Конспект по курсу

Дискретный анализ

Contributors:
Андрей Степанов
Анастасия Торунова

Лектор:
Райгородский А.М.

МФТИ

Последнее обновление: 25 февраля 2015 г.

Содержание

1 Жаркая лекция

Определение 1.1. Числом Рамсея $R(s,t)$ для натуральных s и t – минимальное натуральное число n, такое, что при любой реберной раскарске полного графа на n вершинах в два цвета, либо найдется полный подграф на s вершинах первого цвета, либо полный подграф на t вершинах второго цвета.

Пример.

1. $R(3,3) = 6$
2. $R(1,t) = 1$
3. $R(2,t) = t$

Утверждение 1.1. $(\frac{1}{4} + o(1))\frac{t^2}{\ln t} \leq R(3,t) \leq (1 + o(1))\frac{t^2}{\ln t}$

Замечание. 1/4 была получена в 2013 году, а 1/162 – Кимом. Числа Рамсея были придуманы (внезапно) Рамсеем в 1930 году. “В 1935 году Эрдеш и Секереш переоткрыли их в замечательной работе, в которой они ещё много чего придумали”.

Утверждение 1.2. $R(3,t) \geq c\frac{t^2}{\ln^2 t}$

Теорема 1.3. $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$

Следствие. $R(s,t) \leq C_{s+t-2}^{s-1}$

Доказательство. Индукция. □

Определение 1.2. Диагональные числа Рамсея – это числа $R(s,s)$.

Следствие (из следствия)**.**

$$R(s,s) \leq C_{s+t-2}^{s-1} \approx \frac{4^s}{\sqrt{\pi s}}$$

Замечание. “Прошло восемьдясят лет (надо отметить, а у меня только минералка с собой), а гора, в каком то смысле, родила лишь мышь”. Все что людям удалось сделать – это

$$\exists \gamma > 0 : R(s,s) \leq 4^s \cdot e^{-\gamma \cdot \frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}}$$

Это сделал Конлон. Эрдеш очень любил придумавать задачи. Мало того, что он их придумывал, он ещё и цены задавал. “За решение этой задачи а бы дал 300 долларов, за эту – 500, в вот за эту – 3000, это же целая проблема”. Правда сам он ничего давать не мог, у него денег не было. Но у него были последователи, у которых они были. Например, у него был Р. Грэхем. Он лет пятьдесят назад уподобился Эрдешу и сказал: я бы дал 100 долларов тому, кто заменит вот эту четверку на что-то меньшее. Но 100 долларов с тех пор так никто и не получил.

Теорема 1.4. *Пусть дано s – натуральное. Найдем любое $n : C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2} < 1$. Тогда $R(s,s) > n$*

Доказательство. Докажем эту задачу вероятностным методом. То, что нужно доказать, равносильно тому, что $\exists$ раскраска ребер полного графа на n вершинах при которой нет одноцветной клики на s вершинах.

Рассмотрим вероятностное пространство $G(n, \frac{1}{2})$. Введем случайную величину ξ – количество одноцветных s-клик. Пусть ξ_S – другая индикаторная случайная величина, которая равна 1, если подграф S одноцветен. Тогда

$$P(\xi_S = 1) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{C_s^2} = 2^{1-C_s^2}$$

. Но

$$\xi = \sum_{S,|S|=s} \xi_S$$

А значит,

$$E\xi = \sum_{S,|S|=s} E\xi_S = C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2} < 1$$

А значит существует такая раскраска, что $\xi = 0$ □

Следствие.

$$R(s,s) \geq (1+o(1))\frac{s}{e\sqrt{2}}2^{s/2}$$

Доказательство. Положим $n = (1+f(s))\frac{s}{e\sqrt{2}}2^{s/2}$, где $f(s) = o(1)$

$$C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2} \leq \frac{n^s}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s(s-1)}{2}} = (1+o(1))\frac{s^s}{e^s 2^{s/2} s!} \cdot 2^{s^2/2} \cdot 2^{1-s^2/2+s/2}$$

$$= \frac{(1+o(1))^s \cdot 2}{(1+o(1))\sqrt{2\pi s}} < 1$$

при правильном выборе $f(s)$

□

Теорема 1.5 (Эрдеша)**.**

$$R(s,s) \geq (1+o(1))\frac{s}{e} \cdot 2^{s/2}$$

Теорема 1.6 (Спенсера)**.**

$$R(s,s) \geq (1+o(1)) \cdot \frac{s\sqrt{2}}{e}2^{s/2}$$

Определение 1.3. Событие B не зависит от совокупности событий $A_1, \ldots, A_n$, если

$$\forall J \subset \{1, \ldots, n\} : P(A| \cap_{j \in J} A_j) = P(B)$$

Лемма 1.7 (симметричная локальная лемма Ловаса)**.** *Пусть* $A_1, \dots, A_n$ *– события. Путь дополнительно* $\exists p : \forall i : P(A_i) \le p$*. Дополнительно предположим, что* $\forall i : A_i$ *не зависит от совокупности всех остальных событий, кроме не более чем* d *штук. Пусть также* $ep(d+1) \le 1$*. Тогда* $P(\cap_{i=1}^n A_i^c) > 0$

Доказательство теоремы Спенспера. Нам нужно доказать, что

$$P(\cap_{S,|S|=s} A_S) > 0$$

. $P(A_s) = 2^{1-C_s^2} = p$. Чему же равно d? A_S зависит от тех A_T, у которых $|S \cap T| \ge 2$. Тогда $d \le C_s^2 \cdot C_{n-2}^{s-2}$. Осталось доказать, что $ep(d+1) < 1$.

$$ep(d+1) = e \cdot 2^{1-C_s^2} \cdot (C_s^2 C_{n-2}^{s-2} - 1) = e(1+o(1))2^{1-C_s^2} C_s^2 C_{n-2}^{s-2}$$

$$\le e(1+o(1))2^{1-s^2/2+s/2} \cdot \frac{s^2}{2} \cdot \frac{n^{s-2}}{(s-2)!} = e(1+o(1))2^{1-s^2/2+s/2} \cdot \frac{s^4}{2} \cdot \frac{(1+o(1))^{s-2} 2^{s/2-1}}{e^{s-2}(s)!} s^{s-2} \cdot 2^{s^2/2-s}$$

$$\frac{(1+o(1))es^{s+2}(1+o(1))^{s-2}}{e^{s-2}2(1+o(1))\sqrt{2\pi s}\left(\frac{s}{e}\right)^s}$$

. Если взять $o(1) = -\frac{1}{\sqrt{s}}$, то все получится. $\square$

Лемма 1.8 (локальная, Ловаса)**.**