

## 2. Свойства оценок

1. (*К теоретической задаче 1*) Сгенерируйте выборку  $X_1, \dots, X_N$  из равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$  для  $N = 10^4$ . Для всех  $n \leq N$  посчитайте оценки параметра  $\theta$  из теоретической задачи:  $2\bar{X}$ ,  $\bar{X} + X_{(n)}/2$ ,  $(n+1)X_{(1)}$ ,  $X_{(1)} + X_{(n)}$ ,  $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ . Постройте на одном графике разными цветами для всех оценок функции модуля разности оценки и истинного значения  $\theta$  в зависимости от  $n$ . Если некоторые оценки (при фиксированном значении  $\theta$ ) сильно отличаются от истинного значения параметра  $\theta$ , то исключите их и постройте еще один график со всеми кривыми (для измененного значения  $\theta$ ). Для избавления от больших значений разности в начале ограничьте масштаб графика. Для наглядности точки можно соединить линиями. Какая оценка получилась лучше (в смысле упомянутого модуля разности при  $n = N$ )? Проведите эксперимент для разных значений  $\theta$  (количество графиков равно количеству значений  $\theta$ ).
2. (*К теоретической задаче 4*) Сгенерируйте выборку  $X_1, \dots, X_N$  из экспоненциального распределения с параметром  $\theta = 1$  для  $N = 10^4$ . Для всех  $n \leq N$  посчитайте оценку  $\left(k!/\bar{X}^k\right)^{1/k}$  параметра  $\theta$ . Проведите исследование, аналогичное предыдущей задаче, и выясните, при каком  $k$  оценка ведет себя лучше (рассмотрите не менее 10 различных значений  $k$ ).
3. (*К теоретической задаче 5*) Придумайте распределение, у которого конечны первые четыре момента, а пятое — нет. Сгенерируйте выборку  $X_1, \dots, X_N$  из этого распределения для  $N = 10^4$ . Постройте график плотности, а также нанесите точки выборки на график (с нулевой  $y$ -координатой). Для всех  $n \leq N$  посчитайте оценку  $S^2 = S^2(X_1, \dots, X_n)$  для дисперсии. Постройте график зависимости модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения от  $n$ . Проведите аналогичное исследование для выборки из распределения Коши, где вместо графика модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения (которого не существует) постройте график оценки дисперсии.
4. Сгенерируйте выборку  $X_1, \dots, X_N$  из стандартного нормального распределения для  $N = 10^4$ . Для всех  $n \leq N$  посчитайте по ней эмпирическую функцию распределения. Для некоторых  $n$  (например,  $n \in \{10, 25, 50, 100, 1000, N\}$ ) постройте графики эмпирической функции распределения (отметьте на оси абсцисс точки “скачков” кривых, нанеся каждую из “подвыборок” на ось абсцисс на каждом соответствующем графике с коэффициентом прозрачности 0.2), нанеся на каждый из них истинную функцию распределения (количество графиков равно количеству различных значений  $n$ ). Для всех  $n \leq N$  посчитайте точное значение  $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$  и постройте график зависимости  $D_n$  от  $n$ .