

Mini zbierka riešených úloh: analytické riešenie diferenciálnych rovníc

ÚLOHY sú zamerané na analytické riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc metódou charakteristickej rovnice a s využitím Laplaceovej transformácie. Táto zbierka je predovšetkým doplnkom k predchádzajúcim textom:

KUT₀₀₆ O riešení homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami

KUT₀₀₈ O využití Laplaceovej transformácie pri riešení diferenciálnych rovníc

1 Úvodné poznámky

Pri hľadaní riešenia metódou charakteristickej rovnice je možné využiť nasledujúce konštatovania:

1. Ak má charakteristická rovnica n navzájom rôznych riešení s_i pre $i = 1, \dots, n$, potom zodpovedajúce fundamentálne riešenia (módy) sú: $e^{s_1 t}, e^{s_2 t}, \dots, e^{s_n t}$.
2. Ak sa medzi n koreňmi charakteristického polynómu vyskytne k -násobný koreň, vytvoríme k lineárne závislých riešení: $e^{s_i t}, t e^{s_i t}, \dots, t^{k-1} e^{s_i t}$.
3. V prípade výskytu dvojice komplexne združených koreňov charakteristického polynómu, $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, kde j je imaginárna jednotka, využijeme na určenie fundamentálnych riešení Eulerov vzťah

$$e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm j \sin \beta t)$$

Preto potom možno písať príslušné fundamentálne riešenie v tvare

$$c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t} = e^{\alpha t} (c' \cos \beta t + c'' \sin \beta t)$$

kde sú imaginárne časti nulové.

Pri využití Laplaceovej transformácie je potrebné využiť tabuľku Laplaceových obrazov signálov, ktorá je dostupná napríklad v predchádzajúcom texte KUT₀₀₉. Vybrané položky sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

$f(t)$	$F(s)$
$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
1	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

2 Otázky

Otázka 1 Čo je riešením obyčajnej diferenciálnej rovnice (vo všeobecnosti)?

Riešením diferenciálnej rovnice je *funkcia* pričom v kontexte dynamických systémov ide o *funkciu času*. Inými slovami, neznámou v rovnici je funkcia času (časová závislosť, signál). Diferenciálnou sa rovnica nazýva preto, že sa v nej nachádzajú aj derivácie neznámej funkcie. Obyčajnou sa diferenciálna rovnica nazýva preto, že neznámou je funkcia len jednej premennej (času).

Otázka 2 Aký je rozdiel medzi homogénnou a nehomogénnou obyčajnou diferenciálnou rovnicou?

Homogénnou nazývame diferenciálnu rovnicu vtedy, keď v nej figuruje len samotná neznáma funkcia. Nefigurujú v nej iné funkcie. V kontexte dynamických systémov ide typicky o prípad, keď systém nemá žiadny vstupný signál (vstupný signál je nulový). Ak sa členy rovnice obsahujúce neznámu a jej derivácie presunú na ľavú stranu rovnice, pravá strana bude nulová

Nehomogénnou nazývame diferenciálnu rovnicu vtedy, keď v nej figuruje aj iná funkcia ako samotná neznáma funkcia. V kontexte dynamických systémov ide o prípad, keď systém má vstupný signál. Ak sa členy rovnice obsahujúce neznámu a jej derivácie presunú na ľavú stranu rovnice, pravá strana bude nenulová, bude obsahovať členy obsahujúce vstupný signál (vrátane jeho derivácií).

3 Úlohy

Úloha 1 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \quad y(0) = y_0 \quad a \in \mathbb{R}$$

Riešenie:

Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. Tú je možné určiť nahradením derivácií neznámej funkcie mocninami pomocnej premennej, označme ju s . Napríklad prvú deriváciu $\dot{y}(t)$ nahradíme s^1 , nultú deriváciu $y(t)$ nahradíme s^0 . Charakteristická rovnica pre danú diferenciálnu rovnicu bude

$$s + a = 0 \tag{1}$$

Druhým krokom je stanovenie fundamentálnych riešení diferenciálnej rovnice, ktoré sú dané riešeniami charakteristickej rovnice. Riešením charakteristickej rovnice je

$$s_1 = -a \tag{2}$$

Fundamentálne riešenie je teda len jedno

$$y_{f1}(t) = e^{-at} \tag{3}$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-at} \tag{4}$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$ je konštanta.

Štvrtým krokom je stanovenie konkrétneho riešenia dif. rovnice v prípade, ak sú dané začiatočné podmienky. Konkrétne ide o stanovenie hodnoty konštanty c_1 . Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1 e^{(-a)0} = c_1 \tag{5}$$

Samotná hodnota $y(0)$ je známa, keďže máme začiatočnú podmienku $y(0) = y_0$. Takže

$$c_1 = y_0 \tag{6}$$

To znamená, že riešenie úlohy je:

$$y(t) = y_0 e^{(-a)t} \tag{7}$$

Úloha 2 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\ddot{y}(t) + (a+b)\dot{y}(t) + aby(t) = 0 \quad y(0) = y_0 \quad \dot{y}(0) = z_0 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Riešenie:

Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. V tomto prípade

$$s^2 + (a+b)s + ab = 0 \quad (8)$$

V druhom kroku pre stanovenie fundamentálnych riešení hľadáme riešenia charakteristickej rovnice. Vo všeobecnosti

$$s_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} \quad (9)$$

avšak v tomto prípade tiež vidíme, že

$$s^2 + (a+b)s + ab = (s+a)(s+b) \quad (10)$$

Riešenia charakteristickej rovnice teda sú

$$s_1 = -a \quad (11a)$$

$$s_2 = -b \quad (11b)$$

Zodpovedajúce fundamentálne riešenia sú

$$y_{f1}(t) = e^{-at} \quad (12a)$$

$$y_{f2}(t) = e^{-bt} \quad (12b)$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{-bt} \quad (13)$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú konštanty.

Vo štvrtom kroku je možné na základe začiatočných podmienok stanoviť konkrétne riešenie. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1 e^{(-a)0} + c_2 e^{(-b)0} = c_1 + c_2 \quad (14)$$

Derivácia všeobecného riešenia je

$$\dot{y}(t) = -ac_1 e^{-at} - bc_2 e^{-bt} \quad (15)$$

Pre čas $t = 0$ má derivácia všeobecného riešenia tvar

$$\dot{y}(0) = -ac_1 - bc_2 \quad (16)$$

Z uvedeného vyplýva sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych konštantách c_1 a c_2

$$c_1 + c_2 = y_0 \quad (17a)$$

$$-ac_1 - bc_2 = z_0 \quad (17b)$$

Do druhej rovnice dosadíme $c_1 = y_0 - c_2$

$$-a(y_0 - c_2) - bc_2 = z_0 \quad (18a)$$

$$-ay_0 + ac_2 - bc_2 = z_0 \quad (18b)$$

$$c_2(a - b) = z_0 + ay_0 \quad (18c)$$

$$c_2 = \frac{z_0 + ay_0}{a - b} \quad (18d)$$

potom

$$c_1 = y_0 - c_2 \quad (19a)$$

$$c_1 = y_0 - \frac{z_0 + ay_0}{a - b} \quad (19b)$$

$$c_1 = \frac{y_0(a - b) - z_0 - ay_0}{a - b} \quad (19c)$$

$$c_1 = \frac{y_0a - y_0b - z_0 - ay_0}{a - b} \quad (19d)$$

$$c_1 = \frac{-y_0b - z_0}{a - b} \quad (19e)$$

Konkrétne riešenie úlohy teda je

$$y(t) = \frac{-y_0b - z_0}{a - b}e^{-at} + \frac{z_0 + ay_0}{a - b}e^{-bt} \quad (20)$$

Úloha 3 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite metódu charakteristickej rovnice.

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0 \quad y(0) = 3 \quad \dot{y}(0) = -2$$

Riešenie:

Prvým krokom je stanovenie charakteristickej rovnice. V tomto prípade

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \quad (21)$$

V druhom kroku pre stanovenie fundamentálnych riešení hľadáme riešenia charakteristickej rovnice. Riešením charakteristickej rovnice sú

$$s_1 = -1 \quad (22a)$$

$$s_2 = -2 \quad (22b)$$

Zodpovedajúce fundamentálne riešenia sú

$$y_{f1}(t) = e^{-t} \quad (23a)$$

$$y_{f2}(t) = e^{-2t} \quad (23b)$$

Tretím krokom je stanovenie všeobecného riešenia dif. rovnice. Je lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení. Teda

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} \quad (24)$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sú konštanty.

Vo štvrtom kroku je možné na základe začiatočných podmienok stanoviť konkrétne riešenie. Pre čas $t = 0$ má všeobecné riešenie tvar

$$y(0) = c_1 e^{(-1)0} + c_2 e^{(-2)0} = c_1 + c_2 \quad (25)$$

Tým sme takpovediac zúžitkovali informáciu o začiatočnej hodnote $y(0) = 3$. Druhá začiatočná podmienka sa týka derivácie riešenia. Derivácia všeobecného riešenia je

$$\dot{y}(t) = -c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t} \quad (26)$$

Pre čas $t = 0$ má derivácia všeobecného riešenia tvar

$$\dot{y}(0) = -c_1 - 2c_2 \quad (27)$$

Z uvedeného vyplýva sústava dvoch rovníc o dvoch neznámych konštantách c_1 a c_2

$$c_1 + c_2 = 3 \quad (28a)$$

$$-c_1 - 2c_2 = -2 \quad (28b)$$

Platí $c_2 = 3 - c_1$, a teda

$$-c_1 - 2(3 - c_1) = -2 \quad (29a)$$

$$-c_1 - 6 + 2c_1 = -2 \quad (29b)$$

$$c_1 = 4 \quad (29c)$$

potom

$$c_2 = 3 - c_1 \quad (30a)$$

$$c_2 = 3 - 4 \quad (30b)$$

$$c_2 = -1 \quad (30c)$$

Nášli sme funkciu $y(t)$, ktorá je riešením diferenciálnej rovnice pre konkrétne začiatočné podmienky

$$y(t) = 4e^{-t} - e^{-2t} \quad (31)$$

Úloha 4 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\ddot{y}(t) + (a + b)\dot{y}(t) + aby(t) = 0 \quad y(0) = y_0 \quad \dot{y}(0) = z_0 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Riešenie:

Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \quad (32a)$$

$$\mathcal{L}\{(a + b)\dot{y}(t)\} = (a + b)(sY(s) - y(0)) \quad (32b)$$

$$\mathcal{L}\{aby(t)\} = abY(s) \quad (32c)$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + (a + b)(sY(s) - y(0)) + abY(s) = 0 \quad (33a)$$

$$s^2Y(s) - sy_0 - z_0 + (a + b)(sY(s) - y_0) + abY(s) = 0 \quad (33b)$$

$$s^2Y(s) - sy_0 - z_0 + asY(s) + bsY(s) - ay_0 - by_0 + abY(s) = 0 \quad (33c)$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s^2 + as + bs + ab) = sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0 \quad (34)$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0}{s^2 + (a + b)s + ab} \quad (35)$$

Zaujímá nás však originál tohto obrazu. V uvedenom tvare obrazu však nie je možné nájsť jeho originál s využitím tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Obraz je potrebné prepísať na jednoduchšie výrazy, typicky je účelným rozklad na parciálne zlomky. Menovateľ $s^2 + (a + b)s + ab$ je kvadratický polynóm, ktorý má dva rôzne korene a tie sú

$$s_1 = -a \quad (36a)$$

$$s_2 = -b \quad (36b)$$

Takže platí

$$Y(s) = \frac{sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0}{s^2 + (a + b)s + ab} = \frac{sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0}{(s + a)(s + b)} = \frac{A}{s + a} + \frac{B}{s + b} \quad (37)$$

kde A a B sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$sy_0 + z_0 + ay_0 + by_0 = A(s + b) + B(s + a) \quad (38)$$

Uvedené platí pre akékoľvek s , teda aj pre $s = -a$ a $s = -b$. Pre $s = -a$ dostaneme

$$-ay_0 + z_0 + ay_0 + by_0 = A(-a + b) + B(-a + a) \quad (39a)$$

$$z_0 + by_0 = A(-a + b) \quad (39b)$$

$$A = \frac{z_0 + by_0}{-a + b} \quad (39c)$$

Pre $s = -b$ dostaneme

$$-by_0 + z_0 + ay_0 + by_0 = A(-b + b) + B(-b + a) \quad (40a)$$

$$z_0 + ay_0 = B(-b + a) \quad (40b)$$

$$B = \frac{z_0 + ay_0}{-b + a} \quad (40c)$$

Obraz riešenia dif. rovnice potom je v tvare

$$Y(s) = \frac{z_0 + by_0}{-a + b} \left(\frac{1}{s + a} \right) + \frac{z_0 + ay_0}{-b + a} \left(\frac{1}{s + b} \right) \quad (41)$$

Originálom k výrazu $\frac{1}{s+a}$ je v zmysle tabuľky Laplaceových obrazov signálov funkcia e^{-at} . Originálom k výrazu $\frac{1}{s+b}$ je v zmysle tabuľky Laplaceových obrazov signálov funkcia e^{-bt} . Preto originálom obrazu riešenia dif. rovnice je

$$y(t) = \frac{z_0 + by_0}{-a + b} e^{-at} + \frac{z_0 + ay_0}{-b + a} e^{-bt} \quad (42)$$

Našli sme riešenie diferenciálnej rovnice pre dané začiatočné podmienky.

Úloha 5 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \quad y(0) = 0 \quad u(t) = \delta(t) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

kde $\delta(t)$ je Dirackov impulz.

Riešenie:

Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0) \quad (43a)$$

$$\mathcal{L}\{ay(t)\} = aY(s) \quad (43b)$$

$$\mathcal{L}\{bu(t)\} = bU(s) = b \cdot 1 \quad (43c)$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = b \quad (44a)$$

$$sY(s) + aY(s) = b \quad (44b)$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s + a) = b \quad (45)$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{b}{s + a} = b \frac{1}{s + a} \quad (46)$$

Zaujímá nás však originál tohto obrazu. V tomto prípade je priamo z tabuľky Laplaceových obrazov signálov zrejmé, že originálom je funkcia

$$y(t) = b e^{-at} \quad (47)$$

čím sme našli riešenie diferenciálnej rovnice.

Úloha 6 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \quad y(0) = y_0 \quad u(t) = 1 \quad a, b \in \mathbb{R}$$

kde $u(t)$ je v tejto súvislosti skoková zmena vstupného signálu v čase $t = 0$.

Riešenie:

Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0) \quad (48a)$$

$$\mathcal{L}\{ay(t)\} = aY(s) \quad (48b)$$

$$\mathcal{L}\{bu(t)\} = bU(s) = b \cdot \frac{1}{s} \quad (48c)$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$sY(s) - y(0) + aY(s) = b \frac{1}{s} \quad (49a)$$

$$sY(s) - y_0 + aY(s) = b \frac{1}{s} \quad (49b)$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s + a) = y_0 + b \frac{1}{s} \quad (50)$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{y_0}{s + a} + b \frac{1}{s(s + a)} \quad (51)$$

Zaujíma nás však originál tohto obrazu. Prvý výraz je

$$Y_1(s) = \frac{y_0}{s + a} \quad (52)$$

Súvisí so začiatočnou podmienkou a jeho originálom (podľa tabuľky Laplaceových obrazov) je funkcia

$$y_1(t) = y_0 e^{-at} \quad (53)$$

Druhý výraz je

$$Y_2(s) = \frac{b}{s(s + a)} \quad (54)$$

Súvisí so vstupným signálom $u(t)$ a nie je možné priamo určiť jeho originál z tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Preto je potrebné využiť rozklad na parciálne zlomky. V tomto prípade

$$Y_2(s) = \frac{b}{s(s + a)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + a} \quad (55)$$

kde A a B sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$b = A(s + a) + Bs \quad (56)$$

Uvedené platí pre akékoľvek s , teda aj pre $s = 0$ a $s = -a$. Pre $s = 0$ dostaneme

$$b = Aa \quad (57a)$$

$$A = \frac{b}{a} \quad (57b)$$

Pre $s = -a$ dostaneme

$$b = B(-a) \quad (58a)$$

$$B = \frac{-b}{a} \quad (58b)$$

Teda

$$Y_2(s) = \frac{b}{a} \left(\frac{1}{s} \right) - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{s+a} \right) \quad (59)$$

a originálna funkcia je

$$y_2(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} e^{-at} \quad (60)$$

Súčet $y_1(t) + y_2(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} e^{-at} \quad (61)$$

Úloha 7 Nájdite analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Použite Laplaceovu transformáciu.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t) \quad y(0) = 3 \quad \dot{y}(0) = -2 \quad u(t) = 1$$

Riešenie:

Na jednotlivé členy diferenciálnej rovnice aplikujeme Laplaceovu transformáciu.

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \quad (62a)$$

$$\mathcal{L}\{4\dot{y}(t)\} = 4(sY(s) - y(0)) \quad (62b)$$

$$\mathcal{L}\{3y(t)\} = 3Y(s) \quad (62c)$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \frac{1}{s} \quad (62d)$$

Potom rovnica v Laplaceovej oblasti bude

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 3Y(s) = \frac{1}{s} \quad (63a)$$

$$s^2 Y(s) - s \cdot 3 - (-2) + 4sY(s) - 4 \cdot 3 + 3Y(s) = \frac{1}{s} \quad (63b)$$

$$s^2 Y(s) - 3s + 2 + 4sY(s) - 12 + 3Y(s) = \frac{1}{s} \quad (63c)$$

$$s^2 Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = 3s + 10 + \frac{1}{s} \quad (63d)$$

Členy obsahujúce $Y(s)$ zoskupíme na ľavej strane rovnice

$$Y(s)(s^2 + 4s + 3) = 3s + 10 + \frac{1}{s} \quad (64)$$

Obrazom riešenia dif. rovnice teda je

$$Y(s) = \frac{3s + 10}{s^2 + 4s + 3} + \frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)} \quad (65)$$

Zaujíma nás však originál tohto obrazu. Prvý výraz je

$$Y_1(s) = \frac{3s + 10}{s^2 + 4s + 3} \quad (66)$$

Súvisí so začiatočnými podmienkami a nie je možné priamo určiť jeho originál z tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Preto je potrebné využiť rozklad na parciálne zlomky. Výraz v menovateli $s^2 + 4s + 3$ je kvadratický polynóm, ktorý má dva rôzne korene a tie sú

$$s_{1,2} = \frac{-(4) \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \quad (67)$$

teda

$$s_1 = -1 \quad (68a)$$

$$s_2 = -3 \quad (68b)$$

Potom v tomto prípade

$$Y_1(s) = \frac{3s + 10}{s^2 + 4s + 3} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 3} \quad (69)$$

kde A a B sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$3s + 10 = A(s + 3) + B(s + 1) \quad (70)$$

Uvedené platí pre akékoľvek s , teda aj pre $s = -1$ a $s = -3$. Pre $s = -1$ dostaneme

$$-3 + 10 = A(-1 + 3) \quad (71a)$$

$$7 = 2A \quad (71b)$$

$$A = \frac{7}{2} \quad (71c)$$

Pre $s = -3$ dostaneme

$$-9 + 10 = B(-3 + 1) \quad (72a)$$

$$1 = -2B \quad (72b)$$

$$B = -\frac{1}{2} \quad (72c)$$

Teda

$$Y_1(s) = \frac{3s + 10}{s^2 + 4s + 3} = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{s + 1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s + 3} \right) \quad (73)$$

a originálna funkcia je

$$y_1(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \quad (74)$$

Druhý výraz je

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)} \quad (75)$$

Súvisí so vstupným signálom $u(t)$ a nie je možné priamo určiť jeho originál z tabuľky Laplaceových obrazov signálov. Preto je potrebné využiť rozklad na parciálne zlomky. V tomto prípade

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)} = \frac{C}{s} + \frac{D}{s + 1} + \frac{E}{s + 3} \quad (76)$$

kde C , D a E sú neznáme konštanty. To je možné zapísať aj v tvare

$$1 = C(s + 1)(s + 3) + Ds(s + 3) + Es(s + 1) \quad (77)$$

Uvedené platí pre akékoľvek s , teda aj pre $s = 0$, $s = -1$ a $s = -3$. Pre $s = 0$ dostaneme

$$1 = C(0 + 1)(0 + 3) \quad (78a)$$

$$1 = 3C \quad (78b)$$

$$C = \frac{1}{3} \quad (78c)$$

Pre $s = -1$ dostaneme

$$1 = D(-1)(-1 + 3) \quad (79a)$$

$$1 = 2D \quad (79b)$$

$$D = \frac{1}{2} \quad (79c)$$

Pre $s = -3$ dostaneme

$$1 = E(-3)(-3 + 1) \quad (80a)$$

$$1 = 6E \quad (80b)$$

$$E = \frac{1}{6} \quad (80c)$$

Teda

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+1} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{s+3} \right) \quad (81)$$

a originálna funkcia je

$$y_2(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \quad (82)$$

Súčet $y_1(t) + y_2(t)$ je riešením diferenciálnej rovnice

$$y(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \quad (83a)$$

$$y(t) = 4e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3} \quad (83b)$$