

O základných vlastnostiach lineárnych systémov

1 Pozorovateľnosť

Pozorovateľnosť je mierou ako dobre je možné určiť vnútorný stavový vektor na základe výstupov systému. Systém je pozorovateľný, pokiaľ aktuálny stavový vektor je možné určiť len na základe nameraných výstupov systému.

1.1 Diskrétne systém

V nasledujúcej časti odvodíme podmienku pozorovateľnosti pre diskrétne lineárne systém:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n \quad (1)$$

kde \mathbf{x}_n je vnútorný stav, ktorý sa budeme snažiť určiť na základe výstupu:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n \quad (2)$$

Na určenie n prvkového stavového vektora potrebujeme práve n meraní výstupu. Rovnicu výstupu (2) môžeme teda rozpisovať do sústavy n rovníc:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\mathbf{x}_0 \quad (3a)$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \quad (3b)$$

$$\vdots \quad (3c)$$

$$\mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}_0 \quad (3d)$$

Stačí určiť stav \mathbf{x}_0 , pretože na základe neho vývojom systému potom vieme dopočítať všetky možné vnútorné stavy. Pridanie ďalšieho merania už neprinesie žiadnu novú informáciu, pretože na základe Cayleyho-Hamiltonovho teorému môžeme n -tú mocninu matice napísať ako lineárnu kombináciu jej predošlých $n - 1$ mocnín:

$$\mathbf{A}^n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{A}^i \quad (4)$$

čiže nová informácia by bola lineárne závislá od ostatných, to znamená, že už je zahrnutá a nemá zmysel ju znova vnieť do rovníc.

Systém rovníc (3) môžeme tiež zapísať maticovo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{O}} \mathbf{x}_0 \quad (5)$$

Snažíme sa vyriešiť systém (5) vzhľadom na \mathbf{x}_0 , kde \mathcal{O} označuje maticu pozorovateľnosti s rozmermi $mn \times n$, kde m je počet výstupov. Riešenie bude existovať len vtedy ak matica pozorovateľnosti bude mať plnú hodnotu.

Veta 1.1. Diskrétne lineárny systém (1) je pozorovateľný pokiaľ matica pozorovateľnosti \mathcal{O} má plnú hodnotu:

$$\text{rank } \{\mathcal{O}\} = \text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \right\} = n \quad (6)$$

1.2 Spojitý systém

V nasledujúcej časti odvodíme podmienku pozorovateľnosti pre diskrétne lineárny systém:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad (7)$$

kde \mathbf{x} je vnútorný stav, ktorý sa budeme snažiť určiť na základe výstupu:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (8)$$

Diferenciálna rovnica (7) má riešenie v tvare:

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}(t - t_i)) \quad (9)$$

čiže opäť je postačujúce poznať stav v začiatočnom čase t_i .

Predpokladáme, že poznáme výstup systému \mathbf{y} a jeho $n - 1$ derivácií:

$$\dot{\mathbf{y}}(t_i) = \mathbf{Cx}(t_i) \quad (10a)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}(t_i) = \mathbf{CAx}(t_i) \quad (10b)$$

$$\vdots \quad (10c)$$

$$\mathbf{y}^{(n-1)}(t_i) = \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x}(t_i) \quad (10d)$$

Znova platí argument, že na n prvkov stavu potrebujeme práve n informácií, novo pridaná informácia by bola lineárne závislá od ostatných. Snažíme sa teda vyriešiť sústavu rovníc:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}(t_i) \\ \ddot{\mathbf{y}}(t_i) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)}(t_i) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}} \mathbf{x}(t_i) \quad (11)$$

ktorá je riešiteľná len vtedy, keď matica pozorovateľnosti \mathcal{O} , s rozmermi $mn \times n$, kde m je počet výstupov, má plnú hodnotu.

Veta 1.2. Spojitý lineárny systém (7) je pozorovateľný pokiaľ matica pozorovateľnosti \mathcal{O} má plnú hodnotu:

$$\text{rank } \{\mathcal{O}\} = \text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \right\} = n \quad (12)$$

Ako sa dalo očakávať pre diskrétne aj spojité lineárne systémy je podmienka pozorovateľnosti definovaná v rovnakom tvare.