Chương 1. CÁC BƯỚC GIẢI BÀI TOÁN TIN HỌC

1.1. Bài toán tin học

Bài toán tin học là một vấn đề/công việc mà con người yêu cầu máy tính thực hiện hoàn toàn hoặc thực hiện một phần: gởi một email, chỉnh sửa một bức ảnh, chơi một file nhạc, soạn thảo văn bản, nhận dạng mặt người, … Bài toán tin học được mô tả bởi dữ liệu được cho (*input*) và kết quả đầu ra (*output*) cần tìm.

1.2. Xác định bài toán

Để chuyển một bài toán thực tế thành chương trình xử lý trên máy tính ta cần xác định thông tin input và output của bài toán

- *Input* (dữ liệu đầu vào): dữ liệu cần xử lý/dữ liệu được cung cấp để phục vụ giải bài toán.
- *Output* (kết quả đầu ra): dữ liệu cần đạt sau xử lý/kết quả cần tìm của bài toán.

Ví dụ 1.2.1:

Cho 2 số nguyên a, b. Tính tổng của chúng.

Input: $a, b \in Z$

Output: $c \in Z$

Có 2 input và 1 output

Ví dụ 1.2.2:

Cho số nguyên n. Kiểm tra n có phải là số dương chẵn?

Input: $n \in Z$

Output: `true/false`

Có 1 input và 1 output

Bài tập áp dụng 1.2

Xác định *input*, *output* và số lượng của chúng ở mỗi bài toán.

1) Cho số nguyên dương n. Đếm số ước dương của n.
2) Cho số nguyên n. Kiểm tra n có phải là số nguyên tố?
3) Cho 2 số nguyên a, b. Tìm $UCLN(a, b)$.
4) Cho số nguyên dương n. Liệt kê tất cả số chính phương có giá trị không vượt quá n.

5) Cho 2 số nguyên $a, b (b \neq 0)$ là tử và mẫu của phân số a/b. Tìm c, d là tử và mẫu tối giản.
6) Cho số nguyên dương n. Cho biết chữ số lớn nhất trong biểu diễn của n và số lượng chữ số lớn nhất.
7) Cho 2 số thực a, b. Giải và biện luận phương trình bậc nhất: $ax + b = 0$.

1.3. Thiết kế thuật toán

1.3.1. Khái niệm thuật toán (algorithm)

Thuật toán là dãy hữu hạn các thao tác thi hành được sắp theo một trình tự xác định để xử lý input và tìm ra output của bài toán.

Ví dụ 1.3.1:

Cho 3 số nguyên a, b, c. Tìm giá trị lớn nhất.

Thuật toán:

Bước 1: Input a, b, c

Bước 2: Gán $maxValue = a$

Bước 3: Kiểm tra $b > maxValue$

- Nếu đúng thì gán $maxValue = b$

Bước 4: Kiểm tra $c > maxValue$

- Nếu đúng thì gán $maxValue = c$

Bước 5: Output $maxValue$. Kết thúc.

Ghi chú: Thao tác gán $a = b$ gán giá trị của b cho a, nghĩa là sau thao tác, giá trị của a sẽ bằng giá trị của b. Ví dụ sau thao tác $a = a + 5$ thì giá trị của a sẽ tăng thêm 5.

Ví dụ 1.3.2:

Cho 3 số nguyên a, b, c. Đếm số lượng số chẵn trong 3 số.

Thuật toán:

Bước 1: Input a, b, c.

Bước 2: Gán $cnt = 0$

Bước 3: Kiểm tra $a \bmod 2 = 0$?

- Nếu đúng thì $cnt = cnt + 1$ (tăng cnt thêm 1 đơn vị)

Bước 4: Kiểm tra $b \bmod 2 = 0$?

- Nếu đúng thì $cnt = cnt + 1$ (tăng cnt thêm 1 đơn vị)

Bước 5: Kiểm tra $c \bmod 2 = 0$?

- Nếu đúng thì $cnt = cnt + 1$ (tăng cnt thêm 1 đơn vị)

Bước 7: Output cnt. Kết thúc

1.3.2. Các tính chất của thuật toán

Tính đúng đắn: đảm bảo thuật toán luôn cho output đúng trong mọi trường hợp input.

Tính xác định: đảm bảo mọi bước thi hành không mập mờ và có thể thực hiện được.

Tính dừng: đảm bảo thuật toán luôn dừng lại sau một số bước thực thi.

Tính hiệu quả: đảm bảo thuật toán thực thi nhanh, nói cách khác số bước thực thi của thuật toán phải nằm trong giới hạn chấp nhận được.

Ví dụ 1.3.3:

Cho số nguyên dương n. Đếm số lượng ước dương của n.

Cách 1:

- Nhận xét: Nếu a là ước dương của n thì $1 \le a \le n$. Do đó, để đếm số ước dương của n ta xét a lần lượt mang các giá trị từ 1 đến n. Với mỗi giá trị của a, kiểm tra xem n có chia hết cho a.
- Số trường hợp phải xét: n.

Cách 2:

- Nhận xét: Nếu a là ước dương của n thì luôn tồn tại số nguyên dương b cũng là ước dương của n sao cho $a \times b = n$, khi đó $b = [n/a]$ (kí hiệu $[x]$ với ý nghĩa lấy giá trị phần nguyên của số thực x).
- Giả sử $a \le b \Longrightarrow a^2 \le a \times b = n \Longrightarrow a^2 \le n \Longrightarrow 1 \le a \le [\sqrt{n}]$. Như vậy khi a là ước của n thì ta tìm được 2 ước là a và $b (a < b)$. Khi nào xảy ra trường hợp $a = b$?
- Số trường hợp phải xét: $[\sqrt{n}]$.

Ví dụ 1.3.4:

Cho số nguyên dương n. Giải phương trình nghiệm nguyên không âm $2x + y = n (*)$.

Việc giải phương trình trên chính là liệt kê tất cả cặp giá trị (x, y) nguyên không âm thỏa (*).

Từ phương trình $(*)$ ta có $0 \le x \le [n/2]$ và $0 \le y \le n$.

Cách 1:

- Thử lần lượt từng cặp giá trị (x, y) trong miền giá trị của chúng và kiểm tra thỏa $(*)$.
- Số trường hợp phải xét: $([n/2] + 1) \times (n + 1)$.

Cách 2:

- Từ $(*)$ suy ra $y = n - 2x$. Do đó ta chỉ cần xét từng giá trị của x và tìm y tương ứng.

- Số trường hợp phải xét: $[n/2] + 1$

Qua 2 ví dụ ta nhận thấy rằng nếu sử dụng một số phân tích về mặt toán học sẽ giúp làm giảm số trường hợp dư thừa phải xét để tăng tính hiệu quả của thuật toán.

1.3.3. Biểu diễn thuật toán

Liệt kê các bước thực thi

Mô tả thuật toán dưới dạng các bước thi hành, mỗi bước chỉ ra các thao tác thi hành cụ thể để xử lý *input* tìm ra *output*. Thuật toán sẽ thực thi lần lượt từng bước theo đúng trình tự mô tả.

Ví dụ 1.3.5:

Thuật toán giải và biện luận phương trình bậc 1: $ax + b = 0$

Bước 1: Input a, b

Bước 2: Kiểm tra $a = 0$?

- Nếu đúng thì đến bước 3.
- Ngược lại thì thông báo nghiệm –b/a. Đến bước 4.

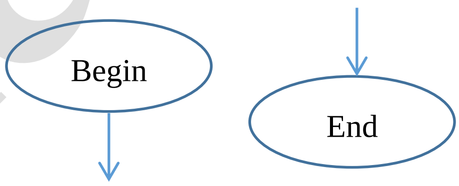
Bước 3: Kiểm tra $b = 0$?

- Nếu đúng thì thông báo phương trình vô số nghiệm. Đến bước 4.
- Ngược lại thông báo phương trình vô nghiệm. Đến bước 4.

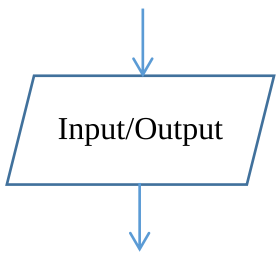
Bước 4: Kết thúc

Sơ đồ thuật toán

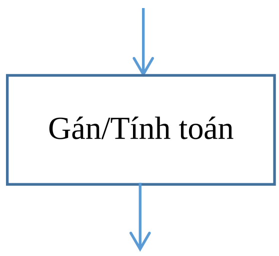
Các kí hiệu sơ đồ thuật toán



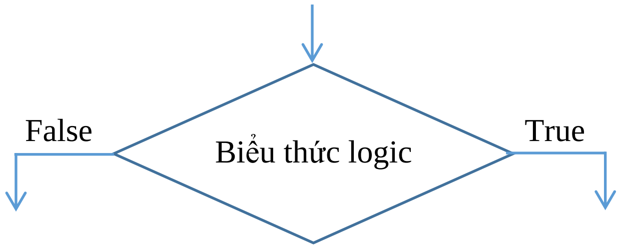
Biểu diễn bắt đầu và kết thúc thuật toán



Biểu diễn thao tác nhập/xuất dữ liệu



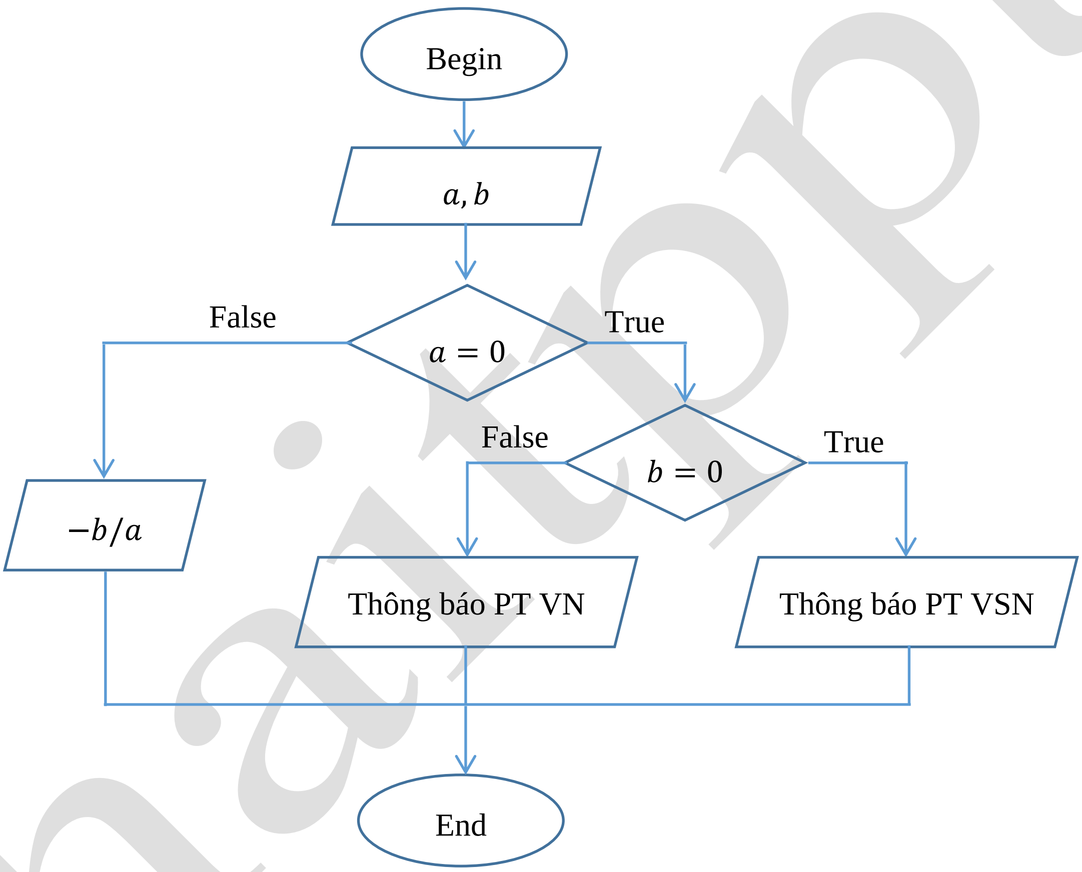
Biểu diễn phép gán hoặc tính toán



Biểu diễn thao tác kiểm tra logic (kiểm tra đúng/sai)

Ví dụ 1.3.6:

Sơ đồ thuật toán giải và biện luận phương trình bậc 1: $ax + b = 0$



Bài tập áp dụng 1.3.3002E

Thiết kế sơ đồ thuật toán giải các bài toán sau

1) Cho 2 số nguyên a, b. Hãy hoán vị giá trị của a và b. Ví dụ: input $a = 3, b = 5$; output $a = 5, b = 3$.
2) Cho 4 số nguyên a, b, c, d. Tìm giá trị nhỏ nhất.
3) Cho 4 số nguyên a, b, c, d. Cho biết có bao nhiêu số dương trong 4 số này.
4) Cho 4 số nguyên a, b, c, d. Các số nguyên được đánh thứ tự tương ứng từ 1 đến 4. Hãy cho biết thứ tự của số lớn nhất. Nếu có nhiều số lớn nhất thì tìm thứ tự nhỏ nhất.
5) Học lực của một học sinh được đánh giá dựa trên điểm trung bình học kỳ (TBHK) như sau:

- Xếp loại Giỏi: TBHK từ 8.0 trở lên
- Xếp loại Khá: không đạt Giỏi và TBHK từ 6.5 trở lên
- Xếp loại TB: không đạt Khá và TBHK từ 5.0 trở
- Xếp loại Yếu: không đạt TB và TBHK từ 3.5 trở lên
- Xếp loại Kém: các trường hợp còn lại

Cho biết xếp loại học lực của học sinh có điểm TBHK là $x(x \geq 0)$.

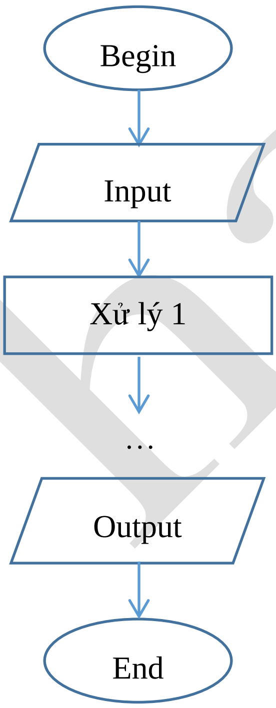
6) Có 5 đồng tiền vàng giống nhau và được đánh thứ tự từ 1 đến 5. Các đồng tiền có khối lượng lần lượt là các số nguyên dương a, b, c, d, e. Trong đó có 1 đồng tiền giả có khối lượng khác với khối lượng những đồng tiền thật còn lại. Thiết kế sơ đồ thuật toán xác định thứ tự của đồng tiền giả.

1.3.4. Các cấu trúc cơ bản của thuật toán

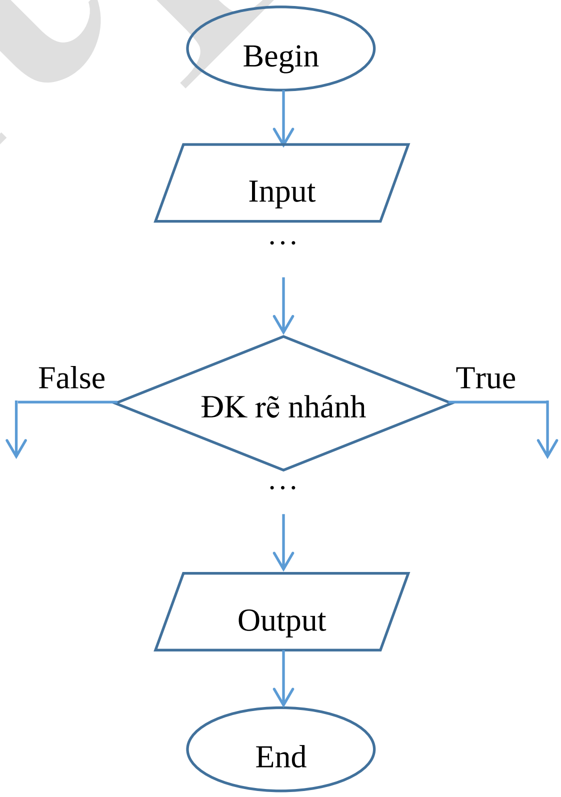
Định lý Bohn-Jacopini

Mọi quá trình tính toán đều có thể được biểu diễn dựa trên 3 cấu trúc cơ bản của thuật toán: *cấu trúc tuần tự, cấu trúc rẽ nhánh, cấu trúc lặp.*

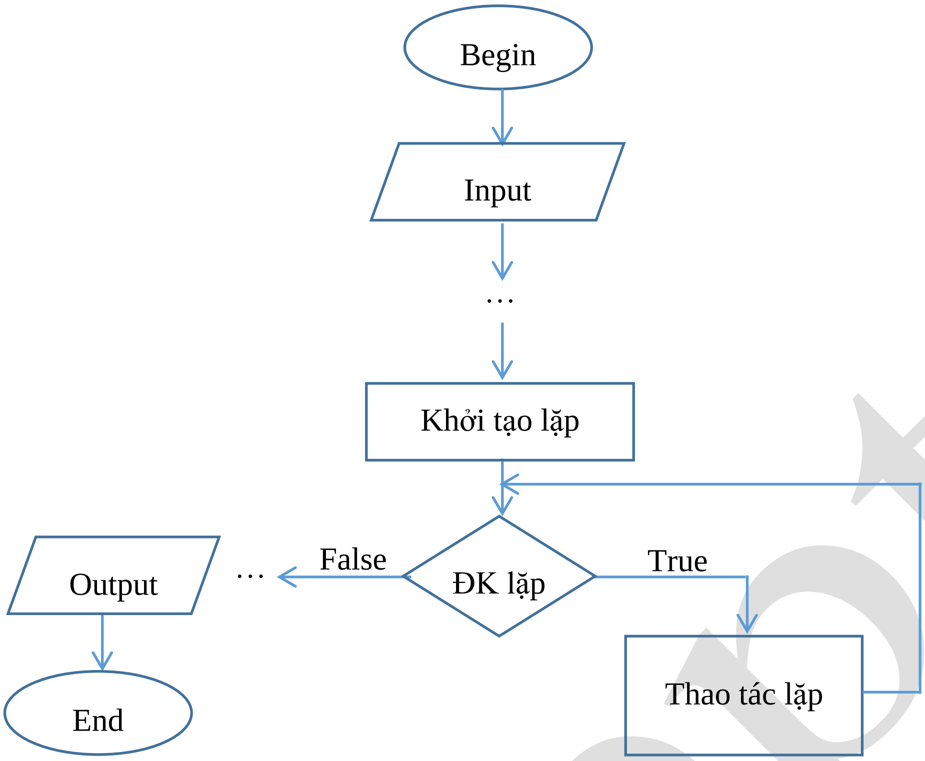
Các cấu trúc của thuật toán



Cấu trúc tuần tự



Cấu rẽ nhánh



Cấu trúc lặp

Ví dụ 1.3.7:

Cho số nguyên dương n. Thiết kế sơ đồ thuật toán tính giá trị biểu thức

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Input: $n \in \mathbb{Z}^+$

Output: $S \in \mathbb{R}$

Giải:

Do biểu thức có n phân số, phân số thứ $i (i = 1,2,3, \ldots, n)$ có giá trị $1/i$. Giá trị của biểu thức S được tính bằng cách cộng dồn từng phân số vào kết quả nên quá trình tính toán được biểu diễn bằng cấu trúc lặp n lần như sau

- Khởi tạo lặp

  $S = 0$

  $i = 1$

- Điều kiện lặp

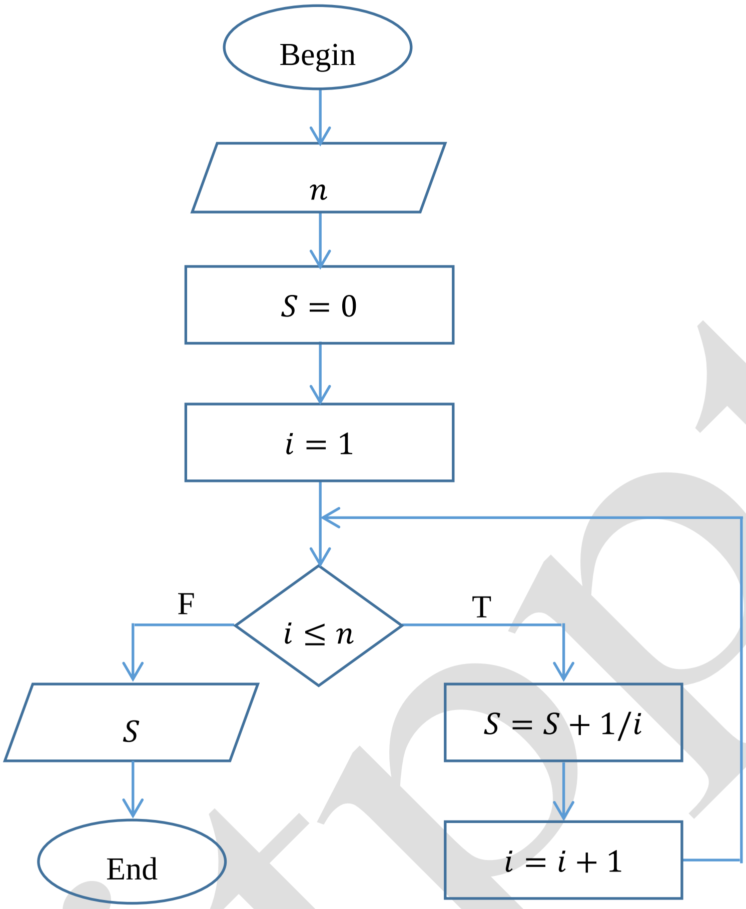
  $i \leq n$

- Thao tác lặp

  $S = S + \frac{1}{i}$

  $i = i + 1$

Sơ đồ thuật toán



Ví dụ 1.3.8:

Cho số nguyên dương n. Thiết kế sơ đồ thuật toán tính giá trị biểu thức

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

Input: $n \in \mathbb{Z}^+$

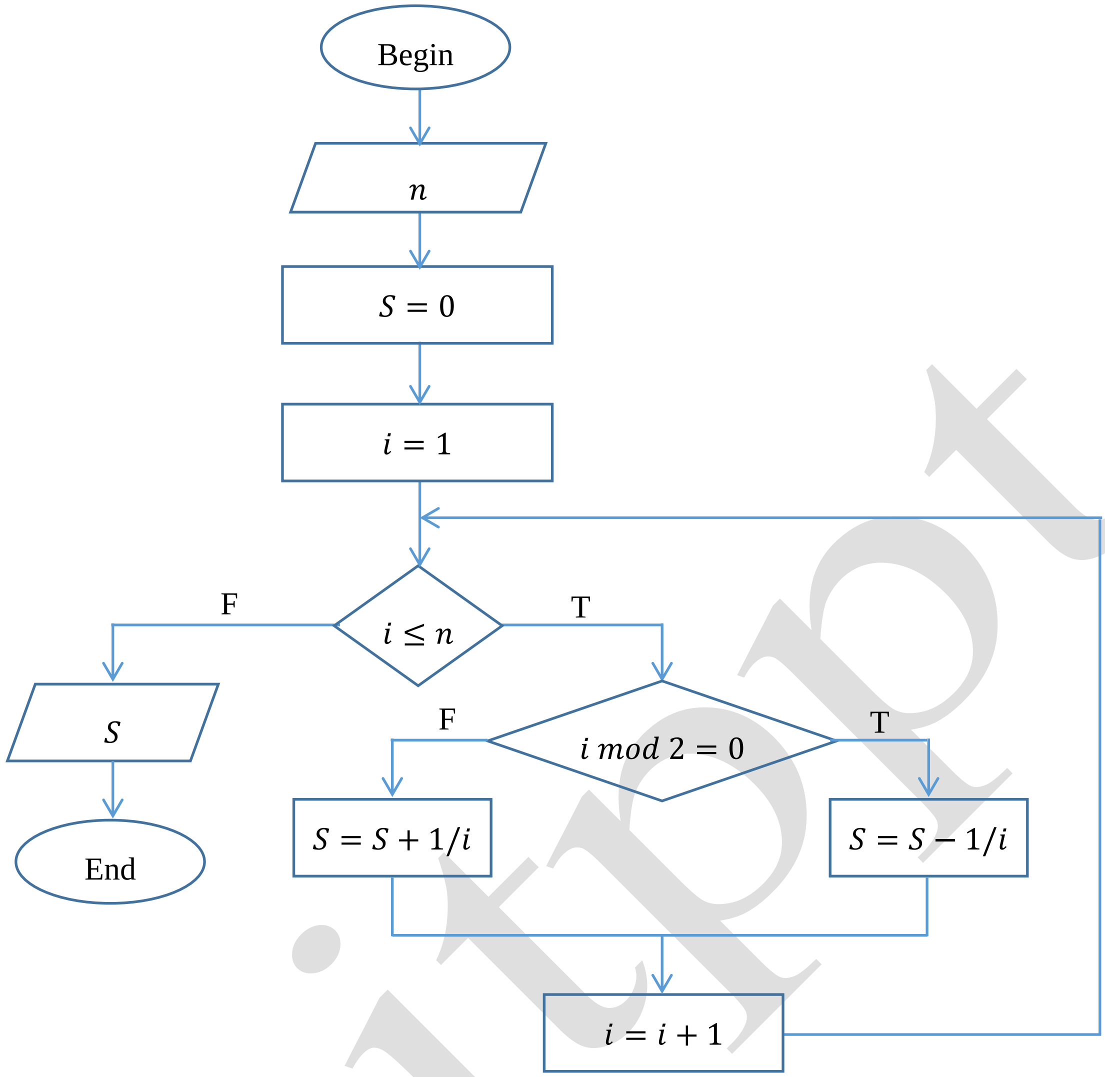
Output: $S \in \mathcal{R}$

Giải:

Tương tự ví dụ 1.3.7, biểu thức có n phân số, phân số thứ $i (i = 1,2,3, \dots, n)$ có giá trị

$$(-1)^{i+1}\frac{1}{i}$$

Tuy nhiên thuật toán này không hiệu quả. Nhận xét $(-1)^{i+1}$ có giá trị 1 nếu i lẻ, ngược lại có giá trị -1 nếu i chẵn. Ta có sơ đồ thuật toán hiệu quả hơn như sau


Begin
n
$S = 0$
$i = 1$
$i \leq n$
F
T
S
End
F
$i\ mod\ 2 = 0$
T
$S = S + 1/i$
$S = S - 1/i$
$i = i + 1$

BÀI TẬP THIẾT KẾ SƠ ĐỒ THUẬT TOÁN

1) Cho số nguyên dương n, tính giá trị của biểu thức:

$a)\ S = 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}$

$b)\ S = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n}$

$c)\ S = 1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$

$d)\ S = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ (n dấu căn)

$e)\ S = \begin{cases} 1 * 3 * \ldots * n, \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 2 * 4 * \ldots * n, \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$

$f)\ S = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cdots + \cfrac{1}{n}}}$

2) Cho số nguyên k và 2 số nguyên dương n, m. Tính giá trị biểu thức sau:

$a)\ S = (1! + 2! + \cdots + n!) \bmod m$

$b)\ S = (k^n + k^{n-1} + \cdots + 1) \bmod m$

3) Cho số nguyên dương n và số thực x. Tính giá trị các biểu thức:

$a)\ S = x - \frac{x^2}{2!} + \ \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}$

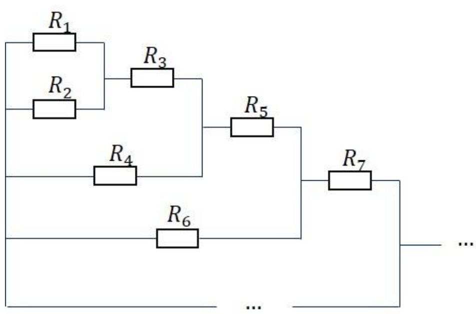
$b)\ S = x^{n-1} + \frac{x^{n-2}}{2!} + \cdots + \frac{x}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$

4) Cho số nguyên dương n, tìm số nguyên dương x nhỏ nhất thỏa bất đẳng thức

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{x} \geq n$$

5) Cho n điện trở giống nhau $R_1 = R_2 = R_3 = \cdots = R_n = k(\Omega)$, trong đó k là một số thực dương. Người ta mắc các điện trở này thành một mạch điện theo quy luật như hình vẽ.

Cho số nguyên n và số thực dương k. Hãy tính tổng điện trở của mạch điện được nối theo quy luật trên.



6) Dãy số nguyên $\{F_i\}$ được định nghĩa như sau: $\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3 \end{cases}$

Cho số nguyên dương n. Thiết kế thuật toán tìm giá trị của F_n.

7) Dãy số nguyên $\{F_n\}$ được định nghĩa như sau:

$$F_n = n(F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1})$$

Biết rằng $F_1 = 1$, hãy tính giá trị của F_n.

8) Cho 3 số nguyên dương a, b, n. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $ax + by$, trong đó (x, y) là nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $ax + by \leq n$.

9) Cho số nguyên dương n. Thiết kế thuật toán thực hiện:

   a) Đếm số chữ số của n.

   b) Tìm số có các chữ số đảo ngược với các chữ số của n.

   c) Tính tổng giá trị chênh lệch giữa 2 chữ số liền kề nhau của n.

   d) Tìm giá trị chênh lệch lớn nhất giữa 2 chữ số liền kề nhau của n.

   e) Tìm chữ số chẵn lớn nhất của n. Nếu n không chứa chữ số chẵn thì output -1.

   f) Số đối xứng là số khi viết các chữ số của nó theo thứ tự ngược lại thì giá trị không bị thay đổi. Ví dụ 11, 121, 1221, … là các số đối xứng. Kiểm tra n có phải là số đối xứng?

   g) Kiểm tra các chữ số của n có thứ tự tăng dần từ trái sang phải hay không (số nằm bên trái ≤ số nằm bên phải)?

   h) Đếm số lượng ước số dương của n.

   i) Kiểm tra n có phải là số nguyên tố hay không?

   j) Tìm chữ số lớn nhất và số lượng chữ số lớn nhất của n.

   k) Phân tích n thành tích các thừa số nguyên tố.

   l) Đếm số chữ số 0 tận cùng của n!.

   m) Tìm chỉ số của chữ số khác 0 nhỏ nhất của n. Chỉ số các chữ số được tính từ phải sang trái và chữ số hàng đơn vị có chỉ số 0 (giả sử n có k chữ số có dạng $\overline{a_{k-1}a_{k-2} \dots a_1a_0}$). Nếu có nhiều thứ tự thỏa yêu cầu thì chỉ ra thứ tự nhỏ nhất.

   n) Nếu tách n thành các nhóm gồm các chữ số khác 0 nằm liên tiếp thì ta được bao nhiêu nhóm. Ví dụ $n = 120304560780$ thì ta tách được 4 nhóm $12, 3, 456, 78$.

   o) Tìm chiều dài lớn nhất của dãy gồm các chữ số khác 0 liên tiếp của n. Ví dụ $n = 10230456$ thì chiều dài lớn nhất tìm được là 3 gồm các chữ số 4,5,6.

   p) Nếu tách n thành các số tự nhiên gồm các chữ số khác 0 nằm liên tiếp thì ta được giá trị số tự nhiên lớn nhất là bao nhiêu. Ví dụ $n = 980790063$ thì tách được 3 số tự nhiên $98, 79$ và 63. Số lớn nhất là 98.

   q) Một đường chạy là một dãy gồm các chữ số khác 0 nằm liên tiếp nhau thỏa chữ số bên trái luôn ≤ chữ số bên phải. Đếm số lượng đường chạy có trong n.

   r) Tìm độ dài của đường chạy dài nhất trong n.

   s) Tìm số tự nhiên m được tạo bởi các chữ số trên đường chạy dài nhất của n. Nếu có nhiều kết quả thì tìm m có giá trị lớn nhất.