Eksamen

1. $f_1,\dots,f_n$ S.A. $f_i(x_i)=1$, $f_i(x_j)=0$ når $i\neq j$ hvor $x_1<x_2<\dots<x_n$

(a) Lineært uavhengig betyr at $c_1f_1+\dots+c_nf_n=0$ hviss $c_i=0$

Siden $f_i(x_i)=1$ vil $c_1f_1(x_1)+c_2f_2(x_2)+\dots+c_nf_n(x_n)=c_1\cdot 1+c_2\cdot 1+\dots+c_n\cdot 1$

Som vil si at $c_i=0$, som vil bety at $\{f_1,\dots,f_n\}$ er lineært uavhengig

(b)

(c) $g(03.05.21)=97$

$a_i=f(x_i)=\ln(g(x_i)+0.1)$, $x_1,\dots,x_{10}$

Det vil alltid finnes et polynom p S.A. $a_i=p(x_i)$ $\forall x_1,\dots,x_{10}$ fordi:

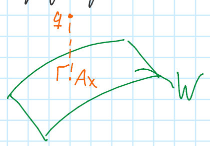
$g(x_i)\geq 0$ fordi vi kan ikke ha negativt registrerte smittede på en dato

Som vil si at $a_i=\ln(g(x_i)+0.1)$ alltid finnes

(d) Ved minste kvadraters metode kan vi finne $E=\|q-Ax\|^2$

der $A=\begin{pmatrix} f_1(x_1), & f_2(x_1), & \dots, & f_m(x_1) \\ \vdots & & & \\ f_1(x_{10}), & f_2(x_{10}), & \dots, & f_m(x_{10}) \end{pmatrix}$

Ved projeksjonsteoremet kan vi finne x S.A. $E=\|q-Ax\|^2$



$q-Ax\perp R(A)=W$

d.v.s. $\langle q-Ax, Az\rangle=0\ \forall z$

$\langle A^*(q-Ax), z\rangle=0\ \forall z$

d.v.s. $A^*Ax=A^*q$

Dette har alltid løsning fordi:

$R(A^*)=R(A^*A)$

Vi har 10 punkter så med minste kvadraters metode kan vi finne et polynom som er maks 10. grads.

d.v.s. at vi kan produsere en 3. grads polynom q

(e) Jeg ville valgt p fordi antall smittede varierer så mye at et 3. gradspolynom vil være for upresist

Et 3. gradspolynom kan også bli negativ, og den kan bevege seg slik at antall smittede vil gå mot uendelig

2. $Dx(t)=x'(t)=\lim_{\delta\to 0}\frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta}$

$p(z)=(z-i)(z+i)(z+5)$

$A=p(D)$

$b\in V$

$A = p(D)$

$b \in V$

(a) $p(D) = (D-i)(D+i)(D+5)$

$\overset{\text{Kalk.}}{=} D^3 + 5D^2 + D + 5$

$p(D)x = D^3x + 5D^2x + Dx + 5x$

$= x''' + 5x'' + x' + 5x$

$x''' + 5x'' + x' + 5x = b$

n-te orden differensial ligning er på formen

$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x^{(1)} + a_0 x = b$

Vi vet at $V = \{x : x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$

Som vil si at $p(D)x = b$ er en 3. ordens differensialligning og $x \in V$

(b) $Ax = 0$

$x''' + 5x'' + x' + 5x = 0$

$p(t) = t^3 + 5t^2 + t + 5$

$= (x+5)(x^2+1)$

$= (x+5)(x+i)(x-i)$

$\Rightarrow x = -5 \vee x = -i \vee x = i$

Som vil si at Basis blir $\{e^{-5t}, e^{it}, e^{-it}\}$

Siden basisen til $N(A)$ har tre elementer vil $\dim(N(A)) = 3$

(c) $Ax = b$ har ikke alltid en løsning

3(a) Vektorer har ikke alltid en lengde

En vektor i et normert rom har alltid en lengde

Og et indreproduktrom er alltid normalisert, så alle vektorer i et indreproduktrom har lengde

Men siden 0 vektoren har ingen lengde, kan den ikke bli normalisert

Det vil si at alle vektorer ikke har en lengde

(b) Den adjungerte operatoren finnes alltid i Hilbertrom, fordi den er definert slik

Teorem 6.9 sier at hvis dimensjonen til et indreproduktrom er endelig så finnes det en adjungert operator

Men dette er ikke sant hvis dimensjonen er uendelig

Hvis A er definert av en matrise finnes den alltid