

КОНСПЕКТ ПО КУРСУ

Дискретный анализ

Contributors:

Андрей Степанов
Анастасия Торунова

Лектор:

Райгородский А.М.

МФТИ

Последнее обновление: 11 марта 2015 г.

Содержание

1	Числа Рамсея	2
2	Ещё более жаркая	5
3	Конструктивные нижние оценки чисел Рамсея	6

1 Числа Рамсея

Определение 1.1. Число Рамсея $R(s, t)$ для натуральных s и t – это минимальное натуральное число n , такое, что при любой реберной раскраске полного графа на n вершинах в два цвета, либо найдется полный подграф на s вершинах первого цвета, либо полный подграф на t вершинах второго цвета.

Определение 1.2 (Числа Рамсея, альтернативное определение). $R(s, t)$ – минимальное такое n , что для любого графа на n вершинах в нем есть либо K_s клика, либо \bar{K}_t антиклика

Пример.

1. $R(3, 3) = 6$
2. $R(1, t) = 1$
3. $R(2, t) = t$

Утверждение 1.1.

$$\left(\frac{1}{4} + o(1)\right) \frac{t^2}{\ln t} \leq R(3, t) \leq (1 + o(1)) \frac{t^2}{\ln t}$$

Замечание. $1/4$ была получена в 2013 году, а $1/162$ – Кимом. Числа Рамсея были придуманы Рамсеем в 1930 году. В 1935 году Эрдеш и Секереш переоткрыли их в своей работе.

Утверждение 1.2.

$$R(3, t) \geq c \frac{t^2}{\ln^2 t}$$

Теорема 1.3. $R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1)$

Доказательство. Обозначим $r_1 = R(s-1, t)$, $r_2 = R(s, t-1)$, $n = r_1 + r_2$. Положим также $\deg_+ v = \deg v$, $\deg_- v = n - 1 - \deg_+ v$.

Рассмотрим граф G на n вершинах и произвольную вершину v этого графа. Ясно, что либо $\deg_+ v \geq r_1$, либо $\deg_- v \geq r_2$. В первом случае вершина v смежна с подграфом на r_1 вершинах, в котором есть либо \bar{K}_t (в этом случае все хорошо), либо K_{s-1} . Но тогда этот K_{s-1} вместе с вершиной v дает K_s и тоже все хорошо. Второй случай рассматривается аналогично. \square

Следствие.

$$R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

Доказательство. Индукция по $s+t$: применяем рекурсивную формулу из прошлой теоремы, а также рекурсивную формулу для треугольника Паскаля. \square

Определение 1.3. Диагональные числа Рамсея – это числа $R(s, s)$.

Следствие (из следствия).

$$R(s, s) \leq \binom{s-1}{s+s-2} \approx \frac{4^s}{\sqrt{\pi s}}$$

Замечание. “Прошло восемьдесят лет (надо отметить, а у меня только минералка с собой), а гора, в каком то смысле, родила лишь мышь”. Все что людям удалось сделать – это

$$\exists \gamma > 0 : R(s, s) \leq 4^s \cdot e^{-\gamma \cdot \frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}}$$

Это сделал Конлон. Эрдеш очень любил придумывать задачи. Мало того, что он их придумывал, он ещё и цены задавал. “За решение этой задачи а бы дал 300 долларов, за эту – 500, в вот за эту – 3000, это же целая проблема”. Правда сам он ничего давать не мог, у него денег не было. Но у него были последователи, у которых они были. Например, у него был Р. Грэхем. Он лет пятьдесят назад уподобился Эрдешу и сказал: я бы дал 100 долларов тому, кто заменит вот эту четверку на что-то меньшее. Но 100 долларов с тех пор так никто и не получил.

Теорема 1.4. Пусть дано s – натуральное. Найдём такое n , что

$$\binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$$

Тогда $R(s, s) > n$

Доказательство. Докажем эту задачу вероятностным методом. То, что нужно доказать, равносильно тому, что \exists раскраска ребер полного графа на n вершинах при которой нет одноцветной клики на s вершинах.

Рассмотрим вероятностное пространство $G(n, \frac{1}{2})$. Введем случайную величину ξ – количество одноцветных s -клик. Пусть ξ_S – другая индикаторная случайная величина, которая равна 1, если подграф S одноцветен. Тогда

$$P(\xi_S = 1) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{s}{2}} = 2^{1-\binom{s}{2}}$$

Но вследствие линейности математического ожидания:

$$\xi = \sum_{S, |S|=s} \xi_S$$

А значит,

$$E\xi = \sum_{S, |S|=s} E\xi_S = \binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$$

А значит существует такая раскраска, что $\xi = 0$

□

Следствие.

$$R(s, s) \geq (1 + o(1)) \frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{s/2}$$

Доказательство. Положим $n = (1 + f(s)) \frac{s}{e\sqrt{2}} 2^{s/2}$, где $f(s) = o(1)$

$$\begin{aligned} C_n^s \cdot 2^{1-C_s^2} &\leq \frac{n^s}{s!} \cdot 2^{1-\frac{s(s-1)}{2}} = (1 + f(s))^s \frac{s^s}{e^s 2^{s/2} s!} \cdot 2^{s^2/2} \cdot 2^{1-s^2/2+s/2} \\ &= \frac{(1 + o(1))^s \cdot 2}{(1 + o(1))\sqrt{2\pi s}} < 1 \end{aligned}$$

при правильном выборе $f(s)$

□

Теорема 1.5 (Эрдеша).

$$R(s, s) \geq (1 + o(1)) \frac{s}{e} \cdot 2^{s/2}$$

Теорема 1.6 (Спенсера).

$$R(s, s) \geq (1 + o(1)) \cdot \frac{s\sqrt{2}}{e} 2^{s/2}$$

Определение 1.4. Событие B не зависит от совокупности событий A_1, \dots, A_n , если

$$\forall J \subset \{1, \dots, n\} : P(A | \cap_{j \in J} A_j) = P(B)$$

Лемма 1.7 (симметричная локальная лемма Ловаса). Пусть A_1, \dots, A_n – события. Пусть дополнительно $\exists p : \forall i : P(A_i) \leq p$. Дополнительно предположим, что $\forall i : A_i$ не зависит от совокупности всех остальных событий, кроме не более чем d штук. Пусть также $ep(d+1) \leq 1$. Тогда $P(\cap_{i=1}^n A_i^c) > 0$

Доказательство теоремы Спенсера. Нам нужно доказать, что

$$P(\cap_{S, |S|=s} A_S) > 0$$

. $P(A_s) = 2^{1-C_s^2} = p$. Чему же равно d ? A_S зависит от тех A_T , у которых $|S \cap T| \geq 2$. Тогда $d \leq C_s^2 \cdot C_{n-2}^{s-2}$. Осталось доказать, что $ep(d+1) < 1$.

$$\begin{aligned} ep(d+1) &= e \cdot 2^{1-C_s^2} \cdot (C_s^2 C_{n-2}^{s-2} - 1) = e(1 + o(1)) 2^{1-C_s^2} C_s^2 C_{n-2}^{s-2} \\ &\leq e(1 + o(1)) 2^{1-s^2/2+s/2} \cdot \frac{s^2}{2} \cdot \frac{n^{s-2}}{(s-2)!} = e(1 + o(1)) 2^{1-s^2/2+s/2} \cdot \frac{s^4}{2} \cdot \frac{(1 + o(1))^{s-2} 2^{s/2-1}}{e^{s-2}(s)!} s^{s-2} \cdot 2^{s^2/2-s} \\ &\quad \frac{(1 + o(1)) e s^{s+2} (1 + o(1))^{s-2}}{e^{s-2} 2 (1 + o(1)) \sqrt{2\pi s} \left(\frac{s}{e}\right)^s} \end{aligned}$$

Если взять $o(1) = -\frac{1}{\sqrt{s}}$, то все получится.

□

2 Ещё более жаркая

Определение 2.1. Пусть A_1, \dots, A_n – события на некотором вероятностном пространстве. Ориентированный граф $G = (\{A_1, \dots, A_n\}, E)$ является орграфом этих зависимостей, если $\forall i \in \{1, \dots, n\} : A_i$ не зависит от совокупности тех событий A_j для которых $(A_i, A_j) \notin E$

Пример. Полный граф является орграфом зависимостей. Но это не интересный пример. Возьмем события A_1, A_2, A_3 которые независимы попарно, но зависимы в совокупности. Тогда из любой вершины этого графа должно выходить хотя бы одно ребро, в противном случае этот граф не будет являться орграфом зависимостей. Тогда понятно, что в минимальном орграфе зависимостей для этого набора должно быть хотя бы 3 ребра.

Замечание. Если A_i, A_j зависимы, то в графе зависимостей обязаны быть ребра $(A_i, A_j), (A_j, A_i)$

Теорема 2.1 (Локальная лемма Ловаса). Пусть A_1, \dots, A_n – события на каком-то вероятностном пространстве. $G = (V, E)$ – такой орграф зависимостей, что

$$\exists x_1, \dots, x_n \in [0, 1) : \forall i : P(A_i) \leq x_i \quad \prod_{j: (A_i, A_j) \in E} (1 - x_j)$$

Тогда

$$P(\cap_{i=1}^n \bar{A}_i) \geq \prod_{j=1}^n (1 - x_j) > 0$$

Следствие (симметричная локальная лемма Ловаса). Пусть A_1, \dots, A_n – события. Пусть дополнительно $\exists p : \forall i : P(A_i) \leq p$. Дополнительно предположим, что $\forall i : A_i$ не зависит от совокупности всех остальных событий, кроме не более чем d штук. Пусть также $ep(d+1) \leq 1$. Тогда $P(\cap_{i=1}^n \bar{A}_i) > 0$

доказательство следствия. Рассмотрим $G = (V, E)$, у которого A_i соединяется ровно с теми “паразитами” которые мешают независимости.

Рассмотрим сначала дурацкий случай: $d = 0$. В этом случае они независимы в совокупности. Тогда $P(\cap_{i=1}^n \bar{A}_i) = \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)) \geq (1 - p)^n \geq (1 - \frac{1}{e})^n > 0$.

Пусть теперь $d > 0$. Рассмотрим $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{d+1}$. Мы знаем, что $P(A_i) \leq p \leq \frac{1}{(d+1)e}$. Хотелось доказать, что $P(A_i) \leq \frac{1}{d+1} \prod_{k: (A_i, A_k) \in E} (1 - \frac{1}{d+1})$. Понятно, что $(1 - \frac{1}{d+1})^d \geq \frac{1}{e}$. Но тогда симметричный случай доказан. \square

доказательство леммы Ловаса.

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^n \bar{A}_i) &= P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n | \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1}) \\ &= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2 | \bar{A}_1)) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_n | \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1})) \end{aligned}$$

Лемма: $\forall i : \forall J \subset \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\} : P(A_i | \cap_{j \in J} \bar{A}_j) \leq x_i$

База: $|J| = 0, P(A_i | \cap_{j \in \emptyset} \bar{A}_j) = P(A_i) \leq x_i$

Переход: рассмотрим произвольное множество $J : |J| = k + 1$. Представим $J = J_1 \cup J_2$. Положим $J_1 = \{j \in J : (A_i, A_j) \in E\}, J_2 = J \setminus J_1$.

Рассмотрим случай, когда $J_1 = \emptyset$. Тогда $P(A_i | \cap_{j \in J} \bar{A}_j) = P(A_i | \cap_{j \in J_2} \bar{A}_j) = P(A_i) \leq x_i$

Рассмотрим второй случай: $J_1 = \{j_1, \dots, j_r\}, r \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} P(A_i | \cap_{j \in J} \bar{A}_j) &= P(A_i | \cap_{j \in J_1} \bar{A}_j \cap \cap_{j \in J_2} \bar{A}_j) = \frac{P(A_i \cap \cap_{j \in J_1} \bar{A}_j | \cap_{j \in J_2} \bar{A}_j)}{P(\cap_{j \in J_1} \bar{A}_j | \cap_{j \in J_2} \bar{A}_j)} \\ &\leq \frac{P(A_i | \cap_{j \in J_2} \bar{A}_j)}{P(\cap_{j \in J_1} \bar{A}_j | \cap_{j \in J_2} \bar{A}_j)} = \frac{P(A_i)}{P(\cap_{j \in J_1} \bar{A}_j | \cap_{j \in J_2} \bar{A}_j)} = \frac{P(A_i)}{P(A_{j_1} | \cap \dots) \cdot P(A_{j_2} | \cap \dots) \dots} = \\ &\quad \text{asasd} \end{aligned}$$

□

Полезность несимметричного случая: $R(3, t) > n$. Берем случайную раскраску.

3 Конструктивные нижние оценки чисел Рамсея

Что значит снизу оценить число Рамсея?

Оценка $R(s, s) > n \Leftrightarrow$ существует граф $G = (V, E), |V| = n$, в котором нет K_s и \bar{K}_s , то есть $\omega(G) < s, \alpha(G) < s$.

Теорема 3.1 (Франкл, Уилсон, 1981). $\exists \varphi : \varphi(s) \rightarrow 0$, при $s \rightarrow \infty$ причем, $\forall s : \exists G = (V, E) : \omega(G) < s, \alpha(G) < s, |V| \geq (e^{1/4} + \varphi(s))^{\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}}$

Доказательство. Пусть p – простое. Положим $m = p^3, k = p^2$. Пусть множество вершин $V = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_m = k\}$. А множество ребер $E = \{(x, y) : (x, y) \equiv 0 \pmod{p}\}$. Отметим, что $n = |V| = \binom{p^3}{p^2}$

Лемма 3.2.

$$\alpha(G) \leq \sum_{i=0}^{p-1} \binom{m}{i}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное независимое множество $W = \{x_1, \dots, x_t\}$ вершин нашего графа $G, \forall i, j, i \neq j : (x_i, x_j) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Сопоставим каждому x_i многочлен $F_{x_i} \in \mathbb{Z}_p[y_1, \dots, y_m]$.

Положим $F_{x_i}(y) := \prod_{j=1}^{p-1} (j - (x_i, y))$. $F'_{x_i}(y)$ – многочлен F_{x_i} со срезанными коэффициентами в каждом одночлене. Докажем, что эти многочлены линейно независимы в \mathbb{Z}_p .

$c_1 F'_{x_1} + \dots + c_t F'_{x_t} = 0$. То есть $\forall y \in W : c_1 F'_{x_1}(y) + \dots + c_t F'_{x_t}(y) = 0 \pmod{p}$. Возьмем, например $y = x_1$. Тогда $c_1 F'_{x_1}(x_1) + \dots + c_t F'_{x_t}(x_1) = F_{x_1}(x_1) +$

$\dots + F_{x_t}(x_1)$. Причем $F_{x_1}(x_1) \equiv 0 \pmod{p}$, а для $k \neq 1$ $F_{x_k}(x_1) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда $c_1 \equiv 0 \pmod{p}$

Значит, все многочлены независимы. Но их не может быть больше $\sum_{i=0}^{p-1} \binom{m}{i}$ \square

Лемма 3.3.

$$\omega(G) \leq \sum_{i=0}^p \binom{m}{i}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество вершин $W = \{x_1, \dots, x_t\}$ в графе G , которое образует клику. То есть $\forall i, j, i \neq j : (x_i, x_j) \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in \{0, p, 2p, \dots, p^2 - p\}$

Сопоставим каждому x_i многочлен $F_{x_i} \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$ по следующему правилу $F_{x_i} = (x_i, x_j)((x_i, x_j) - p)((x_i, x_j) - 2p) \dots ((x_i, x_j) - (p^2 - p))$. Опять же срежем степени всех одночленов, получим F'_{x_i} . Докажем их линейную независимость

$$\forall y \in W : c_1 F_{x_1}(y) + \dots + c_t F_{x_t}(y) = 0$$

$F_{x_1}(x_1) \neq 0$, для $i > 1 : F_{x_i}(x_1) = 0$ Значит, $c_1 = 0$. Аналогично для остальных c_i . Получили, что многочлены независимы. Значит, их не больше, чем $\sum_{i=0}^p \binom{m}{i}$ \square

Обозначим $s = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} + 1$. Тогда из лемм следует, что $\alpha(G) < s, \omega(G) < s$. Докажем что n как функция от s имеет вид $(e^{1/4} + o(1))^{\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}}$.

$$n = \binom{p^3}{p^2} = \frac{p^3(p^3-1)\dots(p^3-p^2+1)}{(p^2)!} \text{ Понятно, что } p^3 - i = p^{3(1+o(1))} \text{ Тогда}$$

$$n = \frac{p^{3p^2(1+o(1))}}{(p^2)!}, (p^2)! = p\sqrt{2\pi} \left(\frac{p^2}{e}\right)^{p^2} = p^{2p^2(1+o(1))}, n = p^{p^2(1+o(1))}, \binom{m}{p} = \frac{p^{3p(1+o(1))}}{p^{p(1+o(1))}}, s \leq (p+1)p^{2p(1+o(1))} + 1, s \geq p^{2p(1+o(1))}, \text{ короче говоря } s = p^{2p(1+o(1))}.$$

$$\ln s = 2p(1+o(1)) \ln p, \ln^2 s = 4p^2(1+o(1)) \ln^2 p, \ln \ln s = \ln 2p + \ln(1+o(1)) + \ln \ln p = (1+o(1)) \ln p$$

$$\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s} = 4p^2 \ln p(1+o(1)), (e^{1/4+o(1)})^{4p^2 \ln p(1+o(1))} = e^{1/4 \cdot 4p^2 \ln p(1+o(1))(1+o(1))},$$

$$n = e^{p^2 \ln p(1+o(1))} \text{ Подбираем правильно } o(1) \text{ которое в нашей власти и все}$$

получилось. Что делать для произвольного s : находим максимальное простое $p : s > s_0 := \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} + 1$. Ясно, что $R(s, s) \geq R(s_0, s_0) \geq (e^{1/4} + o(1))^{\frac{\ln^2 s_0}{\ln \ln s_0}} \sim (e^{1/4} + o(1))^{\frac{\ln^2 s}{\ln \ln s}}$. \square