Universität Salzburg — Florian Graf

Machine Learning

Übungsblatt **2** — 25 Punkte

Aufgabe 1. *Grundlegende Definitionen* 3 P.

(a) Erklären Sie (informell) die Begriffe Zufallsvariable, Ereignis und Ereignisraum.

(b) Nennen Sie die Definition einer diskreten und stetigen Zufallsvariablen.

(c) Nennen Sie jeweils ein Beispiel einer diskreten und einer stetigen Zufallsvariable, sowie der zugehörigen Ereignisräumen.

Aufgabe 2. *Diskrete Zufallsvariablen – Definitionen* 3 P.

Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Ereignisraum $\mathcal{X}$.

(a) Es sei p die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X. Nennen Sie die Definitionsmenge und die Zielmenge von p. Wie ist $p(x)$ definiert?

(b) Es sei A eine Teilmenge des Ereignisraums $\mathcal{X}$. Wie lässt sich $\Pr(X \in A)$, also die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert in A annimmt, berechnen?

(c) Nennen Sie die Formel für den Erwartungswert von X und erklären Sie ihre Bedeutung.

(d) Nennen Sie die Formel für die Varianz von X und erklären Sie ihre Bedeutung.

(e) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $Y := aX + b$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b$. Berechnen Sie außerdem die Varianz $\mathbb{V}[Y]$ von Y.

Aufgabe 3. *Diskrete Zufallsvariablen – Beispiele* 6 P.

(a) Es sei $X \sim \mathrm{Ber}(\theta)$, d.h., die Zufallsvariable X folgt einer Bernoulliverteilung mit Parameter $\theta \in (0, 1)$.

   (i) Nennen Sie den Ereignisraum von X und die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X.

   (ii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(b) Es sei $X \sim \mathrm{Cat}(\boldsymbol{\theta})$, d.h., die Zufallsvariable X folgt einer Kategorischen Verteilung mit Parameter $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_C)$, wobei $\theta_i \in (0, 1)$ für alle $i = 1, \dots, C$ und $\sum_{c=1}^{C} = 1$.

   (i) Nennen Sie den Ereignisraum von X und die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X in der 'one-hot' Schreibweise.

   (ii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Es sei $X \sim \mathrm{Bin}(N, \theta)$, d.h., die Zufallsvariable X folgt einer Binomialverteilung mit Parametern $N \in \mathbb{N}$ und $\theta \in (0, 1)$.

   (i) Nennen Sie den Ereignisraum von X und die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X.

   (ii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 4. *Stetige Zufallsvariablen – Definitionen* 3 P.

Es sei X eine stetige Zufallsvariable mit Ereignisraum $\mathcal{X}$.

(a) Es sei P die kumulative Wahrscheinlichkeitsfunktion von X. Nennen Sie die Definitionsmenge und die Zielmenge von P. Wie ist $P(x)$ definiert?

(b) Wie ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von X definiert?

(c) Es sei A eine Teilmenge des Ereignisraums $\mathcal{X}$. Wie lässt sich $\Pr(X \in A)$, also die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert in A annimmt, berechnen?

(d) Wie lautet die Formel für den Erwartungswert von X.

(e) Wie lautet die Formel für die Varianz von X.

(f) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $Y := aX + b$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b$.

Aufgabe 5. *Stetige Zufallsvariablen – Beispiele* 6 P.

(a) Es sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, d.h., die Zufallsvariable X folgt einer (univariaten) Normalverteilung mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$.

   (i) Nennen Sie den Ereignisraum von X und die Wahrscheinlichkeitsdichte von X.
   (ii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(b) Es sei $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, d.h., die Zufallsvariable X folgt einer stetigen Gleichverteilung auf dem Interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

   (i) Nennen Sie den Ereignisraum von X und die Wahrscheinlichkeitsdichte von X.
   (ii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Es sei $X \sim \text{Expon}(\lambda)$, d.h., die Zufallsvariable X folgt einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$.

   (i) Nennen Sie den Ereignisraum von X und die Wahrscheinlichkeitsdichte von X.
   (ii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 6. *Bedingte Verteilungen – Definitionen* 4 P.

Es seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit Ereignisräumen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$.

(a) Es sei $p_{X,Y}$ die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und Y. Nennen Sie die Definitionsmenge und die Zielmenge von $p_{X,Y}$. Wie ist p definiert?

(b) Wie ist die Randverteilung von X definiert?

(c) Wie ist die bedingte Verteilung von X gegeben $Y = y$ definiert?

(d) Wie ist die Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen X und Y definiert.

(e) Nennen Sie ein Beispiel zweier Zufallsvariablen die der gleichen Verteilung folgen und unabhängig sind. Nennen Sie auch ein Beispiel zweier Zufallsvariablen die der gleichen Verteilung folgen und nicht unabhängig sind.

(f) Wie ist die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ zweier Zufallsvariablen X und Y definiert?

(g) Nun seien X und Y unabhängig. Berechnen Sie $E[XY]$ und $\text{Cov}[X, Y]$.