Topic 1

onsdag 17. mars 2021 11:03

Topic 1

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$

$t \in \mathbb{R}$

Vi antar et objekt beveger seg i rommet, altså $\mathbb{R}^3$,
slik at koordinatene til objektet til enhver tid er kontinuerlige funksjoner $x = f(t)$, $y = g(t)$ og $z = h(t)$ der t er en variabel på et intervall I.
Veien objektet tar er da kurven γ og γ er en parametrisk kurve der t er en parameter.
$\gamma = (\cos(t), \sin(t), t)$ beskriver banen til et objekt som beveger seg i en spiral oppover rundt z-aksen når t øker.
Hvis vi ønsker å finne lengden dette objektet veveger seg på et intervall $I = [t_0, t]$ må vi finne buelengden.
Buelengden $s(t) = \int_{t_0}^{t} ds$ må vi først finne buelengdeelementet $ds = |\dot{\gamma}(t)|\,dt$ der $\dot{\gamma}(t)$ er hastigheten og $|\dot{\gamma}(t)|$ er farten til objektet.

$$
\begin{aligned}
|\dot{\gamma}(t)| &= \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} \\
&= \sqrt{1+1} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Så lengden objektet beveger seg blir $s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{2}\, d\tau$.
Dersom $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$ kalles kurven glatt kontinuerlig deriverbar.
Man kan også se på kurver som geometriske objekter der posisjonene til et sett av objekter er gitt av en vektorfunksjon:

$$\gamma(t) = f(t)\,i + g(t)\,j + h(t)\,k$$

der $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ og $k = (0,0,1)$.
$r = r(s)$ kalles en buelengdeparameterisering.

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\,\tau = \sqrt{2}\,t$$

$$t = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$r(s) = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) i + \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) j + \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) k$$

En buelengdeparameterisering har enhetsfart, altså $|r'(s)| = 1$.
$\hat{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ er enhetstangent vektoren.
Med buelengde parameterisering blir $\hat{T}(s) = r'(s)$ fordi $|r(s)| = 1$.
Enhetstangenvektoren er tangenten til $\gamma(t)$ i et punkt $\gamma(t_0)$.

$$\hat{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(t), \cos(t), 1)$$

$$\hat{T}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Enhetsnormalen $\hat{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \frac{d\hat{T}}{ds}$ er vinkelrett til γ i punktet $r(s)$
$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$ er krumningen til γ i et punkt $r(s)$.

$$
\begin{aligned}
\kappa(s) &= \left|\frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)\right| \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{N}(s) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right) \\
&= \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)
\end{aligned}
$$

Binormalen $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$ er kryssproduktet til enhetstangenten og enhetsnormalen.

$$
\begin{aligned}
\hat{B} &= \hat{T} \times \hat{N} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \times \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right), \frac{1}{2} \cdot \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$