Конспект по курсу

Методы оптимизаций

Contributors:
Андрей Степанов

Лектор:
Мусатов Д.В.

МФТИ

Последнее обновление: 11 марта 2015 г.

Содержание

Оценка за зачет:

1. 40% от оценки – за 2 контрольные работы (не переписываются)
2. 30% от оценки – за 2 домашние задания
3. 30% от оценки – индивидуальный проект, например:
   (a) Теоретический (реферат)
   (b) Теоретико-программистский (анализ времени работы, скорости сходимости)
   (c) Практический (нужно самому найти данные для применения)

1 Вводная лекция

1.1 Базовые определения

Определение 1.1 (общая задача оптимизации)**.** Пусть $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Нужно найти точку экстремума, т.е. минимума или максимума (локального или глобального) (строго или нестрогого).

Определение 1.2 (задача условной оптимизации)**.** Пусть $f : Y \mapsto \mathbb{R}$, $X \subset Y$. Нужно минимизировать f на X.

Замечание. Часто X задается условиями вида:

$$\begin{cases} g_1(x) \leq 0, \\ g_2(x) \leq 0, \\ \dots \\ g_k(x) \leq 0, \\ g_{k+1}(x) = 0, \\ \dots \\ g_n(x) = 0. \end{cases}$$

Замечание. Методы оптимизации можно условно разделить на аналитические и численные. Например, градиентный спуск – численный метод, метод Лагранжа – аналитический. Широкий класс численных методов – это итеративные алгоритмы. Можно условно разделить итеративные методы на точные и приближённые.

1.2 Линейное программирование

Определение 1.3. Задача линейного программирования – минимизация линейной функции на многограннике.

Более строго: пусть дана линейная функция $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, имеющая вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

. Пусть также дана система линейных уравнений и неравенств: $A_1 x \leq b_1$, $A_2 x = b_2$. Задача стоит в нахождении минимума f на множестве, на котором выполнена система уравнений.

Определение 1.4. Систему линейных уравнений и неравенств $A_1 x \leq b_1$, $A_2 x \leq b_2$ назовём системой ограничений.

Определение 1.5. Ограничения со знаком неравенства будем называть уравнениями-неравенствами.

Определение 1.6. Ограничения со знаком равенства будем называть уравнениями-равенствами.

Пример. Производственная задача: даны товары $g_1, \ldots, g_n$ и ресурсы $r_1, \ldots r_m$. Ресурсов ограниченное число. Ресурсов i-того типа: ω_i. На производство g_i необходимо $c_{i,j}$ ресурсов r_j. p_i – цена g_i. Нужно максимизировать прибыль.

Обозначим x_i – сколько товаров g_i было произведено. Тогда есть следующая задача максимизации:

$$\max \sum_{i=0}^{n} p_i x_i$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ \ldots \\ x_n \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} x_j c_{j,1} \leq \omega_1 \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j c_{j,m} \leq \omega_m \end{cases}$$

Замечание. Сначала считаем, что уравнений-равенств нет.

Определение 1.7. Грань k-той размерности – это множество точек, в которой ровно $n-k$ неравенств обратились в равенство, а остальные неравенства верны.

Утверждение 1.1. *Если минимум достигается, то он достигается на какой-то грани.*

Утверждение 1.2. *Если минимум достигается во внутренней точке грани, то он достигается на всей грани.*

Следствие. *Если минимум достигается, то есть вершина многогранника, в которой он достигается.*

Следствие. *Есть экспоненциальный алгоритм решения задачи линейного программирования – простой перебор всех вершин.*

Замечание. Есть симплекс метод.

2 Потрачено

3 Потрачено

4 Выпуклые оптимизации

Определение 4.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ – выпукло, если $\forall x, y \in M : \forall \alpha \in (0,1) : \alpha x + (1-\alpha)y \in M$

Пример.

1. Шар – выпуклое множество

2. Плоскость

3. Симплекс

Утверждение 4.1. *Если M – выпукло, а $x_1, \cdots, x_m \in M$, то $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m \in M$, если $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$*

Доказательство. Доказываем индукцией по m.

База: $m = 2$.

Переход: $m > 2$. Рассмотрим $y_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_m}x_1 + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{1-\alpha_m}x_{m-1}, y_2 = x_m$ $y_1 \in M$ по предположению индукции, $y_m \in M$. Тогда $(1-\alpha_m)y_1 + \alpha_m y_2 \in M$. ☐

Утверждение 4.2. *Пересечение выпуклых множеств – выпукло*

Доказательство. Пусть $\beta \in (0,1)$. Пусть $\{A_i : i \in I\}$ – набор выпуклых множеств. Пусть $x, y \in \cap A_i$. Тогда $\forall i \in I : x, y \in A_i$. Поскольку A_i – выпуклые, то $\forall i \in I : \beta x + (1-\beta)y \in A_i$. Значит, $\beta x + (1-\beta)y \in \cap A_i$ ☐

Определение 4.2. Выпуклая оболочка множества A – $\langle A \rangle$ – наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее A.

Замечание. Заметим, что $\langle A \rangle$ – это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество A

Утверждение 4.3. $\langle A \rangle = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m : \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, x_1, \cdots, x_m \in A\} = B$

Доказательство. Заметим, что B выпукло. Значит, $\langle A \rangle \subset B$. Но кроме того, $\langle A \rangle \supset B$. ☐

Утверждение 4.4. *Если M – выпуклое, то $\overline{M}$ – выпукло, $IntM$ – выпуклое.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \overline{M}$. Кроме того, $x, y \in \overline{M} \setminus M$. Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$. Тогда $\alpha x_n + (1-\alpha)y_n \in M$. Но тогда и $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$.

Пусть $x, y \in IntM$. $\langle U_\varepsilon(x) \cup U_\varepsilon(y) \rangle \supset$ отрезок $[x, y]$. Тогда любая точка отрезка – внутренняя. ☐

Теорема 4.5 (Теорема об отделимости)**.** *Для замкнутого выпуклого M и точки $x \notin M$ $\exists z : \forall y \in M : (y, z) > (x, z)$*

Доказательство. Пусть $y_0 \in M, |y_0 - x| = \min_{y \in M} |y - x|$. То есть точка y_0 – ближайшая из M к точке x. Тогда $\forall y \in M : |y_0 - x| \leq |y - x|$. Возьмем $t = \alpha y + (1-\alpha)y_0$. Тогда $|y_0 - x|^2 \leq |\alpha y + (1-\alpha)y_0 - x|^2 = (\alpha y + (1-\alpha)y_0 - x, \alpha y + (1-\alpha)y_0 - x) = \alpha^2|y - y_0|^2 + |y_0 - x|^2 + 2\alpha(y - y_0, y_0 - x)$ Тогда $\alpha^2|y - y_0|^2 + 2\alpha(y - y_0, y_0 - x) \geq 0$. Положим $z = y_0 - x$. Сократим на α $\alpha|y - y_0 + 2(y - y_0, y_0 - x) \geq 0$ и положим $\alpha = 0$. Так как множество замкнуто, то так сделать можно. $(y - y_0, y_0 - x) \geq 0$. $(y - y_0, z) \geq 0$. Получили, что $(y, z) \geq (y_0, z)$. Докажем, что $(y_0, z) > (x, z)$. $(y_0, z) - (x, z) = (y_0 - x, z) = (z, z) > 0$. Теорема доказана. □

Теорема 4.6. *Если M_1, M_2 – два замкнутых выпуклых не пересекающихся множества. Тогда их можно отделить друг от друга гиперплоскостью. То есть $\exists z : \forall y_1 \in M_1, y_2 \in M_2 : (y_1, z) < (y_2, z)$*

Доказательство. Пусть y_1^* – ближайшая к M_2 точка из M_1, y_2^* – ближайшая к M_1 точка из M_2. Найдется $z : (y_1^*, z) < (y_2, z)$

Рассмотрим $M_1 - M_2$ – разность Минковского. $0 \notin M_1 - M_2$. Тогда $\exists z : (0, z) \leq (y_1 - y_2, z)$. Тогда $(y_1, z) < (y_2, z)$ □