Seksjon 4.4

21 Siden $2, 3, 5$ og 11 er forskjellige primtall er de parvis relativt primiske. Vi kan derfor bruke det kinesiske restteoremet.

$$
\begin{aligned}
m &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330 \\
M_1 &= \frac{330}{2} = 165 \equiv 1 \pmod{2} \\
M_2 &= \frac{330}{3} = 110 \equiv 2 \pmod{3} \\
M_3 &= \frac{330}{5} = 66 \equiv 1 \pmod{5} \\
M_4 &= \frac{330}{11} = 30 \equiv 8 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

Finner en invers y_k til hver av tallene M_k: $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 1, y_4 = 7$. Dersom vi lar $x_k = a_k M_k y_k$, så er

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 \cdot 165 \cdot 1 = 165 \\
x_2 &= 2 \cdot 110 \cdot 2 = 440 \\
x_3 &= 3 \cdot 66 \cdot 1 = 198 \\
x_4 &= 4 \cdot 30 \cdot 7 = 840
\end{aligned}
$$

x_1 løser den første ligningen og er null i de andre. x_2 løser den andre ligningen og er null i de andre osv... Summen av disse fire tallene, $x = 1643$, vil da løse alle fire ligningene. Fra det kinesiske restteoremet vet vi at denne løsningen er entydig modulo 330, altså er $x \equiv 1643 \equiv 323 \pmod{330}$. Så svaret er alle tall x som kan skrives på formen $x = 323 + 330k$, hvor k er et heltall.

33 Siden 13 er et primtall som ikke deler 7 så har vi fra Fermats lille teorem at $7^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Ved å bruke dette får vi

$$7^{121} = 7^{10\cdot 12+1} = \left(7^{12}\right)^{10} \cdot 7 \equiv 1^{10} \cdot 7 \equiv 7 \pmod{13}.$$

37 **a)** 11 er et primtall som ikke deler 2, dermed er $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Dette gir

$$2^{340} = \left(2^{10}\right)^{34} \equiv 1^{34} \equiv 1 \pmod{11}.$$

Seksjon 6.1

27 Vi kan velge mellom 3 representanter fra hver av de 50 delstatene. Antall måter komiteen kan dannes på blir da $3 \cdot 3 \cdots 3 = 3^{50}$.

44 Det er $4642/22 = 211$ ansatte i firmaet.

Seksjon 6.2

10 La $\{t_i\}_i$ vera elementa til T og $\{s_i\}_i$ elementa til S. Sjå for deg t_i som hòla og $f(t_i)$ som duene. Då følgjer det frå duehòlprinsippet at det finst eit par $t_i \neq t_J$ slik at $f(t_i) = f(t_j)$.

18 Det er mulig å arrangere de åtte tallene parvis slik at de danner fire par hvor hvert par summerer til 16. Man ser at det er mulig å ta ut fire elementer uten å ta ut begge elementene i et par, men hvis man tar ut fem elementer må man ta ut et helt par, altså hvis man tar ut fem elementer er man garantert å få et par som summerer til 16.

Seksjon 6.3

13 Det er $n!$ måtar å arrangera mennene på, og $n!$ måtar å arrangera kvinnene på. Til saman blir det då $(n!)^2$ måtar. Men viss me t.d. byrjar med ein mann i staden for ei kvinne, får me like mange kombinasjonar. Altså er talet mogleg kombinasjonar lik $2(n!)^2$.

19 **b)** Vi skal ha akkurat to "heads" blant ti, vi har altså da utplukk av to fra ti (eller ekvivalent åtte "tails" av ti), da får vi

$$\binom{10}{2} = 45.$$

c) Tilsvarende kan vi ha henholdsvis null "tails", en "tail", to "tails" eller tre "tails". Vi har en prosess med "eller", dermed summerer vi og får,

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + 45 + 120 = 176.$$

34 (a) Det er totalt 26^6 strenger av lendge 6, og 25^6 strenger som ikkje inneheld bokstaven a. Altså er talet strenger som inneheld bokstaven a lik $26^6 - 25^6 = 64.775.151$.

(b) Talet strenger som ikkje inneheld både a eller b er 24^6. Talet strenger som ikkje inneheld a eller ikkje inneheld b er begge 25^6. For å unngå å telja strenger som verken inneheld a eller b to gonger, må me trekkja frå dette talet til slutt. Altså er talet strenger som inneheld a og b lik $26^6 - (25^6 + 25^6 - 24^6) = 11.737.502$.

(c) Byrja med å arrangera ei streng av lengde 4 med bokstavar utanom a og b. Dette kan gjerast på $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ måtar. Etter dette har me 6 plassar me kan leggja til strenga ab. Altså er talet moglegheiter lik

$$24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 5 = 1.275.120.$$

(d) Til å byrja med har me 6 val for plassering av a og 5 val for plassering av b (slik at b er til venstre for a). Dei resterande 5 kan me velja fritt, altså på $P(24,4)$ måtar. Men akkurat i halvparten av desse vil a vera til høgre for b, så me kan ikkje telja desse med. Altså er talet moglege kombinasjonar lik

$$6 \cdot 5 \cdot \frac{P(24,4)}{2} = 107.110.080.$$

6.4

$\boxed{9}$ Nyttar me binomialteoremet veit me at koeffisienten til leddet $x^{101}y^{99}$ er lik

$$\binom{200}{99} \cdot 2^{101} \cdot (-3)^{99}.$$