Universität Salzburg — Florian Graf

Machine Learning

Übungsblatt **1** — 24 Punkte

Aufgabe 1. *Beispiel: Würfel* 4 P.

(a) Gegeben sei ein 6-seitiger Würfel. Bestimmen Sie den Erwartungswert der gewürfelten Augenzahl unter der Annahme, dass jede Seite gleich wahrscheinlich gewürfelt wird.

(b) Ein anderer Würfel ist möglicherweise gezinkt. Geben Sie ein Verfahren an, um den Erwartungswert experimentell zu bestimmen.

Aufgabe 2. *Beispiel: Stetige Verteilung* 6 P.

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Dichtefunktion

$$f : [-2, 2] \to [0, \infty), \quad x \mapsto \frac{3\,x^2}{16} \; .$$

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X \in (-1, 1)]$.

(b) Geben sie die kumulative Verteilungsfunktion von X an.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$.

Aufgabe 3. *Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz* 6 P.

In der folgenden Aufgabe sei X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable. Es genügt, wenn Sie einen der beiden Fälle betrachten.

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $Y = aX + b$. Folgern Sie direkt aus der Definition des Erwartungswerts dass $a\mathbb{E}[X] + b = \mathbb{E}[Y]$.

Hinweis: Y ist eine Zufallsvariable mit Ereignismenge $\mathcal{Y} = \{ax + b : x \in \mathcal{X}\}$, wobei $\mathcal{X}$ die Ereignismenge von X ist.

(b) Die Varianz von X is definiert als $\mathbb{V}[x] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$. Zeigen Sie mithilfe von Teil (a) dass $\mathbb{V}[aX + b] = a^2\mathbb{V}[X]$.

(c) Zeigen Sie dass $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

Aufgabe 4. *Normalverteilung* 8 P.

Es sei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eine standard normalverteilte Zufallsvariable, d.h., X hat die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ wobei $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Wahrscheinlichkeitsdichte in ein Koordinatensystem ein.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(c) Berechnen Sie die Varianz von X.

Hinweis. Der Erwartungswert einer Zufallsvariable $\phi(X)$ ist gegeben durch $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)dx$.
Um $\mathbb{E}[X^2]$ zu bestimmen, integrieren Sie beide Seiten der Gleichung $\frac{d(xf(x))}{x} = f(x) + x\frac{df(x)}{dx}$.

Wir schreiben $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ falls $Y = \sigma X + \mu$ wobei $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ und $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(d) Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y an.

(e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte von Y, d.h., finden Sie eine Funktion g, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{P}[Y < t] = \int_{-\infty}^{t} g(y)dy$.

Hinweis: Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[Y < t]$ zunächst durch die Dichte f der Zufallsvariable X aus. Transformieren Sie dieses Integral dann durch eine Variablensubstitution.