

КОНСПЕКТ ПО КУРСУ

Алгоритмы и структуры данных

Contributors:
Андрей Степанов

Лектор:
Мацкевич С.

МФТИ

Последнее обновление: 25 февраля 2015 г.

Содержание

1	Выпуклая оболочка
---	-------------------

2

1 Выпуклая оболочка

Алгоритм 1.1. Алгоритм выпуклой оболочки в $3D$ за $O(N^4)$ – полный перебор. Грани можно хранить как тройки чисел (p_1, p_2, p_3) , считаем, что пусть они отсортированы так, что вектор $[p_2 - p_1, p_3 - p_2]$ сонаправлен с нормалью. Перебираем все тройки точек (грани) за $O(N^3)$, и смотрим, что $[p_2 - p_1, p_3 - p_2]$ смотрит в противоположную сторону, от всех остальных точек $O(N)$. Суммарная асимптотика – $O(N^4)$. Алгоритм обобщается на произвольную размерность, работает за $O(k^3 \cdot N^{k+1})$. Чтобы осуществить проверку, лежит ли точка снизу или сверху, считаем определитель матрицы, соответствующий гиперплоскости грани.

Алгоритм 1.2 (Заворачивание подарка). Алгоритм заворачивания подарка за $O(N^2)$.

1. Первым делом найдём самую нижнюю точку, пусть это p_0 .
2. Найдём теперь точку p_1 . Это такая точка, что у неё угол с осью Oz , проходящей через p_0 , максимальный. Этот p_0p_1 будет в выпуклой оболочке
3. Найдём первую грань – перебираем все точки p , и находим такую, что грань, образованная p_0p_1p максимально раскрыта. Можно найти за $O(N^2)$ как в предыдущем алгоритме.
4. Далее делаем то же самое, что и в п.3, но теперь угол между двумя соседними гранями мы знаем (это просто скалярное произведение нормалей) и искать максимально раскрытую грань можно за $O(N)$. Только нужно хранить множество ещё не просмотренных ребер ещё не построенной выпуклой оболочки и помнить, что добавление новой грани может закрывать больше 1 ребра.

Утверждение 1.1. p_0p_1 есть в выпуклой оболочке

Утверждение 1.2. Граней и ребер в выпуклой оболочке – $O(N)$

Доказательство. Это следует из планарности графа выпуклой оболочки на сфере и формулы Эйлера для сферы: $V + F = E + 2$ \square

Алгоритм 1.3 (Разделяй и властвуй). Разбиваем точки по 7 в лексикографическом порядке. Строим для них выпуклые оболочки любым способом. Они не будут пересекаться для разных “блинов”. Теперь надо научиться объединять блины. Спроецируем эти блины на ось xOy . Найдём там самое правое ребро p_0q_0 , которое есть в выпуклой оболочке проекций. От этого ребра и будем начинать строить трехмерную выпуклую оболочку объединения блинов. Делаем также, как и в прошлом алгоритме, а именно:

Переберем все смежные вершины с q_0 и p_0 и лежащие в выпуклой оболочке левого или правого блина соответственно. Строим для них грани и выбираем наилучшую. Теперь у в выпуклой оболочке блинов появилась либо

новая точка q_1 , либо p_1 . Повторяем эти действия далее. Осталось выкинуть точки, которые лежат слева от пути $p_0p_1 \dots p_k$, и справа от пути $q_0q_1 \dots q_l$. Это можно сделать dfs-ом.