

TP Méthodes Numériques de Base

Vincent Raulin et Olivier Checchin

Mars 2019

1 Résolution de l'équation de transport diffusion

Question 1

En réorganisant l'équation de manière à séparer les terme en t et en $t + dt$

$$\begin{aligned} \phi(x, t + dt) - \kappa \left(\frac{dt^2 \phi}{dx^2}(x + dx, t + dt) - 2 \frac{dt^2 \phi}{dx^2}(x, t + dt) + \frac{dt^2 \phi}{dx^2}(x - dx, t + dt) \right) \\ = \phi(x, t) - c(x) \left(\frac{dt}{2dx} \phi(x + dx, t) - \frac{dt}{2dx} \phi(x - dx, t) \right) \\ + c(x)^2 \left(\frac{dt}{2dx^2} \phi(x + dx, t) - 2 \frac{dt}{2dx^2} \phi(x, t) + \frac{dt}{2dx^2} \phi(x - dx, t) \right) \end{aligned}$$

On peut trouver les formes de N et M :

$$N = \begin{pmatrix} 1 + 2\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & -\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & 0 & \dots & \dots & 0 & -\kappa \frac{N_x^2}{N_t} \\ -\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & 1 + 2\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & -\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & \ddots & & & 0 \\ 0 & -\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & 1 + 2\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 + 2\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & -\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & 1 + 2\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & -\kappa \frac{N_x^2}{N_t} \\ -\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & 0 & \dots & \dots & 0 & -\kappa \frac{N_x^2}{N_t} & 1 + 2\kappa \frac{N_x^2}{N_t} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 - c(id x)^2 \frac{N_x^2}{2N_t^2} & c(id x)^2 \frac{N_x^2}{2N_t^2} - c(id x) \frac{N_x}{2N_t} & 0 & \dots & \dots & 0 & c(id x)^2 \frac{N_x^2}{2N_t^2} + c(id x) \frac{N_x}{2N_t} \\ c(id x)^2 \frac{N_x^2}{2N_t^2} + c(id x) \frac{N_x}{2N_t} & 1 - c(id x)^2 \frac{N_x^2}{2N_t^2} & \ddots & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 - c(id x)^2 \frac{N_x^2}{2N_t^2} & c(id x)^2 \frac{N_x^2}{2N_t^2} - c(id x) \frac{N_x}{2N_t} \\ c(id x)^2 \frac{N_x^2}{2N_t^2} - c(id x) \frac{N_x}{2N_t} & 0 & \dots & \dots & 0 & c(id x)^2 \frac{N_x^2}{2N_t^2} + c(id x) \frac{N_x}{2N_t} & 1 - c(id x)^2 \frac{N_x^2}{2N_t^2} \end{pmatrix}$$

On remarque la périodicité du domaine : M et N sont tridiagonales "Modulo N_x "

Question 2

On remarque d'abord que N est symétrique réelle : $N \in S_{N_x}(\mathbb{R})$ On peut donc appliquer le théorème spectral : N est diagonalisable et $S_{p\mathbb{C}}(N) \subset \mathbb{R}$

De plus, en appliquant le théorème de Gershgorin, on a que $\forall \lambda \in S_{p\mathbb{C}}(N), \lambda \in \bigcup_{i=1}^{N_x} D(n_{i,i}, \sum_{j=1}^{N_x} |n_{i,j}|)$ où $D(z, r)$ est le disque de centre $z \in \mathbb{C}$ de rayon $r \in \mathbb{R}$

Enfin, on remarque que N est à diagonale strictement dominante : $2\kappa \frac{N_x^2}{N_t} < 1 + 2\kappa \frac{N_x^2}{N_t}$ ce qui indique que les cercles de Gershgorin ont un rayon trop petit pour que 0 y soit inclus. On sait aussi que ces cercles ont une intersection non vide avec \mathbb{R} car les valeurs propres de N y sont incluses et sont réelles. Comme les coefficients diagonaux de N sont positifs on en déduit :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{N_x} D(n_{i,i}, \sum_{j=1}^{N_x} |n_{i,j}|) \right) \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_+^*$$

On peut donc en déduire que toutes les valeurs propres de N sont strictement positives : N est donc symétrique définie positive : $N \in S_{N_x}^{++}(\mathbb{R})$

Question 3

cf codes

Question 4

On obtient alors les résultats suivants :

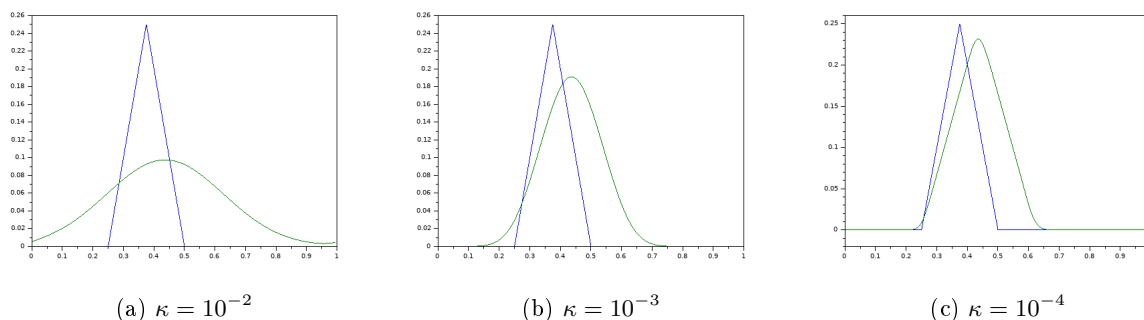


FIGURE 1 – Diffusion 1D

L'algorithme fonctionne : la diffusion se fait plus du côté des $x > 0.25$ et de plus en plus lentement quand κ (coefficient de diffusion) diminue.

Question 5

Avec les vitesses de convection 2D et $\kappa = 10^{-3}$, on obtient le résultat suivant :

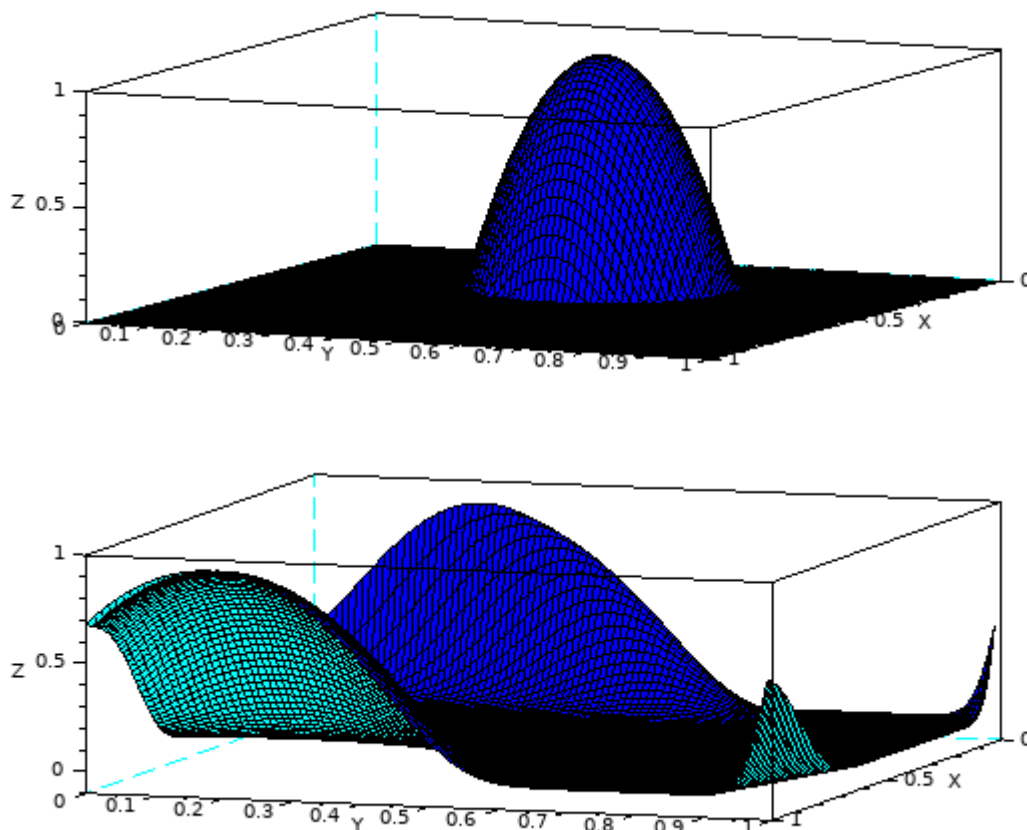


FIGURE 2 – Diffusion 2D

On analyse le résultat en remarquant deux choses.

La première est que $c(x, y)$ est ici une rotation autour de l'origine (éventuellement augmentée d'une dilatation). Ainsi, les vitesses de convections invitent la "goutte" à tourner autour de l'origine (tout en s'étalant mais cela en est indépendant).

La deuxième est que dans notre modèle, l'espace est périodique : en touchant un bord, la goutte ressort au bord opposé. On observe ici la goutte passant proche du coin $(x, y) = (1, 0)$ car la rotation est de 1 radian (nous amène de $(1, 0)$ vers $(0, 1)$ au cours du temps sachant que nous partons de $p_0 = (0.5, 0.3)$)

2 Résolution du problème de Poisson

Question 6

On rappelle l'effet de la dérivation d'une fonction f T -périodique sur ses coefficients de Fourier :

$$c_n(f') = \frac{2i\pi n}{T} c_n(f) \quad (1)$$

Or, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$c_{n,m}(f) = c_{n,m} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + c_{n,m} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

Ainsi, à y (resp. x) fixé, on peut voir l'opération $\frac{\partial}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial y}$) comme une simple dérivation et appliquer l'équation (1) :

$$\begin{cases} c_{p,q} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{2i\pi q}{L_x} c_{p,q}(\phi) = k_x c_{p,q}(\phi) \\ c_{p,q} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{2i\pi p}{L_y} c_{p,q}(\phi) = k_y c_{p,q}(\phi) \end{cases}$$

En appliquant ce résultat deux fois pour chacun des coefficients de Fourier de f , on a :

$$\hat{f}_{p,q} = (k_x^2 + k_y^2) \hat{\psi}_{p,q} \Leftrightarrow \hat{\psi}_{p,q} = \frac{\hat{f}_{p,q}}{(k_x^2 + k_y^2)} \quad (2)$$

Question 7

cf codes

Question 8

cf codes

Question 9

On exprime $\Delta\psi_\alpha$:

$$\Delta\psi_\alpha = \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial y^2}$$

Soit :

$$\Delta\psi_\alpha = -4\alpha\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) - 4\alpha\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) = -8\alpha\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

Ainsi $\Delta\psi_\alpha = \psi_1$ équivaut à :

$$\alpha = -\frac{1}{8\pi^2}$$

Question 10

En lançant le code, on obtient le rapport suivant :

```
::Testing poisson operator::
Domain size:      [1.00, 1.00]
Discretization: [64, 32]

Initializing field F(x,y).
Initializing reference solution Ref(x,y).

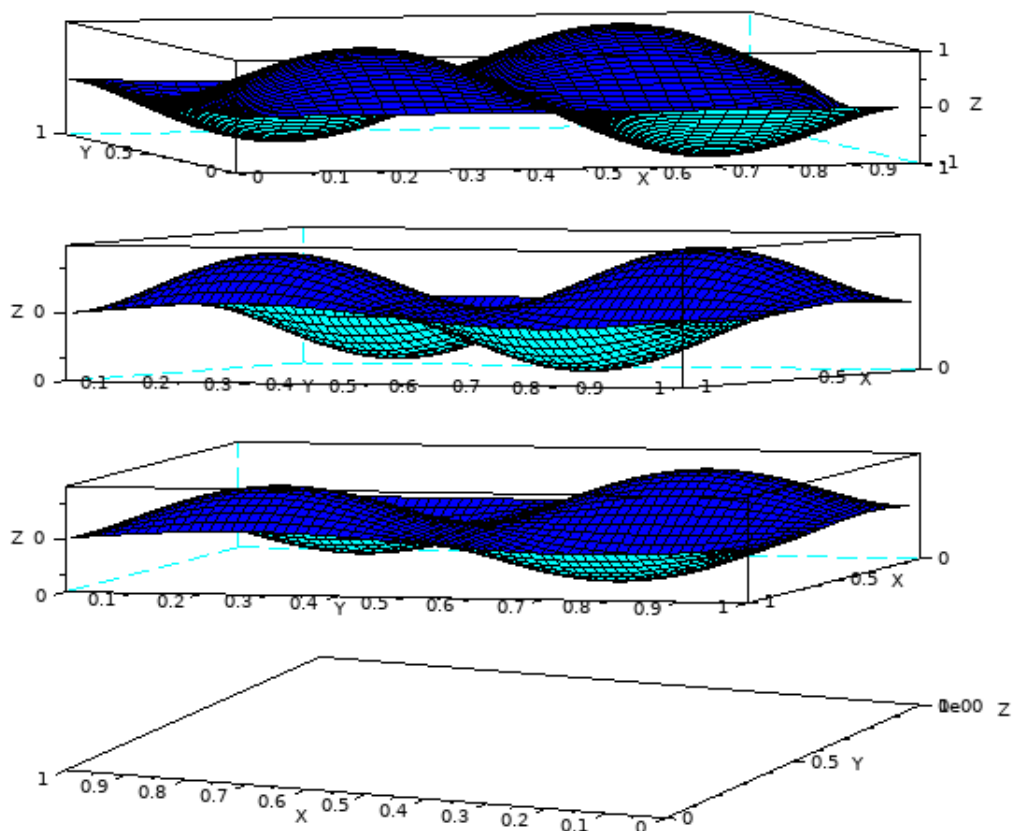
Loading poisson_2d function from file '/home/cecchio/Documents/MNB/TP/squelette/src/poisson

Computing Poisson solution Psi(x,y).
Computing error |Psi-Ref|(x,y).

Plotting everything to '/home/cecchio/Documents/MNB/TP/squelette/src/poisson/poisson_error

Maximal error is only 6.0715321659e-18f, TEST SUCCESS.
```

Et le résultat suivant :



(a) Fonction de départ, solution analytique, numérique et écart des deux

FIGURE 3 – Test du solveur 2D sur $f(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$

On remarque une erreur maximale de 10^{-17} entre la solution réelle et la solution numérique. On valide le solveur.

Question 11

En réutilisant l'équation (1), on obtient :

$$\begin{cases} (k_x^2 + k_y^2) \widehat{u_{x,p,q}} = -k_y \widehat{\omega_{p,q}} \\ (k_x^2 + k_y^2) \widehat{u_{y,p,q}} = k_x \widehat{\omega_{p,q}} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \widehat{u_{x,p,q}} = -\frac{k_y}{(k_x^2 + k_y^2)} \widehat{\omega_{p,q}} \\ \widehat{u_{y,p,q}} = \frac{k_x}{(k_x^2 + k_y^2)} \widehat{\omega_{p,q}} \end{cases} \quad (3)$$

En lançant on obtient :

```
::Testing poisson operator::
Domain size: [1.00, 1.00]
Discretization: [64, 32]

Initializing field F(x,y).
Initializing reference solution Ref(x,y).

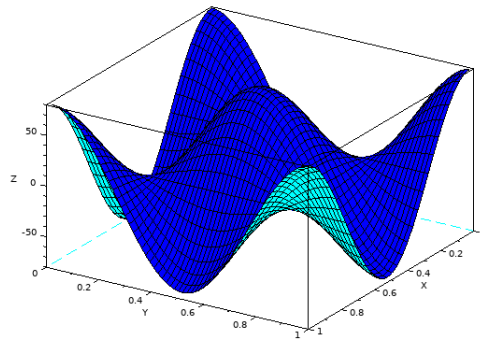
Loading poisson_curl_2d function from file '/home/hecchio/Documents/MNB/TP/squelette/src/poisson/poisson.sce'.

Computing Poisson solution Ux(x,y) and Uy(x,y).
Computing errors |Ux-Refx|(x,y) and |Uy-Refy|(x,y).

Plotting everything to '/home/hecchio/Documents/MNB/TP/squelette/src/poisson/poisson_curl_error.png'.

Maximal error for both Ux and Uy is only 3.5527136788e-15f, TEST SUCCESS.
```

On obtient les résultats suivants :



(a) $\omega(x, y)$

FIGURE 4 – Résolution numérique 2D du problème de Poisson

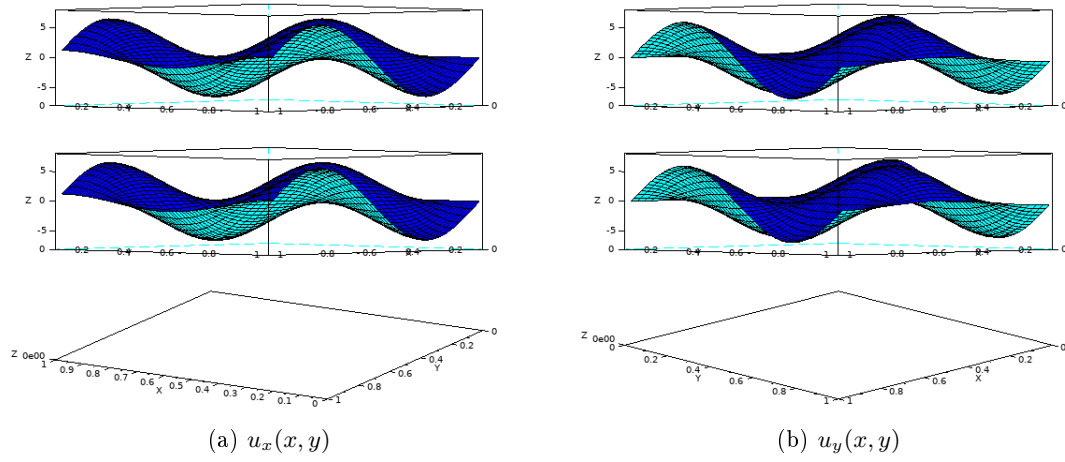


FIGURE 5 – Résolution analytique/numérique et leur écarts

Une erreur de 10^{-15} est certes plus importante que celle obtenue durant le test de l'algorithme mais elle reste négligeable. On peut aussi l'attribuer au facteur d'échelle.

3 Simulation Numérique

Question 12

On rappelle que $\tanh' = 1 - \tanh^2$. On a alors :

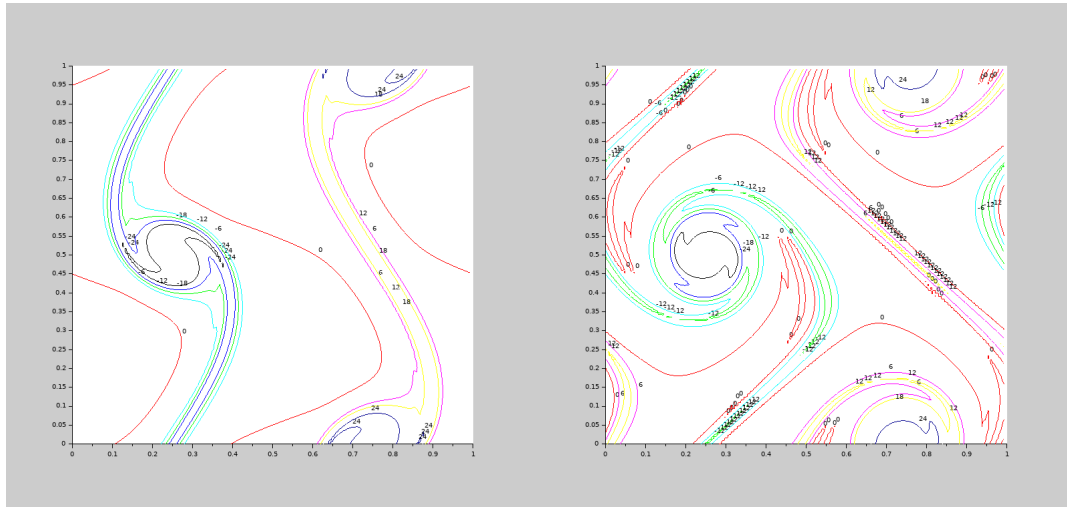
$$\begin{cases} \frac{\partial u_y^0}{\partial x} = 2\pi\delta\cos(2\pi x) \\ \frac{\partial u_x^0}{\partial y} = \begin{cases} \rho(1 - \tanh^2(\rho(y - 0.25))) & \forall y \leq 0.5 \\ \rho(\tanh^2(\rho(0.75 - y)) - 1) & \forall y > 0.5 \end{cases} \end{cases}$$

Soit :

$$\omega^0(x, y) = \begin{cases} 2\pi\delta\cos(2\pi x) - \rho(1 - \tanh^2(\rho(y - 0.25))) & \forall y \leq 0.5 \\ 2\pi\delta\cos(2\pi x) + \rho(1 - \tanh^2(\rho(0.75 - y))) & \forall y > 0.5 \end{cases} \quad (4)$$

Question 13

On obtient les résultats suivants, effectués en 244 itérations :



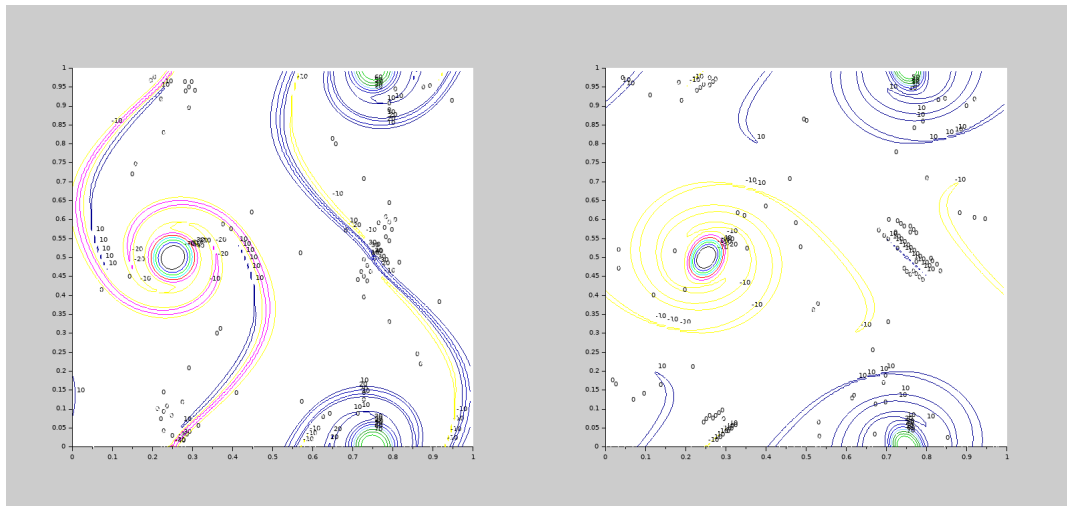
(a) $t = 0.80$

(b) $t = 1.20$

FIGURE 6 – $\nu = 10^{-4}$ $\rho = 30.0$

Question 14

On obtient les résultats suivants, effectués en 284 itérations :



(a) $t = 0.80$

(b) $t = 1.20$

FIGURE 7 – $\nu = 5 \times 10^{-5}$ $\rho = 100.0$

On peut aussi noter qu'avec une viscosité plus réduite, les tourbillons s'enrouleront plus rapidement (facteur 2 trop petit pour l'observer clairement ici), tandis que l'augmentation de la masse volumique ira à l'encontre de la dissipation de la quantité de mouvement, favorisant leur rétrécissement. Tous cela accroît fortement les risques d'erreurs. Pour compenser ce phénomène, le pas de temps est plus petit en moyenne, d'où le plus grand nombre d'itérations.

Question 15

En utilisant le solveur de problème de Poisson sur ω , on obtient le champ des vecteurs vitesse que l'on trace avec *fchamp* :

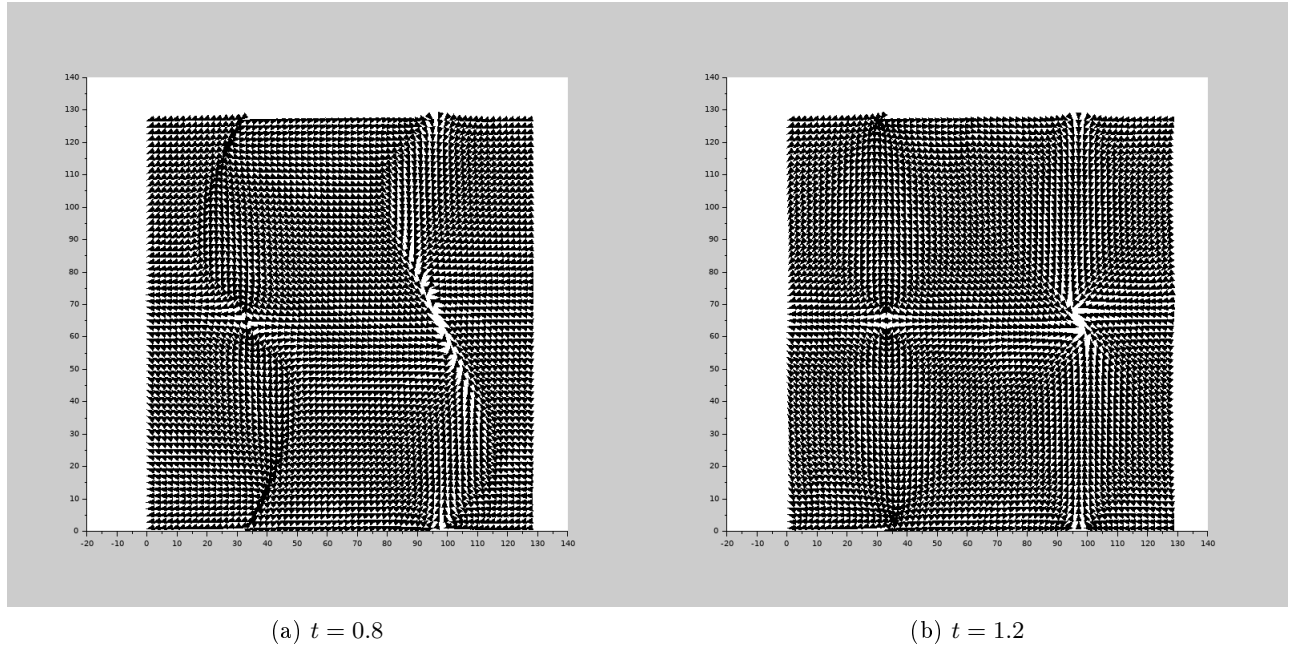


FIGURE 8 – $u(x, y)$

On remarque qu'il est difficile de représenter un champ de vecteurs sur un maillage : nous avons choisi de surcharger l'affichage de manière à visualiser les tourbillons et les principales lignes de niveau de ω .