Innleveringsoppgave 1

Ola Rasmussen og William Wale

Topic 1

$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$

$t \in \mathbb{R}$

Vi antar et objekt beveger seg i rommet, altså $\mathbb{R}^3$

slik at koordinatene til objektet til enhver tid er kontinuerlige funksjoner $x=f(t)$, $y=g(t)$ og $z=h(t)$ der t er en variabel på et intervall I.

Veien objektet tar er da kurven γ og γ er en parametrisk kurve der t er en parameter.

$\gamma=(\cos(t),\sin(t),t)$ beskriver banen til et objekt som beveger seg i en spiral oppover rundt z-aksen når t øker.

Hvis vi ønsker å finne lengden dette objektet beveger seg på et intervall $I=[t_0,t]$ må vi finne buelengden.

Buelengden $s(t)=\int_{t_0}^{t} ds$ må vi først finne buelengdeelementet $ds=|\dot\gamma(t)|\,dt$ der $\dot\gamma(t)$ er hastigheten og $|\dot\gamma(t)|$ er farten til objektet.

$$|\dot\gamma(t)| = \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2+\left(\frac{dg}{dt}\right)^2+\left(\frac{dh}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)+1}$$
$$=\sqrt{1+1}$$
$$=\sqrt{2}$$

Så lengden objektet beveger seg blir $s(t)=\int_{t_0}^{t} \sqrt{2}\,dt$.

Dersom $|\dot\gamma(t)|\neq 0$ kalles kurven glatt, altså kurven er kontinuerlig deriverbar.

For å finne akselerasjonen til objektet må vi derivere hastigheten.

$$\ddot\gamma(t)=0$$

Akselerasjonen er null, så objektet beveger seg opp i spiralen med konstant fart.

Man kan også se på kurver som geometriske objekter der posisjonene til et sett av objekter er gitt av en vektorfunksjon:

$$\gamma(t)=f(t)i+g(t)j+h(t)k$$

der $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$ og $k=(0,0,1)$.

$f(t)$ er da x, $g(t)$ er y og $h(t)$ er z.

Disse funksjonene gir da punktene på kurven γ, og vi sier da at kurven er parametrisert.

Det finnes mange måter å parametrisere på.

En måte å parametrisere på er med polarkoordinater:

$$x=r\cos(\theta),$$
$$y=r\sin(\theta),$$
$$x^2+y^2=r$$

$r=r(s)$ kalles en buelengdeparametrisering.

$$s(t)=\int_0^t \sqrt{2}\,\tau=\sqrt{2}\,t$$
$$t=\frac{s}{\sqrt{2}}$$
$$r(s)=\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)i+\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)j+\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)k$$

En buelengdeparametrisering har enhetsfart, altså $|r'(s)|=1$.

$\hat{T}(t)=\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ er enhetstangent vektoren.

Med buelengde parametrisering blir $\hat{T}(s)=r'(s)$ fordi $|v(s)|=1$.

Enhetstangenvektoren er tangenten til $\gamma(t)$ i et punkt $\gamma(t_0)$.

$$\hat{T}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(t),\cos(t),1)$$
$$\hat{T}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Enhetsnormalen $\hat{N}(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\cdot\frac{d\hat{T}}{ds}$ er vinkelrett til γ i punktet $r(s)$

$\kappa(s)=\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$ er krumningen til γ i et punkt $r(s)$.

$$\kappa(s)=\left|\frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),0\right)\right|$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{\ldots}}$$

$$\kappa(s)=\left|\tfrac{1}{2}\left(-\cos\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),-\sin\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),0\right)\right|$$
$$=\sqrt{\tfrac{1}{4}\cos^2\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right)+\tfrac{1}{4}\sin^2\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right)}$$
$$=\sqrt{\tfrac{1}{4}}$$
$$\hat{N}(s)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{2}\left(-\cos\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),-\sin\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),0\right)$$
$$=\left(-\cos\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),-\sin\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),0\right)$$

Binormalen $\hat{B}=\hat{T}\times\hat{N}$ er kryssproduktet til enhetstangenten og enhetsnormalen.

$$\hat{B}=\hat{T}\times\hat{N}$$
$$=\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),\cos\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\times\left(-\cos\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),-\sin\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),0\right)$$
$$=\left(-\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\sin\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right)\right),\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\cos\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right)\right),-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\sin\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\cos\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),-\tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),-\tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{s}{\sqrt{2}}\right),\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Med binormalen, enhetsnormalen og enhetstangentvektoren kan utspenne et lite koordinatsystem med origo i et punkt $r(s_0)$

TopicDette koordinatsystemet Frenetrammen: $\{\hat{T},\hat{N},\hat{B}\}$

Kjerneregelen er en formel som beskriver hvordan man kan derivere komposisjoner av funksjoner.

Om $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ og $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, og f og g er deriverbare på et intervall I sier vi at:

$$\frac{d}{dx}(f\circ g)(x)=\frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

eller:

$$\left(f(g(x))\right)'=g'(x)\cdot f'(g(x))$$

Dette er enkelt å gjøre i én dimensjon, men man kan generalisere regelen til funksjoner $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ og $g:\mathbb{R}^w\to\mathbb{R}^n$ der $n,m,w\in\mathbb{R}$.

Før vi kan formulere denne generelle regelen må vi først forklare hva en gradient er, og hva en Jacobi-matrise er.

Om man har en funksjon $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, kan man lage en vektorfunksjon:

$$\nabla f(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

Altså, en vektor hvor det j-te elementet er f's partiellderiverte med hensyn på x_j.

Funksjonen $\nabla f(x)$ kaller vi gradienten til f.

Om f er en funksjon som tar vektor-verdier, er $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ også en vektor, så om vi ønsker å finne gradienten til en funksjon $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, lager vi en matrise hvor hver rad er gradienten til en komponent av f, og denoter den $J_f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, altså:

$$J_f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{bmatrix}\nabla f_1\\ \nabla f_2\\ \vdots\\ \nabla f_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

Nå kan vi si kjerneregelen generelt.

Om $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ og $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ har vi at:

$$\nabla(f\circ g)(x)=\left(J_f(g(x))\right)\cdot\left(\nabla g(x)\right).$$

Hver rad er $\left[\frac{\partial f_i}{\partial g_1},\frac{\partial f_i}{\partial g_2},\ldots,\frac{\partial f_i}{\partial g_n}\right]$

Så ∇ blir en vektor der k-te element er

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f\circ g)_k(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_k}{\partial g_i}\cdot\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

Vi kan demonstrere dette når vi ønsker å finne $\nabla(f\circ\gamma):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ hvor $f=(xy)^2$ og $\gamma=(a\cos(t),b\sin(t))$.

Der er ∇f med hensyn på g:

$$\left[2xy^2,\ 2yx^2\right]$$

og

$$\nabla\gamma=\begin{pmatrix}a\cos(t)\\ -b\sin(t)\end{pmatrix}$$

og $\nabla(f\circ\gamma)$ blir da:

$$\nabla g = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ -b\sin(t) \end{pmatrix}$$

og $\nabla(f \circ g)$ blir da:

$$2xy^2 a\cos(t) - 2xy^2 \sin(t) = 2(a^2\cos^2(t)\sin^2(t) - b^2\cos^2(t)\sin^2(t))$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\sin^2(2x)$$

For å finne andrederiverte, repeterer vi prosessen.