Конспект по курсу

Дифференциальные уравнения

Contributors:
Андрей Степанов
Анастасия Торунова

Лектор:
Дубинская В.Ю.

МФТИ

Последнее обновление: 25 февраля 2015 г.

Содержание

1 Основные понятия теории ОДУ. Методы решения некоторых уравнений первого порядка

Рассмотрим функцию $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Будем обозначать $\frac{dy}{dx}$ как y',...,$\frac{d^n y}{dx^n}$ как $y^{(n)}$.

Определение 1.1. Уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) порядка n.

Определение 1.2. Рассмотрим промежуток $I \subset \mathbb{R}$. Функция $\varphi(x)$, определенная на I, называется решением ОДУ порядка n на I, если

а) $\varphi(x)$ определена и непрерывна на I со всеми своими производными до порядка n.

б) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$ на I.

Определение 1.3. График функции $y = \varphi(x)$ называется интегральной кривой уравнения 1.

Если ОДУ первого порядка имеет вид

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

то оно называется разрешенным относительно производной.

Определение 1.4. Рассмотрим уравнение 2, где $f(x, y)$ определена на некоторой области $G \subset \mathbb{R}$. Изоклиной называется ГМТ таких, что $f(x, y) = c$, где $c \in \mathbb{R}$.

Определение 1.5. Функция $\varphi(x, c)$, где $c \in \mathbb{R}$ - параметр, называется общим решением ОДУ первого порядка, если:

а)$\forall c$ $\varphi(x, c)$ - решение этого ОДУ.

б)любое решение этого ОДУ представимо в виде $\varphi(x, c)$.

Определение 1.6. Уравнением в дифференциалах называется

$$M(x, y)dx \ + \ N(x, y)dy = 0, \tag{3}$$

где $M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0$ в некоторой области G.

Определение 1.7. Задача Коши для уравнений 2 и 3 (если задана точка $(x_0, y_0) \in G$) состоит в нахождении решения, при котором интегральная кривая проходит через (x_0, y_0).

Теорема 1.1. *Пусть в области G определены $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Пусть $(x_0, y_0) \in G$. Тогда $\exists!$ решение уравнения 2,такое,что $y(x_0) = y_0$ на любом подмножестве G.*

Определение 1.8. Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида $y' = f(x)g(y)$ или вида $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$.

Алгоритм 1.1 (решения уравнения с разделяющимися переменными)**.** *Случай $g(y) = 0$ понятен и так. Рассмотрим случай, когда $g(y) \neq 0$. $\frac{y'}{g(y)} = f(x) \Rightarrow \int \frac{y'}{g(y)}dx = \int f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Rightarrow H(y) = F(x) + C \Rightarrow y = H^{-1}(F(x) + C)$ Обратная функция существует, так как в этом случае g знакопостоянна, а значит H монотонна.*

2 Интегрирование некоторых ОДУ первого порядка

Определение 2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$. Функция $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ называется однородной функцией степени (порядка) k, если: $\forall\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, v \in \mathbb{R}^n$: $F(\lambda v) = \lambda^k F(v)$

Определение 2.2. ОДУ первого порядка $y' = f(x, y)$ называется однородным, если f – однородная функция нулевого порядка.

Определение 2.3. Уравнение в дифференциалах $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$ называется однородным, если P и Q – однородные функции одного и того же порядка.

Утверждение 2.1. *Определения 2.2 и 2.3 эквивалентны.*

Доказательство. Пусть, скажем, дано уравнение $y' = f(x, y)$, причем f - однородная функция порядка 0. Тогда это уравнение эквивалентно уравнению $1 \cdot dy = f(x, y)dx$, причем 1 и $f(x, y)$ – функции порядка 0.

Наоборот, если дано уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где P и Q – однородные функции одного и того же порядка, то такое уравнение эквивалентно уравнению $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, причем $-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ – однородная функция порядка 0. □

Замечание. Приведем алгоритм решения уравнения $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$, где P и Q – однородные функции степени n.

Перенесем $Q(x, y)dy$ в правую часть:

$$P(x, y)dx = -Q(x, y)dy$$

Проверим решения вида $x = const$ или $y = const$, далее считаем, что $dx \neq 0$, $dy \neq 0$. Рассмотрим следующую замену: $y(x) = xz(x)$. Тогда $dy = zdx + xdz$. Уравнение можно переписать в виде:

$$P(x, zx) = -Q(x, zx)(zdx + xdz)$$

$$x^n P(1, z)dx = -x^n Q(1, z)(zdx + xdz)$$

$$(P(1, z) + zQ(1, z))dx = -Q(1, z)xdz$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{Q(1,z)dz}{P(1,z)+zQ(1,z)}$$

$$ln|x| + C = -\int_{z_0}^{z} \frac{Q(1,t)dt}{P(1,t)+tQ(1,t)}$$

$$x = Cexp\left[-\int_{z_0}^{z} \frac{Q(1,t)dt}{P(1,t)+tQ(1,t)}\right]$$

Замечание. Приведем теперь алгоритм решения уравнения $y' = f(x,y)$, где $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка. Опять же рассмотрим замену $y = xz$. Тогда $y' = z'x + z$, $f(x,y) = f(x,zx) = x^0 f(1,z)$. Перепишем уравнение в виде:

$$z'x + z = f(1,z)$$

$$\frac{dz}{f(1,z)-z} = \frac{dx}{x}$$

Если $f(1,z) - z = 0$ в точках $z_1, \ldots, z_k$, то получили решения вида $y = z_1 x, \ldots, y = z_k x$. Общее решения получаем, проинтегрировав последнее уравнение.

Утверждение 2.2. *Уравнение* $y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ *сводится к однородному в случае, когда прямые* $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ *и* $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ *пересекаются.*

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) – точка пересечения. Рассмотрим замену координат:

$$\begin{cases} \xi = x - x_0 \\ \eta = y = y_0 \end{cases}$$

Тогда $\eta' = y'$, а следовательно:

$$\eta' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1 - (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}{a_2x + b_2y + c_2 - (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)})$$

$$\eta' = f(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}) = f(\frac{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2 + b_2\frac{\eta}{\xi}})$$

Но $f(\frac{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2+b_2\frac{\eta}{\xi}})$ – однородная функция степени 0. Значит, мы свели исходное уравнение к однородному. □

Пример. $2x^2y' = y^3 + xy$

Определение 2.4. Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ - функции, непрерывные на некотором промежутке I, называется линейным уравнение первого порядка.

Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, иначе – неоднородным.

Замечание. Решим сначала однородное уравнение $y' + a(x)y = 0$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Перенеся все с игреком вправо, а все с иксом – влево, получаем:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

$$y = Cexp\left[-\int_{y_0}^{y} a(t)dt\right]$$

Будем искать решение неоднородного уравнения $y' + a(x)y = b(x)$ в виде $y = C(x)exp\left[-\int_{y_0}^{y} a(t)dt\right]$. Это не сужает множество решений, т.к. если, скажем $u(x)$ является решением, то положив $C(x) = \frac{u(x)}{exp\left[-\int_{y_0}^{y} a(t)dt\right]}$ мы получим решение $u(x)$ в желаемом виде. После подстановки в уравнение, получаем:

$$C'(x)exp\left[-\int_{y_0}^{y} a(t)dt\right] = b(x)$$

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} b(\tau)exp\left[-\int_{\tau_0}^{\tau} a(t)dt\right] d\tau + const$$

Если теперь подставить $C(x)$ в формулу для $y(x)$, получим:

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} b(\tau)exp\left[-\int_{\tau_0}^{\tau} a(t)dt\right] d\tau + const\right) exp\left[-\int_{y_0}^{y} a(t)dt\right]$$

Пример. $y' - y = x$

Определение 2.5 (Уравнение Бернулли)**.** Уравнение $y' = a(x)y = b(x)y^m$, где $m \neq 1, m > 0$ называется уравнением Бернулли.

Утверждение 2.3. *Уравнение Бернулли сводится к линейному уравнение первой степени*

Доказательство. Заметим, что $y = 0$ является решением. Поделив уравнение Бернулли на y^m и сделав замену $z = y^{1-m}$, получаем уравнение:

$$\frac{z'}{1-m} + a(x)z = b(x)$$

□

Определение 2.6 (Уравнение Рикатти)**.** Уравнение $y' + a(x)y^2 + b(x)y = c(x)$ называют уравнение Рикатти.

Утверждение 2.4. *Если известно $y_0(x)$ – частное решение уравнения Рикатти, то оно сводится к уравнению Бернулли с $m = 2$*

Доказательство. Сделаем замену $z = y - y_0$:

$$z' + y_0' + a(x)(z + y_0)^2 + b(x)(z + y_0) = c(x)$$

$$z' + y_0' + a(x)z^2 + 2a(x)zy_0 + a(x)y_0^2 + b(x)z + b(x)y_0 = c(x)$$

$$z' + (2a(x)y_0 + b(x))z + a(x)z^2 = 0$$

□

Определение 2.7. Уравнения вида $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называются уравнением в полных дифференциалах, если в рассматриваемой области D: $\exists u(x,y) : du = Pdx + Qdy$. Тогда это уравнение также можно переписать в виде: $u(x,y) = const$.

Теорема 2.5. *Пусть G – область, функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны на G. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \exists u : du = Pdx + Qdy$*

Доказательство. Пусть в условиях теоремы $\exists u : du = Pdx + Qdy$. Тогда $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Но тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Поскольку все вышеперечисленные функции непрерывны, то в силу теоремы о смешанных производных, имеем: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Пусть наоборот, в условиях теоремы выполнено $\frac{\partial}{\partial y} P = \frac{\partial Q}{\partial x}$. TO BE CONTINUED... □

3 Интегрирующие множители и уравнения, не разрешенные относительно производной.

Определение 3.1. Функция $\mu(x,y)$, определенная в области G, называется интегрирующим множителем для уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, если:

1. $\mu(x,y) \neq 0$ в G
2. $\exists U(x,y) :\ dU = \mu P dx + \mu Q dy$

Частный случай:
Если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ однородные функции степени $n \neq -1$, то
$\mu(x,y) = \frac{1}{xP(x,y) + yQ(x,y)}$

3.1 ОДУ первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Теорема 3.1. *Если в некотором параллелепипеде в $\mathbb{R}^3$, содержащем точку (x_0, y_0, y_0'), где y_0' – действительное решение уравнения $F(x_0, y_0, y') = 0$, выполнены следующие условия:*

1. *$F(x, y, y')$ определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с производными $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$*

2. $\frac{\partial F}{\partial y'}|_{(x_0,y_0,y_0')} \neq 0$

Тогда в некоторой окрестности x_0 $\exists!$ *решение* $y = y(x)$ *уравнения* $F(x,y,y') = 0$ *такое, что* $y(x_0) = y_0$ *и* $y'(x_0) = y_0'$.

Доказательство. Согласно теореме о неявной функции $\exists!$ функция $y' = f(x,y)$, удовлетворяющая уравнению $F(x,y,y') = 0$, такая,что $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$ Тогда по аналогичной теореме для уравнений, разрешенных относительно производной, получаем требуемое. □

3.2 Метод введения параметра

Пусть есть уравнение $F(x,y,y') = 0$. Тогда:

$$F(x,y,y') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ dy = pdx \end{cases}$$

Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – решение $F(x,y,y') = 0$. Тогда $p = p(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = y_x' \Rightarrow dy = p(t)dx$, а также $F(x,y,p) \equiv 0$, что и требовалось.

В обратную сторону, если $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – решение системы, то из второго $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow F(x,y,p) \equiv 0$, что и требовалось.

Пример. Рассмотрим уравнения, разрешенные относительно y:$y = f(x,y')$. Тогда $y - f(x,y') = F(x,y,y') = 0$ $\begin{cases} dy = pdx \\ y = f(x,p) \end{cases}$

Продифференцируем исходное уравнение по x: $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = p(x)$

Получили линейное дифференциальное уравнение относительно $p(x)$. Решаем его, получаем $p(x) = \chi(x,c)$. Теперь подставляем это в исходное уравнение и решаем.

Определение 3.2. Множество точек, являющихся решениями уравнения $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, называется дискриминантной кривой уравнения.

4 Общее решение однородных ЛДУ

Лемма 4.1 (принцип суперпозиции)**.** *Пусть* $y_1(x), y_2(x)$ *– решения ЛДУ с постоянными коэффициентами* $L(D)y = 0$*. Тода* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : L(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = 0$.

Доказательство. В самом деле, $L(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(D)y_1 + \beta L(D)y_2$ в силу линейности. А последнее выражение равно нулю в силу того, что y_1, y_2 – решения уравнения $L(D)y = 0$. □

Теорема 4.2 (о структуре решения ЛДУ)**.** *Верны следующие утверждения:*

1. *Если* y_1, y_2 *– решения уравнения* $L(D)y = f(x)$*, то* $y_1 - y_2$ *– решение уравнения* $L(D)y = 0$.

2. *Любое решение y уравнения $L(D)y = f(x)$ представимо в виде $y = y_0 + y_h$, где y_0 – заранее фиксированное частное решение уравнения $L(D)y = f(x)$, а y_h – какое-то решение однородного уравнения $L(D)y = 0$*

Доказательство. Докажем сначала пункт 1. Пусть $L(D)y_1 = f(x)$, $L(D)y_2 = f(x)$. Вычитая первое уравнение из второго, получаем: $L(D)y_1 - L(D)y_2 = 0$. В силу линейности оператора $L(D)$: $L(D)(y_1 - y_2) = 0$.

Теперь докажем пункт 2. Обозначим $y_h = y - y_0$, где y_0 – заранее фиксированное решение уравнения $L(D)y = f(x)$, а y – какое-то решение уравнения $L(D)y = f(x)$. Тогда в силу пункта 1, y_h – решение однородного уравнения $L(D)y = 0$. Получили, что $y = y_0 + y + h$. □

Определение 4.1. Многочлен $L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ назовем характерестическим многочленом ЛДУ $L(D) = 0$. Уравнение $L(\lambda) = 0$ назовем характерестическим уравнением.

Замечание. Над $\mathbb{C}$ характерестический многочлен раскладывается в произведение одночленов: $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n)$. В дальнейшем будем обозначать через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ корни характерестического уравнения.

Теорема 4.3 (об общем решении однородного ЛДУ без кратных корней)**.** *Пусть харктерестическое уравнение $L(\lambda) = 0$ не имеет кратных корней. Тогда верны следующие утверждения:*

1. $\forall C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C} : \sum\limits_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$ *– решение.*

2. $\forall y(x)$ *– решения* $: \exists C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C} : y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$.

Доказательство. Для пункта 1 достаточно показать, что $e^{\lambda_i x}$ является решением $L(D)y = 0$. Так как $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n)$, то $L(D) = (\frac{d}{dx} - \lambda_1)\ldots(\frac{d}{dx} - \lambda_n)$. Рассмотрим

$$L(D)e^{\lambda_i x} = (\frac{d}{dx}-\lambda_1)\ldots(\frac{d}{dx}-\lambda_n)e^{\lambda_i x} = (\frac{d}{dx}-\lambda_1)\ldots(\frac{d}{dx}-\lambda_{n-1})(\frac{d}{dx}e^{\lambda_i x}-\lambda_n e^{\lambda_i x})$$

$$= (\frac{d}{dx} - \lambda_1)\ldots(\frac{d}{dx} - \lambda_{n-1})(\lambda_i - \lambda_n)e^{\lambda_i x} = (\lambda_i - \lambda_1)\ldots(\lambda_i - \lambda_n)e^{\lambda_i x} = 0$$

Для доказательства пункта 2 проведем индукцию по n. Для $n = 1$ это верно, т.к. в случае $n = 1$, $L(D) = 0$ – это просто ЛДУ первой степени вида $y' = \lambda y$. Докажем переход от $n - 1$ к n. Обозначим $L_{n-1}(D) = (\frac{d}{dx} - \lambda_1)\ldots(\frac{d}{dx} - \lambda_{n-1})$, $z(x) = y'(x) - \lambda_n y$. Тогда $L(D)y = 0$ эквивалентно уравнению $L_{n-1}(D)z = 0$. Последнее уравнению является ЛДУ с постоянными коэффициентами степени $n - 1$. Для него верно, что $\exists \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1} \in$

$\mathbb{C} : z(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e^{\lambda_i x}$. Если подставить в это выражение $z(x)$, то мы получим неоднородное ЛДУ первой степени:

$$y' - \lambda_n y = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e^{\lambda_i x}$$

Общим решением однородного уравнения $y' - \lambda_n y = 0$ является семейство функций $Ce^{\lambda^n x}$. Попытаемся найти частное решение неоднородного ЛДУ первой степени. Утверждается, что одно из решений, это:

$$e^{lambda_n x} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda_n}$$

TO BE CONTINUED... □

5 Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши

Определение 5.1. Назовем нормальной системой дифференциальных уравнений порядка m следующую систему:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \quad \dots \\ y_m'(x) = f_m(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Причем функции f_i непрерывны в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть также $y_1(x_0) = y_1^0, \dots, y_m(x_0) = y_m^0$.

Определение 5.2. Пусть $y = \varphi(x)$ определена на некотором промежутке $I \subset \mathbb{R}$, обладает следующими свойствами:

1. Она непрерывно дифференцируема.
2. $(x_0, \varphi(x_0)) \in G$
3. $\forall x \in I : \varphi'(x) = f(x, y)$

Тогда она является решением системой дифференциальных уравнений порядка m.

Пример. Рассмотрим уравнение n-го порядка: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, причем f - непрерывна по всем аргументам. Если также добавить условие $y(x_0) = y_1^{(0)}, \dots, y(x_0)^{(n-1)} = y_n^{(0)}$, то поставленная задача называется задачей Коши.

Замечание. От первой задачи Коши можно перейти ко второй, и наоборот, если обозначить:

$$y_1 = y$$
$$...$$
$$y_n = y^{(n-1)}$$

Замечание. Поскольку решение задачи Коши для системы сводится к решению задачи Коши для уравнения n-го порядка, в дальнейшем будем рассматривать решение системы.

Определение 5.3. Функция f(x, y) определенная в области G называется удовлетворяющей условию Липшица относительно y равномерно по x, если:

$$\exists L > 0 : \forall (x, y_1), (x, y_2) : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Замечание. Условию Липшица удовлетворяют непрерывно дифференцируемые функции,$|x|$, дифференцируемые с ограниченной производной, но не все дифференцируемые.

Лемма 5.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Область G выпукла по переменной y (т.е. ограничение на переменную y выпукло).*
2. *Функция $f(x, y)$ непрерывна в области G.*
3. *Все частные производные ($\frac{\partial_i f}{\partial_j y}$ непрерывны в G).*
4. $\exists k > 0 : \forall (x, y) \in G : \frac{\partial_i f}{\partial_j y} \leq k$

   Тогда функция $f(x, y)$ удовлетворяет в области G условию Липшица.

Доказательство. Рассмотрим $1 \leq i \leq n$, рассмотрим

$$|f_i(x, y_1) - f_i(x, y_2)| = |\int_0^1 \frac{d}{d\theta}(f_i(x, y_2 + \theta(y_1 - y_2))d\theta|$$

$$= |\int_0^1 (gradf_i, y_2 - y_1)d\theta| \leq k|y_2 - y_1|n$$

Для f:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq n^{3/2}k|y_1 - y_2|$$

□

Лемма 5.2 (Гроноулла)**.** *Рассмотрим функцию $\varphi(x)$ определенную на интервале $I \subset \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geq 0$ на I, непрерывна на I, и:*

$$\exists A \geq 0, B \geq 0 : \forall x_0, x \in I : \varphi(x) \leq A + B|\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt|$$

. Тогда: $\forall x \in I : \varphi(x) \leq Ae^{B|x-x_0|}$.

Доказательство. Пусть $x > x_0$, пусть $F(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(\tau)d\tau$. Тогда $F(x_0) = 0$. Тогда по условию: $0 \le F'(x) \le A + BF(x)$. Домножим это неравенство на $e^{-B(x-x_0)}$:

$$F'(x)e^{-B(x-x_0)} \le Ae^{-B(x-x_0)} + BF(x)e^{-B(x-x_0)}$$
$$F'(x)e^{-B(x-x_0)} - BF(x)e^{-B(x-x_0)} \le Ae^{-B(x-x_0)}$$
$$(F(x)e^{-B(x-x_0)})' \le Ae^{-B(x-x_0)}$$

. Проинтегрируем это неравенство на промежутке $[x_0, x]$.

$$F(x)e^{-B(x-x_0)} - F(x_0)e^{-B(x_0-x_0)} \le \frac{Ae^{-B(x-x_0)}}{-B} fromx_0tox$$

$$F(x)e^{-B(x-x_0)} \le -\frac{A}{B}(e^{-B(x-x_0)} - 1)$$

Умножим обе части уравнения на $e^{B(x-x_0)}$:

$$F(x) \le -\frac{A}{B}(1 - e^{B(x-x_0)})$$

. Подставив эту оценку в $\varphi(x) \le A + B|\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt|$ получаем то, что нужно. $\square$

Рассмотрим систему уравнений:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

где $f(x, y)$ непрерывна на области G, $(x_0, y_0) \in G$.

Определение 5.4. Вектор функция $y = \varphi(x)$ называется решением системы уравнений, данной выше, на промежутке I, если:

1. y непрерывна на I
2. Точка $(x_0, \varphi(x_0)) \in G$
3. $\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$ на I.

Лемма 5.3 (об эквивалентности)**.** *Вектор функция $\varphi(x)$ является решением задачи Коши (1), (2) тогда и только тогда, когда $y = \varphi(x)$ является решением интегральной системы уравнений (5).*

Доказательство. $\Leftarrow$ Проинтегрируем тождество $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$. Учитывая начальные условия $y(x_0) = y_0$. Получаем, что $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$.

$\Rightarrow$ Продифференцируем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

и получим, что нужно. $\square$

6 Банаховы пространства. Теорема Банаха

Определение 6.1. Нормой $||x||$ на линейном пространствен называется функция $||x|| : V \mapsto \mathbb{R}$, такая, что:

1. $\forall x : ||x|| > 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x, \lambda : ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
3. $\forall x, y : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Определение 6.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если $\exists x \in \mathbb{L} : \lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$

Определение 6.3. Фундаментальная последовательность определяется аналогично

Определение 6.4. Нормированное пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность является сходящейся, называется полным (банаховы)

Определение 6.5. Отображение $\Phi : X \subset \mathbb{L}_1 \mapsto \mathcal{L}_2$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$: Аналогичное

Определение 6.6. Точка x^* называется неподвижной точкой отображения $\varphi : X \subset \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$, если $\varphi(x^*) = x^*$.

Определение 6.7. Отображение φ назывется сжимающим, если $\exists q : ||\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|| < q||x_1 - x_2||$

Теорема 6.1 (Принцип сжимающих отображений, теорма Банаха)**.** *Пусть замкнутое $U_r(x_0) \subset \mathcal{L}$, φ является сжимающим на $U_r(x_0)$ с коэффициентом q. Тогда, если выполнено условие $||\varphi(x_0) - x_0|| \leq (1 - q)r$, то отображение φ имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Докажем сначала, что шар отображается сам в себя: рассмотрим $x \in U_r(x_0)$:

$$||\varphi(x) - x_0|| = ||\varphi(x) - \varphi(x_0) + \varphi(x_0) - x_0|| \leq ||\varphi(x) - \varphi(x_0)|| + ||\varphi(x_0) - x_0||$$

$$q||x - x_0|| + (1 - q)r \leq qr + (1 - q)r = r$$

Мы доказали, что образ шара – это шар. Рассмотрим реккурентную последовательность $x_n = \varphi(x_{n-1})$.

$$||x_n - x_m|| = ||x_{n+p} - x_n|| = ||x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + ...|| \leq \sum_{i=0}^{p} ||x_{n+i} - x_{n+i-1}||$$

$$||x_2 - x_1|| = ||\varphi(x_1) - \varphi(x_0)|| \leq q||x_1 - x_0||$$

Проводя аналогичные рассуждения, имеем:

$$||x_n - x_{n-1}|| = q^{n-1}||\varphi(x_0) - x_0||$$

Суммируя это, получаем:

$$q^{n+p-1}l + ... + q^n l = q^n l \frac{q^p - 1}{q - 1}$$

Значит, эта последовательность является фундаментальной, существует предел x^* и так как шар замкнут, то предел принадежит шару. Заметим, что φ является равномерно непрерывной. Кроме того,

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x^*)$$

. Докажем единственность. Пусть $\exists x^O : \varphi(x^O) = x^O$. Рассмотрим норму разности между ними:

$$||x^O - x^*|| = ||\varphi(x^O) - \varphi(x^*)|| \leq q||x^O - x^*||$$

. □

Теорема 6.2 (о существовании и единственности решения задачи Коши)**.** *Рассмотрим область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть вектор функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица на любом компакте в G по переменной y равномерно по x. И пусть $(x_0, y_0) \in G$. Тогда:*

1. *$\exists \delta > 0 : \exists y$ определенная на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$: y является решением задачи Коши.*

2. *Решение задачи Коши единственно в том смысле, что если y_1 является решением задачи Коши на отрезке $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$, а y_2 решением задачи Коши на отрезке $[x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$, то их огранечения на наименьший из отрезков тождественно равны*

Доказательство. G – область, следовательно любая точка (x, y) принадлежит вместе со своей окрестностью, в том числе и замыкание некоторой окрестности $U(x, y)$. Заметим, что все f_i непрерывны и ограничены. Рассмотрим норму

$$||f|| = \max_{1\leq i\leq n} \sup_{(x,y)} f_i(x, y)$$

. Вложим в каждый замкнутый шар цилиндр:

$$T_{r'}(x, y) = \{(x, y) \in U(x, y) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], ||y - y_0|| \leq r\}$$

При этом выберем r' и δ соответственно, чтобы цилиндр лежал внутри шара. Рассмотрим уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

для которого мы решаем задачу Коши. Рассмотрим оператор Φ действующий из пространства функций на шаре в себя, такой что:

$$\Phi(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

Докажем, что этот оператор опять сжимает. Пусть y и z – две различные вектор функции.

$$||\Phi(y)-\Phi(z)|| = \max \sup_{[x_0-\delta_{r'}, x_0+\delta_{r'}]} |\int_{x_0}^{x} (f_i(\tau, y(\tau) - f_i(\tau, z(\tau)))d\tau|$$

$$\leq \sup \int_{x_0}^{x} ||f(\tau, y) - f(\tau, z)||d\tau \leq \sup \int_{x_0}^{x} c||y-z||d\tau \leq \delta c||y-z||$$

□