Ответы на вопросы по курсу «Теория Вероятностей» *

Колодзей Дарья, 394 †

осенний семестр 2014

Содержание

---

*Лектор: Жуковский Максим Евгеньевич
Место: ФИВТ МФТИ

†Спасибо Алексею Журавлёву за конспекты и билеты
Спасибо Павлу Ахтямову за конспекты
Спасибо Дмитрию Иващенко за печатные конспекты

1 Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Аксиомы Колмогорова.

Чтобы дать определение *вероятностному пространству*, нам понадобится несколько вспомогательных определений.

Определение 1 (Алгебра)**.** Пусть Ω — произвольное множество. Система его подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ называется *алгеброй*, если выполнены условия:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$

2. Если A, B — пара множеств, принадлежащих $\mathcal{A}$, то
$$A \cup B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$$

3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

Определение 2 (σ-алгебра)**.** Пусть Ω — произвольное множество. Система его подмножеств $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ называется *σ-алгеброй*, если выполнены условия:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$

2. Если $\{A_i\}$ — последовательность множеств, принадлежащих $\mathcal{F}$, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

3. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

Определение 3 (Измеримое пространство)**.** Измеримым пространством называют пару $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$, где Ω — произвольное множество, а $\mathcal{A}$ — алгебра его подмножеств.

Определение 4 (Конечно-аддитивная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной мерой* данного пространства, если выполнены свойства:

1. $\forall A \in \mathcal{A}\ \mathbf{P}(A) \geq 0$

2. $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

Определение 5 (Конечно-аддитивная конечная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной конечной мерой* данного пространства, если она является конечно-аддитивной мерой данного пространства и $\mathbf{P}(\Omega) < \infty$.

Определение 6 (Конечно-аддитивная вероятностная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство.

Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной вероятностной мерой* данного пространства, если она является конечно-аддитивной мерой данного пространства и $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Определение 7 (Счётно-аддитивная вероятностная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *счётно-аддитивной вероятностной мерой* данного пространства, если выполнены свойства:

1. $\forall A \in \mathcal{A}\ \mathbf{P}(A) \geq 0$
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
3. Пусть $\{A_i\}$ — последовательность попарно-непересекающихся множеств, принадлежащих $\mathcal{A}$. Пусть их объединение также лежит в $\mathcal{A}$. Тогда верно
$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Счётно-аддитивную вероятностную меру над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ также называют:

- *вероятностью над* $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$
- *распределением вероятностей над* Ω
- *распределением над* $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

.

Определение 8 (Вероятностное пространство в широком смысле)**.** Тройку $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, где

- Ω — произвольное множество
- $\mathcal{A}$ — алгебра над Ω
- $\mathbf{P}$ — вероятность над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

называют *вероятностным пространством в широком смысле.* Элементы $\mathcal{A}$ называют *событиями.* Событие Ω называют *достоверным* событием, событие $\varnothing$ называют *невозможным* событием.

Определение 9 (Вероятностное пространство)**.** Тройку $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, где

- Ω — произвольное множество
- $\mathcal{A}$ — σ-алгебра над Ω
- $\mathbf{P}$ — вероятность над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

называют *вероятностным пространством.*

Аксиомы Колмогорова — это аксиомы, которым должно удовлетворять вероятностное пространство. В нашем случае аксиомы Колмогорова зашиты внутрь определения вероятностного пространства.

2 Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры. Геометрические вероятности. Примеры.

2.1 Дискретные вероятностные пространства

Определения

Определение 10 (Дискретное вероятностное пространство)**.** Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ называется *дискретным вероятностным пространством*, если Ω не более чем счётно.

Определение 11 (Классическое определение вероятности)**.** Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ называется *классическим вероятностным пространством*, если:

- Ω конечно, $|\Omega| = n$
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- $\forall \omega \in \Omega \;\; \mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{n}$

Примеры классических вероятностных пространств

Пример 1 (Упорядоченный k-кратный выбор из n объектов с возвращением)**.** Упорядоченный k-кратный выбор из n объектов с возвращением описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega =$ все слова длины k над алфавитом мощности n
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n^k}$, где $\omega \in \Omega$

Примеры конечных (неклассических) дискретных вероятностных пространств

Пример 2 (Распределение Бернулли)**.** Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида

- $\Omega = \{0, 1\}$
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- $\mathbf{P}(1) = p, \mathbf{P}(0) = q$, где $q = 1 - p$

описывает некоторый однократный эксперимент, в котором 1 соответствует успеху, p — вероятности успеха, а 0 и q — провалу и его вероятности. Распределение вероятностей $\mathbf{P} : \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \to \{0, q, p, 1\}$ называют *распределением Бернулли.*

Пример 3 (Схема Бернулли)**.** Опыт, состоящий в n-кратном повторении некоторого эксперимента с вероятностью успеха p, и соответствующее ему вероятностное пространство

- Ω = все последовательности нулей и единиц длины n.
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- $\mathbf{P}(\omega) = p^k q^(n-k)$, где $q = 1 - p$, $k = |\omega|_1$

называют *схемой Бернулли*

Примеры бесконечных дискретных вероятностных пространств

Пример 4 (Геометрическое распределение)**.** Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида

- $\Omega = 0 \cup \mathbb{N}$
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- $\mathbf{P}(k) = pq^k$, где $q = 1 - p$, $k \in 0 \cup \mathbb{N}$

описывает бесконечное повторение эксперимента до тех пор пока не случится успех. Элементарное событие k соответствует получению первого успеха после k неудачных попыток. Соответствующее распределение вероятностей называют *геометрическим распределением.*

Пример 5 (Распределение Пуассона).

2.2 Геометрические вероятности

Определение 12. Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$, где

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{F}$ — имеющие объём (измеримые по Жордану) подмножества Ω
- $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, т. е. частному соответствующих объёмов

называется *геометрическим вероятностным пространством.*

С помощью геометрической вероятности можно решать следующую задачу: пусть есть два студента. Пусть про каждого студента известно, что он приходит в столовую в случайное время в течение часа и обедает в течение 15 минут. Спрашивается вероятность встречи этих студентов. Решение заключается в том, чтобы отложить по координатным осям времена прихода студентов, отметить область точек, внутри которой студенты встречаются, и посчитать площадь этой области.

Говоря о геометрических вероятностях, можно упомянуть метод Монте-Карло (способ подсчёта чего-нибудь, (например, отношения площадей) с помощью многократного моделирования случайного процесса (например, бросания точки на фигуру)).