

O základných vlastnostiach lineárnych systémov

1 Riaditeľnosť

Riaditeľnosť je vlastnosť dynamických systémov dosiahnuť konečný stav zo začiatočného stavu v konečnom čase. Hovoríme, že systém je riaditeľný pokiaľ existuje taká postupnosť vstupov, ktorá zabezpečí, že systém sa dostane z ľubovoľného začiatočného stavu do ľubovoľného konečného stavu v konečnom čase.

1.1 Diskrétny systém

Diskrétny lineárny systém je opísaný stavovou rovnicou:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n \quad (1)$$

Vývoj systému (1) môžeme rozpísať do sústavy rovníc:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 \quad (2a)$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 \quad (2b)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \dots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_{n-2} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{n-1} \quad (2c)$$

Rovnica 2c opisuje postupnosť ako dosiahnuť konečný stav \mathbf{x}_n , kde n označuje celkový počet stavov. Rovnako ju môžeme zapísať aj v maticovom tvare:

$$\mathbf{x}_n - \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \underbrace{[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

kde \mathbf{C} označuje maticu riaditeľnosti. Matica \mathbf{C} má rozmery $n \times mn$, kde m je počet vstupov (rozmer vektora \mathbf{u}). Rovnicu (3) riešime pre vstupy \mathbf{u}_i a riešenie existuje pokiaľ matica riaditeľnosti \mathbf{C} má plnú hodnotu.

Veta 1.1. Diskrétny lineárny systém (1) je riaditeľný pokiaľ matica riaditeľnosti má plnú hodnotu:

$$\text{rank}\{\mathbf{C}\} = \text{rank}\{[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\} = n \quad (4)$$

1.2 Spojitý systém

V prípade spojitého lineárneho systému v stavovom opise:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5)$$

môžeme riešenie zo začiatočného stavu $\mathbf{x}(t_i)$ do koncového stavu $\mathbf{x}(t_f)$ nájsť v tvare:

$$\mathbf{x}(t_f) = \exp(\mathbf{A}(t_f - t_i)) + \int_{t_i}^{t_f} \exp(\mathbf{A}(t_f - \tau))\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (6)$$

alebo:

$$\exp(-\mathbf{A}t_f)\mathbf{x}(t_f) - \exp(-\mathbf{A}t_i)\mathbf{x}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \exp(-\mathbf{A}\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (7)$$

Maticový exponent môžeme vyjadriť ako nekonečný rad:

$$\exp(\mathbf{A}\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n \tau^n \quad (8)$$

Práca s nekonečnými radmi je ale nepraktická. Vďaka Cayleymu-Hamiltonovmu teorému ale môžeme všetky vyššie mocniny ako n matice \mathbf{A} zapísať ako lineárnu kombináciu nižších mocnín:

$$\mathbf{A}^n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{A}^i \quad (9)$$

Maticový exponent (8) môžeme teda prepísať do konečného radu, ktorého koeficienty sú závislé od času τ :

$$\exp(\mathbf{A}\tau) = \sum_{n=0}^{n-1} \alpha_i(\tau) \mathbf{A}^i \quad (10)$$

kde n v tomto prípade označuje rád systému (počet prvkov stavového vektora \mathbf{x}). Rovnica (7) potom prejde do tvaru:

$$\exp(-\mathbf{A}t_f)\mathbf{x}(t_f) - \exp(-\mathbf{A}t_i)\mathbf{x}(t_i) = \sum_{n=0}^{n-1} \left(\mathbf{A}^i \mathbf{B} \int_{t_i}^{t_f} \alpha_i(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \right) \quad (11)$$

alebo miesto sumy môžeme použiť maticové násobenie:

$$\begin{aligned} & \exp(-\mathbf{A}t_f)\mathbf{x}(t_f) - \exp(-\mathbf{A}t_i)\mathbf{x}(t_i) \\ &= \underbrace{[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \int_{t_i}^{t_f} \alpha_0(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \int_{t_i}^{t_f} \alpha_1(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_i}^{t_f} \alpha_{n-1}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Získali sme sústavu rovníc, ktorej riešenie vráti postupnosť vstupov na dosiahnutie stavu $\mathbf{x}(t_f)$. Riešenie ale nie je triviálne, je ale postačujúce len poznať, že takéto riešenie existuje. Riešenie bude existovať ak matica riaditeľnosti \mathcal{C} , s rozmermi $n \times mn$, kde m je rozmer vstupného vektora \mathbf{u} a n je rozmer stavového vektora \mathbf{x} , má plnú hodnotu.

Veta 1.2. Spojitý lineárny systém (5) je riaditeľný pokiaľ matica riaditeľnosti \mathcal{C} má plnú hodnotu:

$$\text{rank}\{\mathcal{C}\} = \text{rank}\{[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\} = n \quad (13)$$