Ответы на вопросы по курсу «Теория Вероятностей» *

Колодзей Дарья, 394 †

осенний семестр 2014

Содержание

*Лектор: Жуковский Максим Евгеньевич
Место: ФИВТ МФТИ

†Спасибо Алексею Журавлёву за конспекты и билеты
Спасибо Павлу Ахтямову за конспекты
Спасибо Дмитрию Иващенко за печатные конспекты

1 Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Аксиомы Колмогорова.

Чтобы дать определение *вероятностному пространству*, нам понадобится несколько вспомогательных определений.

Определение 1 (Алгебра)**.** Пусть Ω — произвольное множество. Система его подмножеств $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ называется *алгеброй*, если выполнены условия:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Если A, B — пара множеств, принадлежащих $\mathcal{A}$, то
$$A \cup B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$$
3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

Определение 2 (σ-алгебра)**.** Пусть Ω — произвольное множество. Система его подмножеств $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ называется *σ-алгеброй*, если выполнены условия:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если $\{A_i\}$ — последовательность множеств, принадлежащих $\mathcal{F}$, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

3. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

Определение 3 (Измеримое пространство)**.** Измеримым пространством называют пару $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$, где Ω — произвольное множество, а $\mathcal{A}$ — алгебра его подмножеств.

Определение 4 (Конечно-аддитивная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной мерой* данного пространства, если выполнены свойства:

1. $\forall A \in \mathcal{A}\ \mathbf{P}(A) \geq 0$
2. $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

Определение 5 (Конечно-аддитивная конечная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной* *конечной мерой* данного пространства, если она является конечно-аддитивной мерой данного пространства и $\mathbf{P}(\Omega) < \infty$.

Определение 6 (Конечно-аддитивная вероятностная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *конечно-аддитивной вероятностной мерой* данного пространства, если она является конечно-аддитивной мерой данного пространства и $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Определение 7 (Счётно-аддитивная вероятностная мера)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ — измеримое пространство. Функцию $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ называют *счётно-аддитивной вероятностной мерой* данного пространства, если выполнены свойства:

1. $\forall A \in \mathcal{A}\ \mathbf{P}(A) \geq 0$
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
3. Пусть $\{A_i\}$ — последовательность попарно-непересекающихся множеств, принадлежащих $\mathcal{A}$. Пусть их объединение также лежит в $\mathcal{A}$. Тогда верно

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Счётно-аддитивную вероятностную меру над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ также называют:

- *вероятностью над* $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$
- *распределением вероятностей над* Ω
- *распределением над* $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

.

Определение 8 (Вероятностное пространство в широком смысле)**.** Тройку $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, где

- Ω — произвольное множество
- $\mathcal{A}$ — алгебра над Ω
- $\mathbf{P}$ — вероятность над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

называют *вероятностным пространством в широком смысле*. Элементы $\mathcal{A}$ называют *событиями*. Событие Ω называют *достоверным* событием, событие $\varnothing$ называют *невозможным* событием.

Определение 9 (Вероятностное пространство)**.** Тройку $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P} \rangle$, где

- Ω — произвольное множество
- $\mathcal{A}$ — σ-алгебра над Ω
- $\mathbf{P}$ — вероятность над $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$

называют *вероятностным пространством*.

Аксиомы Колмогорова — это аксиомы, которым должно удовлетворять вероятностное пространство. В нашем случае аксиомы Колмогорова зашиты внутрь определения вероятностного пространства.

2 Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры. Геометрические вероятности. Примеры.

2.1 Дискретные вероятностные пространства

Определения

Определение 10 (Дискретное вероятностное пространство)**.** Вероятностное пространство $\langle\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\rangle$ называется *дискретным вероятностным пространством*, если Ω не более чем счётно.

Определение 11 (Классическое определение вероятности)**.** Вероятностное пространство $\langle\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\rangle$ называется *классическим вероятностным пространством*, если:

- Ω конечно, $|\Omega| = n$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\forall\omega \in \Omega \;\; \mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{n}$

Примеры классических вероятностных пространств

Пример 1 (Бросок кубика)**.** Бросок идеального игрального кубика принято описывать вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 2 (Равновероятный выбор из n объектов)**.** В случае равновероятного выбора из n объектов соотвествующее вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ имеет вид:

- $\Omega = \{1, \ldots, n\}$
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 3 (Упорядоченный k-кратный выбор из n объектов с возвращением)**.** Упорядоченный k-кратный выбор из n объектов с возвращением описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \ldots a_k |\ a_i = 1, \ldots, n\}$
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n^k}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 4 (Упорядоченный k-кратный выбор из n объектов без возвращения)**.** Упорядоченный k-кратный выбор из n объектов без возвращения описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \ldots a_k |\ a_i = 1, \ldots, n, \quad i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\frac{n!}{(n-k)!}}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 5 (Неупорядоченный k-кратный выбор из n объектов с возвращением)**.** Неупорядоченный k-кратный выбор из n объектов с возвращением описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \ldots a_k |\ a_i = 1, \ldots, n \quad i < j \Rightarrow a_i \leq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{C_{n+k-1}^k}$, где $\omega \in \Omega$

Пример 6 (Неупорядоченный k-кратный выбор из n объектов без возвращения)**.** Неупорядоченный k-кратный выбор из n объектов без возвращения описывается вероятностным пространством $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k | \ a_i = 1, \dots, n, \quad i < j \Rightarrow a_i < a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{C_n^k}$, где $\omega \in \Omega$

Примеры конечных (неклассических) дискретных вероятностных пространств

Пример 7 (Распределение Бернулли)**.** Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида

- $\Omega = \{0, 1\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{1\}) = p, \mathbf{P}(\{0\}) = q$, где $q = 1 - p$

описывает некоторый однократный эксперимент, в котором $\{1\}$ соответствует успеху, p — вероятности успеха, а $\{0\}$ и q — провалу и его вероятности. Распределение вероятностей $\mathbf{P} : \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \to \{0, q, p, 1\}$ называют *распределением Бернулли.*

Пример 8 (Схема Бернулли)**.** Опыт, состоящий в n-кратном повторении некоторого эксперимента с вероятностью успеха p, и соответствующее ему вероятностное пространство

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid \ a_i = 0, 1\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$

- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$, $k = |\omega|_1$

называют *схемой Бернулли*

Пример 9 (Испытание с разновероятными исходами)**.** Для описания эксперимента с несколькими возможными исходами используют такое вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$:

- $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{i\}) = p_i$, где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Пример 10 (Повторение испытания с разновероятными исходами)**.** Пусть теперь мы повторяем k раз эксперимент, в котором возможно n разновероятных исходов (ещё можно думать об этом, как о k-кратном выборе с возвращением из коробки с шарами n цветов).

- $\Omega = \{a_1 a_2 \ldots a_k |\ a_i = 1, \ldots, n \ \ i < j \Rightarrow a_i \leq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{a_1 a_2 \ldots a_k\}) = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots p_n^{t_n}$, где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, а $t_i = |a_1 a_2 \ldots a_k|_i$

Впоследствии мы определим на этом пространстве многомерную случайную величину «количество исходов каждого вида» («количество шаров каждого цвета»). У этой случайной величины будет распределение, которое мы назовём *мультиномиальным*.

Пространство из следующего примера явся классическим вероятностным пространством, но помещено здесь, потому что перекликается с предыдущим примером.

Пример 11 (Выбор разноцветных шаров без возвращения)**.** Пусть в коробке лежит M шаров n цветов. Пусть шаров цвета i будет p_i штук. Пусть мы k раз вытаскиваем без возвращения шары из этой коробки.

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_k |\ a_i = 1, \dots, M, \ \ i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{M^k}$

Впоследствии мы определим на этом пространстве многомерную случайную величину «количество шаров каждого цвета», которая будет иметь более сложную структуру, чем аналогичная величина из предыдущего примера. Её распределение носит название *многомерного гипергеометрического*, или просто *гипергеометрического*, в случае, когда всего 2 цвета.

Примеры бесконечных дискретных вероятностных пространств

Пример 12 (Геометрическое распределение)**.** Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ следующего вида

- $\Omega = 0 \cup \mathbb{N}$
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- $\mathbf{P}(k) = pq^k$, где $q = 1 - p$, $k \in 0 \cup \mathbb{N}$

описывает бесконечное повторение эксперимента до тех пор пока не случится успех. Элементарное событие k соответствует получению первого успеха после k неудачных попыток. Соответствующее распределение вероятностей называют *геометрическим распределением.*

2.2 Геометрические вероятности

Определение 12. Вероятностное пространство $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$, где

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{F}$ — имеющие объём (измеримые по Жордану) подмножества Ω
- $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, т. е. частному соответствующих объёмов

называется *геометрическим вероятностным пространством.*

С помощью геометрической вероятности можно решать следующую задачу: пусть есть два студента. Пусть про каждого студента известно, что он приходит в столовую в случайное время в течение часа и обедает в течение 15 минут. Спрашивается вероятность встречи этих студентов. Решение заключается в том, чтобы отложить по координатным осям времена прихода студентов, отметить область точек, внутри которой студенты встречаются, и посчитать площадь этой области.

Говоря о геометрических вероятностях, можно упомянуть метод Монте-Карло (способ подсчёта чего-нибудь, (например, отношения площадей) с помощью многократного моделирования случайного процесса (например, бросания точки на фигуру)).

3 Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры

Определение 13 (Условная вероятность)**.** Пусть $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ —вероятностное пространство, $A, B \in \mathcal{F}$. Тогда *условной вероятностью* события A при условии, что произошло событие B, называют величину

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}, \text{если } \mathbf{P}(B) > 0$$

$$\mathbf{P}(A|B) = 0, \text{если } \mathbf{P}(B) = 0$$

Утверждение 1. *Пусть* $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ *— вероятностное пространство. Пусть* $B \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(B) > 0$. *Тогда* $\mathbf{P}(\cdot|B) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *является счётно-аддитивной вероятностной мерой над измеримым пространством* $\langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$.

Доказательство. Проверим, что для $\mathbf{P}(\cdot|B)$ выполняется определение вероятностной меры. Действительно:

$$\forall A \in \mathcal{F} \;\; \mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \geq 0$$

$$\mathbf{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbf{P}(\Omega \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = 1$$

Пусть $\{A_i\}$ — последовательность попарно непересекающихся событий. Поскольку $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, то их объединение A тоже принадлежит $\mathcal{F}$. Проверим, что

$$\mathbf{P}(A|B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i|B)$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \\ = \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i \cap B) = \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \mathbf{P}(A \cap B) = \\ = \mathbf{P}(A|B) \quad (1)$$

$\square$

Теорема 1 (Формула полной вероятности)**.** *Пусть* $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P} \rangle$ *— вероятностное пространство. Пусть* $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$, *пусть* $A, B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)$$

Доказательство. Заметим, что $\mathbf{P}(A \cap B_i) = \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)$ является верным равенством и в случае, когда $\mathbf{P}(B_i) = 0$, и в случае, когда $\mathbf{P}(B_i) > 0$. А значит

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A \cap B_i) = \mathbf{P}(A)$$

$\square$

Заметим, что в конечных случаях формула полной вероятности тоже работает.

Теорема 2 (Формула Байеса)**.** *Пусть* $\langle\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\rangle$ — *вероятностное пространство. Пусть* $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$, *пусть* $A, B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$. *Пусть также* $\mathbf{P}(A) > 0$ *Тогда*

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)}$$

Доказательство.

$$\mathbf{P}(A \cap B_k) = \mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)$$

$$\mathbf{P}(A \cap B_k) = \mathbf{P}(B_k|A)\mathbf{P}(A)$$

$$\mathbf{P}(B_k|A)\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)$$

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\mathbf{P}(A)}$$

осталось расписать $\mathbf{P}(A)$ по формуле полной вероятности и получить желаемое. □

Смысл формулы Байеса можно понимать так: B_i — это гипотезы, а A — результат эксперимента. Нам известна *априорная* вероятность $\mathbf{P}(A|B_i)$ получения результата A при выполнении гипотезы B_i. Теперь, зная результат эксперимента, мы хотим узнать *апостериорную* вероятность того, что гипотеза B_k верна.

Например, с помощью формулы Байеса можно решать какую-нибудь задачу про смерть лорда Вайла, которого хотят отравить или зарезать дворецкий, сын и жена.

Приведём ещё пример решения задачи про шары помощью формулы Байеса.

Пример 13. Пусть в ящике n шаров, из них k белых. Шары извлекаются без возвращений равновероятно. Какова вероятность на j-ом шаге вытащить белый шар?

Итак, вероятностное пространство, соотвествующее j-кратному выбору без возвращения таково:

- $\Omega = \{a_1 a_2 \dots a_j |\ a_i = 1, 2, \dots, n\}$
- $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$
- $P(\{a_1 a_2 \dots a_j\}) = \frac{1}{\frac{(n)!}{(n-j)!}}$

Доказывать будет индукцией по числу шаров и шагов. Обозначим за $A_{j,n,k}$ событие «вытащить белый шар на j-ом шаге, если в урне изначально было n шаров, из которых k белых» и за $B_{j,n,k}$ событие «вытащить чёрный шар на j-ом шаге, если в урне изначально было n шаров, из которых k белых».

База. $A_{1,n,k} = \frac{k}{n}$.

Доказательство перехода.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A_{j,n,k}) = \\
&= \mathbf{P}(A_{j,n,k}|A_{1,n,k})\mathbf{P}(A_{1,n,k}) + \mathbf{P}(A_{j,n,k}|B_{1,n,k})\mathbf{P}(B_{1,n,k}) = \\
&= \mathbf{P}(A_{j-1,n-1,k-1})\mathbf{P}(A_{1,n,k}) + \mathbf{P}(A_{j-1,n-1,k})\mathbf{P}(B_{1,n,k}) \quad (2)
\end{aligned}$$

4 Теорема о непрерывности в «нуле» вероятностной меры

Теорема 3 (О непрерывности в нуле вероятностной меры)**.** *Пусть* $\langle\Omega, \mathcal{A}\rangle$ *— измеримое пространство (*Ω *— множество,* $\mathcal{A}$ *—алгебра, но не* σ*-алгебра). Пусть* $\mathbf{P}$ *— конечно-аддитивная вероятностная мера на* $\langle\Omega, \mathcal{A}\rangle$*. Тогда следующие утверждения равносильны:*

- $\mathbf{P}$ *счётно-аддитивная вероятностная мера*
- $\mathbf{P}$ *непрерывна сверху*

  $$lim_{i\to\infty}\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

  где $\{A_i\}$ *— «неубывающая» последовательность вложенных множеств (*$A_i \subset A_{i+1}$*), чьё объединение лежит в* $\mathcal{A}$*.*

- $\mathbf{P}$ *непрерывна снизу*

  $$lim_{i\to\infty}\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

  где $\{A_i\}$ *— «невозрастающая» последовательность вложенных множеств (*$A_i \supset A_{i+1}$*), чьё пересечение лежит в* $\mathcal{A}$*.*

- **P** *непрерывна в нуле*

$$lim_{i \to \infty} \mathbf{P}(A_i) = 0$$

где $\{A_i\}$ *— «невозрастающая» последовательность вложенных множеств* ($A_i \supset A_{i+1}$)*, чьё пересечение является пустым множеством.*