

Ответы на вопросы по курсу «Теория Вероятностей» *

Колодзей Дарья, 394 †

осенний семестр 2014

Содержание

1 Вероятностное пространство (Ω , \mathcal{F} , \mathbb{P}). Аксиомы Колмогорова.

Чтобы дать определение *вероятностному пространству*, нам понадобится несколько вспомогательных определений.

*Лектор: Жуковский Максим Евгеньевич

Место: ФИВТ МФТИ

†Спасибо Алексею Журавлёву за конспекты и билеты

Спасибо Павлу Ахтямову за конспекты

Спасибо Дмитрию Иващенко за печатные конспекты

Определение 1 (Алгебра). Пусть Ω — произвольное множество. Система его подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ называется *алгеброй*, если выполнены условия:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Если A, B — пара множеств, принадлежащих \mathcal{A} , то

$$A \cup B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$$

3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

Определение 2 (σ -алгебра). Пусть Ω — произвольное множество. Система его подмножеств $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ называется σ -*алгеброй*, если выполнены условия:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если $\{A_i\}$ — последовательность множеств, принадлежащих \mathcal{F} , то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

3. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

Определение 3 (Измеримое пространство). Измеримым пространством называют пару $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$, где Ω — произвольное множество, а \mathcal{A} — алгебра его подмножеств.

Определение 4 (Конечно-аддитивная мера). Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной мерой* данного пространства, если выполнены свойства:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \mathbf{P}(A) \geq 0$
2. $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

Определение 5 (Конечно-аддитивная конечная мера). Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной конечной мерой* данного пространства, если она является конечно-аддитивной мерой данного пространства и $\mathbf{P}(\Omega) < \infty$.

Определение 6 (Конечно-аддитивная вероятностная мера). Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной вероятностной мерой* данного пространства, если она является конечно-аддитивной мерой данного пространства и $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Определение 7 (Счётно-аддитивная вероятностная мера). Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ называют *счётно-аддитивной вероятностной мерой* данного пространства, если выполнены свойства:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \mathbf{P}(A) \geq 0$
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

3. Пусть $\{A_i\}$ — последовательность попарно-непересекающихся множеств, принадлежащих \mathcal{A} . Пусть их объединение также лежит в \mathcal{A} . Тогда верно

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Счётно-аддитивную вероятностную меру над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ также называют:

- *вероятностью над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$*
- *распределением вероятностей над Ω*
- *распределением над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$*

Определение 8 (Вероятностное пространство в широком смысле). Тройку $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, где

- Ω — произвольное множество
- \mathcal{A} — алгебра над Ω
- \mathbf{P} — вероятность над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

называют *вероятностным пространством в широком смысле*. Элементы \mathcal{A} называют *событиями*. Событие Ω называют *достоверным* событием, событие \emptyset называют *невозможным* событием.

Определение 9 (Вероятностное пространство).
Тройку $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, где

- Ω — произвольное множество
- \mathcal{A} — σ -алгебра над Ω
- \mathbf{P} — вероятность над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

называют *вероятностным пространством*.

Аксиомы Колмогорова — это аксиомы, которым должно удовлетворять вероятностное пространство. В нашем случае аксиомы Колмогорова зашиты внутри определения вероятностного пространства.

2 Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры. Геометрические вероятности. Примеры.

2.1 Дискретные вероятностные пространства

Определения

Определение 10 (Дискретное вероятностное пространство). Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ называется *дискретным вероятностным пространством*, если Ω не более чем счётно.

Определение 11 (Классическое определение вероятности). Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ называется *классическим вероятностным пространством*, если:

- Ω конечно, $|\Omega| = n$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\forall \omega \in \Omega \quad \mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{n}$

Примеры классических вероятностных пространств

Пример 1 (Бросок кубика). Бросок идеального игрального кубика принято описывать вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 2 (Равновероятный выбор из n объектов). В случае равновероятного выбора из n объектов соответствующее вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ имеет вид:

- $\Omega = \{1, \dots, n\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 3 (Упорядоченный k -кратный выбор из n объектов с возвращением). Упорядоченный k -кратный выбор из n объектов с возвращением описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, n\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n^k}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 4 (Упорядоченный k -кратный выбор из n объектов без возвращения). Упорядоченный k -кратный выбор из n объектов без возвращения описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, n, \ i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\frac{n!}{(n-k)!}}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 5 (Неупорядоченный k -кратный выбор из n объектов с возвращением). Неупорядоченный k -кратный выбор из n объектов с возвращением описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, n \ i < j \Rightarrow a_i \leq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{C_{n+k-1}^k}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 6 (Неупорядоченный k -кратный выбор из n объектов без возвращения). Неупорядоченный k -кратный выбор из n объектов без возвращения описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, n, \ i < j \Rightarrow a_i < a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{C_n^k}$, где $\omega \in \Omega$

Примеры конечных (неклассических) дискретных вероятностных пространств

Пример 7 (Распределение Бернулли). Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида

- $\Omega = \{0, 1\}$

- $\mathcal{F} = 2^\Omega$

- $\mathbf{P}(\{1\}) = p, \mathbf{P}(\{0\}) = q$, где $q = 1 - p$

описывает некоторый однократный эксперимент, в котором $\{1\}$ соответствует успеху, p — вероятности успеха, а $\{0\}$ и q — провалу и его вероятности. Распределение вероятностей $\mathbf{P} : \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \rightarrow \{0, q, p, 1\}$ называют *распределением Бернулли*.

Пример 8 (Схема Бернулли). Опыт, состоящий в n -кратном повторении некоторого эксперимента с вероятностью успеха p , и соответствующее ему вероятностное пространство

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i = 0, 1\}$

- $\mathcal{F} = 2^\Omega$

- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$, $k = |\omega|_1$

называют *схемой Бернулли*

Пример 9 (Испытание с разнoverоятными исходами). Для описания эксперимента с несколькими возможными исходами используют такое вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$:

- $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$

- $\mathcal{F} = 2^\Omega$

- $\mathbf{P}(\{i\}) = p_i$, где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Пример 10 (Повторение испытания с равновероятными исходами). Пусть теперь мы повторяем k раз эксперимент, в котором возможно n равновероятных исходов (ещё можно думать об этом, как о k -кратном выборе с возвращением из коробки с шарами n цветов).

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, n \ i < j \Rightarrow a_i \leq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{a_1 a_2 \dots a_k\}) = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_n^{t_n}$, где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, а $t_i = |a_1 a_2 \dots a_k|_i$

Впоследствии мы определим на этом пространстве многомерную случайную величину «число исходов каждого вида» («число шаров каждого цвета»). У этой случайной величины будет распределение, которое мы назовём *мультиномиальным*.

Пространство из следующего примера является классическим вероятностным пространством, но помещено здесь, потому что перекликается с предыдущим примером.

Пример 11 (Выбор разноцветных шаров без возвращения). Пусть в коробке лежит M шаров n цветов. Пусть шаров цвета i будет p_i штук. Пусть мы k раз вытаскиваем без возвращения шары из этой коробки.

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, M, \ i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{M^k}$

Впоследствии мы определим на этом пространстве многомерную случайную величину «количество шаров каждого цвета», которая будет иметь более сложную структуру, чем аналогичная величина из предыдущего примера. Её распределение носит название *многомерного гипергеометрического*, или просто *гипергеометрического*, в случае, когда всего 2 цвета.

Примеры бесконечных дискретных вероятностных пространств

Пример 12 (Геометрическое распределение). Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида

- $\Omega = 0 \cup \mathbb{N}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(k) = pq^k$, где $q = 1 - p$, $k \in 0 \cup \mathbb{N}$

описывает бесконечное повторение эксперимента до тех пор пока не случится успех. Элементарное событие k соответствует получению первого успеха после k

неудачных попыток. Соответствующее распределение вероятностей называют *геометрическим распределением*.

2.2 Геометрические вероятности

Определение 12. Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$, где

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- \mathcal{F} — имеющие объём (измеримые по Жордану) подмножества Ω
- $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, т. е. частному соответствующих объёмов

называется *геометрическим вероятностным пространством*.

С помощью геометрической вероятности можно решать следующую задачу: пусть есть два студента. Пусть про каждого студента известно, что он приходит в столовую в случайное время в течение часа и обедает в течение 15 минут. Спрашивается вероятность встречи этих студентов. Решение заключается в том, чтобы отложить по координатным осям времена прихода студентов, отметить область точек, внутри которой студенты встречаются, и посчитать площадь этой области.

Говоря о геометрических вероятностях, можно упомянуть метод Монте-Карло (способ подсчёта чего-нибудь, (например, отношения площадей) с помощью многократного моделирования случайного процесса (например, бросания точки на фигуру)).