ÚSTAV ROBOTIKY
A KYBERNETIKY

STU FEI

Kolekcia učebných textov

urk.fei.stuba.sk
február 2024

KUT 001

# O riešení lineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu

## 1 Lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu

Diferenciálnu rovnicu prvého rádu môžeme zapísať vo všeobecnom tvare:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t) \tag{1}$$

kde $a(t)$ a $b(t)$ sú koeficienty, ktoré sú premenlivé (závisia od premennej $t$ v ponímaní modelovania systémov môže predstavovať čas) a $u(t)$ je funkcia závislá od $t$. V prípade modelovania systémov predstavuje vstup do systému. Cieľom riešenia diferenciálnej rovnice (1) je nájsť také funkcie $x(t)$, ktoré túto rovnicu spĺňajú. Opäť v prípade modelovania systémov $x(t)$ predstavuje stav systému.

Keďže riešime lineárnu diferenciálnu rovnicu jej všeobecné riešenie môžeme nájsť poskladaním čiastkových riešení:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{2}$$

kde $x_h$ sa nazýva homogénne riešenie a získame ho riešením zhomogenizovanej rovnice. Riešenie $x_p$ je partikulárne riešenie, ktoré môžeme získať metódou variácie konštánt.

Najskôr získame homogénne riešenie. Rovnicu (1) zhomogenizujeme tým, že uvažujeme $u(t) = 0$:

$$\dot{x}_h(t) = a(t)x_h(t) \tag{3}$$

Zhomogenizovaná rovnica (3) je separovateľná:

$$\frac{dx_h(t)}{dt} = a(t)x_h(t) \longrightarrow \frac{dx(t)}{x_h(t)} = a(t)dt \tag{4}$$

Následne integrujeme obidve strany rovnice (4):

$$\ln\left(|x_h(t_f)|\right) + K = \int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt \tag{5}$$

Integráciu realizujeme na intervale $\langle t_i, t_f \rangle$, zaviedli sme konštantu $K$, ktorá vyjadruje stav v $t_i$.

Vyjadríme $x_h(t_f)$:

$$x_h(t_f) = \exp(-K) \exp\left(+\int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt\right) \tag{6}$$

keďže $K$ je konštanta a rovnako aj "exp" tak môžeme zaviesť novú konštantu $L = \exp(-K)$, takéto premenovávanie konštánt budeme využívať často.

Riešenie zhomogenizovanej rovnice (3) má teda tvar:

$$x_h(t_f) = L \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt\right) \tag{7}$$

Teraz prejdeme na vyjadrenie partikulárneho riešenia. Predpokladáme, že bude v rovnakom tvare ako homogénne riešenie (7):

$$x_p(t) = L(t) \exp\left(\int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) \tag{8}$$

Avšak, pripustíme, že "konštanta" $L$ nie je konštantou ale je variabilná (variácia konštánt). Táto variabilita má zohľadniť vplyv $u$, ktorý sme v homogénnom riešení vypustili.

Partikulárne riešenie (8) zderivujeme:

$$\dot{x}_p(t) = \dot{L}(t) \exp\left(\int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) + L(t)a(t) \exp\left(\int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) \tag{9}$$

a dosadíme do (1). Po úpravách dostaneme:

$$\dot{L}(t) = \exp\left(-\int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t) \tag{10}$$

a po integrácii:

$$L(t_f) + M = \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(-\int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t)\, dt \tag{11}$$

Nakoniec dosadením (11) do (8) ešte vyjadríme partikulárne riešenie $x_p$ v bode $t_f$:

$$\begin{aligned} x_p(t_f) &= N \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(\tau)\, d\tau\right) \\ &+ \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(\tau)\, d\tau - \int_{t_i}^{t} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t)\, dt && (12) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(\int_{t}^{t_f} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t)\, dt && (13) \end{aligned}$$

kde $N$ je konštanta $N = -M$, integrály sme zjednotili na základe prepdokladu, že $t \in \langle t_i, t_f \rangle$.

Získané homogénne (7) a partikulárne (12) riešenie teraz sčítame podľa (2):

$$x(t_f) = C \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt\right) + \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(\int_{t}^{t_f} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t)\, dt \tag{14}$$

kde sme zaviedli $C = L - N$, pretože všetko sú to konštanty a môžeme ich ľubovoľne premenovať. Pokiaľ ešte poznáme začiatočné podmienky $x(t_i)$, tak môžeme tvrdiť $C = x(t_i)$ a konečné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice 1. rádu má tvar:

$$x(t_f) = x(t_i) \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} a(t)\, dt\right) + \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(\int_{t}^{t_f} a(\tau)\, d\tau\right) b(t)u(t)\, dt \tag{15}$$

## 2 Sústava lineárnych diferenciálnych rovníc 1. rádu

Rovnako môžeme postupovať aj v prípade sústavy diferenciálnych rovníc 1. rádu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{16}$$

Tento tvar je zámerne zhodný s tvarom stavového modelu. Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sú konštantné, pretože v prípade, že by boli časovo premenlivé tak neexistuje analytické riešenie. A teda analytické riešenie sústavy diferenciálnych rovníc 1. rádu (16) má tvar:

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}(t_i) \exp\left(\mathbf{A}(t_f - t_i)\right) + \int_{t_i}^{t_f} \exp\left(\mathbf{A}(t_f - t)\right) \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\, dt \tag{17}$$

Maticový exponent vieme rozpísať do mocninového radu:

$$\exp(\mathbf{M}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{M}^n \tag{18}$$