ÚSTAV ROBOTIKY
A KYBERNETIKY

Kolekcia učebných textov

urk.fei.stuba.sk
február 2024

KUT 001

O rozklade na diferenciálne rovnice prvého rádu

PRE diferenciálne rovnice, aké tu máme na mysli, platí, že každú diferenciálnu rovnicu vyššieho rádu je možné rozložiť na sústavu rovníc nižšieho rádu.

Diferenciálna rovnica

Majme obyčajnú diferenciálnu rovnicu, ktorú je možné využiť na opis dynamického systému. Vo všeobecnosti:

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m u(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} u(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t) \quad (1)$$

kde $y(t)$ je výstupná veličina (výstupný signál) a ide teda prirodzene o časovú závislosť, funkciu v čase. Čas je označený písmenom t. Vstupná veličina (vstupný signál) je $u(t)$. Koeficienty $a_n, \ldots, a_0$ a $b_m, \ldots, b_0$ sú konštantné, nemenia sa v čase.

Číslo n udáva najvyššiu časovú deriváciu výstupného signálu a číslo m udáva najvyššiu časovú deriváciu vstupného signálu. Uvažujeme samozrejme kauzálny dynamický systém a preto $n > m$.

Poznámka: časovú deriváciu je často praktické označovať bodkou nad signálom namiesto klasického označenia $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Napríklad $\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}$ označíme ako $\ddot{y}(t)$.

Hovoríme, že diferenciálna rovnica je n-tého rádu. Podľa najvyššej derivácie výstupnej veličiny. Najnižší možný rád diferenciálnej rovnice je prvý rád, $n = 1$.

Postup rozkladu formou príkladu

Vo všeobecnosti platí, že každú diferenciálnu rovnicu vyššieho rádu je možné rozložiť (prepísať, transformovať) na sústavu rovníc prvého rádu. Ich počet je minimálne n.

Ako príklad uvažujme diferenciálnu rovnicu v tvare

$$a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (2)$$

Úlohou je rozložiť túto diferenciálnu rovnicu druhého rádu na dve diferenciálne rovnice prvého rádu.

Pre tieto dve nové rovnice je potrebné uvažovať dve veličiny, ktoré budú na mieste neznámej v nových diferenciálnych rovniciach. Označme ich $x_1(t)$ a $x_2(t)$.

Hľadáme teda dve diferenciálne rovnice, inak vyjadrené hľadáme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \quad ? \\ \dot{x}_2(t) &= \quad ? \end{aligned}$$

pritom na pravej strane je potrebné mať len také členy, ktoré obsahujú len nové veličiny $x_1(t)$ a $x_2(t)$ a neobsahujú pôvodnú veličinu $y(t)$. Mimochodom, veličina $u(t)$, teda vstupný signál systému, je z hľadiska riešenia diferenciálnej rovnice známa. Neznámou je výstupná veličina $y(t)$. Signál $u(t)$ preto môže nezmenený figurovať v nových hľadaných diferenciálnych rovniciach. Dosiahnuť uvedené je možné nasledujúcim postupom.

Ako prvé *zvoľme*

$$x_1(t) = y(t) \quad (3)$$

To znamená

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \tag{4}$$

čo však nie je v tvare aký hľadáme. Na pravej strane vystupuje pôvodná veličina $y(t)$.

Druhou voľbou preto nech je

$$x_2(t) = \dot{y}(t) \tag{5}$$

pretože potom môžeme písať prvú diferenciálnu rovnicu v tvare

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{6}$$

Ostáva zostaviť druhú diferenciálnu rovnicu.

Keďže sme zvolili (5), tak je zrejmé, že platí

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) \tag{7}$$

Otázkou je $\ddot{y}(t) = ?$ Odpoveďou je pôvodná diferenciálna rovnica druhého rádu. Upravme (2) na tvar

$$\ddot{y}(t) + \frac{a_1}{a_2}\dot{y}(t) + \frac{a_0}{a_2}y(t) = \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{8}$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{a_1}{a_2}\dot{y}(t) - \frac{a_0}{a_2}y(t) + \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{9}$$

To znamená, že

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{a_1}{a_2}\dot{y}(t) - \frac{a_0}{a_2}y(t) + \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{10}$$

čo však stále nie je požadovaný tvar druhej hľadanej diferenciálnej rovnice. Na pravej strane rovnice (10) môžu figurovať len nové veličiny $x_1(t)$ a $x_2(t)$, nie pôvodná veličina $y(t)$. Stačí si však všimnúť skôr zvolené (3) a (5). Potom môžeme písať

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{a_1}{a_2}x_2(t) - \frac{a_0}{a_2}x_1(t) + \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{11}$$

čo je druhá hľadaná diferenciálna rovnica prvého rádu.

Záver

Diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$a_2\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \tag{12}$$

sme transformovali na sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{13}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{a_1}{a_2}x_2(t) - \frac{a_0}{a_2}x_1(t) + \frac{b_0}{a_2}u(t) \tag{14}$$