

КОНСПЕКТ ПО КУРСУ

---

# Гармонический анализ

---

*Contributors:*  
Андрей Степанов

*Лектор:*  
Трушин Б.В.

МФТИ

Последнее обновление: 11 марта 2015 г.

## Содержание

1	Абсолютно интегрируемые функции	2
2	Абсолютно интегрируемые функции	4
3	Сходимость ряда Фурье.	7

# 1 Абсолютно интегрируемые функции

**Определение 1.1.** Функция  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  называется ступенчатой, если  $\exists \{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b : \forall i \in \{1, \dots, n\} : f - \text{постоянная на } (c_{i-1}, c_i)$ .

**Теорема 1.1.** Пусть  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  интегрируема по Риману. Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \exists h(x) - \text{ступенчатая} : \int_a^b |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon$

*Доказательство.* Пусть  $\tau = \{c_i\}_{i=0}^n$  - некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ , т.е.  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ . Пусть  $\xi_i \in (c_{i-1}, c_i)$ . Запишем сумму Римана для данного разбиения:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(c_i - c_{i-1})$$

. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$h(x) = \begin{cases} f(\xi_i), & \text{if } x \in (c_{i-1}, c_i), \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - h(x)| dx &= \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} |f(x) - f(\xi_i)| dx \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f)(c_i - c_{i-1}) \end{aligned}$$

, где  $\omega_i(f)$  - это колебание функции  $f$  на отрезке  $[c_{i-1}, c_i]$ . По критерию интегрируемости последняя сумма меньше  $\varepsilon$  для любого такого  $\varepsilon$  для всех достаточно мелких разбиений.  $\square$

**Определение 1.2.** Пусть функция  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ , где  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Такая функция называется абсолютно интегрируемой, если:

1.  $\exists \{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b : f$  интегрируема на любом отрезке  $[\alpha, \beta] \subset (a, b) \setminus \{c_i\}$
2.  $|f|$  интегрируема в несобственном смысле на  $(a, b)$

**Определение 1.3.** Функция  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  называется финитной, если она равна нулю вне некоторого отрезка, т.е.  $\exists [a, b] : \forall x \notin [a, b] : f(x) = 0$ .

**Определение 1.4.** Функция  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  называется финитно-ступенчатой, если она финитная и ступенчатая.

**Теорема 1.2.** Пусть функция  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  - абсолютно интегрируема. Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \exists h(x) - \text{финитно-ступенчатая} : \int_a^b |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon$

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$ . Можно считать, что  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ , иначе доопределим  $f$  на  $\mathbb{R} \setminus [a, b]$  нулем. Поскольку  $f$  — абсолютно интегрируема, то:

1.  $\exists \{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b : f$  интегрируема на любом отрезке  $[\alpha, \beta] \subset (a, b) \setminus \{c_i\}$
2.  $|f|$  интегрируема в несобственном смысле на  $(a, b)$

$\exists \{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n, -\infty < a_1 < b_1 < c_1 < a_2 < b_2 < c_2 < \dots < a_n < b_n < +\infty :$

$$\int_{-\infty}^{a_1} |f(x)|dx + \int_{b_1}^{a_2} |f(x)|dx + \dots + \int_{b_n}^{+\infty} |f(x)|dx < \varepsilon$$

, т.к.  $|f|$  интегрируем на  $\mathbb{R}$  в несобственном смысле. Пусть

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \cup [a_i, b_i], \\ 0, & elsewhere. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$$

. По предыдущей теореме существует  $h_\varepsilon(x) : [a_1, b_n] \mapsto \mathbb{R}$  — ступенчатая функция:  $\int_{a_1}^{b_n} |h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$ . Доопределим  $h_\varepsilon(x)$  нулем вне отрезка  $[a_1, b_n]$ . Тогда  $h$  — финитно-ступенчатая. Кроме того:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_\varepsilon(x) - f(x)|dx < \int_{-\infty}^{+\infty} (|h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)| + |f_\varepsilon(x) - f(x)|)dx < 2\varepsilon$$

□

**Теорема 1.3.** Пусть  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  абсолютно интегрируема. Доопределим её на  $\mathbb{R}$  нулем. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha) - f(x)|dx \rightarrow 0, \text{ при } \alpha \rightarrow 0$$

*Доказательство.* Этот интеграл существует, т.к. его можно оценить как  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha)|dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$  (см. предыдущее доказательство).

Докажем эту теорему для произвольной финитно-ступенчатой функции  $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Поскольку  $\alpha \rightarrow 0$ , мы можем рассматривать лишь такие  $\alpha$ , что

$$|\alpha| < \frac{\min_i (c_i - c_{i-1})}{2}$$

. Пусть  $M = \sup |h|$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x + \alpha) - h(x)| dx < 2M(n + 1)|\alpha|$$

. Пусть  $h(x)$  – финитно-ступенчатая:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon$ . Тогда:  $\int |f(x + \alpha) - f(x)| dx \leq \int |f(x + \alpha) - h(x + \alpha)| dx + \int |h(x + \alpha) - h(x)| dx + \int |h(x) - f(x)| dx \leq 3\varepsilon$ .  $\square$

**Лемма 1.4** (Римана об осцилляции). Пусть  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  – абсолютно интегрируемая функция. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int f(x) \sin(\lambda x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$$

*Доказательство.* Доопределим  $f$  нулем на  $\mathbb{R}$ . Рассмотрим:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx$$

Этот интеграл существует, так как  $f$  абсолютно интегрируема. Сделаем замену  $x = t + \frac{\pi}{\lambda}$ . Тогда:

$$I(\lambda) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \frac{\pi}{\lambda}) \sin(\lambda t) dt$$

. Сложив и поделив пополам, получаем, что:

$$I(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{\lambda})) \sin(\lambda x) dx$$

Применяя теорему, которую мы недавно доказали, получаем, что

$$I(\lambda) \rightarrow 0$$

$\square$

## 2 Абсолютно интегрируемые функции

**Определение 2.1.** Функциональный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \tag{1}$$

называется тригонометрическим рядом.  $a_k, b_k$  – коэффициенты ряда. Система  $\{\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$  называется тригонометрической системой

**Утверждение 2.1.** Тригонометрическая система является ортогональной со скалярным произведением  $[f, g] = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

*Доказательство.* Доказательство: интегрируем по частям 2 раза. □

**Определение 2.2.** Пусть функция  $f$  является  $2\pi$  периодической и абсолютно интегрируемой на  $[-\pi, \pi]$ . Тогда ряд 1 называется тригонометрическим рядом Фурье, где

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

. Обозначаем  $f_{\text{tilda}}$ .

**Утверждение 2.2.** Пусть

$$T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

сходится равномерно на  $\mathbb{R}$ . Тогда ряд Фурье для  $T(x)$  – это сам  $T(x)$ .

*Доказательство.* Обозначим за  $T_n(x)$  сумму первых  $n$  членов ряда. Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Так как ряд  $T(x)$  сходится равномерно, то  $\exists n > k : |T(x) - T_n(x)| < \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \pi a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} (T_n(x) + (T(x) - T_n(x))) \cos kx dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) \cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} (T(x) - T_n(x)) \cos kx dx \end{aligned}$$

Тогда

$$\pi |a_k - \alpha_k| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (T(x) - T_n(x)) \cos kx dx \right| \leq 2\pi^2 \varepsilon$$

□

**Следствие.** Если  $f$  – абсолютно интегрируемая и  $2\pi$  периодическая, то  $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение 2.3.**

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

**Определение 2.4.**  $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$  – ядро Дирихле.

*Замечание.* Умножим и поделим ядро Дирихле на  $\sin x/2$ . Получаем:

$$\sin \frac{x}{2} D_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k + \frac{1}{2})x + \sin(k - \frac{1}{2})x}{2} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2}$$

Можно считать, что

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

*Замечание.*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$$

*Замечание.* Подставим в формулу для  $S_n(f)(x)$  коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ . После использования формулы косинуса разности, получаем:

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) D_n(x)(f(x+t) + f(x-t)) dt$$

**Теорема 2.3.** Пусть  $f$  —  $2\pi$  периодическая, абсолютно интегрируемая на  $[-\pi, \pi]$  функция. Тогда частичные суммы  $S_n(f)(x)$  сходятся в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_0^{\delta} D_n(x)(f(x+t) + f(x-t)) dx$$

. Причем если они сходятся, то к одному и тому же числу.

**Следствие** (принцип локализации). Сходимость ряда Фурье в точке и величина предела зависят только от значений функции в сколь угодно малой окрестности этой точки.

**Определение 2.5.** Пусть  $x_0$  — точка разрыва первого рода. Определим

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0+0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0-0)}{x - x_0}$$

**Определение 2.6.** Точка  $x_0$  называется почти регулярной точкой функции  $f$ , если  $\exists f(x_0+0), f(x_0-0), f'_+(x_0), f'_-(x_0)$

**Определение 2.7.** Точка  $x_0$  называется регулярной, если она является почти регулярной, и дополнительно

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

**Теорема 2.4.** Пусть  $f$  — абсолютно интегрируемая на  $[-\pi, \pi]$ ,  $2\pi$  периодическая функция.  $x_0$  её почти регулярная точка. Тогда  $S_n(f)(x) \rightarrow \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$

### 3 Сходимость ряда Фурье.

**Теорема 3.1.** Если  $f$  —  $2\pi$  периодическая и абсолютно интегрируемая на  $[-\pi, \pi]$ . Пусть  $x_0$  — почти регулярная точка. Тогда

$$S_n(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

*Доказательство.*  $S_n(x) = \int_0^\pi D_n(t)(f(x-t) + f(x+t))dt$ , где  $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$ .

Пусть  $\delta \in (0, \pi)$ . Посчитаем разность

$$\begin{aligned} S_n(t) - \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t)(f(x_0 - t) + f(x_0 + t))dt - \\ &\frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t)(f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0) + f(x_0 + t) + f(x_0 + 0)) \\ &\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 - 0)}{t} + \\ &\frac{f(x_0 + t) + f(x_0 + 0)}{t} \frac{t}{2\sin(t/2)} \sin(n+1/2)t dt \end{aligned}$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ .  $\exists \delta' \in (0, \delta) : \left| \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 - 0)}{t} \right| \leq |f'_-(x_0)| + \varepsilon$ . Аналогично для второй дроби. Поэтому первый интеграл не превосходит  $\frac{1}{\pi} \delta (|f'_-| + |f'_+| + 2\varepsilon)$ . На интервале  $(\delta, \pi)$  подынтегральная функция абсолютно интегрируема, поэтому по лемме Римана об осцилляции второй интеграл стремится к 0.  $\square$

*Замечание* (Условие Гёльдера). Можно потребовать, чтобы для некоторого  $\alpha > 1$  было выполнено  $|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| \leq C \cdot t^\alpha$ ,  $|f(x_0 - t) + f(x_0 - 0)| \leq C \cdot t^\alpha$ . Это является более слабым условием по сравнению с существованием односторонних производных, однако, при этом условии теорема доказывается так же.

**Определение 3.1.** Функция  $f$  называется кусочно-гладкой на  $[a, b]$ , если она непрерывна на  $[a, b]$  и  $\exists a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ : для любого отрезка  $[c_{k-1}, c_k]$  функция  $f$  непрерывно дифференцируема на нём

**Определение 3.2.**  $2\pi$  периодическая функция называется кусочно-гладкой, если она непрерывна на  $\mathbb{R}$  и кусочно-гладкая на  $[-\pi, \pi]$

**Теорема 3.2.** Пусть  $f$  кусочно-гладкая  $2\pi$  периодическая функция. Тогда:

1.  $S_n(f) \rightarrow f$  равномерно
2.  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(f, x) - f(x)| \leq C \cdot \frac{\ln n}{n}$



*Доказательство.*

$$S_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) D_n(t)(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left( \int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) \sin((n+1/2)t)g_x(t)dt$$

Оценим с помощью теоремы Лагранжа следующую разность:  $|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leq |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)| \leq 2|t|M_1 \leq 2\pi M_1$ . Кроме того, оценим  $|\frac{d}{dt}g_x(t)| \leq \dots$

Причем,  $|\int_0^\delta|$  TO BE CONTINUED. . .

□

**Определение 3.3.** Функция

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется тригонометрическим многочленом порядка  $n$

**Теорема 3.3.** Пусть  $f$  – непрерывная  $2\pi$  периодическая функцию. Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \exists T(x) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |T(x) - f(x)| < \varepsilon$

*Доказательство.*

□

**Теорема 3.4** (о приближении непрерывной функции тригонометрическим многочленом). Если  $f$  – непрерывная  $2\pi$ -периодическая, то функцию с любой точностью можно приблизить тригонометрическим многочленом.

*Доказательство.* Функция  $f$  непрерывна на  $[-\pi, \pi]$ , а следовательно равномерно непрерывна на  $[-\pi, \pi]$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2, \|x_1 - x_2\| < \delta : \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$ . Зафиксируем  $\varepsilon$ . Пусть  $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$  – некоторое разбиение отрезка  $[-\pi, \pi]$  с мелкостью  $|\tau| < \delta$ . Рассмотрим функцию  $f_\tau$  – непрерывная, такая что  $f_\tau(x_i) = f(x_i)$ , а на интервалах  $(x_{i-1}, x_i)$  она линейна. Тогда  $f_\tau$  – кусочно-гладкая. Следовательно ряд Фурье сходится к ней равномерно, следовательно  $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \|S_{n_0}(f_\tau, x) - f_\tau(x)\| < \varepsilon$ . Кроме того  $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \|f(x) - f_\tau(x)\| < \varepsilon$ . Получаем, что для нашего  $\varepsilon$  существует  $n_0$ :  $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \|S_{n_0}(x) - f(x)\| < 2\varepsilon$

□

**Теорема 3.5** (Вейрштрасса). Пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 : \exists$  многочлен  $P(x) : \sup_{x \in [a, b]} \|f(x) - P(x)\| < \varepsilon$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $g(t) = f(a + (b-a) \cdot \frac{t}{\pi})$ , где  $t \in [0, \pi]$ . Рассмотрим функцию  $g^*$  такую что  $g^*(t) = g(-t)$ , если  $t \in [-\pi, 0]$  и  $g^*(t) = g(t)$ , если  $t \in [0, \pi]$ . Кроме того, продолжим  $g^*$  на всю числовую прямую периодическим образом.

Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . По предыдущей теореме существует тригонометрический многочлен  $T(x) : \sup_x \|T(x) - f(x)\| < \varepsilon$ . Функция  $T(x)$  как линейная комбинация синусов и косинусов раскладывается в ряд Тейлора с бесконечным радиусом сходимости. Следовательно, частичные суммы ряда Тейлора равномерно на  $[-\pi, \pi]$  сходятся к  $T(x)$ . Значит,  $\exists P(x) : \sup |P(x) - T(x)| < \varepsilon$ . Следовательно,  $\sup_x \|g^*(x) - P(x)\| < 2\varepsilon$ . Тогда  $\sup_x \|f(x) - P(\frac{x-a}{b-a} \cdot \pi)\| < 2\varepsilon$   $\square$

**Теорема 3.6.** Пусть  $f$  —  $2\pi$ -периодическая кусочно-гладкая функция.  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ . Тогда  $f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} kb_k \cos kx + ka_k \sin kx$

*Доказательство.* Поскольку  $f'$  — кусочно-непрерывная, то ей можно сопоставить ряд. Пусть этот ряд — это  $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$ . Тогда  $\alpha_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ .

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} (f(x) \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx) = \frac{1}{\pi} k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = kb_k$$

Аналогично для  $\beta_k$ .  $\square$

**Определение 3.4.** Пусть  $f$  —  $2\pi$ -периодическая функция, причем  $f^{(m-1)}$  — непрерывна, а  $f^{(m)}$  — кусочно непрерывна. Тогда  $|a_k| + |b_k| = o(\frac{1}{k^m})$

*Доказательство.* Пусть  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ . Пусть  $f^{(m)} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$ . Применяя предыдущую теорему  $k$  раз, имеем  $|\alpha_k| + |\beta_k| = k^m (|a_k| + |b_k|)$ . Но по лемме Римана об осцилляции,  $|\alpha_k| + |\beta_k| = o(1)$ . В итоге  $|a_k| + |b_k| = o(\frac{1}{k})$ .  $\square$

**Теорема 3.7.** Пусть  $f$  —  $2\pi$  периодическая и кусочно-непрерывная на  $[-\pi, \pi]$ . Пусть  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ . Тогда  $\int_0^x f(\tau) d\tau = \frac{a_0}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos kx}{k} b_k + \frac{a_k \sin kx}{k}$ . При этом ряд сходится равномерно.

*Доказательство.* Пусть  $F(x) = \int_0^x (f(t) - \frac{a_0}{2}) dt$ . Понятно, что она непрерывна как интеграл с переменной верхней границей, кроме того, она кусочно непрерывно дифференцируема и  $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$ . Напишем для неё ряд Фурье, который будет сходиться к ней равномерно.  $F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$ . Тогда  $a_k = kB_k, b_k = -kA_k$ .  $A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx$ .  $F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ .  $\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ . Тогда  $\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos kx}{k} b_k + \frac{a_k \sin kx}{k}$   $\square$

Пусть  $g(t)$  —  $T$ -периодическая. Рассмотрим  $f(x) = g(\frac{x}{2\pi})$ . Как выглядит её ряд Фурье мы знаем. Ну и понятно, что вся теория, которую мы развивали про  $2\pi$  периодические функции обобщается на произвольный период. Кроме того,  $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ . Переписав ряд Фурье в экспоненциальной форме, получим:  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} c_k$ , где  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$

**Определение 3.5.** Множество  $M$  называется метрическим пространством, если на нём введена функция  $\rho(x, y)$ , называемая метрикой, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1.  $\forall x \in M : \rho(x, x) = 0$
2.  $\forall x, y \in M : \rho(x, y) = \rho(y, x) \geq 0$
3.  $\forall x, y, z \in M : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

**Пример.** В  $\mathbb{R}^n$  метрика  $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ . В пространстве непрерывных функций на  $[a, b]$  можно взять метрику  $\rho(f, g) = \max_{x \in [a, b]} \|f(x) - g(x)\|$

**Определение 3.6.** Множество  $L$  с операцией сложения и умножения на элемент из  $\mathbb{R}$  называется линейным пространством, если  $\forall x, y, z \in L : \forall \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ :

1.  $\lambda x \in L$
2.  $x + y \in L$
3.  $x + y = y + x$
4.  $x + (y + z) = (x + y) + z$
5.  $\exists 0 \in L : \forall u \in L : u + 0 = 0 + u = u$
6.  $\exists (-x) \in L : x + (-x) = 0$
7.  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
8.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
9.  $1 \cdot x = x$
10.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

**Определение 3.7.** Линейное пространство  $X$  называется нормированным, если на нём определена функция  $\|\cdot\|$ , такая, что  $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

*Замечание.* Нормированное пространство является метрическим,  $\rho(x, y) = \|x - y\|$

*Замечание.* Вместо  $\mathbb{R}$  можно написать  $\mathbb{C}$  или вообще произвольное поле  $F$ .

**Определение 3.8.**  $\varepsilon$  окрестностью точки  $x_0$  из нормированного пространства  $X$  называется

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

**Определение 3.9.** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  из нормированного пространства  $X$  сходится к точке  $x_0 \in X$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$

*Замечание.* Поскольку у нас теперь есть предел, то все определения из  $\mathbb{R}^n$  переносятся сюда, а именно: открытые множества, замкнутые множества, граница, и т.д.

**Пример.**

1.  $C([a, b])$  – пространство непрерывных на  $[a, b]$  функций с нормой  $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$
2.  $CL_1([a, b])$  – пространство непрерывных на  $[a, b]$  функций с нормой  $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$
3.  $CL_2([a, b])$  – пространство непрерывных на  $[a, b]$  функций с нормой  $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$
4.  $RL_p([a, b])$  – пространство интегрируемых по Риману на  $[a, b]$  функций, с нормой из  $CL_p$

*Замечание.* Проблема в том, что в  $RL_p$  есть не тождественно равные нулю функции, у которых интеграл от модуля равен нулю. Например, тождественно равная нулю функция, измененная в конечном числе точек. Есть два варианта решения проблемы.

Первый:

**Определение 3.10.** Пространство называется полунормированным, если в нём выполнены все свойства нормированного пространства, кроме первого.

Второй:

*Замечание.* Профакторизуем  $RL_p$  по отношению  $f \sim g \Leftrightarrow \left( \int_a^b (f(x) - g(x))^p dx \right)^{1/p} = 0$ .  $RL_p / \sim$

**Определение 3.11.** Пусть  $X$  – метрическое пространство. Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  называется фундаментальной, если  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

**Определение 3.12.** Метрическое пространство называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность является сходящейся.

**Определение 3.13.** Нормированное пространство называется Банаховым, если оно полно по метрике, порожденной нормой.

**Пример.**  $C([a, b])$  – Банахово. Используем теорему Коши для равномерной сходимости функциональных последовательностей, а также тот факт, что ряд непрерывных функций, если сходится равномерно, то обязательно к непрерывной функции.

**Пример.**  $CL_1([a, b]), CL_2([a, b])$  – не Банаховы. Возьмем последовательность функций

$$f_n = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - xn, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & x > 1/n \end{cases}$$

Очевидно, что это последовательность является фундаментальной, ведь  $\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{\min\{n, m\}}$ . Пусть эта последовательность сходится в  $CL_1$  к  $\varphi(x)$ . Тогда  $\int_{-1}^1 |f_n(x) - \varphi(x)| dx \geq \int_{-1}^0 |f_n(x) - \varphi(x)| dx$ . Но левый интеграл стремится к нулю, а правый не зависит от  $n$ . Значит, правый интеграл равен нулю. А так как  $\varphi$  должна быть непрерывна,  $\varphi \equiv 1$  на  $[-1, 1]$ . Аналогично,  $\forall 0 < \delta < 1 : \int_{-1}^1 |f_n(x) - \varphi(x)| dx \geq \int_{\delta}^1 |f_n(x) - \varphi(x)| dx$ . Аналогично получаем, что  $\varphi \equiv 0$  на  $[\delta, 1]$ . Но это верно для любого  $\delta$ . Получаем, что  $\varphi$  разрывна.

**Определение 3.14.** Линейное пространство  $R$  называется Евклидовым, если на нём определено скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)$ , удовлетворяющее следующим свойствам:

1.  $(x, x) \geq 0$
2.  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3.  $(x, y) = (y, x)$
4.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
5.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

*Замечание.* В Евклидовом пространстве можно ввести норму как  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ . Все свойства, кроме неравенства треугольника, очевидны. Для неравенства треугольника докажем КБШ.

**Теорема 3.8** (Неравенство Коши-Буняковского).  $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$

*Доказательство.*

$$0 \leq (x + ty, x + ty) = (x, x) + 2t(x, y) + t^2(y, y)$$

При фиксированных  $x, y$  справа написано квадратное уравнение. Значит дискриминант должен быть неположительный.  $\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$   $\square$

**Следствие** (Неравенство треугольника).  $(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq (x, x) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)} + (y, y) = (\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)})^2$

**Пример.** Рассмотрим пространство  $CL_2$ . В нем можно ввести скалярное произведение как  $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ . Оно действительно является скалярным произведением, это легко проверить. Тогда норма  $\|f\| = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$  действительно является нормой

< ++ >  
 ололол