Ответы на вопросы по курсу «Теория Вероятностей» *

Колодзей Дарья, 394 †

осенний семестр 2014

Содержание

---

*Лектор: Жуковский Максим Евгеньевич
Место: ФИВТ МФТИ

†Спасибо Алексею Журавлёву за конспекты и билеты
Спасибо Павлу Ахтямову за конспекты
Спасибо Дмитрию Иващенко за печатные конпекты

1 Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Аксиомы Колмогорова.

Чтобы дать определение *вероятностному пространству*, нам понадобится несколько вспомогательных определений.

Определение 1 (Алгебра)**.** Пусть Ω — произвольное множество. Система его подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ называется *алгеброй*, если выполнены условия:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Если A, B — пара множеств, принадлежащих $\mathcal{A}$, то
$$A \cup B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$$
3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

Определение 2 (σ-алгебра)**.** Пусть Ω — произвольное множество. Система его подмножеств $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ называется *σ-алгеброй*, если выполнены условия:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если $\{A_i\}$ — последовательность множеств, принадлежащих $\mathcal{F}$, то
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

3. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

Определение 3 (Измеримое пространство)**.** Измеримым пространством называют пару $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$, где Ω — произвольное множество, а $\mathcal{A}$ — алгебра его подмножеств.

Определение 4 (Конечно-аддитивная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной мерой* данного пространства, если выполнены свойства:

1. $\forall A \in \mathcal{A}\ \mathbf{P}(A) \geq 0$
2. $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

Определение 5 (Конечно-аддитивная конечная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной конечной мерой* данного пространства, если она является конечно-аддитивной мерой данного пространства и $\mathbf{P}(\Omega) < \infty$.

Определение 6 (Конечно-аддитивная вероятностная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной вероятностной мерой* данного пространства, если она является конечно-аддитивной мерой данного пространства и $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Определение 7 (Счётно-аддитивная вероятностная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *счётно-аддитивной вероятностной мерой* данного пространства, если выполнены свойства:

1. $\forall A \in \mathcal{A}\ \mathbf{P}(A) \geq 0$
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
3. Пусть $\{A_i\}$ — последовательность попарно-непересекающихся множеств, принадлежащих $\mathcal{A}$. Пусть их объединение также лежит в $\mathcal{A}$. Тогда верно
$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Счётно-аддитивную вероятностную меру над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ также называют *вероятностью* над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$.

Определение 8 (Вероятностное пространство в широком смысле)**.** Тройку $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, где

- Ω — произвольное множество
- $\mathcal{A}$ — алгебра над Ω
- $\mathbf{P}$ — вероятность над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

называют *вероятностным пространством в широком смысле*. Элементы $\mathcal{A}$ называют *событиями*. Событие Ω называют *достоверным* событием, событие $\varnothing$ называют *невозможным* событием.

Определение 9 (Вероятностное пространство)**.** Тройку $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, где

- Ω — произвольное множество
- $\mathcal{A}$ — σ-алгебра над Ω
- $\mathbf{P}$ — вероятность над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

называют *вероятностным пространством.*

Аксиомы Колмогорова — это аксиомы, которым должно удовлетворять вероятностное пространство. В нашем случае аксиомы Колмогорова зашиты внутрь определения вероятностного пространства.

2 Дискретные вероятностые пространства. Классическое определение вероятности. Примеры. Геометрические вероятности. Примеры.