Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4140 Diskret Matematikk
Høst 2021

Løsningsforslag — Øving 6

Seksjon 6.5

$\boxed{6}$ Vi skal velge 5 "elementer" ut fra 3 "sorter". Ifølge Teorem 2 er det

$$\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$$

måter å gjøre dette på.

$\boxed{14}$ Å løse ligningen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ når hver x_i skal være et ikke-negativt heltall tilsvarer å velge ut 17 "1'ere" ut fra 4 "sorter 1'ere" (en sort for hver x_i). Teorem 2 gir

$$\binom{4+17-1}{17} = \binom{20}{17} = 1140 \text{ løsninger.}$$

$\boxed{32}$ Me har elleve (11) teikn. "S"-en og "I"-en repeterer seg fire (4) gonger. "P"-en repeterer seg to (2) gonger. Altså er talet strenger lik

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34,650. \tag{1}$$

$\boxed{56}$ Moglege partisjonar er: $(0,0,5)$, $(0,1,4)$, $(0,2,3)$, $(1,1,3)$, $(1,2,2)$. Det er ikkje vanskeleg å sjå at dette er uttømmande. Altså er det fem (5) moglege måtar å distribuera ballane på.

Seksjon 8.1

$\boxed{11}$ a) La a_n vera dette talet. Viss du går opp eitt trappetrinn ved fyrste steg, har du a_{n-1} alternativ. Derimot viss du går opp to trappetrinn ved fyrste steg, har du a_{n-2} alternativ. Totalt har du (for $n \geq 2$)

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \tag{2}$$

val.

$a_0 = a_1 = 1$

$a_2 = 1+1$, $a_3 = 2+1$, $a_4 = 3+2$, $a_5 = 5+3$, $a_6 = 8+5$, $a_7 = 13+8$, $a_8 = 21+13 = 34$.

20 Ein "nickel" er 5 cent og ein "dime" er 10 cent. La a_n vera talet måtar sjåføren kan betala på.

a) Viss den siste pengen er ein "nickel" kan han betala på a_{n-5} måtar. Ellers kan han betala på a_{n-10} måtar. Altså er (gitt $n \geq 10$)

$$a_n = a_{n-5} + a_{n-10}. \tag{3}$$

b) Det er enkelt å sjå at $a_5 = a_{10}$. Nyttar med rekursjonen får me $a_{45} = a_{40} + a_{35} = \ldots = 45$.

Seksjon 8.2

3 c) Den karakteritiske likninga til rekursjonen er

$$r^2 - 5r + 6 = 0,$$

som har løysingane $r = 2$ og $r = 3$, altså er løysinga på formen $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$ for tal c_1, c_2. Ved å nytta initialvilkåra får me at $c_1 = 3$ og $c_2 = -2$, altså er

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

d) $a_n = 6 \cdot 2^n - 2n2^n$.

e) $a_n = (-1/2)n \cdot 2^n$.

g) $a_n = 2^{-(n+1)}(1 + (-1)^n)$.

6 La a_n vera talet meldingar som kan bli sendt i løpet av n mikrosekund. Det er klart at $a_0 = a_1 = 1$. Generelt (for $n \geq 2$) har me

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

som har den karakteristiske likninga $r^2 - r - 2 = 0$. Løyser med denne som før, får me til slutt

$$a_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+1}\right). \tag{4}$$

11 a) Me prover dette med induksjon. Basissteget med $n = 1$ er klart. For $n + 1$ har me

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} \\ &= f_{n-1} + f_{n+1} + f_{n-2} + f_n \\ &= (f_{n-2} + f_{n-1}) + (f_n + f_{n+1}) \\ &= f_n + f_{n+2}. \end{aligned}$$

b) Den karakteristiske likninga er $r^2 - r - 1 = 0$. Løyser me denne, får me

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{5}$$

42 Den karakteristiske likninga er igjen $r^2 - r - 1 = 0$. Løys denne med initialvilkåra $a_0 = s$ og $a_1 = t$ på same måte.