apríl 2024
github.com/PracovnyBod/KUT
RM

v0.9
KUTooX

O základných vlastnostiach lineárnych systémov

1 Riaditeľnosť

Riaditeľnosť je vlastnosť dynamických systémov dosiahnuť konečný stav zo začiatočného stavu v konečnom čase. Hovoríme, že systém je riaditeľný pokiaľ existuje taká postupnosť vstupov, ktorá zabezpečí, že systém sa dostane z ľubovoľného začiatočného stavu do ľubovoľného konečného stavu v konečnom čase.

1.1 Diskrétny systém

Diskrétny lineárny systém je opísaný stavovou rovnicou:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n \tag{1}$$

Vývoj systému (1) môžeme rozpísať do sústavy rovníc:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 && \text{(2a)}\\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 && \text{(2b)}\\
&\vdots \\
\mathbf{x}_n &= \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \cdots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_{n-2} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{n-1} && \text{(2c)}
\end{aligned}$$

Rovnica 2c opisuje postupnosť ako dosiahnuť konečný stav $\mathbf{x}_n$, kde n označuje celkový počet stavov. Rovnako ju môžeme zapísať aj v maticovom tvare:

$$\mathbf{x}_n - \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

kde $\mathcal{C}$ označuje maticu riaditeľnosti. Matica $\mathcal{C}$ má rozmery $n \times mn$, kde m je počet vstupov (rozmer vektora $\mathbf{u}$). Rovnicu (3) riešime pre vstupy $\mathbf{u}_i$ a riešenie existuje pokiaľ matica riaditeľnosti $\mathcal{C}$ má plnú hodnosť.

Veta 1.1. Diskrétny lineárny systém (1) je riaditeľný pokiaľ matica riaditeľnosti má plnú hodnosť:

$$\operatorname{rank}\{\mathcal{C}\} = \operatorname{rank}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}\right\} = n \tag{4}$$

1.2 Spojitý systém

V prípade spojitého lineárneho systému v stavovom opise:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{5}$$

môžeme riešenie zo začiatočného stavu $\mathbf{x}(t_i)$ do koncového stavu $\mathbf{x}(t_f)$ nájsť v tvare:

$$\mathbf{x}(t_f) = \exp\left(\mathbf{A}(t_f - t_i)\right) + \int_{t_i}^{t_f} \exp(\mathbf{A}(t_f - \tau))\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{6}$$

alebo:

$$\exp(-\mathbf{A}t_f)\mathbf{x}(t_f) - \exp(-\mathbf{A}t_i)\mathbf{x}(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \exp(-\mathbf{A}\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{7}$$

Maticový exponent môžeme vyjadriť ako nekonečný rad:

$$\exp(\mathbf{A}\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n\tau^n \tag{8}$$

Práca s nekonečnými radmi je ale nepraktická. Vďaka Cayleymu-Hamiltonovmu teorému ale môžeme všetky vyššie mocniny ako n matice $\mathbf{A}$ zapísať ako lineárnu kombináciu nižších mocnín:

$$\mathbf{A}^n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{A}^i \tag{9}$$

Maticový exponent (8) môžeme teda prepísať do konečného radu, ktorého koeficienty sú závislé od času τ:

$$\exp(\mathbf{A}\tau) = \sum_{n=0}^{n-1} \alpha_i(\tau)\mathbf{A}^i \tag{10}$$

kde n v tomto prípade označuje rád systému (počet prvkov stavového vektora $\mathbf{x}$). Rovnica (7) potom prejde do tvaru:

$$\exp(-\mathbf{A}t_f)\mathbf{x}(t_f) - \exp(-\mathbf{A}t_i)\mathbf{x}(t_i) = \sum_{n=0}^{n-1} \left(\mathbf{A}^i\mathbf{B}\int_{t_i}^{t_f} \alpha_i(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau\right) \tag{11}$$

alebo miesto sumy môžeme použiť maticové násobenie:

$$\begin{aligned} &\exp(-\mathbf{A}t_f)\mathbf{x}(t_f) - \exp(-\mathbf{A}t_i)\mathbf{x}(t_i) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} \int_{t_i}^{t_f} \alpha_0(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \int_{t_i}^{t_f} \alpha_1(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_i}^{t_f} \alpha_{n-1}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12}$$

Získali sme sústavu rovníc, ktorej riešenie vráti postupnosť vstupov na dosiahnutie stavu $\mathbf{x}(t_f)$. Riešenie ale nie je triviálne, je ale postačujúce len poznať, že takéto riešenie existuje. Riešenie bude existovať ak matica riaditeľnosti $\mathcal{C}$, s rozmermi $n \times mn$, kde m je rozmer vstupného vektora $\mathbf{u}$ a n je rozmer stavového vektora $\mathbf{x}$, má plnú hodnosť.

Veta 1.2. Spojitý lineárny systém (5) je riaditeľný pokiaľ matica riaditeľnosti $\mathcal{C}$ má plnú hodnosť:

$$\operatorname{rank}\{\mathcal{C}\} = \operatorname{rank}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}\right\} = n \tag{13}$$