TMA4140 Diskret Matematikk
Høst 2021

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 3

Seksjon 3.1

53

a) $2 \cdot 25 + 1 \cdot 1$ cent.

b) $2 \cdot 25 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1$ cent.

c) $3 \cdot 25 + 1 \cdot 1$ cent.

d) $2 \cdot 25 + 1 \cdot 10$ cent.

55 Uten nickels (femmere) gir den grådige algoritmen optimal løsning på del **a)**, **c)** og **d)** fordi den i disse tilfellene gjør de samme valgene som den grådige algoritmen gjør med nickels (og vi vet at den grådige algoritmen med alle fire myntene alltid gir optimal løsning).

På **b)** gir den grådige algoritmen 12 mynter, men dette er ikke optimalt da man kan veksle i 1 quarter, 4 dimes og 4 pennies.

56 Her er det nok å finne et eksempel der den grådige algoritmen ikke bruker færrest mulig mynter. F.eks. er $10c+5c = 15c$, men den grådige algoritmen vil at vi skal bruke fire mynter ($12c + 3 \cdot 1c$) i stedet for to.

Seksjon 3.2

Husk at $\log x$ betyr $\log_2 x$ i læreboken.

27

a) For $n \geq 1$ har vi $\log(n^2+1) \leq \log(n^2+n^2) = \log(2n^2) = \log 2 + 2\log n \leq 3\log n$, så $\log(n^2+1)$ er $O(\log n)$. Ved Teorem 3 får vi at $n\log(n^2+1)$ er $O(n\log n)$. Ved Teorem 2 får vi at $n\log(n^2+1) + n^2\log n$ er $\underline{\underline{O(n^2\log n)}}$.

b) For $n \geq 1$ har vi $(n\log n+1)^2 = n^2(\log n)^2 + 2n\log n + 1$ som er $O(n^2(\log n)^2)$ ved Teorem 2. Ved Teorem 2 har vi at $\log n + 1$ er $O(\log n)$ og at n^2+1 er $O(n^2)$. Kombinert med Teorem 3 får vi at $(\log n+1)(n^2+1)$ er $O(n^2\log n)$. Igjen ved Teorem 2 får vi til slutt at $(n\log n+1)^2 + (\log n+1)(n^2+1)$ er $\underline{\underline{O(n^2(\log n)^2)}}$.

30 **c)** For $x > \frac{1}{2}$ gjelder $\frac{1}{2}x \leq \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \leq 2x$. Dette viser at $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ er $\Theta(x)$. Valget av konstanter her er ikke unikt. Det eksisterer uendelig mange valg av konstanter som passer sammen. Alle valg av konstanter C_1, C_2 og k slik at $C_1 x \leq \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \leq C_2 x$ for alle $x > k$ viser at funksjonene er av samme orden.

e) Husk at $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. I base 2 og base 10 får vi $\log_{10} x = \frac{\log x}{\log 10}$, som gir $\log x = (\log 10) \log_{10} x$. Fra dette ser vi at $\log_{10} x$ er $\Theta(\log x)$ siden $(\log 10) \log_{10} x \leq \log x \leq (\log 10) \log_{10} x$ for alle $x > 0$.

34 **a)** For $x > 1$ har vi

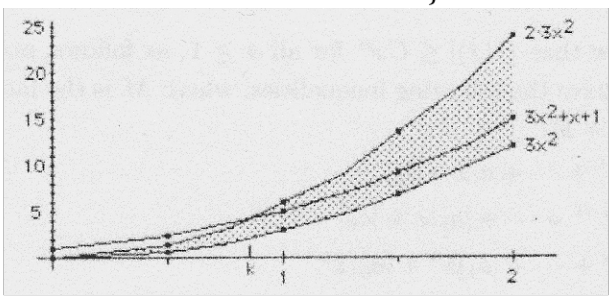
$$3x^2 \leq 3x^2 + x + 1$$

og

$$3x^2 + x + 1 \leq 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2 \leq 6x^2 = 2 \cdot 3x^2.$$

Dette viser at $3x^2 + x + 1$ er $\Theta(3x^2)$. Valget av konstanter er $C_1 = 1, C_2 = 2$ og $k = 1$.

b) Under er et bilde som viser at funksjonene er av samme orden.



42 Nei. Et eksempel på at dette ikke stemmer er $f(x) = 2x$ og $g(x) = x$. Vi vet at $2x$ er $O(x)$, men vi vet også at $2^{2x} = 4^x$ *ikke* er $O(2^x)$.

Seksjon 4.1

11 **a)** 7:00.

b) 8:00.

c) 10:00.

42

$$\begin{aligned} a &\equiv b \pmod{m} \\ m &\mid (a-b) \\ mc &\mid (ac-bc) \\ ac &\equiv bc \pmod{mc} \end{aligned}$$