Конспект по курсу

Методы оптимизаций

Contributors:
Андрей Степанов

Лектор:
Мусатов Д.В.

МФТИ

Последнее обновление: 25 февраля 2015 г.

Содержание

Оценка за зачет:

1. 40% от оценки – за 2 контрольные работы (не переписываются)
2. 30% от оценки – за 2 домашние задания
3. 30% от оценки – индивидуальный проект, например:
   (a) Теоретический (реферат)
   (b) Теоретико-программистский (анализ времени работы, скорости сходимости)
   (c) Практический (нужно самому найти данные для применения)

1 Вводная лекция

1.1 Базовые определения

Определение 1.1 (общая задача оптимизации)**.** Пусть $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Нужно найти точку экстремума, т.е. минимума или максимума (локального или глобального) (строго или нестрогого).

Определение 1.2 (задача условной оптимизации)**.** Пусть $f : Y \mapsto \mathbb{R}$, $X \subset Y$. Нужно минимизировать f на X.

Замечание. Часто X задается условиями вида:

$$\begin{cases} g_1(x) \leq 0, \\ g_2(x) \leq 0, \\ \dots \\ g_k(x) \leq 0, \\ g_{k+1}(x) = 0, \\ \dots \\ g_n(x) = 0. \end{cases}$$

Замечание. Методы оптимизации можно условно разделить на аналитические и численные. Например, градиентный спуск – численный метод, метод Лагранжа – аналитический. Широкий класс численных методов – это итеративные алгоритмы. Можно условно разделить итеративные методы на точные и приближённые.

1.2 Линейное программирование

Определение 1.3. Задача линейного программирования – минимизация линейной функции на многограннике.

Более строго: пусть дана линейная функция $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, имеющая вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

. Пусть также дана система линейных уравнений и неравенств: $A_1 x \leq b_1$, $A_2 x = b_2$. Задача стоит в нахождении минимума f на множестве, на котором выполнена система уравнений.

Определение 1.4. Систему линейных уравнений и неравенств $A_1 x \leq b_1$, $A_2 x \leq b_2$ назовём системой ограничений.

Определение 1.5. Ограничения со знаком неравенства будем называть уравнениями-неравенствами.

Определение 1.6. Ограничения со знаком равенства будем называть уравнениями-равенствами.

Пример. Производственная задача: даны товары $g_1, \ldots, g_n$ и ресурсы $r_1, \ldots r_m$. Ресурсов ограниченное число. Ресурсов i-того типа: ω_i. На производство g_i необходимо $c_{i,j}$ ресурсов r_j. p_i – цена g_i. Нужно максимизировать прибыль.

Обозначим x_i – сколько товаров g_i было произведено. Тогда есть следующая задача максимизации:

$$\max \sum_{i=0}^{n} p_i x_i$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ \ldots \\ x_n \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} x_j c_{j,1} \leq \omega_1 \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j c_{j,m} \leq \omega_m \end{cases}$$

Замечание. Сначала считаем, что уравнений-равенств нет.

Определение 1.7. Грань k-той размерности – это множество точек, в которой ровно $n-k$ неравенств обратились в равенство, а остальные неравенства верны.

Утверждение 1.1. *Если минимум достигается, то он достигается на какой-то грани.*

Утверждение 1.2. *Если минимум достигается во внутренней точке грани, то он достигается на всей грани.*

Следствие. *Если минимум достигается, то есть вершина многогранника, в которой он достигается.*

Следствие. *Есть экспоненциальный алгоритм решения задачи линейного программирования – простой перебор всех вершин.*

Замечание. Есть симплекс метод.