1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \vert -3R_1 \\ \\ \\ \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \vert -R_1 \\ \\ \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \vert -R_2 \\ \\ \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \vert \cdot (-1) \\ \\ \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \vert -3R_1 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \vert -R_3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A\vec{x} = \vec{b}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Settet har uendelige mange løsninger og $\vec{b} \neq \vec{0}$. Har da løsning for alle $\vec{b}$

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 14 & 0 & 4 & 0 \\ 23 & 27 & 31 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A)=$

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2} \\ \frac{-a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$

$B=A^T$

$A+A^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2I$

$$\begin{aligned}
(A+A^T)^{-1}\cdot A^T(A+A^T)A^{-1} &= (2I)^{-1}\cdot A^T(2I)A^{-1} \\
&= \left(\tfrac{1}{2}I\right)\cdot A^T(2IA^{-1}) \\
&= \left(\tfrac{1}{2}I\right)\cdot A^T(2A^{-1}) \\
&= \left(\tfrac{1}{2}I\right)\cdot 2(A^TA^{-1}) \\
&= A^TA^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a^2}\cdot 1+\frac{a}{1+a^2}\cdot(-a) & \frac{1}{1+a^2}\cdot a+\frac{a}{1+a^2}\cdot 1 \\ \frac{-a}{1+a^2}\cdot 1+\frac{1}{1+a^2}\cdot(-a) & \frac{-a}{1+a^2}\cdot a+\frac{1}{1+a^2}\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} & \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{-2a}{1+a^2} & \frac{-a^2+1}{1+a^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (2,4)$

$\vec{P_1P_2} = (2,1)$ $\|\vec{P_1P_2}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$\vec{P_1P_3} = (1,3)$ $\|\vec{P_1P_3}\| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

$\langle \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3} \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3$

$= 5$

Vinkel $= \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}\right)$

$= \frac{\pi}{4}$

5 $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_r\}$ $S\in\mathbb{R}^n$

$\|\vec{v}_i\|=i$ $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j=0,\ i=j$

$\vec{u}\in\mathbb{R}^n$

$\vec{u}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_r\vec{v}_r$

$c_i\in\mathbb{R}\ (i=1,2,\dots,r)$

Vis $c_i=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_i}{i^2}$

Bevis

$\vec{u}\cdot\vec{v}_i=c_i(\vec{v}_i)^2$ fordi $v_i\cdot v_j=0,\ i\neq j$

$(\vec{v}_i)^2=(\|\vec{v}_i\|)^2=i^2$ fordi $\|\vec{v}_i\|=i$

Da blir

$\vec{u}\cdot\vec{v}_i=c_i\cdot i^2$

$$\Rightarrow c_i=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_i}{i^2}$$