \tag{9}$$

2.3 Obraz Dirackovho impulzu

Dirackov impulz je signál taký, že (napríklad)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } t \neq 0 \\ \infty & \text{ak } t = 0 \end{cases} \tag{10}$$

pričom z princípu platí

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = 1 \tag{11}$$

Totiž, v závislosti od toho ako by sme presnejšie matematicky špecifikovali Dirackov impulz $\delta(t)$ by sa konkrétne spôsoby aplikácie LT (výpočet integrálu) mohli formálne líšiť, avšak v každom prípade vždy platí

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{12}$$

2.4 Obraz jednotkového skoku

Pri tzv. jednotkovom skoku sa uvažuje, že v čase 0 sa hodnota signálu skokovo zmení z 0 na 1 (má hodnotu „jedna jednotka“). Keďže sa tu nachádzame len v čase väčšom ako nula, môžeme uvažovať, že tu hľadáme obraz signálu $f(t) = 1$, teda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^\infty 1e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty \\ &= 0 - \frac{1}{s}e^{-s0} \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned} \tag{13}$$

2.5 Obraz exponencialnej funkcie

Nájdime obraz $f(t) = e^{at}$.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{(a-s)t}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_0^\infty \\ &= 0 - \frac{1}{a-s} \\ &= \frac{1}{s-a} \end{aligned} \tag{14}$$

2.6 Obraz časového posunutia

Majme signál $f(t)$. Signál posunutý v čase je $f(t-D)$ (v zmysle vstupno-výstupného oneskorenia, alebo dopravného oneskorenia). Obrazom $f(t)$ je $F(s)$. Obrazom $f(t-D)$ je

$$\int_0^\infty f(t-D)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{15}$$

Zaveďme substitúciu $\tau = t - D$, teda $t = \tau + D$ a tiež $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ keďže D je v čase konštantné. Potom

$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+D)}\mathrm{d}\tau = e^{-sD}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

a je zrejmé, že

$$e^{-sD}F(s) \tag{17}$$

je obrazom posunutého signálu $f(t-D)$.

3 Laplaceov obraz a originál riešenia diferenciálnej rovnice

3.1 Príklad s homogénnou diferenciálnou rovnicou

Majme diferenciálnu rovnicu

$$\dot{y}(t) - ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \tag{18}$$

Na jednotlivé signály v tejto rovnici aplikujme LT.

$$(sY(s) - y(0)) - aY(s) = 0 \tag{19}$$

kde $Y(s)$ je obrazom signálu $y(t)$. $Y(s)$ je teda obrazom riešenia rovnice. Vyjadrime $Y(s)$:

$$\begin{aligned}(s-a)Y(s) - y(0) &= 0 \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-a)}y(0)\end{aligned} \tag{20}$$

Otázka je, ak poznáme signál v s-oblasti (v Laplaceovej doméne), vieme určiť pôvodný signál v časovej oblasti? Vieme nájsť pomocou obrazu riešenia $Y(s)$ samotné riešenie $y(t)$?

V tomto prípade je vzhľadom na časť 2.5 jasné, že

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = e^{at}y(0) \tag{21}$$

kde $\mathcal{L}^{-1}\{\}$ predstavuje inverznú LT transformáciu. Tiež je jasné, že (21) je správne riešenie diferenciálnej rovnice (18).

3.2 Inverzná Laplaceova transformácia

Značíme ju ako

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{22}$$

pričom formálne ide o operáciu definovanú vzťahom

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st}\mathrm{d}s \tag{23}$$

Výpočet inverznej LT spravidla nie je jednoduchý. V praxi sa využíva tabuľka Laplaceových obrazov signálov, ktorá uvádza L-obrazy a k nim prislúchajúce časové signály. Tabuľka obsahuje výber typických a dôležitých signálov využívaných pri analýze dynamických systémov.

Zložitý obraz riešenia diferenciálnej rovnice je zväčša možné upraviť tak, že je v ňom vidieť jednotlivé dielčie obrazy zodpovedajúce typickým signálom (uvedeným v tabuľke). Z typických časových signálov sa potom vyskladá časová funkcia zodpovedajúca celkovému riešeniu (v časovej oblasti).

3.3 Príklad s nehomogénnou diferenciálnou rovnicou

Majme rovnicu

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \qquad y(0) = 3, \dot{y}(0) = -2 \tag{24}$$

kde vstupný signál $u(t) = 12$ (konštantný v čase). Aplikujme LT

$$\big(s\mathcal{L}\{\dot{y}\} - \dot{y}(0)\big) + 4\left(sY(s) - y(0)\right) + 3Y(s) = U(s) \tag{25}$$

$$\Big(s\big(sY(s) - y(0)\big) - \dot{y}(0)\Big) + 4sY(s) - 4y(0) + 3Y(s) = U(s) \tag{26}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 3Y(s) = U(s) \tag{27}$$

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 4y(0) = U(s) \tag{28}$$

a teda

$$\left(s^2 + 4s + 3\right)Y(s) = sy(0) + \dot{y}(0) + 4y(0) + U(s) \tag{29}$$

$$Y(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + 4y(0)}{(s^2 + 4s + 3)} + \frac{1}{(s^2 + 4s + 3)}U(s) \tag{30}$$

Poznáme aj konkrétny tvar obrazu $U(s)$, keďže $u(t) = 12$, tak $U(s) = 12\frac{1}{s}$, teda

$$Y(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + 4y(0)}{(s^2 + 4s + 3)} + \frac{1}{(s^2 + 4s + 3)}12\frac{1}{s} \tag{31}$$

a toto je obrazom riešenia diferenciálnej rovnice.

Všimnime si, že sú tu prítomné dve zložky

$$Y(s) = \underbrace{\frac{3s + 10}{(s^2 + 4s + 3)}}_{\text{vlastná zložka}} + \underbrace{\frac{12}{(s^2 + 4s + 3)\, s}}_{\text{vnútená zložka}} \tag{32}$$

kde sme aj číselne dosadili hodnoty začiatočných podmienok.

Keď je obraz riešenia v tvare (32) je prakticky nemožné priradiť k nemu originálny časový signál – nie sú tam očividné typické obrazy typických signálov.

Rozložme na parciálne zlomky

$$\frac{3s + 10}{(s^2 + 4s + 3)} = \frac{7}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} \tag{33}$$

$$\frac{12}{(s^2 + 4s + 3)\, s} = \frac{4}{s} - \frac{6}{(s+1)} + \frac{2}{(s+3)} \tag{34}$$

a tým sa hneď stáva zrejmé, že (33) má originál

$$y_{vlast}(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \tag{35}$$

a (34) ma originál

$$y_{vnut}(t) = 4 - 6e^{-t} + 2e^{-3t} \tag{36}$$

Celkové riešenie je

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + 4 - 6e^{-t} + 2e^{-3t} \\ &= 4 - \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \end{aligned} \tag{37}$$