

КОНСПЕКТ ПО КУРСУ

Гармонический анализ

Contributors:
Андрей Степанов

Лектор:
Трушин Б.В.

МФТИ

Последнее обновление: 23 марта 2015 г.

Содержание

1 Абсолютно интегрируемые функции. Приближение ступенчатыми. Лемма Римана об осцилляции	2
1.1 Теорема о приближении интегрируемой на отрезке функции ступенчатой	2
1.2 Теорема о приближении абсолютно интегрируемой функции финитно-ступенчатой	2
1.3 Лемма Римана об осцилляции	4
2 Тригонометрический ряд Фурье. Ядро Дирихле. Принцип локализации	5
2.1 Тригонометрический ряд Фурье	5
2.2 Ядро Дирихле	7
2.3 Принцип локализации	8
3 Сходимость ряда Фурье. Условие Гёльдера	8
4 Теоремы Вейерштрасса о приближении функции многочленами и тригонометрическими многочленами. Интегрирование и дифференцирование тригонометрического ряда. Экспоненциальная форма ряда Фурье.	10
4.1 Теорема о приближении тригонометрическими многочленами	10
4.2 Теорема о приближении обычными многочленами	11
4.3 Интегрирование и дифференцирование тригонометрического ряда.	11
4.4 Экспоненциальная форма ряда Фурье.	12
5 Метрические и нормированные пространства. Банаховы пространства. Евклидовы пространства. Неравенство треугольника и Коши-Буняковского для Евклидовых пространств.	12
5.1 Метрические и нормированные пространства	12
5.2 Банаховы пространства	14
5.3 Евклидовы пространства	15
5.4 Неравенство Коши-Буняковского и треугольника для Евклидовых пространств	15

1 Абсолютно интегрируемые функции. Приближение ступенчатыми. Лемма Римана об осцилляции

1.1 Теорема о приближении интегрируемой на отрезке функции ступенчатой

Определение 1.1. Функция $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если $\exists \{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b : \forall i \in \{1, \dots, n\} : f - \text{постоянная на } (c_{i-1}, c_i)$.

Теорема 1.1. Пусть $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ интегрируема по Риману. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists h(x) - \text{ступенчатая} : \int_a^b |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$. Пусть $\tau = \{c_i\}_{i=0}^n$ – некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, такое что $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$. Пусть $\xi_i \in (c_{i-1}, c_i)$. Запишем сумму Римана для данного разбиения:

$$S_\tau(f; \xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(c_i - c_{i-1})$$

Рассмотрим ступенчатую функцию

$$h(x) = \begin{cases} f(\xi_i), & \text{если } x \in (c_{i-1}, c_i), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что в силу определения колебания $\omega_i(f)$ функции на отрезке $[c_{i-1}, c_i]$ верно следующее:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - h(x)| dx &= \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} |f(x) - f(\xi_i)| dx \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f)(c_i - c_{i-1}) \end{aligned}$$

По критерию интегрируемости $\forall \varepsilon : \exists \delta$ последняя сумма меньше ε для всех достаточно мелких разбиений (тех, у которых мелкость $|\tau| \leq \delta$). Значит, если взять в качестве $\varepsilon = \varepsilon_0$, а в качестве разбиения – любое разбиение с мелкостью $< \delta$, получим утверждение теоремы. \square

1.2 Теорема о приближении абсолютно интегрируемой функции финитно-ступенчатой

Определение 1.2. Пусть функция $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Такая функция называется абсолютно интегрируемой, если:

1. $\exists \{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b : f$ интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b) \setminus \{c_i\}$

2. $|f|$ интегрируема в несобственном смысле на (a, b)

Определение 1.3. Функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ называется финитной, если она равна нулю вне некоторого отрезка, т.е. $\exists [a, b] : \forall x \notin [a, b] : f(x) = 0$.

Определение 1.4. Функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ называется финитно-ступенчатой, если она финитная и ступенчатая.

Теорема 1.2. Пусть функция $f : X \mapsto \mathbb{R}$ — абсолютно интегрируема, где X — конечный отрезок или бесконечный интервал (полуинтервал). Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists h(x)$ — финитно-ступенчатая : $\int_a^b |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Можно считать, что $X = \mathbb{R}$, иначе доопределим f на нулем. Поскольку f — абсолютно интегрируема, то:

1. $\exists \{c_i\}_{i=0}^{n+1}, a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b : f$ интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b) \setminus \{c_i\}$
2. $|f|$ интегрируема в несобственном смысле на (a, b)

Считаем, что $c_0 = -\infty, c_{n+1} = +\infty$ Из определения несобственного интеграла:

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} |f(x)| dx = \lim_{a \rightarrow c_i, b \rightarrow c_{i+1}} \int_a^b |f(x)| dx$$

Значит, можно выбрать a_{i+1} и b_{i+1} так, что

$$\int_{c_i}^{a_{i+1}} |f(x)| dx + \int_{b_{i+1}}^{c_{i+1}} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{n}$$

Тогда понятно, что любого наперед заданного эпсилон, можно написать следующее

$$\exists \{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n :$$

$$-\infty = c_0 < a_1 < b_1 < c_1 < a_2 < b_2 < c_2 < \dots < a_n < b_n < c_{n+1} = +\infty :$$

$$J := \int_{c_0}^{a_1} |f(x)| dx + \int_{b_1}^{a_2} |f(x)| dx + \dots + \int_{b_n}^{c_{n+1}} |f(x)| dx < \varepsilon$$

, т.к. $|f|$ интегрируем на \mathbb{R} в несобственном смысле. Пусть

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \cup_{i=1}^n [a_i, b_i], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)| dx = J < \varepsilon$$

. f_ε интегрируема по Риману (т.к. все плохие точки мы выкинули). По предыдущей теореме существует $h_\varepsilon(x) : [a_1, b_n] \mapsto \mathbb{R}$ – ступенчатая функция: $\int_{a_1}^{b_n} |h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon$. Доопределим $h_\varepsilon(x)$ нулем вне отрезка $[a_1, b_n]$. Тогда h – финитно-ступенчатая. Кроме того:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_\varepsilon(x) - f(x)| dx < \int_{-\infty}^{+\infty} (|h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)| + |f_\varepsilon(x) - f(x)|) dx < 2\varepsilon$$

□

1.3 Лемма Римана об осцилляции

Теорема 1.3. Пусть $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ абсолютно интегрируема. Доопределим её на \mathbb{R} нулем. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha) - f(x)| dx \rightarrow 0, \text{ при } \alpha \rightarrow 0$$

Доказательство. Этот интеграл существует, т.к. его можно оценить как $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha)| dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$, а оба этих интеграла существуют, так как $|f|$ абсолютно интегрируема.

Докажем сначала эту теорему для произвольной финитно-ступенчатой функции $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Поскольку $\alpha \rightarrow 0$, мы можем рассматривать лишь такие α , что

$$|\alpha| < \frac{\min_i (c_i - c_{i-1})}{2}$$

. Пусть $M = \sup |h|$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x + \alpha) - h(x)| dx < 2M(n + 1)|\alpha|$$

Теперь докажем теорему для произвольной абсолютно интегрируемой f . Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $h(x)$ – финитно-ступенчатая: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon$. Тогда: $\int |f(x + \alpha) - f(x)| dx \leq \int |f(x + \alpha) - h(x + \alpha)| dx + \int |h(x + \alpha) - h(x)| dx + \int |h(x) - f(x)| dx \leq 3\varepsilon$. □

Лемма 1.4 (Римана об осцилляции). Пусть $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ – абсолютно интегрируемая функция. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int f(x) \sin(\lambda x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int f(x) \cos(\lambda x) dx = 0$$

Доказательство. Доопределим f нулем на \mathbb{R} . Рассмотрим:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx$$

Этот интеграл существует, так как f абсолютно интегрируема. Сделаем замену $x = t + \frac{\pi}{\lambda}$. Тогда:

$$I(\lambda) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \sin(\lambda t) dt$$

. Сложив и поделив пополам, получаем, что:

$$I(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) \sin(\lambda x) dx$$

Применяя теорему 1.3, получаем, что

$$I(\lambda) \rightarrow 0$$

□

2 Тригонометрический ряд Фурье. Ядро Дирихле. Принцип локализации

2.1 Тригонометрический ряд Фурье

Определение 2.1. Функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (1)$$

называется тригонометрическим рядом. a_k, b_k — коэффициенты ряда. Система

$$\left\{ \frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots \right\}$$

называется тригонометрической системой

Утверждение 2.1. Тригонометрическая система является ортогональной со скалярным произведением $[f, g] = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
[1, 1] &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \neq 0 \\
[\sin kx, \sin kx] &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx \neq 0 \\
[\cos kx, \cos kx] &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx \neq 0 \\
[1, \sin kx] &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0 \\
[1, \cos kx] &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0 \\
[\sin nx, \cos mx] &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 \\
[\sin nx, \sin mx] &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x - \cos(n+m)x dx = 0 \\
[\sin nx, \sin mx] &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x + \cos(n+m)x dx = 0
\end{aligned}$$

Заметим, что второе и третье равенство выполнены, так как интеграл берется от положительной непрерывной функции. Четвертое и пятое получается использованием Формулы Ньютона-Лейбница. Шестое выполнено, так как подынтегральная функция нечетна. А седьмое и восьмое (при $n \neq m$) – это результат применения тригонометрических Формул и использовании формулы Ньютона-Лейбница. \square

Определение 2.2. Пусть функция f является 2π периодической и абсолютно интегрируемой на $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд 1, где

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx
\end{aligned}$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции f . Обозначение: Обозначаем $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.

Утверждение 2.2. Пусть

$$T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

сходится равномерно на \mathbb{R} . Тогда ряд Фурье для $T(x)$ – это сам $T(x)$.

Доказательство. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Мы хотим показать, что

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx dx = \alpha_k$$

Обозначим за $T_n(x)$ сумму первых n членов ряда. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как ряд $T(x)$ сходится равномерно, то $\exists n > k : |T(x) - T_n(x)| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \pi a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} (T_n(x) + (T(x) - T_n(x))) \cos kx dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) \cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} (T(x) - T_n(x)) \cos kx dx \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое в этой сумме равно α_k . Тогда

$$\pi |a_k - \alpha_k| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (T(x) - T_n(x)) \cos kx dx \right| \leq 2\pi\varepsilon$$

□

Следствие (из леммы Римана об осцилляции). *Если f — абсолютно интегрируемая и 2π периодическая, то $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.*

2.2 Ядро Дирихле

Определение 2.3.

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Определение 2.4. $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$ — ядро Дирихле.

Замечание. Умножим и поделим ядро Дирихле на $\sin x/2$. Получаем:

$$\sin \frac{x}{2} D_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k + \frac{1}{2})x + \sin(k - \frac{1}{2})x}{2} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2}$$

Можно считать, что

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

, если $x \neq 0$, а в нуле $D_n(x)$ — это предел этого выражения, то есть $n + \frac{1}{2}$

Замечание.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$$

Замечание. Подставим в формулу для $S_n(f)(x)$ коэффициенты a_k и b_k . После использования формулы косинуса разности, а так же вспоминая, что ядро Дирихле – чётная функция, получаем:

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u)f(x+u)du = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(u)f(x+u)du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u)f(x+u)du = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(-u)f(x-u)du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u)f(x+u)du = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u)(f(x-u)+f(x+u))du = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt + \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2} (f(x+t)+f(x-t))dt
\end{aligned}$$

В последнем интеграле функция $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin t/2}$ абсолютно интегрируема, если исходная функция абсолютно интегрируема, а значит, по лемме Римана об осцилляции, последний интеграл стремится к нулю.

2.3 Принцип локализации

Теорема 2.3. Пусть $f - 2\pi$ периодическая, абсолютно интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция. Тогда частичные суммы $S_n(f)(x)$ сходятся в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\exists \delta > 0$, что сходится интеграл

$$\int_0^{\delta} D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dx$$

. Причем если они сходятся, то к одному и тому же числу.

Следствие (принцип локализации). Сходимость ряда Фурье в точке и величина предела зависят только от значений функции в сколь угодно малой окрестности этой точки.

3 Сходимость ряда Фурье. Условие Гёльдера

Определение 3.1. Пусть x_0 – точка разрыва первого рода. Определим

$$\begin{aligned}
f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0+0)}{x - x_0} \\
f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0-0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Определение 3.2. Точка x_0 называется почти регулярной точкой функции f , если $\exists f(x_0+0), f(x_0-0), f'_+(x_0), f'_-(x_0)$

Определение 3.3. Точка x_0 называется регулярной, если она является почти регулярной, и дополнительно

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

Теорема 3.1. Пусть f – абсолютно интегрируемая на $[-\pi, \pi]$, 2π периодическая функция. x_0 её почти регулярная точка. Тогда $S_n(f)(x) \rightarrow \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Теорема 3.2. Если f – 2π периодическая и абсолютно интегрируемая на $[-\pi, \pi]$. Пусть x_0 – почти регулярная точка. Тогда

$$S_n(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

Доказательство. $S_n(x) = \int_0^\pi D_n(t)(f(x-t) + f(x+t))dt$, где $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$. Пусть $\delta \in (0, \pi)$. Посчитаем разность

$$\begin{aligned} S_n(t) - \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t)(f(x_0 - t) + f(x_0 + t))dt - \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t)(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0 - t) - f(x_0 - 0) + f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)) \\ \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} dt &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 - 0)}{t} + \\ &\quad \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 + 0)}{t} \frac{t}{2\sin(t/2)} \sin(n+1/2)t dt \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. $\exists \delta' \in (0, \delta) : \left| \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 - 0)}{t} \right| \leq |f'_-(x_0)| + \varepsilon$. Аналогично для второй дроби. Поэтому первый интеграл не превосходит $\frac{1}{\pi} \delta (|f'_-| + |f'_+| + 2\varepsilon)$. На интервале (δ, π) подынтегральная функция абсолютно интегрируема, поэтому по лемме Римана об осцилляции второй интеграл стремится к 0. \square

Замечание (Условие Гёльдера). Можно потребовать, чтобы для некоторого $\alpha > 1$ было выполнено $|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| \leq C \cdot t^\alpha$, $|f(x_0 - t) + f(x_0 - 0)| \leq C \cdot t^\alpha$. Это является более слабым условием по сравнению с существованием односторонних производных, однако, при этом условии теорема доказывается так же.

Определение 3.4. Функция f называется кусочно-гладкой на $[a, b]$, если она непрерывна на $[a, b]$ и $\exists a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$: для любого отрезка $[c_{k-1}, c_k]$ функция f непрерывно дифференцируема на нём

Определение 3.5. 2π периодическая функция называется кусочно-гладкой, если она непрерывна на \mathbb{R} и кусочно-гладкая на $[-\pi, \pi]$

Теорема 3.3. Пусть f кусочно-гладкая 2π периодическая функция. Тогда:

1. $S_n(f) \rightarrow f$ равномерно
2. $\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(f, x) - f(x)| \leq C \cdot \frac{\ln n}{n}$

Доказательство.

$$S_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) D_n(t)(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) \sin((n+1/2)t)g_x(t)dt$$

Оценим с помощью теоремы Лагранжа следующую разность: $|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leq |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)| \leq 2|t|M_1 \leq 2\pi M_1$. Кроме того, оценим $|\frac{d}{dt}g_x(t)| \leq \dots$

Причем, $|\int_0^\delta|$ TO BE CONTINUED. . .

□

4 Теоремы Вейерштрасса о приближении функции многочленами и тригонометрическими многочленами. Интегрирование и дифференцирование тригонометрического ряда. Экспоненциальная форма ряда Фурье.

4.1 Теорема о приближении тригонометрическими многочленами

Определение 4.1. Функция

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется тригонометрическим многочленом порядка n

Теорема 4.1. Пусть f — непрерывная 2π периодическая функция. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists T(x) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |T(x) - f(x)| < \varepsilon$. То есть эту функцию можно с любой точностью приблизить тригонометрическим многочленом.

Доказательство. Функция f непрерывная на $[-\pi, \pi]$, а следовательно равномерно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2, \|x_1 - x_2\| < \delta : \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$. Зафиксируем ε . Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[-\pi, \pi]$ с мелкостью $|\tau| < \delta$. Рассмотрим функцию f_τ — непрерывная, такая что $f_\tau(x_i) = f(x_i)$, а на интервалах (x_{i-1}, x_i) она линейна. Тогда f_τ — кусочно-гладкая. Следовательно ряд Фурье сходится к ней

равномерно, следовательно $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \|S_{n_0}(f_\tau, x) - f_\tau(x)\| < \varepsilon$. Кроме того $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \|f(x) - f_\tau(x)\| < \varepsilon$. Получаем, что для нашего ε существует n_0 : $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} \|S_{n_0}(x) - f(x)\| < 2\varepsilon$

□

4.2 Теорема о приближении обычными многочленами

Теорема 4.2 (Вейрштрасса). Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists$ многочлен $P(x) : \sup_{x \in [a, b]} \|f(x) - P(x)\| < \varepsilon$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(t) = f(a + (b - a) \cdot \frac{t}{\pi})$, где $t \in [0, \pi]$. Рассмотрим функцию g^* такую что $g^*(t) = g(-t)$, если $t \in [-\pi, 0]$ и $g^*(t) = g(t)$, если $t \in [0, \pi]$. Кроме того, продолжим g^* на всю числовую прямую периодическим образом.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. По предыдущей теореме существует тригонометрический многочлен $T(x) : \sup_x \|T(x) - f(x)\| < \varepsilon$. Функция $T(x)$ как линейная комбинация синусов и косинусов раскладывается в ряд Тейлора с бесконечным радиусом сходимости. Следовательно, частичные суммы ряда Тейлора равномерно на $[-\pi, \pi]$ сходятся к $T(x)$. Значит, $\exists P(x) : \sup |P(x) - T(x)| < \varepsilon$. Следовательно, $\sup_x \|g^*(x) - P(x)\| < 2\varepsilon$. Тогда $\sup_x \|f(x) - P(\frac{x-a}{b-a} \cdot \pi)\| < 2\varepsilon$

□

4.3 Интегрирование и дифференцирование тригонометрического ряда.

Теорема 4.3. Пусть f — 2π -периодическая кусочно-гладкая функция. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Тогда $f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} kb_k \cos kx + ka_k \sin kx$

Доказательство. Поскольку f' — кусочно-непрерывная, то ей можно сопоставить ряд. Пусть этот ряд — это $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$. Тогда $\alpha_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} (f(x) \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx) = \\ &= \frac{1}{\pi} k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = kb_k \end{aligned}$$

Аналогично для β_k .

□

Определение 4.2. Пусть f — 2π -периодическая функция, причем $f^{(m-1)}$ — непрерывна, а $f^{(m)}$ — кусочно непрерывна. Тогда $|a_k| + |b_k| = o(\frac{1}{k^m})$

Доказательство. Пусть $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Пусть $f^{(m)} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$. Применяя предыдущую теорему k раз, имеем $|\alpha_k| + |\beta_k| = k^m (|a_k| + |b_k|)$. Но по лемме Римана об осцилляции, $|\alpha_k| + |\beta_k| = o(1)$. В итоге $|a_k| + |b_k| = o(\frac{1}{k^m})$.

□

Теорема 4.4. Пусть f — 2π -периодическая и кусочно-непрерывная на $[-\pi, \pi]$. Пусть $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Тогда $\int_0^x f(\tau) d\tau = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos kx}{k} b_k + \frac{a_k \sin kx}{k}$. При этом ряд сходится равномерно.

Доказательство. Пусть $F(x) = \int_0^x (f(t) - \frac{a_0}{2}) dt$. Понятно, что она непрерывна как интеграл с переменной верхней границей, кроме того, она кучосно непрерывно дифференцируема и $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$. Напишем для неё ряд Фурье, который будет сходиться к ней равномерно. $F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$. Тогда $a_k = kB_k, b_k = -kA_k$. $A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx$. $F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k$. $\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$. Тогда $\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos kx}{k} b_k + \frac{a_k}{k} \sin kx$ \square

4.4 Экспоненциальная форма ряда Фурье.

Пусть $g(t)$ — T -периодическая. Рассмотрим $f(x) = g(\frac{x}{2\pi})$. Как выглядит её ряд Фурье мы знаем. Ну и понятно, что вся теория, которую мы развивали про 2π -периодические функции обобщается на произвольный период. Кроме того, $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$. Перепишав ряд Фурье в экспоненциальной форме, получим: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} c_k$, где $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$

5 Метрические и нормированные пространства. Банаховы пространства. Евклидовы пространства. Неравенство треугольника и Коши-Буняковского для Евклидовых пространств.

5.1 Метрические и нормированные пространства

Определение 5.1. Множество M называется метрическим пространством, если на нём введена функция $\rho(x, y)$, называемая метрикой, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\forall x \in M : \rho(x, x) = 0$
2. $\forall x, y \in M : \rho(x, y) = \rho(y, x) \geq 0$
3. $\forall x, y, z \in M : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Пример. В \mathbb{R}^n метрика $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. В пространстве непрерывных функций на $[a, b]$ можно взять метрику $\rho(f, g) = \max_{x \in [a, b]} \|f(x) - g(x)\|$

Определение 5.2. Множество L с операцией сложения и умножения на элемент из \mathbb{R} называется линейным пространством, если $\forall x, y, z \in L : \forall \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\lambda x \in L$

2. $x + y \in L$
3. $x + y = y + x$
4. $x + (y + z) = (x + y) + z$
5. $\exists 0 \in L : \forall u \in L : u + 0 = 0 + u = u$
6. $\exists (-x) \in L : x + (-x) = 0$
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
9. $1 \cdot x = x$
10. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Определение 5.3. Линейное пространство X называется нормированным, если на нём определена функция $\| \cdot \|$, такая, что $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Замечание. Нормированное пространство является метрическим, $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Замечание. Вместо \mathbb{R} можно написать \mathbb{C} или вообще произвольное поле F .

Определение 5.4. ε окрестностью точки x_0 из нормированного пространства X называется

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

Определение 5.5. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из нормированного пространства X сходится к точке $x_0 \in X$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$

Замечание. Поскольку у нас теперь есть предел, то все определения из \mathbb{R}^n переносятся сюда, а именно: открытые множества, замкнутые множества, граница, и т.д.

Пример.

1. $C([a, b])$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$
2. $CL_1([a, b])$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$
3. $CL_2([a, b])$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$

4. $RL_p([a, b])$ – пространство интегрируемых по Риману на $[a, b]$ функций, с нормой из CL_p

Замечание. Проблема в том, что в RL_p есть не тождественно равные нулю функции, у которых интеграл от модуля равен нулю. Например, тождественно равная нулю функция, измененная в конечном числе точек. Есть два варианта решения проблемы.

Первый:

Определение 5.6. Пространство называется полунормированным, если в нём выполнены все свойства нормированного пространства, кроме первого.

Второй:

Замечание. Профакторизуем RL_p по отношению $f \sim g \Leftrightarrow \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^p dx \right)^{1/p} = 0$. $\hat{RL}_p = RL_p / \sim$

5.2 Банаховы пространства

Определение 5.7. Пусть X – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Определение 5.8. Метрическое пространство называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Определение 5.9. Нормированное пространство называется Банаховым, если оно полно по метрике, порожденной нормой.

Пример. $C([a, b])$ – Банахово. Используем теорему Коши для равномерной сходимости функциональных последовательностей, а также тот факт, что ряд непрерывных функций, если сходится равномерно, то обязательно к непрерывной функции.

Пример. $CL_1([a, b]), CL_2([a, b])$ – не Банаховы. Возьмем последовательность функций

$$f_n = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - xn, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & x > 1/n \end{cases}$$

Очевидно, что это последовательность является фундаментальной, ведь $\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{\min\{n, m\}}$. Пусть эта последовательность сходится в CL_1 к $\varphi(x)$. Тогда $\int_{-1}^1 |f_n(x) - \varphi(x)| dx \geq \int_{-1}^0 |f_n(x) - \varphi(x)| dx$. Но левый интеграл стремится к нулю, а правый не зависит от n . Значит, правый интеграл равен нулю. А так как φ должна быть непрерывна, $\varphi \equiv 1$ на $[-1, 1]$. Аналогично, $\forall 0 < \delta < 1 : \int_{-1}^1 |f_n(x) - \varphi(x)| dx \geq \int_\delta^1 |f_n(x) - \varphi(x)| dx$. Аналогично получаем, что $\varphi \equiv 0$ на $[\delta, 1]$. Но это верно для любого δ . Получаем, что φ разрывна.

5.3 Евклидовы пространства

Определение 5.10. Линейное пространство R называется Евклидовым, если на нём определено скалярное произведение (\cdot, \cdot) , удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $(x, x) \geq 0$
2. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(x, y) = (y, x)$
4. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
5. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Замечание. В Евклидовом пространстве можно ввести норму как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Все свойства, кроме неравенства треугольника, очевидны. Для неравенства треугольника докажем КБШ.

5.4 Неравенство Коши-Буняковского и треугольника для Евклидовых пространств

Теорема 5.1 (Неравенство Коши-Буняковского). $(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$

Доказательство.

$$0 \leq (x + ty, x + ty) = (x, x) + 2t(x, y) + t^2(y, y)$$

При фиксированных x, y справа написано квадратное уравнение. Значит дискриминант должен быть неположительный. $\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$ \square

Следствие (Неравенство треугольника). $(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq (x, x) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)} + (y, y) = (\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)})^2$

Пример. Рассмотрим пространство CL_2 . В нем можно ввести скалярное произведение как $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Оно действительно является скалярным произведением, это легко проверить. Тогда норма $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ действительно является нормой