Конспект по курсу

# Методы оптимизаций

*Contributors:*
Андрей Степанов

*Лектор:*
Мусатов Д.В.

МФТИ

Последнее обновление: 11 марта 2015 г.

# Содержание

Оценка за зачет:

1. 40% от оценки – за 2 контрольные работы (не переписываются)
2. 30% от оценки – за 2 домашние задания
3. 30% от оценки – индивидуальный проект, например:
   (a) Теоретический (реферат)
   (b) Теоретико-программистский (анализ времени работы, скорости сходимости)
   (c) Практический (нужно самому найти данные для применения)

# 1 Вводная лекция

## 1.1 Базовые определения

**Определение 1.1** (общая задача оптимизации)**.** Пусть $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Нужно найти точку экстремума, т.е. минимума или максимума (локального или глобального) (строго или нестрогого).

**Определение 1.2** (задача условной оптимизации)**.** Пусть $f : Y \mapsto \mathbb{R}$, $X \subset Y$. Нужно минимизировать $f$ на $X$.

*Замечание.* Часто $X$ задается условиями вида:

$$\begin{cases} g_1(x) \le 0, \\ g_2(x) \le 0, \\ \dots \\ g_k(x) \le 0, \\ g_{k+1}(x) = 0, \\ \dots \\ g_n(x) = 0. \end{cases}$$

*Замечание.* Методы оптимизации можно условно разделить на аналитические и численные. Например, градиентный спуск – численный метод, метод Лагранжа – аналитический. Широкий класс численных методов – это итеративные алгоритмы. Можно условно разделить итеративные методы на точные и приближённые.

## 1.2 Линейное программирование

**Определение 1.3.** Задача линейного программирования – минимизация линейной функции на многограннике.

Более строго: пусть дана линейная функция $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, имеющая вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

. Пусть также дана система линейных уравнений и неравенств: $A_1 x \leq b_1$, $A_2 x = b_2$. Задача стоит в нахождении минимума $f$ на множестве, на котором выполнена система уравнений.

**Определение 1.4.** Систему линейных уравнений и неравенств $A_1 x \leq b_1$, $A_2 x \leq b_2$ назовём системой ограничений.

**Определение 1.5.** Ограничения со знаком неравенства будем называть уравнениями-неравенствами.

**Определение 1.6.** Ограничения со знаком равенства будем называть уравнениями-равенствами.

**Пример.** Производственная задача: даны товары $g_1, \ldots, g_n$ и ресурсы $r_1, \ldots r_m$. Ресурсов ограниченное число. Ресурсов $i$-того типа: $\omega_i$. На производство $g_i$ необходимо $c_{i,j}$ ресурсов $r_j$. $p_i$ – цена $g_i$. Нужно максимизировать прибыль.

Обозначим $x_i$ – сколько товаров $g_i$ было произведено. Тогда есть следующая задача максимизации:

$$\max \sum_{i=0}^{n} p_i x_i$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ \ldots \\ x_n \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} x_j c_{j,1} \leq \omega_1 \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j c_{j,m} \leq \omega_m \end{cases}$$

*Замечание.* Сначала считаем, что уравнений-равенств нет.

**Определение 1.7.** Грань $k$-той размерности – это множество точек, в которой ровно $n-k$ неравенств обратились в равенство, а остальные неравенства верны.

**Утверждение 1.1.** *Если минимум достигается, то он достигается на какой-то грани.*

**Утверждение 1.2.** *Если минимум достигается во внутренней точке грани, то он достигается на всей грани.*

**Следствие.** *Если минимум достигается, то есть вершина многогранника, в которой он достигается.*

**Следствие.** *Есть экспоненциальный алгоритм решения задачи линейного программирования – простой перебор всех вершин.*

*Замечание.* Есть симплекс метод.

## 2 Потрачено

## 3 Потрачено

## 4 Выпуклый анализ?