Конспект по курсу

Гармонический анализ

Contributors:
Андрей Степанов

Лектор:
Трушин Б.В.

МФТИ

Последнее обновление: 25 февраля 2015 г.

Содержание

1 Абсолютно интегрируемые функции

Определение 1.1. Функция $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если $\exists \{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b : \forall i \in \{1, \ldots, n\} : f$ – постоянная на (c_{i-1}, c_i).

Теорема 1.1. *Пусть* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *интегрируема по Риману. Тогда* $\forall \varepsilon > 0 : \exists h(x)$ *– ступенчатая* $: \int_a^b |f(x) - h(x)|dx < \varepsilon$

Доказательство. Пусть $\tau = \{c_i\}_{i=0}^n$ – некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, т.е. $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$. Пусть $\xi_i \in (c_{i-1}, c_i)$. Запишем сумму Римана для данного разбиения:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(c_i - c_{i-1})$$

. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$h(x) = \begin{cases} f(\xi_i), & \text{if } x \in (c_{i-1}, c_i), \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл:

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} |f(x) - f(\xi_i)|dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)(c_i - c_{i-1})$$

, где $\omega_i(f)$ – это колебание функции f на отрезке $[c_{i-1}, c_i]$. По критерию интегрируемости последняя сумма меньше ε для любого такого ε для всех достаточно мелких разбиений. □

Определение 1.2. Пусть функция $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Такая функция называется абсолютно интегрируемой, если:

1. $\exists \{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$: f интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b) \setminus \{c_i\}$
2. $|f|$ интегрируема в несобственном смысле на (a, b)

Определение 1.3. Функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ называется финитной, если она равна нулю вне некоторого отрезка, т.е. $\exists [a, b] : \forall x \notin [a, b] : f(x) = 0$.

Определение 1.4. Функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ называется финитно-ступенчатой, если она финитная и ступенчатая.

Теорема 1.2. *Пусть функция* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *– абсолютно интегрируема. Тогда* $\forall \varepsilon > 0 : \exists h(x)$ *– финитно-ступенчатая* $: \int_a^b |f(x) - h(x)|dx < \varepsilon$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Можно считать, что $a = -\infty$, $b = +\infty$, иначе доопределим f на $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ нулем. Поскольку f – абсолютно интегрируема, то:

1. $\exists \{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$: f интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b) \setminus \{c_i\}$
2. $|f|$ интегрируема в несобственном смысле на (a, b)

$\exists \{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n, -\infty < a_1 < b_1 < c_1 < a_2 < b_2 < c_2 < \ldots < a_n < b_n < +\infty :$

$$\int_{-\infty}^{a_1} |f(x)|dx + \int_{b_1}^{a_2} |f(x)|dx + \ldots + \int_{b_n}^{+\infty} |f(x)|dx < \varepsilon$$

, т.к. $|f|$ интегрируем на $\mathbb{R}$ в несобственном смысле. Пусть

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), x \in \cup[a_i, b_i], \\ 0, elsewhere. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$$

. По предыдущей теореме существует $h_\varepsilon(x) : [a_1, b_n] \mapsto \mathbb{R}$ – ступенчатая функция: $\int_{a_1}^{b_n} |h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$. Доопределим $h_\varepsilon(x)$ нулем вне отрезка $[a_1, b_n]$. Тогда h – финитно-ступенчатая. Кроме того:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_\varepsilon(x) - f(x)|dx < \int_{-\infty}^{+\infty} (|h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)| + |f_\varepsilon(x) - f(x)|)dx < 2\varepsilon$$

□

Теорема 1.3. *Пусть $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ абсолютно интегрируема. Доопределим её на $\mathbb{R}$ нулем. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha) - f(x)|dx \to 0, \text{ при } \alpha \to 0$$

Доказательство. Этот интеграл существует, т.к. его можно оценить как $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha)|dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ (см. предыдущее доказательство).

Докажем эту теорему для произвольной финитно-ступенчатой функции $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Поскольку $\alpha \to 0$, мы можем рассматривать лишь такие α, что

$$|\alpha| < \frac{\min_i(c_i - c_{i-1})}{2}$$

. Пусть $M = \sup |h|$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x+\alpha) - h(x)|dx < 2M(n+1)|\alpha|$$

. Пусть $h(x)$ – финитно-ступенчатая: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - h(x)|dx < \varepsilon$. Тогда: $\int |f(x+\alpha) - f(x)|dx \le \int |f(x+\alpha) - h(x+\alpha)|dx + \int |h(x+\alpha) - h(x)|dx + \int |h(x) - f(x)|dx \le 3\varepsilon$. □

Лемма 1.4 (Римана об осцилляции)**.** *Пусть* $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ *– абсолютно интегрируемая функция. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int f(x)\sin(\lambda x)dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int f(x)\cos(\lambda x)dx = 0$$

Доказательство. Доопределим f нулем на $\mathbb{R}$. Рассмотрим:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\lambda x)dx$$

Этот интеграл существует, так как f абсолютно интегрируема. Сделаем замену $x = t + \frac{\pi}{\lambda}$. Тогда:

$$I(\lambda) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda t)dt$$

. Сложив и поделив пополам, получаем, что:

$$I(\lambda) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda x)dx$$

Применяя теорему, которую мы недавно доказали, получаем, что

$$I(\lambda) \to 0$$

. □

2 Абсолютно интегрируемые функции

Определение 2.1. Функциональный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \tag{1}$$

называется тригонометрическим рядом. a_k, b_k – коэффициенты ряда. Система $\{\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots\}$ называется тригонометрической системой

Утверждение 2.1. *Тригонометрическая система является ортогональной со скалярным произведением* $[f, g] = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

Доказательство. Доказательство: интегрируем по частям 2 раза. □

Определение 2.2. Пусть функция f является 2π периодической и абсолютно интегрируемой на $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд 1 называется тригонометрическим рядом Фурье, где

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$$

,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx$$

. Обозначаем $ftilda1$.

Утверждение 2.2. *Пусть*

$$T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$. *Тогда ряд Фурье для* $T(x)$ *– это сам* $T(x)$.

Доказательство. Обозначим за $T_n(x)$ сумму первых n членов ряда. Фиксируем $\alpha > 0$. Так как ряд $T(x)$ сходится равномерно, то $\exists n > k : |T(x) - T_n(x)| < \varepsilon$.

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} (T_n(x) + (T(x) - T_n(x)))\cos kxdx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\cos kxdx + \int_{-\pi}^{\pi} (T(x) - T_n(x))\cos kxdx$$

Тогда

$$\pi|a_k - \alpha_k| = |\int_{-\pi}^{\pi} (T(x) - T_n(x))\cos kxdx| \leq 2\pi^2\varepsilon$$

□

Следствие. *Если* f *– абсоллютно интегрируемая и* 2π *периодическая, то* $a_k \to 0, b_k \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Определение 2.3.

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Определение 2.4. $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx$ – ядро Дирихле.

Замечание. Умножим и поделим ядро Дирихле на $\sin x/2$. Получаем:

$$\sin\frac{x}{2}D_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x + \sin(k-\frac{1}{2})x}{2} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2}$$

Можно считать, что

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Замечание.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$$

.

Замечание. Подставим в формулу для $S_n(f)(x)$ коэфициенты a_k и b_k. После использования формулы косинуса разности, получаем:

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) D_n(x)(f(x+t)+f(x-t))dt$$

.

Теорема 2.3. *Пусть f – 2π периодическая, абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция. Тогда частичные суммы $S_n(f)(x)$ сходятся в точке x_0 тогда и только тогда, когда сходится интеграл*

$$\int_0^{\delta} D_n(x)(f(x+t)+f(x-t))dx$$

. Причем если они сходятся, то к одному и тому же числу.

Следствие (принцип локализации)**.** *Сходимость ряда Фурье в точке и величина предела зависят только от значений функции в сколь угодно малой окрестности этой точки.*

Определение 2.5. Пусть x_0 – точка разрыва первого рода. Определим

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0-0)}{x-x_0}$$

Определение 2.6. Точка x_0 называется почти регулярной точкой функции f, если $\exists f(x_0+0), f(x_0-0), f'_+(x_0), f'_-(x_0)$

Определение 2.7. Точка x_0 называется регулярной, если она является почти регулярной, и дополнительно

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Теорема 2.4. *Пусть f – абсолютно иниегрируемая на $[-\pi,\pi]$, 2π периодическая функция. x_0 её почти регулярная точка. Тогда $S_n(f)(x) \to \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$*