STU FEI
ÚSTAV ROBOTIKY
A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

urk.fei.stuba.sk
február 2024

KUT003

O vlastných vektoroch a vlastných číslach

1 Vlastné vektory a vlastné hodnoty

Definícia 1.1 (Vlastné čísla matice)**.** Hovoríme, že nenulový vektor $\mathbf{v}$ je vlastný vektor štvorcovej matice $\mathbf{T}$, pokiaľ existuje skalár λ taký, že:

$$\mathbf{Tv} = \lambda \mathbf{v} \tag{1}$$

kde λ nazývame vlastné číslo matice $\mathbf{T}$.

Naskytuje sa teraz otázka ako také vlastné čísla a vlastné vektory nájsť. Čiže musíme vyriešiť rovnicu:

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})\, \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{2}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matica.

Predpokladajme, že existuje inverzia matice $(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})$. Potom by malo platiť:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Iv} = (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \underbrace{(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})\, \mathbf{v}}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0} \tag{3}$$

Vidíme ale, že v (3) sme prišli do sporu, lebo podľa definície 1.1 je $\mathbf{v}$ nenulový vektor. Čiže matica $(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})$ nemôže byť invertibilná, to znamená, že je singulárna a pre jej determinant platí:

$$\det \{\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}\} = 0 \tag{4}$$

Vyriešením (4) teda môžeme získať vlastné čísla λ matice $\mathbf{T}$.

Príklad 1.1. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Vlastné čísla:

$$\det \{\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}\} = \det \left\{ \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right\} = \det \left\{ \begin{bmatrix} 4-\lambda & 7 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} \right\} = 0$$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} 4-\lambda & 7 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} \right\} = (4-\lambda)(-2-\lambda) - (1 \cdot 7) = \lambda^2 - 2\lambda - 15$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \implies \lambda_1 = 5, \; \lambda_2 = -3$$

Vlastné vektory:

$\lambda = 5$:

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I})\, \mathbf{v} = 0 \;\sim\; \begin{bmatrix} 4-5 & 7 \\ 1 & -2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sústava rovníc má nekonečne veľa riešení, riešenie je parametrizované parametrom t, ktorý môže byť ľubovoľné reálne číslo okrem 0.

$$\begin{aligned} v_2 &= t, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ v_1 &= 7v_2 = 7t \end{aligned}$$

Vlastný vektor pre $\lambda = 5$ je napríklad:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t = 1$$

$\lambda = 5$:

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{v} = 0 \;\sim\; \begin{bmatrix} 4+3 & 7 \\ 1 & -2+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sústava rovníc má nekonečne veľa riešení, riešenie je parametrizované parametrom t, ktorý môže byť ľubovoľné reálne číslo okrem 0.

$$\begin{aligned} v_2 &= t, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ v_1 &= v_2 = 7 \end{aligned}$$

Vlastný vektor pre $\lambda = -3$ je napríklad:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t = 1$$