

Ответы на вопросы по курсу «Теория Вероятностей» *

Колодзей Дарья, 394 †

осенний семестр 2014

Содержание

1	Вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) . Аксиомы Колмогорова.	2
2	Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры. Геометрические вероятности. Примеры.	6
2.1	Дискретные вероятностные пространства	6

*Лектор: Жуковский Максим Евгеньевич

Место: ФИВТ МФТИ

†Спасибо Алексею Журавлёву за конспекты и билеты

Спасибо Павлу Ахтямову за конспекты

Спасибо Дмитрию Иващенко за печатные конспекты

2.2	Геометрические вероятности	12
3	Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры	13

1 Вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) . Аксиомы Колмогорова.

Чтобы дать определение вероятностному пространству, нам понадобится несколько вспомогательных определений.

Определение 1 (Алгебра). Пусть Ω — произвольное множество. Система его подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ называется *алгеброй*, если выполнены условия:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Если A, B — пара множеств, принадлежащих \mathcal{A} , то

$$A \cup B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$$

3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

Определение 2 (σ -алгебра). Пусть Ω — произвольное множество. Система его подмножеств $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ называется σ -алгеброй, если выполнены условия:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$

2. Если $\{A_i\}$ — последовательность множеств, принадлежащих \mathcal{F} , то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

3. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

Определение 3 (Измеримое пространство). Измеримым пространством называют пару $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$, где Ω — произвольное множество, а \mathcal{A} — алгебра его подмножеств.

Определение 4 (Конечно-аддитивная мера). Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной мерой* данного пространства, если выполнены свойства:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \mathbf{P}(A) \geq 0$
2. $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

Определение 5 (Конечно-аддитивная конечная мера). Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной конечной мерой* данного пространства, если она является конечно-аддитивной мерой данного пространства и $\mathbf{P}(\Omega) < \infty$.

Определение 6 (Конечно-аддитивная вероятностная мера). Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство.

Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной вероятностной мерой* данного пространства, если она является конечно-аддитивной мерой данного пространства и $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Определение 7 (Счётно-аддитивная вероятностная мера). Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ называют *счётно-аддитивной вероятностной мерой* данного пространства, если выполнены свойства:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \mathbf{P}(A) \geq 0$
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
3. Пусть $\{A_i\}$ — последовательность попарно-непересекающихся множеств, принадлежащих \mathcal{A} . Пусть их объединение также лежит в \mathcal{A} . Тогда верно

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$$

Счётно-аддитивную вероятностную меру над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ также называют:

- *вероятностью над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$*
- *распределением вероятностей над Ω*
- *распределением над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$*

Определение 8 (Вероятностное пространство в широком смысле). Тройку $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, где

- Ω — произвольное множество
- \mathcal{A} — алгебра над Ω
- \mathbf{P} — вероятность над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

называют *вероятностным пространством в широком смысле*. Элементы \mathcal{A} называют *событиями*. Событие Ω называют *достоверным* событием, событие \emptyset называют *невозможным* событием.

Определение 9 (Вероятностное пространство). Тройку $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, где

- Ω — произвольное множество
- \mathcal{A} — σ -алгебра над Ω
- \mathbf{P} — вероятность над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

называют *вероятностным пространством*.

Аксиомы Колмогорова — это аксиомы, которым должно удовлетворять вероятностное пространство. В нашем случае аксиомы Колмогорова зашиты внутрь определения вероятностного пространства.

2 Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры. Геометрические вероятности. Примеры.

2.1 Дискретные вероятностные пространства

Определения

Определение 10 (Дискретное вероятностное пространство). Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ называется *дискретным вероятностным пространством*, если Ω не более чем счётно.

Определение 11 (Классическое определение вероятности). Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ называется *классическим вероятностным пространством*, если:

- Ω конечно, $|\Omega| = n$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\forall \omega \in \Omega \quad \mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{n}$

Примеры классических вероятностных пространств

Пример 1 (Бросок кубика). Бросок идеального игрального кубика принято описывать вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 2 (Равновероятный выбор из n объектов). В случае равновероятного выбора из n объектов соответствующее вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ имеет вид:

- $\Omega = \{1, \dots, n\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 3 (Упорядоченный k -кратный выбор из n объектов с возвращением). Упорядоченный k -кратный выбор из n объектов с возвращением описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, n\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$

- $P(\{\omega\}) = \frac{1}{n^k}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 4 (Упорядоченный k -кратный выбор из n объектов без возвращения). Упорядоченный k -кратный выбор из n объектов без возвращения описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, n, \ i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\frac{n!}{(n-k)!}}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 5 (Неупорядоченный k -кратный выбор из n объектов с возвращением). Неупорядоченный k -кратный выбор из n объектов с возвращением описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, n \ i < j \Rightarrow a_i \leq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $P(\{\omega\}) = \frac{1}{C_{n+k-1}^k}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 6 (Неупорядоченный k -кратный выбор из n объектов без возвращения). Неупорядоченный k -кратный выбор из n объектов без возвращения описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, n, \ i < j \Rightarrow a_i < a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{C_n^k}$, где $\omega \in \Omega$

Примеры конечных (неклассических) дискретных вероятностных пространств

Пример 7 (Распределение Бернулли). Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида

- $\Omega = \{0, 1\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{1\}) = p, \mathbf{P}(\{0\}) = q$, где $q = 1 - p$

описывает некоторый однократный эксперимент, в котором $\{1\}$ соответствует успеху, p — вероятности успеха, а $\{0\}$ и q — провалу и его вероятности. Распределение вероятностей $\mathbf{P} : \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \rightarrow \{0, q, p, 1\}$ называют *распределением Бернулли*.

Пример 8 (Схема Бернулли). Опыт, состоящий в n -кратном повторении некоторого эксперимента с вероятностью успеха p , и соответствующее ему вероятностное пространство

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i = 0, 1\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$

- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$, $k = |\omega|_1$

называют *схемой Бернулли*

Пример 9 (Испытание с разнoverоятными исходами). Для описания эксперимента с несколькими возможными исходами используют такое вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$:

- $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{i\}) = p_i$, где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Пример 10 (Повторение испытания с разнoverоятными исходами). Пусть теперь мы повторяем k раз эксперимент, в котором возможно n разнoverоятных исходов (ещё можно думать об этом, как о k -кратном выборе с возвращением из коробки с шарами n цветов).

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, n \ i < j \Rightarrow a_i \leq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{a_1 a_2 \dots a_k\}) = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_n^{t_n}$, где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, а $t_i = |a_1 a_2 \dots a_k|_i$

Впоследствии мы определим на этом пространстве многомерную случайную величину «количество исходов каждого вида» («количество шаров

каждого цвета»). У этой случайной величины будет распределение, которое мы назовём *мультиномиальным*.

Пространство из следующего примера являясь классическим вероятностным пространством, но помещено здесь, потому что перекликается с предыдущим примером.

Пример 11 (Выбор разноцветных шаров без возвращения). Пусть в коробке лежит M шаров n цветов. Пусть шаров цвета i будет p_i штук. Пусть мы k раз вытаскиваем без возвращения шары из этой коробки.

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k \mid a_i = 1, \dots, M, \ i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $P(\{\omega\}) = \frac{1}{M^k}$

Впоследствии мы определим на этом пространстве многомерную случайную величину «количество шаров каждого цвета», которая будет иметь более сложную структуру, чем аналогичная величина из предыдущего примера. Её распределение носит название *многомерного гипергеометрического*, или просто *гипергеометрического*, в случае, когда всего 2 цвета.

Примеры бесконечных дискретных вероятностных пространств

Пример 12 (Геометрическое распределение). Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида

- $\Omega = 0 \cup \mathbb{N}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(k) = pq^k$, где $q = 1 - p$, $k \in 0 \cup \mathbb{N}$

описывает бесконечное повторение эксперимента до тех пор пока не случится успех. Элементарное событие k соответствует получению первого успеха после k неудачных попыток. Соответствующее распределение вероятностей называют *геометрическим распределением*.

2.2 Геометрические вероятности

Определение 12. Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$, где

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- \mathcal{F} — имеющие объём (измеримые по Жордану) подмножества Ω
- $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, т. е. частному соответствующих объёмов

называется *геометрическим вероятностным пространством*.

С помощью геометрической вероятности можно решать следующую задачу: пусть есть два студента. Пусть про каждого студента известно, что он приходит в столовую в случайное время в течение часа и обедает в течение 15 минут. Спрашивается вероятность встречи этих студентов. Решение заключается в том, чтобы отложить по координатным осям времени прихода студентов, отметить область точек, внутри которой студенты встречаются, и посчитать площадь этой области.

Говоря о геометрических вероятностях, можно упомянуть метод Монте-Карло (способ подсчёта чего-нибудь, (например, отношения площадей) с помощью многократного моделирования случайного процесса (например, бросания точки на фигуру)).

3 Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры

Определение 13 (Условная вероятность). Пусть $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ — вероятностное пространство, $A, B \in \mathcal{F}$. Тогда *условной вероятностью* события A при условии,

что произошло событие B , называют величину

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \text{ если } \mathbf{P}(B) > 0$$

$$\mathbf{P}(A|B) = 0, \text{ если } \mathbf{P}(B) = 0$$

Утверждение 1. Пусть $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ — вероятностное пространство. Пусть $B \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(B) > 0$. Тогда $\mathbf{P}(\cdot|B) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ является счётно-аддитивной вероятностной мерой над измеримым пространством $\langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$.

Доказательство. Проверим, что для $\mathbf{P}(\cdot|B)$ выполняется определение вероятностной меры. Действительно:

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \geq 0$$

$$\mathbf{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbf{P}(\Omega \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = 1$$

Пусть $\{A_i\}$ — последовательность попарно непересекающихся событий. Поскольку \mathcal{F} — σ -алгебра, то их объединение A тоже принадлежит \mathcal{F} . Проверим, что

$$\mathbf{P}(A|B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i|B)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i|B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \\
 &= \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i \cap B) = \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \mathbf{P}(A \cap B) = \\
 &= \mathbf{P}(A|B) \quad (1)
 \end{aligned}$$

□

Теорема 1 (Формула полной вероятности). Пусть $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ — вероятностное пространство. Пусть $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$, пусть $A, B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)$$

Доказательство. Заметим, что $\mathbf{P}(A \cap B_i) = \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)$ является верным равенством и в случае, когда $\mathbf{P}(B_i) = 0$, и в случае, когда $\mathbf{P}(B_i) > 0$. А значит

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A \cap B_i) = \mathbf{P}(A)$$

□

Заметим, что в конечных случаях формула полной вероятности тоже работает.

Теорема 2 (Формула Байеса). Пусть $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ — вероятностное пространство. Пусть $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$, пусть $A, B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$. Пусть также $\mathbf{P}(A) > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)}$$

Доказательство.

$$\mathbf{P}(A \cap B_k) = \mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)$$

$$\mathbf{P}(A \cap B_k) = \mathbf{P}(B_k|A)\mathbf{P}(A)$$

$$\mathbf{P}(B_k|A)\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)$$

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\mathbf{P}(A)}$$

осталось расписать $\mathbf{P}(A)$ по формуле полной вероятности и получить желаемое. \square

Смысл формулы Байеса можно понимать так: B_i — это гипотезы, а A — результат эксперимента. Нам известна *априорная* вероятность $\mathbf{P}(A|B_i)$ получения результата A при выполнении гипотезы B_i . Теперь, зная результат эксперимента, мы хотим узнать *апостериорную* вероятность того, что гипотеза B_k верна.

Например, с помощью формулы Байеса можно решать какую-нибудь задачу про смерть лорда Вайла, которого хотят отравить или зарезать дворецкий, сын и жена.

Приведём ещё пример решения задачи про шары помощью формулы Байеса.

Пример 13. Пусть в ящике n шаров, из них k белых. Шары извлекаются без возвращений равновероятно. Какова вероятность на j -ом шаге вытащить белый шар?

Итак, вероятностное пространство, соответствующее j -кратному выбору без возвращения таково:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_j \mid a_i = 1, 2, \dots, n\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $P(\{a_1 a_2 \dots a_j\}) = \frac{1}{\frac{(n)!}{(n-j)!}}$

Доказывать будет индукцией по числу шаров и шагов. Обозначим за $A_{j,n,k}$ событие «вытащить белый шар на j -ом шаге, если в урне изначально было n шаров, из которых k белых» и за $B_{j,n,k}$ событие «вытащить чёрный шар на j -ом шаге, если в урне изначально было n шаров, из которых k белых».

База. $A_{1,n,k} = \frac{k}{n}$.

Доказательство перехода.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(A_{j,n,k}) &= \\
 &= \mathbf{P}(A_{j,n,k} \mid A_{1,n,k})\mathbf{P}(A_{1,n,k}) + \mathbf{P}(A_{j,n,k} \mid B_{1,n,k})\mathbf{P}(B_{1,n,k}) = \\
 &= \mathbf{P}(A_{j-1,n-1,k-1})\mathbf{P}(A_{1,n,k}) + \mathbf{P}(A_{j-1,n-1,k})\mathbf{P}(B_{1,n,k}) \quad (2)
 \end{aligned}$$