Конспект по курсу

Дискретный анализ

Contributors:
Андрей Степанов
Анастасия Торунова

Лектор:
Райгородский А.М.

МФТИ

Последнее обновление: 23 марта 2015 г.

Содержание

1 Числа Рамсея

Определение 1.1. Число Рамсея $R(s,t)$ для натуральных s и t – это минимальное натуральное число n, такое, что при любой реберной раскарске полного графа на n вершинах в два цвета, либо найдется полный подграф на s вершинах первого цвета, либо полный подграф на t вершинах второго цвета.

Определение 1.2 (Числа Рамсея, альтернативное определение)**.** $R(s,t)$ – минимальное такое n, что для любого графа на n вершинах в нем есть либо K_s клика, либо $\overline{K}_t$ антиклика

Пример.

1. $R(3,3) = 6$
2. $R(1,t) = 1$
3. $R(2,t) = t$

Утверждение 1.1.

$$(\frac{1}{4} + o(1))\frac{t^2}{\ln t} \leq R(3,t) \leq (1 + o(1))\frac{t^2}{\ln t}$$

Замечание. 1/4 была получена в 2013 году, а 1/162 – Кимом. Числа Рамсея были придуманы Рамсеем в 1930 году. В 1935 году Эрдеш и Секереш переоткрыли их в своей работе.

Утверждение 1.2.

$$R(3,t) \geq c\frac{t^2}{\ln^2 t}$$

Теорема 1.3. $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$

Доказательство. Обозначим $r_1 = R(s-1,t), r_2 = R(s,t-1), n = r_1 + r_2$. Положим также $\deg_+ v = \deg v$, $\deg_- v = n - 1 - \deg_+ v$.

Рассмотрим граф G на n вершинах и произвольную вершину v этого графа. Ясно, что либо $\deg_+ v \geq r_1$, либо $\deg_- v \geq r_2$. В первом случае вершина v смежна с подграфом на r_1 вершинах, в котором есть либо $\overline{K}_t$ (в этом случае все хорошо), либо K_{s-1}. Но тогда этот K_{s-1} вместе с вершиной v дает K_s и тоже все хорошо. Второй случай рассматривается аналогично. □

Следствие.

$$R(s,t) \leq \binom{s-1}{s+t-2}$$

Доказательство. Индукция по $s+t$: применяем рекурсивную формулу из прошлой теоремы, а также рекурсивную формулу для треугольника Паскаля. □

Определение 1.3. Диагональные числа Рамсея – это числа $R(s, s)$.

Следствие (из следствия)**.**

$$R(s, s) \le \binom{s-1}{s+s-2} \approx \frac{4^s}{\sqrt{\pi s}}$$

Замечание. Самая сильная верхняя оценка, которую людям удалось доказать – это

$$\exists \gamma > 0 : R(s, s) \le 4^s \cdot e^{-\gamma \cdot \frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}}$$

. Это сделал Конлон.

Теорема 1.4. *Пусть дано s – натуральное. Найдем такое n, что*

$$\binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$$

Тогда $R(s, s) > n$

Доказательство. Докажем эту задачу вероятностным методом. То, что нужно доказать, равносильно тому, что $\exists$ раскраска ребер полного графа на n вершинах при которой нет одноцветной клики на s вершинах.

Рассмотрим вероятностное пространство $G(n, \frac{1}{2})$. Введем случайную величину ξ – количество одноцветных s-клик. Пусть ξ_S – другая индикаторная случайная величина, которая равна 1, если подграф S одноцветен. Тогда

$$P(\xi_S = 1) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}} = 2^{1-\binom{s}{2}}$$

Но вследствие линейности математического ожидания:

$$\xi = \sum_{S, |S| = s} \xi_S$$

А значит,

$$E\xi = \sum_{S, |S| = s} E\xi_S = \binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$$

А значит существует такая раскраска, что $\xi = 0$ □

Следствие.

$$R(s, s) \ge (1 + o(1)) \frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{s/2}$$

Доказательство. Положим $n = (1 + f(s)) \frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{s/2}$, где $f(s) = o(1)$

$$C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2} \le \frac{n^s}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s(s-1)}{2}} = (1 + f(s))^s \frac{s^s}{e^s 2^{s/2} s!} \cdot 2^{s^2/2} \cdot 2^{1-s^2/2+s/2}$$

$$= \frac{(1 + o(1))^s \cdot 2}{(1 + o(1))\sqrt{2\pi s}} < 1$$

при правильном выборе $f(s)$

□

Теорема 1.5 (Эрдеша)**.**

$$R(s,s) \geq (1+o(1))\frac{s}{e} \cdot 2^{s/2}$$

Теорема 1.6 (Спенсера)**.**

$$R(s,s) \geq (1+o(1)) \cdot \frac{s\sqrt{2}}{e} 2^{s/2}$$

Определение 1.4. Событие B не зависит от совокупности событий $A_1, \dots, A_n$, если

$$\forall J \subset \{1, \dots, n\} : P(A| \cap_{j \in J} A_j) = P(B)$$

Лемма 1.7 (симметричная локальная лемма Ловаса)**.** *Пусть $A_1, \dots, A_n$ – события. Путь дополнительно $\exists p : \forall i : P(A_i) \leq p$. Дополнительно предположим, что $\forall i : A_i$ не зависит от совокупности всех остальных событий, кроме не более чем d штук. Пусть также $ep(d+1) \leq 1$. Тогда $P(\cap_{i=1}^n A_i^c) > 0$*

Доказательство теоремы Спенспера. Нам нужно доказать, что

$$P(\cap_{S,|S|=s} A_S) > 0$$

. $P(A_s) = 2^{1-C_s^2} = p$. Чему же равно d? A_S зависит от тех A_T, у которых $|S \cap T| \geq 2$. Тогда $d \leq C_s^2 \cdot C_{n-2}^{s-2}$. Осталось доказать, что $ep(d+1) < 1$.

$$ep(d+1) = e \cdot 2^{1-C_s^2} \cdot (C_s^2 C_{n-2}^{s-2} - 1) = e(1+o(1)) 2^{1-C_s^2} C_s^2 C_{n-2}^{s-2}$$
$$\leq e(1+o(1)) 2^{1-s^2/2+s/2} \cdot \frac{s^2}{2} \cdot \frac{n^{s-2}}{(s-2)!} = e(1+o(1)) 2^{1-s^2/2+s/2} \cdot \frac{s^4}{2} \cdot \frac{(1+o(1))^{s-2} 2^{s/2-1}}{e^{s-2}(s)!} s^{s-2} \cdot 2^{s^2/2-s}$$
$$\frac{(1+o(1)) e s^{s+2} (1+o(1))^{s-2}}{e^{s-2} 2 (1+o(1)) \sqrt{2\pi s} \left(\frac{s}{e}\right)^s}$$

Если взять $o(1) = -\frac{1}{\sqrt{s}}$, то все получится. $\square$

2 Ещё более жаркая

Определение 2.1. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – события на некотором вероятностном пространстве. Ориентированный граф $G = (\{A_1, \dots, A_n\}, E)$ является орграфом этих зависимостей, если $\forall i \in \{1, \dots, n\} : A_i$ не зависит от совокупности тех событий A_j для которых $(A_i, A_j) \notin E$

Пример. Полный граф является орграфом зависимостей. Но это не интересный пример. Возьмем события A_1, A_2, A_3 которые независимы попарно, но зависимы в совокупности. Тогда из любой вершины этого графа должно выходить хотя бы одно ребро, в противном случае этот граф не будет являтся орграфом зависимостей. Тогда понятно, что в минимальном орграфе зависимостей для этого набора должно быть хотя бы 3 ребра.

Замечание. Если A_i, A_j зависимы, то в графе зависимостей обязаны быть ребра $(A_i, A_j), (A_j, A_i)$

Теорема 2.1 (Локальная лемма Ловаса)**.** *Пусть $A_1, \dots, A_n$ – события на каком-то вероятностном пространстве. $G = (V, E)$ – такой орграф зависимостей, что*

$$\exists x_1, \dots, x_n \in [0, 1) : \forall i : P(A_i) \le x_i \prod_{j:(A_i,A_j)\in E} (1 - x_j)$$

Тогда

$$P(\cap_{i=1}^n \overline{A}_i) \ge \prod_{j=1}^n (1 - x_j) > 0$$

Следствие (симметричная локальная лемма Ловаса)**.** *Пусть $A_1, \dots, A_n$ – события. Путь дополнительно $\exists p : \forall i : P(A_i) \le p$. Дополнительно предположим, что $\forall i : A_i$ не зависит от совокупности всех остальных событий, кроме не более чем d штук. Пусть также $ep(d + 1) \le 1$. Тогда $P(\cap_{i=1}^n \overline{A}_i^c) > 0$*

доказательство следствия. Рассмотрим $G = (V, E)$, у которого A_i соедина ровно с теми "паразитами" которые мешают независимости.

Рассмотрим сначала дурацкий случай: $d = 0$. В этом случае они независимы в совокупности. Тогда $P(\cap_{i=1}^n \overline{A}_i) = \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)) \ge (1 - p)^n \ge (1 - \frac{1}{e})^n > 0$.

Пусть теперь d > 0. Рассмотрим $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{d+1}$. Мы знаем, что $P(A_i) \le p \le \frac{1}{(d+1)e}$. Хочется доказать, что $P(A_i) \le \frac{1}{d+1} \prod_{k:(A_i,A_k)\in E} (1 - \frac{1}{d+1})$. Понятно, что $(1 - \frac{1}{d+1})^d \ge \frac{1}{e}$. Но тогда симметричный случай доказан. □

доказательство леммы Ловаса.

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^n \overline{A}_i) &= P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2|\overline{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n|\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_n) \\ &= (1 - P(A_1))(1 - P(A_1|\overline{A}_2)) \cdots (1 - P(A_n|\overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_n)) \end{aligned}$$

Лемма: $\forall i : \forall J \subset \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{i\} : P(A_i| \cap_{j\in J} \overline{A}_j) \le x_i$

База: $|J| = 0, P(A_i| \cap_{j\in\emptyset} \overline{A}_j) = P(A_i) \le x_i$

Переход: рассмотрим произвольное множество $J : |J| = k + 1$. Представим $J = J_1 \cup J_2$. Положим $J_1 = \{j \in J : (A_i, A_j) \in E\}$, $J_2 = J \setminus J_1$.

Рассмотрим случай, когда $J_1 = \emptyset$. Тогда $P(A_i| \cap_{j\in J} \overline{A}_j) = P(A_i| \cap_{j\in J_2} \overline{A}_j) = P(A_i) \le x_i$

Рассмотрим второй случай: $J_1 = \{j_1, \dots, j_r\}, r \ge 1$. Тогда

$$P(A_i| \cap_{j\in J} \overline{A}_j) = P(A_i| \cap_{j\in J_1} \overline{A}_j \cap \cap_{j\in J_2} \overline{A}_j) = \frac{P(A_i \cap \cap_{j\in J_1} \overline{A}_j| \cap_{j\in J_2} \overline{A}_j)}{P(\cap_{j\in J_1} \overline{A}_j| \cap_{j\in J_2} \overline{A}_j}$$

$$\le \frac{P(A_i| \cap_{j\in J_2} \overline{A}_j)}{P(\cap_{j\in J_1} \overline{A}_j| \cap_{j\in J_2} \overline{A}_j} = \frac{P(A_i)}{P(\cap_{j\in J_1} \overline{A}_j| \cap_{j\in J_2} \overline{A}_j} = \frac{P(A_i)}{P(A_{j_1}| \cap \cdots) \cdot P(A_{j_2}| \cap \cdots) \cdots} = $$

$$asasd$$

$\square$

Полезность несимметричного случая: $R(3,t) > n$. Берем случайную раскраску.

3 Конструктивные нижние оценки чисел Рамсея

Что значит снизу оценить число Рамсея?

Оценка $R(s,s) > n \Leftrightarrow$ существует граф $G = (V,E), |V| = n$, в котором нет K_s и $\overline{K}_s$, то есть $\omega(G) < s, \alpha(G) < s$.

Теорема 3.1 (Франкл, Уилсон, 1981). $\exists \varphi : \varphi(s) \to 0$, *при* $s \to \infty$ *причем,* $\forall s : \exists G = (V,E) : \omega(G) < s, \alpha(G) < s, |V| \geq (e^{1/4} + \varphi(s))^{\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}}$

Доказательство. Пусть p – простое. Положим $m = p^3, k = p^2$. Пусть множество вершин $V = \{(x_1, \cdots, x_m) : x_i \in \{0,1\}, x_1 + \cdots + x_m = k\}$. А множество ребер $E = \{\{x,y\} : (x,y) \equiv 0(\mod p)\}$. Отметим, что $n = |V| = \binom{p^3}{p^2}$

Лемма 3.2.

$$\alpha(G) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{m}{i}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное независимое множество $W = \{x_1, \cdots, x_t\}$ вершин нашего графа G, $\forall i,j, i \neq j : (x_i, x_j) \not\equiv 0(\mod p)$. Сопоставим каждому x_i многочлен $F_{x_i} \in \mathbb{Z}_p[y_1, \cdots, y_m]$.

Положим $F_{x_i}(y) := \prod_{j=1}^{p-1}(j - (x_i, y))$. $F'_{x_i}(y)$ – многочлен F_{x_i} со срезанными коэфициентами в каждом одночлене. Докажем, что эти многочлены линейно независимы в $\mathbb{Z}_p$.

$c_1 F'_{x_1} + \cdots + c_t F'_{x_t} = 0$. То есть $\forall y \in W : c_1 F'_{x_1} + \cdots + c_t F'_{x_t} = 0 \mod p$. Возьмем, например $y = x_1$. Тогда $c_1 F_{x_1}(x_1)' + \cdots + c_t F'_{x_t}(x_1) = F_{x_1}(x_1) + \cdots + F_{x_t}(x_1)$. Причем $F_{x_1}(x_1) \equiv 0 \mod p$, а для $k \neq 1$ $F_{x_k}(x_1) \not\equiv 0 \mod p$. Тогда $c_1 \equiv 0 \mod p$

Значит, все многочлены независимы. Но их не может быть больше $\sum_{i=0}^{p-1} \binom{m}{i}$ $\square$

Лемма 3.3.

$$\omega(G) \leq \sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество вершин $W = \{x_1, \cdots, x_t\}$ в графе G, которое образует клику. То есть $\forall i,j, i \neq j : (x_i, x_j) \equiv 0 \mod p \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in \{0, p, 2p, \cdots, p^2 - p\}$

Сопоставим каждому x_i многочлен $F_{x_i} \in \mathbb{Q}[y_1, \cdots, y_m]$ по следующему правилу $F_{x_i} = (x_i, x_j)((x_i, x_j) - p)((x_i, x_j) - 2p) \cdots ((x_i, x_j) - (p^2 - p))$. Опять же срежем степени всех одночленов, получим F'_{x_i}. Докажем их линейную независимость

$\forall y \in W : c_1 F_{x1}(y) + \cdots c_t F_{x_t} = 0$

$F_{x_1}(x_1) \neq 0$, для $i > 1 : F_{x_i}(x_1) = 0$ Значит, $c_1 = 0$. Аналогично для остальных c_i. Получили, что многочлены независимы. Значит, их не больше, чем $\sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i}$

□

Обозначим $s = \sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i} + 1$. Тогда из лемм следует, что $\alpha(G) < s, \omega(G) < s$. Докажем что n как функция от s имеет вид $(e^{1/4} + o(1))^{\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}}$.

$n = \binom{p^3}{p^2} = \frac{p^3(p^3-1)\cdots(p^3-p^2+1)}{(p^2)!}$ Понятно, что $p^3 - i = p^{3(1+o(1))}$ Тогда $n = \frac{p^{3p^2(1+o(1))}}{(p^2)!}$, $(p^2)! = p\sqrt{2\pi}\left(\frac{p^2}{e}\right)^{p^2} = p^{2p^2(1+o(1))}$, $n = p^{p^2(1+o(1))}$, $\binom{m}{p} = \frac{p^{3p(1+o(1))}}{p^{p(1+o(1)}}$, $s \leq (p+1)p^{2p(1+o(1))}+1$, $s \geq p^{2p(1+o(1))}$, короче говря $s = p^{2p(1+o(1))}$.

$\ln s = 2p(1 + o(1)) \ln p$, $\ln^2 s = 4p^2(1 + o(1)) \ln^2 p$, $\ln \ln s = \ln 2p + \ln(1 + o(1)) + \ln \ln p = (1 + o(1)) \ln p$

$\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s} = 4p^2 \ln p(1+o(1))$, $(e^{1/4}+o(1))^{4p^2 \ln p(1+o(1))} = e^{1/4 \cdot 4p^2 \ln p(1+o(1))(1+o(1))}$, $n = e^{p^2 \ln p(1+o(1))}$ Подбираем правильно $o(1)$ которое в нашей власти и все получилось. Что делать для произвольного s: находим максимальное простое $p : s > s_0 := \sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i} + 1$. Ясно, что $R(s, s) \geq R(s_0, s_0) \geq (e^{1/4} + o(1))^{\frac{\ln^2 s_0}{\ln \ln s_0}} \sim (e^{1/4} + o(1))^{\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}}$. □