Конспект по курсу

Гармонический анализ

Contributors:
Андрей Степанов

Лектор:
Трушин Б.В.

МФТИ

Последнее обновление: 11 марта 2015 г.

Содержание

1 Абсолютно интегрируемые функции

Определение 1.1. Функция $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если $\exists\{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b : \forall i \in \{1,\ldots,n\} : f$ – постоянная на (c_{i-1}, c_i).

Теорема 1.1. *Пусть* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *интегрируема по Риману. Тогда* $\forall\varepsilon > 0 : \exists h(x)$ *– ступенчатая* $: \int_a^b |f(x) - h(x)|dx < \varepsilon$

Доказательство. Пусть $\tau = \{c_i\}_{i=0}^n$ – некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, т.е. $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$. Пусть $\xi_i \in (c_{i-1}, c_i)$. Запишем сумму Римана для данного разбиения:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(c_i - c_{i-1})$$

. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$h(x) = \begin{cases} f(\xi_i), \text{ if } x \in (c_{i-1}, c_i), \\ 0, \text{ elsewhere.} \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл:

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} |f(x) - f(\xi_i)|dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f)(c_i - c_{i-1})$$

, где $\omega_i(f)$ – это колебание функции f на отрезке $[c_{i-1}, c_i]$. По критерию интегрируемости последняя сумма меньше ε для любого такого ε для всех достаточно мелких разбиений. □

Определение 1.2. Пусть функция $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Такая функция называется абсолютно интегрируемой, если:

1. $\exists\{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$: f интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a,b) \setminus \{c_i\}$
2. $|f|$ интегрируема в несобственном смысле на (a,b)

Определение 1.3. Функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ называется финитной, если она равна нулю вне некоторого отрезка, т.е. $\exists[a,b] : \forall x \notin [a,b] : f(x) = 0$.

Определение 1.4. Функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ называется финитно-ступенчатой, если она финитная и ступенчатая.

Теорема 1.2. *Пусть функция* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *– абсолютно интегрируема. Тогда* $\forall\varepsilon > 0 : \exists h(x)$ *– финитно-ступенчатая* $: \int_a^b |f(x) - h(x)|dx < \varepsilon$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Можно считать, что $a = -\infty$, $b = +\infty$, иначе доопределим f на $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ нулем. Поскольку f – абсолютно интегрируема, то:

1. $\exists \{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$: f интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b) \setminus \{c_i\}$
2. $|f|$ интегрируема в несобственном смысле на (a, b)

$\exists \{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n, -\infty < a_1 < b_1 < c_1 < a_2 < b_2 < c_2 < \ldots < a_n < b_n < +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{a_1} |f(x)|dx + \int_{b_1}^{a_2} |f(x)|dx + \ldots + \int_{b_n}^{+\infty} |f(x)|dx < \varepsilon$$

, т.к. $|f|$ интегрируем на $\mathbb{R}$ в несобственном смысле. Пусть

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), x \in \cup[a_i, b_i], \\ 0, elsewhere. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$$

. По предыдущей теореме существует $h_\varepsilon(x) : [a_1, b_n] \mapsto \mathbb{R}$ – ступенчатая функция: $\int_{a_1}^{b_n} |h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$. Доопределим $h_\varepsilon(x)$ нулем вне отрезка $[a_1, b_n]$. Тогда h – финитно-ступенчатая. Кроме того:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_\varepsilon(x) - f(x)|dx < \int_{-\infty}^{+\infty} (|h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)| + |f_\varepsilon(x) - f(x)|)dx < 2\varepsilon$$

$\square$

Теорема 1.3. *Пусть $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ абсолютно интегрируема. Доопределим её на $\mathbb{R}$ нулем. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha) - f(x)|dx \to 0, \text{ при } \alpha \to 0$$

Доказательство. Этот интеграл существует, т.к. его можно оценить как $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha)|dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ (см. предыдущее доказательство).

Докажем эту теорему для произвольной финитно-ступенчатой функции $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Поскольку $\alpha \to 0$, мы можем рассматривать лишь такие α, что

$$|\alpha| < \frac{\min_i(c_i - c_{i-1})}{2}$$

. Пусть $M = \sup |h|$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x+\alpha) - h(x)|dx < 2M(n+1)|\alpha|$$

. Пусть $h(x)$ – финитно-ступенчатая: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - h(x)|dx < \varepsilon$. Тогда: $\int |f(x+\alpha) - f(x)|dx \leq \int |f(x+\alpha) - h(x+\alpha)|dx + \int |h(x+\alpha) - h(x)|dx + \int |h(x) - f(x)|dx \leq 3\varepsilon$. □

Лемма 1.4 (Римана об осцилляции)**.** *Пусть* $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ *– абсолютно интегрируемая функция. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int f(x)\sin(\lambda x)dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int f(x)\cos(\lambda x)dx = 0$$

Доказательство. Доопределим f нулем на $\mathbb{R}$. Рассмотрим:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\lambda x)dx$$

Этот интеграл существует, так как f абсолютно интегрируема. Сделаем замену $x = t + \frac{\pi}{\lambda}$. Тогда:

$$I(\lambda) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda t)dt$$

. Сложив и поделив пополам, получаем, что:

$$I(\lambda) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda x)dx$$

Применяя теорему, которую мы недавно доказали, получаем, что

$$I(\lambda) \to 0$$

. □

2 Абсолютно интегрируемые функции

Определение 2.1. Функциональный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) \tag{1}$$

называется тригонометрическим рядом. a_k, b_k – коэффициенты ряда. Система $\{\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots\}$ называется тригонометрической системой

Утверждение 2.1. *Тригонометрическая система является ортогональной со скалярным произведением* $[f, g] = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

Доказательство. Доказательство: интегрируем по частям 2 раза. □

Определение 2.2. Пусть функция f является 2π периодической и абсолютно интегрируемой на $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд 1 называется тригонометрическим рядом Фурье, где

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

. Обозначаем $ftilda1$.

Утверждение 2.2. *Пусть*

$$T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$. *Тогда ряд Фурье для* $T(x)$ *– это сам* $T(x)$.

Доказательство. Обозначим за $T_n(x)$ сумму первых n членов ряда. Фиксируем $\alpha > 0$. Так как ряд $T(x)$ сходится равномерно, то $\exists n > k : |T(x) - T_n(x)| < \varepsilon$.

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} (T_n(x) + (T(x) - T_n(x))) \cos kx dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) \cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} (T(x) - T_n(x)) \cos kx dx$$

Тогда

$$\pi |a_k - \alpha_k| = |\int_{-\pi}^{\pi} (T(x) - T_n(x)) \cos kx dx| \leq 2\pi^2 \varepsilon$$

□

Следствие. *Если* f *– абсоллютно интегрируемая и* 2π *периодическая, то* $a_k \to 0, b_k \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Определение 2.3.

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Определение 2.4. $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx$ – ядро Дирихле.

Замечание. Умножим и поделим ядро Дирихле на $\sin x/2$. Получаем:

$$\sin\frac{x}{2}D_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x+\sin(k-\frac{1}{2})x}{2} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2}$$

Можно считать, что

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Замечание.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)dx = 1$$

.

Замечание. Подставим в формулу для $S_n(f)(x)$ коэфициенты a_k и b_k. После использования формулы косинуса разности, получаем:

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x-t)f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)D_n(x)(f(x+t)+f(x-t))dt$$

.

Теорема 2.3. *Пусть f – 2π периодическая, абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция. Тогда частичные суммы $S_n(f)(x)$ сходятся в точке x_0 тогда и только тогда, когда сходится интеграл*

$$\int_0^{\delta}D_n(x)(f(x+t)+f(x-t))dx$$

. Причем если они сходятся, то к одному и тому же числу.

Следствие (принцип локализации)**.** *Сходимость ряда Фурье в точке и величина предела зависят только от значений функции в сколь угодно малой окрестности этой точки.*

Определение 2.5. Пусть x_0 – точка разрыва первого рода. Определим

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0-0)}{x-x_0}$$

Определение 2.6. Точка x_0 называется почти регулярной точкой функции f, если $\exists f(x_0+0), f(x_0-0), f'_+(x_0), f'_-(x_0)$

Определение 2.7. Точка x_0 называется регулярной, если она является почти регулярной, и дополнительно

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Теорема 2.4. *Пусть f – абсолютно иниегрируемая на $[-\pi,\pi]$, 2π периодическая функция. x_0 её почти регулярная точка. Тогда $S_n(f)(x) \to \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$*

3 Сходимость ряда Фурье.

Теорема 3.1. *Если* f *– 2π периодическая и абсолютно интегрируемая на* $[-\pi, \pi]$. *Пусть* x_0 *– почти регулярная точка. Тогда*

$$S_n(x_0) \to \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0}{2}$$

Доказательство. $S_n(x) = \int_0^\pi D_n(t)(f(x-t)+f(x+t))dt$, где $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$. Пусть $\delta \in (0, \pi)$. Посчитаем разность

$$S_n(t) - \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)(f(x_0 - t) + f(x_0 + t))dt -$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)(f(x_0-0)-f(x_0+0)) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0-t)-f(x_0-0)+f(x_0+t)+f(x_0+0))$$

$$\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right)\frac{f(x_0 - t) + f(x_0 - 0)}{t} +$$

$$\frac{f(x_0 + t) + f(x_0 + 0)}{t}\frac{t}{2\sin(t/2)}\sin(n + 1/2)tdt$$

Пусть $\varepsilon > 0$. $\exists \delta' \in (0, \delta) : |\frac{f(x_0-t)+f(x_0-0)}{t}| \leq |f'_-(x_0)| + \varepsilon$. Аналогично для второй дроби. Поэтому первый интеграл не превосходит $\frac{1}{\pi}\delta(|f'_-|+|f'_+|+2\varepsilon)$. На интервале (δ, π) подынтегральная функция абсолютно интегрируема, поэтому по лемме Римана об осцилляции второй интеграл стремится к 0. $\square$

Замечание (Условие Гёльдера). Можно потребовать, чтобы для некоторого $\alpha > 1$ было выполнено $|f(x_0+t) - f(x_0+0)| \leq C \cdot t^\alpha$, $|f(x_0-t) + f(x_0-0)| \leq C \cdot t^\alpha$. Это является более слабым условием по сравнению с существованием односторонних производных, однако, при этом условии теорема доказывается так же.

Определение 3.1. Функция f называется кусочно-гладкой на $[a, b]$, если она непрерывна на $[a, b]$ и $\exists\ a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$: для любого отрезка $[c_{k-1}, c_k]$ функция f непрерывно дифференцируема на нём

Определение 3.2. 2π периодическая функция называется кусочно-гладкой, если она непрерывна на $\mathbb{R}$ и кусочно-гладкая на $[-\pi, \pi]$

Теорема 3.2. *Пусть* f *кусочно-гладкая* 2π *периодическая функция. Тогда:*

1. $S_n(f) \to f$ *равномерно*
2. $\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(f, x) - f(x)| \leq C \cdot \frac{\ln n}{n}$

Доказательство.

$$S_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right) D_n(t)(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))dx =$$
$$\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right)\sin((n+1/2)t)g_x(t)dt$$

Оценим с помощью теоремы Лагранжа следующую разность: $|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| \le |f(x+t)-f(x)| + |f(x-t)-f(x)| \le 2|t|M_1 \le 2\pi M_1$. Кроме того, оценим $|\frac{d}{dt}g_x(t)| \le \cdots$

Причем, $|\int_0^\delta|$ TO BE CONTINUED... □

Определение 3.3. Функция

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется тригонометррическим многочленом порядка n

Теорема 3.3. *Пусть f – непрерывная 2π периодическая функцияю. Тогда* $\forall \varepsilon > 0 : \exists T(x) : \sup_{x\in\mathbb{R}} |T(x) - f(x)| < \varepsilon$

Доказательство. □

Теорема 3.4 (о приближении непрерывной функции тригонометрическим многочленом)**.** *Если f – неперрывная 2π-периодическая, то функцию с любой точностью можно приблизить тригонометрическим многочленом.*

Доказательство. Функция f непрерывная на $[-\pi,\pi]$, а следовательно равномерно непрерывна на $[-\pi,\pi]$, т.е. $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x_1, x_2, \|x_1 - x_2\| < \delta : \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$. Зафиксируем ε. Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ – некоторое разбиение отрезка $[-\pi,\pi]$ с мелкостью $|\tau| < \delta$. Рассмотрим функцию f_τ – непрерывная, такая что $f_\tau(x_i) = f(x_i)$, а на интервалах (x_{i-1}, x_i) она линейна. Тогда f_τ – кусочно-гладкая. Следовательно ряд Фурье сходится к ней равномерно, следовательно $\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 : \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \|S_{n_0}(f_\tau, x) - f_\tau(x)\| < \varepsilon$. Кроме того $\sup_{x\in[-\pi,\pi]} \|f(x) - f_\tau(x)\| < \varepsilon$. Получаем, что для нашего ε существует n_0: $\sup_{x\in[-\pi,\pi]} \|S_{n_0}(x) - f(x)\| < 2\varepsilon$

□

Теорема 3.5 (Вейрштрасса)**.** *Пусть f непрервна на $[a,b]$. Тогда* $\forall\varepsilon > 0 : \exists$ *многочлен* $P(x) : \sup_{x\in[a,b]} \|f(x) - P(x)\| < \varepsilon$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(t) = f(a + (b-a)\cdot\frac{t}{\pi})$, где $t \in [0,\pi]$. Рассмотрим функцию g^* такую что $g^*(t) = g(-t)$, если $t \in [-pi, 0]$ и $g^*(t) = g(t)$, если $t \in [0,\pi]$. Кроме того, продолжим g^* на всю числовую прямую периодическим образом.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. По предыдущей теореме существует тригонометрический многочлен $T(x) : \sup_x \|T(x) - f(x)\| < \varepsilon$. Функция $T(x)$ как линейная комбинация синусов и косинусов раскладывается в ряд Тейлора с бесконечным радиусом сходимости. Следовательно, частичные суммы ряда Тейлора равномерно на $[-\pi, \pi]$ сходятся к $T(x)$. Значит, $\exists P(x) : \sup |P(x) - T(x)| < \varepsilon$. Следовательно, $\sup_x \|g^*(x) - P(x)\| < 2\varepsilon$. Тогда $\sup_x \|f(x) - P(\frac{x-a}{b-a} \cdot \pi)\| < 2\varepsilon$ $\square$

Теорема 3.6. *Пусть f – 2π-периодическая кусочно-гладкая функция. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Тогда $f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} kb_k \cos kx + ka_k \sin kx$*

Доказательство. Поскольку f' – кусочно-непрерывная, то ей можно сопоставить ряд. Пусть этот ряд – это $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$. Тогда $\alpha_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi} f(x)\big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi}(f(x) \cos kx \mid_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx) = \frac{1}{\pi} k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = kb_k$$

Аналогично для β_k. $\square$

Определение 3.4. Пусть f – 2π-периодическая функция, причем $f^{(m-1)}$ – непрерывна, а $f^{(m)}$ – кусочно непрервына. Тогда $|a_k| + |b_k| = o(\frac{1}{k^m})$

Доказательство. Пусть $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_K \cos kx + b_k \sin kx$. Пусть $f^{(m)} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$. Применяя предыдущую теорему k раз, имеем $|\alpha_k| + |\beta_k| = k^m(|a_K| + |b_k|)$. Но по лемме Римана об осцилляции, $|\alpha_k| + |\beta_k| = o(1)$. В итоге $|a_k| + |b_k| = o(\frac{1}{k})$. $\square$

Теорема 3.7. *Пусть f – 2π периодическая и кусочно-непрерывная на $[-\pi, \pi]$. Пусть $f \sim \frac{a_k}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Тогда $\int_0^x f(\tau)d\tau = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos kx}{k} b_k + \frac{a_k \sin kx}{k}$. При этом ряд сходится равномерно.*

Доказательство. Пусть $F(x) = \int_0^x (f(t) - \frac{a_0}{2})dt$. Понятно, что она непрерывна как интеграл с переменной верхней границей, кроме того, она кучосно непрерывно дифференируема и $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$. Напишем для неё ряд Фурье, который будет сходится к ней равномерно. $F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx$. Тогда $a_k = kB_k, b_k = -kA_k$. $A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$. $F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k$. $\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$. Тогда $\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos kx}{k} b_k + \frac{a_k}{k} \sin kx$ $\square$

Пусть $g(t)$ – T-периодическая. Рассмотрим $f(x) = g(\frac{x}{2\pi})$. Как выглядит её ряд Фурье мы знаем. Ну и понятно, что вся теория, которую мы развивали про 2π периодические функции обобщается на произвольный период. Кроме того, $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$. Переписав ряд Фурье в экспоненциальной форме, получим: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} c_k$, где $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$

Определение 3.5. Множество M называется метрическим пространством, если на нём введена функция $\rho(x, y)$, называемая метрикой, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\forall x \in M : \rho(x, x) = 0$
2. $\forall x, y \in M : \rho(x, y) = \rho(y, x) \geq 0$
3. $\forall x, y, z \in M : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Пример. В $\mathbb{R}^n$ метрика $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. В пространстве непрерывных функций на $[a, b]$ можно взять метрику $\rho(f, g) = \max_{x \in [a,b]} \|f(x) - g(x)\|$

Определение 3.6. Множество L с операцией сложения и умножения на элемент из $\mathbb{R}$ называется линейным пространством, если $\forall x, y, z \in L : \forall \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\lambda x \in L$
2. $x + y \in L$
3. $x + y = y + x$
4. $x + (y + z) = (x + y) + z$
5. $\exists 0 \in L : \forall u \in L : u + 0 = 0 + u = u$
6. $\exists (-x) \in L : x + (-x) = 0$
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
9. $1 \cdot x = x$
10. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Определение 3.7. Линейное пространство X называется нормированным, если на нём определена функция $\|\cdot\|$, такая, что $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Замечание. Нормированное пространство является метрическим, $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Замечание. Вместо $\mathbb{R}$ можно написать $\mathbb{C}$ или вообще произвольное поле F.

Определение 3.8. ε окрестностью точки x_0 из нормированного пространства X называется

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

Определение 3.9. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из нормированного пространства X сходится к точке $x_0 \in X$, если $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$

Замечание. Поскольку у нас теперь есть предел, то все определения из $\mathbb{R}^n$ переносятся сюда, а именно: открытые множества, замкнутые множества, граница, и т.д.

Пример.

1. $C([a, b])$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$
2. $CL_1([a, b])$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx$
3. $CL_2([a, b])$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$
4. $RL_p([a, b])$ – пространство интегрируеммых по Риману на $[a, b]$ функций, с нормой из CL_p

Замечание. Проблема в том, что в RL_p есть не тождественно равные нулю функции, у которых интеграл от модуля равен нулю. Например, тождественно равная нулю функция, измененная в конечном числе точек. Есть два варианта решения проблемы.

Первый:

Определение 3.10. Пространство называется полунормированным, если в нём выполнены все свойства нормированного пространства, кроме первого.

Второй:

Замечание. Профакторизуем RL_p по отношению $f \sim g \Leftrightarrow \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^p dx\right)^{1/p} = 0$. $R\hat{L}_p = RL_p/\sim$

Определение 3.11. Пусть X – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если $\forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Определение 3.12. Метрическое пространство называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Определение 3.13. Нормированное пространство называется Банаховым, если оно полно по метрике, порожденной нормой.

Пример. $C([a,b])$ – Банахово. Используем теорему Коши для равномерной сходимости функциональных последовательностей , а также тот факт, что ряд непрерывных функций, если сходится равномерно, то обязательно к непрерывной функции.

Пример. $CL_1([a,b]), CL_2([a,b])$ – не Банаховы. Возьмем последовательность функций

$$f_n = \begin{cases} 1, -1 \le x \le 0 \\ 1 - xn, 0 \le x \le 1/n \\ 0, x > 1/n \end{cases}$$

Очевидно, что это последовательность является фундаментальной, ведь $\|f_n - f_m\| \le \frac{1}{\min\{n,m\}}$. Пусть эта последовательнсоть сходится в CL_1 к $\varphi(x)$. Тогда $\int_{-1}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)|dx \ge \int_{-1}^{0} |f_n(x) - \varphi(x)|dx$. Но левый интеграл стемится к нулю, а правый не зависит от n. Значит, правый интеграл равен нулю. А так как φ должна быть непрерывна, $\varphi \equiv 1$ на $[-1,1]$. Аналогично, $\forall 0 < \delta < 1 : \int_{-1}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)|dx \ge \int_{\delta}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)|dx$. Аналогично получаем, что $\varphi \equiv 0$ на $[\delta, 1]$. Но это верно для любого δ. Получаем, что φ разрывна.

Определение 3.14. Линейное пространство R называется Евклидовым, если на нём определено скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $(x,x) \ge 0$
2. $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(x,y) = (y,x)$
4. $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$
5. $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$

Замечание. В Евклидовом пространстве можно ввести норму как $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Все свойства, кроме неравенства треугольника, очевидны. Для неравенства треугольника докажем КБШ.

Теорема 3.8 (Неравенство Коши-Буняковского)**.** $(x,y) \le \sqrt{(x,x)(y,y)}$

Доказательство.

$$0 \le (x+ty, x+ty) = (x,x) + 2t(x,y) + t^2(y,y)$$

При фиксированных x, y справа написано квадратное уравнение. Значит дискриминант должен быть неположительный. $\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \le 0$ □

Следствие (Неравенство треугольника)**.** $(x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le (x,x) + 2\sqrt{(x,x)(y,y)} + (y,y) = (\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)})^2$

Пример. Рассмотрим пространство CL_2. В нем можно ввести скалярное произведение как $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Оно действительно является скалярным произведением, это легко проверить. Тогда норма $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ действительно является нормой

$<++>$
ололол