Eksamen

1.

(a)

Obs.	Positivt	Negativt	Tot.
Menn	290	1345	1635
Kvinner	177	1011	1188
Tot.	467	2356	2823

H_0: Tildeling er ikke avhengig

H_1: Tildeling er avhengig

$\alpha = 0.05$

$d.f. = (2-1)(2-1) = 1$

$X_{0.05,1} = 3.841$

Forv.	Positivt	Negativt	Tot.
Menn	$\frac{467 \cdot 1635}{2823} = 270.47$	$\frac{2356 \cdot 1635}{2823} = 1364.53$	1635
Kvinner	$\frac{467 \cdot 1188}{2823} = 196.53$	$\frac{2356 \cdot 1188}{2823} = 991.47$	1188
Tot.	467	2356	2823

$$X^2 = \frac{(290-270.47)^2}{270.47} + \frac{(1345-1364.53)^2}{1364.53} + \frac{(177-196.53)^2}{196.53} + \frac{(1011-991.47)^2}{991.47}$$

$= 4.015$

$X^2 > X^2_{0.05,1} \Rightarrow$ Forkaster H_0

Tildelingen er avhengig av kjønn

(b) Anova eller to-utvalgs t-test

2.

(a) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$

$f_{T_n}(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}, \quad -\infty < t < \infty$

$n = 1$ gir:

$f_{T_n}(t) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})(1+t^2)}$

$= \frac{1}{\pi(1+t^2)}$

$\lim_{t \to \infty} F_{T_n}(t) = 1$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = 1$

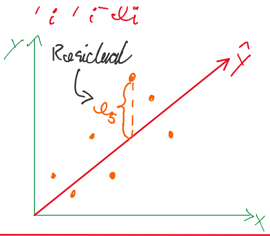
$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$

Symmetri $\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

3.

(a) Residual er forskjellen mellom den observerte y-verdien og den predikerte y-verdien

$Y_i - \hat{Y}_i = e_i$



(b) $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n$

$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

Antar Y_i normalfordelt

$L = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{Y_i - \beta x_i}{\sigma}\right)^2}$

$\ln(L) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i - \beta x_i}{\sigma}\right)^2$

$-2\ln(L) = n\ln(2\pi) + n\ln(\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta x_i)^2$

$\frac{\partial(-2\ln(L(\beta)))}{\partial\beta} = \frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta x_i)(-1) = 0$

$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta x_i) = 0$

$\sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n}\beta x_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum Y_i}{\sum x_i}$

$\frac{\partial(-2\ln(L(\sigma^2)))}{\partial\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta x_i)^2 = 0$

$\hat{\beta}$ er normalfordelt fordi den er en lin. komb. av uavh. normalfordelte variabler

4.

(a) Median $\tilde{\mu}$ for en kont. stokastisk variabel Y er det punktet der $P(Y \le \tilde{\mu}) = \frac{1}{2}$ og $P(Y \ge \tilde{\mu}) = \frac{1}{2}$

$H_0: \tilde{\mu} = 2500$ mot $H_1: \tilde{\mu} > 2500$

X = antall priser som er mer enn 2500

$X \sim Bin(12, \frac{1}{2})$ under H_0

Forkaster H_0 hvis $X \ge c$

x	P(X=x)
0	0.000
1	0.003
2	0.016
3	0.054
4	0.121
5	0.193
6	0.226
7	0.193
8	0.121
9	0.054
10	0.016
11	0.003

10	0.016
11	0.003
12	0.000

Ønsker $P(X \geq x) = 0.05$

$\Rightarrow$ P-verdi $= P(X=12) + P(X=11) + P(X=10)$

$= 0.019$

Konkluderer med at H_0 forkastes dersom X er større enn 10

(b) Dersom vi vil bruke Wilcoxons ett-utvalgstest må vi anta at fordelingen er symmetrisk

$\Rightarrow \tilde{\mu} = \mu$

$H_0: \mu = 2500$ mot $H_1: \mu > 2500$

$Y_i - 2500$	-510	-110	-50	80	90	110	175	270	690	940	1900	3000
Sign	−	−	−	+	+							
z	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
r	8	4.5	1	2	3	4.5	6	7	9	10	11	12
$r \cdot z$				2	3	4.5	6	7	9	10	11	12

$W_+ = \sum_{i=1}^{12} r_i \cdot z_i$

$= 2+3+4.5+6+7+9+10+11+12$

$= 64.5$

Kritisk verdi er 61 når $\alpha = 0.05$ ifølge tabell i boka

$\Rightarrow$ Vi forkaster H_0

(c) $H_0: \mu_O = \mu_H = \mu_T$ mot H_1: minst en ulik

$\alpha = 0.05$

$B = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{R_j^2}{n_j} - 3(n+1)$

$n = 12+8+8 = 28$

Oppdal:	(1) 1990	(3) 2390	(4) 2450	(5) 2580	(6) 2590	(7) 2610	(9) 2675	(11) 2770	(18) 3190	(22) 3440	(25) 4400	(28) 5500
Hafjell:	(8) 2660	(12) 2810	(13) 2880	(14) 2900	(15) 2950	(20) 3290	(26) 4830	(27) 5320				
Trysil:	(2) 2070	(10) 2730	(16) 3080	(17) 3150	(19) 3230	(21) 3370	(23) 3620	(24) 4125				

$R_{\cdot O} = 1+3+4+5+6+7+9+11+18+22+25+28$

$= 139$

$R_{\cdot H} = 8+12+13+14+15+20+26+27$

$= 127$

$R_{\cdot T} = 2+10+16+17+19+21+23+24$

$= 132$

$B = \frac{12}{28(29)}\left(\frac{139^2}{12} + \frac{127^2}{8} + \frac{132^2}{8}\right) - 3(29)$

$= -1.2235$

$\chi^2_{0.05,2} = 5.991$

$13 \not> \chi^2_{0,05,2}$ $\Rightarrow$ Vi beholder H_0

Det tyder ikke på at det er en prisforskjell

(d) Hvis salgsprisene var normaltfordelte med samme varians så kan man bruke ANOVA