ÚSTAV ROBOTIKY
A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

august 2024
github.com/PracovnyBod/KUT
MT

KUTdev240804

O prenosovej funkcii

PRENOSOVÁ funkcia je nástroj pre matematické modelovanie lineárnych časovo-invariantných dynamických systémov.

1 Úvod

Primárne sú dynamické systémy opisované diferenciálnymi rovnicami. Ak sú tieto rovnice lineárne, hovoríme, že systém, ktorý opisujú, je lineárny. Ak koeficienty v dif. rovnici nie sú funkciami času, hovoríme, že systém je časovo invariantný.

Vo všeobecnosti hľadáme riešenie dif. rovnice. V kontexte dynamických systémov je riešením dif. rovnice funkcia času. Z hľadiska systému hovoríme, že táto funkcia je výstupným signálom systému. Na hľadané riešenie má vplyv niekoľko faktorov. Vo všeobecnosti je riešenie dané samozrejme samotnou dif. rovnicou, jej rádom a hodnotami jej koeficientov. Konkrétne riešenia sú potom dané začiatočnými podmienkami a vstupným signálom systému.

Z hľadiska systému hovoríme o ráde dif. rovnice a o jej koeficientoch ako o parametroch systému. Hovoriť o začiatočných podmienkach systému má samozrejme tiež význam. Napokon nás zaujíma vplyv vstupného signálu na výstupný signál systému a s matematickým modelovaním tohto vplyvu súvisí pojem prenosová funkcia. Obrazne hovoríme o prenose zo vstupu na výstup systému.

2 Náčrt analytického prístupu k pojmu prenosová funkcia

Obdobne ako pri hľadaní riešenia homogénnej dif. rovnice, kde sa ko východisko predpokladá riešenie v tvare exponenciálnej funkcie e^{st}, tak pri hľadaní riešenia nehomogénnej dif. rovnice je možné skúmať predpoklad, že vstupný signál je v tvare exponenciálnej funkcie e^{st}.

Najskôr pripomeňme, že riešením homogénnej dif. rovnice

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \qquad y(0) = y_0 \tag{1}$$

je

$$y(t) = e^{-at}y_0 \tag{2}$$

a ide tu o rovnicu prvého rádu.

Formálne je však aj tu možné uplatniť rozklad dif. rovnice vyššieho rádu na sústavu rovníc prvého rádu v zmysle

$$\dot{x}(t) = ax(t) \qquad x(0) = x_0 \tag{3a}$$
$$y(t) = x(t) \tag{3b}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a $x(t)$ je stavová veličina. Pri dif. rovnici vyššieho rádu by $x(t)$ bol vektor stavových veličín a udával by sústavu rovníc v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0 \tag{4a}$$
$$y(t) = c^{\mathsf{T}}x(t) \tag{4b}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je matica, $c \in \mathbb{R}^n$ je vektor a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je vektor. Riešením je

$$y(t) = c^\mathsf{T} e^{At} x_0 \tag{5}$$

kde sme využili objekt e^{At} čo je tzv. maticová exponenciálna funkcia. Tu sa jej definícii nebudeme venovať podrobne, čitateľa odkazujeme napr. na [1]. Ide zjavne o zovšeobecnenie skalárneho prípadu (systémy prvého rádu) pre vektorový prípad (systémy vyššieho rádu). Definícia a následné využívanie matice e^{At} je základom pre pojmy ako fundamentálne riešenia systému (diferenciálnej rovnice). Samotná matica e^{At} sa označuje napríklad aj ako matica fundamentálnych riešení. Takpovediac „účinok“ matice e^{At} je daný maticou A, a tú možno charakterizovať jej vlastnými číslami (a vlastnými vektormi). Tieto sú následne zdrojom definície pojmu charakteristická rovnica tak ako sa to využíva pri hľadaní analytického riešenia diferenciálnej rovnice.

V prípade nehomogénnej dif. rovnice je systém daný sústavou rovníc v tvare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \qquad x(0) = x_0 \tag{6a}$$

$$y(t) = c^\mathsf{T} x(t) \tag{6b}$$

kde $u(t)$ je vstupný signál, $b \in \mathbb{R}^n$ je vektor. Je možné ukázať, že

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{7}$$

a teda samotné riešenie (výstupný signál $y(t)$) je

$$y(t) = c^\mathsf{T} x(t) \tag{8a}$$

$$y(t) = c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + \int_0^t c^\mathsf{T} e^{A(t-\tau)} bu(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{8b}$$

Prvý člen (na pravej strane rovnice (8b)) sa nazýva *vlastná zložka riešenia* (je vyvolaná začiatočnými podmienkami) a druhý člen sa nazýva *vnútená zložka riešenia* (je vyvolaná vstupným signálom).

Ako sme uviedli, zámerom je skúmať predpoklad, že vstupný signál je v tvare exponenciálnej funkcie

$$u(t) = e^{st} \tag{9}$$

kde $s = \sigma + j\omega$ (vo všeobecnosti). To, že s je komplexné číslo (komplexná premenná) umožňuje považovať tento špeciálny signál vlastne za triedu signálov (rôzneho typu). Reálna časť premennej s určuje exponenciálny rast alebo pokles (dokonca ak $s = 0$ potom je špeciálny signál vlastne konštantným) a imaginárna časť určuje harmonické kmitanie signálu.

Máme (7), a teda:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t \left(e^{A(t-\tau)} b e^{s\tau} \right) \mathrm{d}\tau \tag{10}$$

kde pri manipulácii s výrazom $\left(e^{A(t-\tau)} b e^{s\tau} \right)$ treba manipulovať s ohľadom na fakt, že ide o matice a vektory. V každom prípade, po integrácii sa získa

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{(sI-A)t} - I \right) b \tag{11}$$

kde I je jednotková matica.

Celkové riešenie, inými slovami výstupný signál systému, potom je

$$\begin{aligned}
y(t) &= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{(sI-A)t} - I \right) b \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{st} e^{-At} - I \right) b \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} \left(e^{st} e^{-At} b - b \right) \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + \left(c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} e^{st} e^{-At} b - c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} b \right) \\
&= c^\mathsf{T} e^{At}x(0) + \left(c^\mathsf{T} \left(sI - A\right)^{-1} e^{st} b - c^\mathsf{T} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} b \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

V tomto bode je možné konštatovať:

$$y(t) = \underbrace{c^{\mathsf{T}} e^{At} x(0)}_{\text{vlastná zložka}} + \underbrace{\left(c^{\mathsf{T}} \left(sI - A\right)^{-1} e^{st} b - c^{\mathsf{T}} e^{At} \left(sI - A\right)^{-1} b\right)}_{\text{vnútená zložka}} \tag{13}$$

a zároveň:

$$\begin{aligned} y(t) &= c^{\mathsf{T}} e^{At} \left(x(0) - \left(sI - A\right)^{-1} b\right) + \left(c^{\mathsf{T}} \left(sI - A\right)^{-1} b e^{st}\right) \\ &= \underbrace{c^{\mathsf{T}} e^{At} \left(x(0) - \left(sI - A\right)^{-1} b\right)}_{\text{zložka opisujúca prechodné deje}} + \underbrace{\left(c^{\mathsf{T}} \left(sI - A\right)^{-1} b\right) e^{st}}_{\text{čisto exponenciálna zložka}} \end{aligned} \tag{14}$$

O vplyve samotného špeciálneho signálu e^{st} na celkové riešenie teda rozhoduje výraz $c^{\mathsf{T}} \left(sI - A\right)^{-1} b$. Formálne sa

$$G(s) = c^{\mathsf{T}} \left(sI - A\right)^{-1} b \tag{15}$$

nazýva prenosová funkcia systému.

Uvedené je založené na fakte vyjadrenom všeobecným riešením (7) pričom ide o riešenie sústavy dif. rovníc prvého rádu v tvare (6). Takpovediac pôvodná dif. rovnica vyššieho rádu je pre tento prípad v tvare

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)} y(t)}{\mathrm{d}t^{(n-1)}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m u(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} u(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t) \tag{16}$$

Potom ak na vstupe uvažujeme $u(t) = e^{st}$ a zároveň vieme, že riešenie systému je tiež nejaký exponenciálny signál, čo možno vo všeobecnosti vyjadriť ako $y(t) = y_0 e^{st}$ (kde y_0 najmä odlišuje $y(t)$ od $u(t)$). Ak $y(t)$ a $u(t)$ dosadíme do (16), vidíme, že

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^n y_0 e^{st}}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{(n-1)} y_0 e^{st}}{\mathrm{d}t^{(n-1)}} + \cdots + a_0 y_0 e^{st} &= b_m \frac{\mathrm{d}^m e^{st}}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} e^{st}}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_0 e^{st} \\ y_0 e^{st} s^n + a_{n-1} y_0 e^{st} s^{(n-1)} + \cdots + a_0 y_0 e^{st} &= b_m e^{st} s^m + b_{m-1} e^{st} s^{m-1} + \cdots + b_0 e^{st} \\ \left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0\right) y_0 e^{st} &= \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right) e^{st} \\ y_0 e^{st} &= \frac{\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right)}{\left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0\right)} e^{st} \end{aligned} \tag{17}$$

a teda môžeme povedať, že riešenie systému závislé od špeciálneho signálu e^{st} je

$$y(t) = \frac{\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right)}{\left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0\right)} e^{st} \tag{18}$$

Označme

$$B(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right) \tag{19a}$$

$$A(s) = \left(s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \cdots + a_0\right) \tag{19b}$$

a výraz

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{20}$$

vyjadruje prenosovú funkciu systému.

3 Definícia s využitím Laplaceovej transformácie

Prenosová funkcia je definovaná ako pomer Laplaceovho obrazu výstupného signálu systému k Laplaceovmu obrazu vstupného signálu pri nulových začiatočných podmienkach systému.

Laplaceova transformácia sa týka lineárnych časovo invariantných systémov. Majme teda takýto systém, ktorého vstupným signálom je signál $u(t)$ a výstupným signálom je signál $y(t)$. V zmysle Laplaceovej transformácie existuje obraz vstupného signálu $U(s)$ a obraz výstupného signálu $Y(s)$ pričom tieto obrazy sú stanovené pri nulových začiatočných podmienkach systému.

Ilustrujme na príklade. Lineárny časovo invariantný systém nech je daný dif. rovnicou v tvare

$$a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{21}$$

kde $y(t)$ a $u(t)$ sú samozrejme výstupný a vstupný signál. Koeficienty $a_1, a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ sú konštantné. Aplikujme Laplaceovu transformáciu na prvky danej dif. rovnice.

$$\begin{aligned} a_1\mathcal{L}\left\{\dot{y}(t)\right\} + a_0\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} &= b_0\mathcal{L}\left\{u(t)\right\} \\ a_1 sY(s) - a_1 y(0) + a_0 Y(s) &= b_0 U(s) \end{aligned} \tag{22}$$

Pri nulových začiatočných podmienkach potom platí

$$a_1 sY(s) + a_0 Y(s) = b_0 U(s) \tag{23}$$

Prenosová funkcia je definovaná ako pomer $Y(s)/U(s)$, teda

$$Y(s)\left(a_1 s + a_0\right) = b_0 U(s) \tag{24a}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \tag{24b}$$

Ako samostatný objekt sa prenosová funkcia označuje samostatne, napríklad sko $G(s)$, teda v tomto prípade

$$G(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \tag{25}$$

a vo všeobecnosti

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{26}$$

Z iného hľadiska má tiež zmysel samostatne označovať polynómy v čitateli a menovateli prenosovej funkcie. Polynóm v čitateli sa typicky označuje ako $B(s)$ a polynóm v menovateli sa označuje ako $A(s)$. V tomto prípade

$$B(s) = b_0 \qquad A(s) = a_1 s + a_0 \tag{27}$$

a vo všeobecnosti teda

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{28}$$

4 Súvisiace pojmy

Prenosová funkcia je opisuje lineárny časovo invariantný dynamický systém pričom je dané, že začiatočné podmienky systému sú nulové. Daný dynamický systém je možné opísať diferenciálnou rovnicou alebo prenosovou funkciou a tieto dva opisy sú ekvivalentné.

Uvažujme prenosovú funkciu vo všeobecnosti

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{29}$$

kde $A(s)$ a $B(s)$ sú polynómy, ktorých nezávisle premenná je Laplaceov operátor s (pritom s je komplexné číslo).

Polynóm $A(s)$ má stupeň n a polynóm $B(s)$ má stupeň m.

Reálne/skutočné dynamické deje/systémy „v prírode“ sú samozrejme kauzálne[1], teda výstup je následkom diania v súčastnosti a minulosti. Ak prenosová funkcia opisuje kauzálny systém, potom pre stupne polynómov $A(s)$ a $B(s)$ platí $n \geq m$.

[1]Nekauzalita je skôr matematická/abstraktná záležitosť.

Polynóm $A(s)$ sa nazýva charakteristický polynóm prenosovej funkcie. Pojem charakteristická rovnica alebo charakteristický polynóm je používaný aj v kontexte analytických metód riešenia lineárnych dif. rovníc. Ide pritom o ekvivalentné pojmy, charakteristický polynóm prenosovej funkcie je to isté ako charakteristický polynóm lineárnej diferenciálnej rovnice.

Stupeň polynómu $A(s)$, teda hodnota n, sa nazýva rád prenosovej funkcie. Ide o ekvivalent pojmu rád dynamického systému (najvyšší stupeň derivácie neznámej v dif. rovnici).

Korene polynómu $A(s)$ sa nazývajú póly prenosovej funkcie. Ekvivalentne je možné hovoriť o póloch lineárneho dynamického systému. Keďže ide o korene charakteristického polynómu, s pólmi systému priamo súvisia fundamentálne riešenia dif. rovnice. Fundamentálne riešenia sú dané pólmi systému. Iný termín pre fundamentálne riešenia je *módy dynamického systému*.

Z hľadiska stability dynamického systému hovoríme, že systém je stabilný ak sú všetky póly systému v ľavej polrovine komplexnej roviny. Inými slovami, systém je stabilný ak reálne časti všetkých pólov sú záporné. Pod stabilitou systému samozrejme myslíme stabilitu rovnovážneho stavu daného lineárneho dynamického systému.

Korene polynómu $B(s)$ sa nazývajú nuly prenosovej funkcie (nuly lineárneho dynamického systému).

Nuly systému súvisia predovšetkým so vstupným signálom systému. Širšia interpretácia prenosovej funkcie, ako vieme, sa zaoberá skúmaním vplyvu exponenciálneho vstupného signálu $u(t) = e^{st}$ (s je komplexné číslo) na výstup systému. Zjednodušene povedané, nuly nulujú zodpovedajúce vstupné exponenciálne signály. Neprenesú sa na výstup. Poloha nuly v komplexnej rovine určuje signál e^{st}, ktorý je nulovaný a neprenesie sa na výstup (neovplyvní výstupnú veličinu). Ďalšia diskusia v tejto veci je nad rámec tohto textu a čitateľ sa odkazuje na zodpovedajúcu literatúru, napríklad aj [1].

V súvislosti s prenosovou funkciou, o ktorej uvažujeme v tvare

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{30}$$

je užitočné využívať *vetu o konečnej hodnote riešenia*. Ak máme k dispozícii obraz riešenia diferenciálnej rovnice, teda obraz výstupného signálu systému $Y(s)$, potom veta o konečnej hodnote hovorí, že konečná hodnota výstupného signálu $y(t)$, označme túto hodnotu symbolom $y(\infty)$, je daná ako

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s\, Y(s) \tag{31}$$

Napríklad, poznáme prenosovú funkciu (25) a napríklad vstupom systému je jednotkový skok, ktorého Laplaceov obraz je $U(s) = 1/s$. Potom obraz výstupného signálu je

$$Y(s) = G(s)U(s) = \left(\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \right) \frac{1}{s} \tag{32}$$

Konečná hodnota tohto signálu bude

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s\, Y(s) = \lim_{s \to 0} s \left(\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \right) \frac{1}{s} \tag{33a}$$

$$= \lim_{s \to 0} \left(\frac{b_0}{a_1 s + a_0} \right) = \frac{b_0}{a_0} \tag{33b}$$

Referencie a ďalšia literatúra

[1] Karl Johan Åström a Richard M. Murray. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, jan. 2020. ISBN: 978-0-691-13576-2. URL: https://fbswiki.org/wiki/index.php/Main_Page.