Rozwiązania zadań z „Kółka matematycznego dla olimpijczyków” H.Pawłowskiego

Olaf Witusik
olaf.witusik@gmail.com

Luty, 2024

I SUMY I ILOCZYNY

$\vdots$

Zadanie 8. Strony równania oznaczmy przez

$$\alpha(n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \tag{1}$$

$$\beta(n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \tag{2}$$

T:. $\forall n \in \mathbb{N}_+ : \alpha(n) = \beta(n)$

D:. Dowód przez indukcję.
Dla $n = 1$:

$$\alpha(1) = a_1^2 b_1^2 = \beta(1) \tag{3}$$

Załóżmy, że dla $k \in \mathbb{N}_+$ zachodzi: $\alpha(k) = \beta(k)$. Tak więc:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \tag{4}$$

Wykażemy teraz, że z założenia indukcyjnego wynika prawdziwość tezy dla $k + 1$.

$$\alpha(k+1) = \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}b_{k+1}\right)^2 = \tag{5}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 \stackrel{(4)}{=} \tag{6}$$

$$\stackrel{(4)}{=} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} (a_i b_j - a_j b_i)^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 = \tag{7}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 - a_{k+1}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 - b_{k+1}^2\right) - \tag{8}$$

$$- \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} (a_i b_j - a_j b_i)^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2\right) - b_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 - a_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 - \tag{9}$$

$$- \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} (a_i b_j - a_j b_i)^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} (a_i b_j - a_j b_i)^2 - b_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 - a_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 + \tag{10}$$

$$+ 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + 2a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

Lemat 1.

T:.

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ : \Big\{(i,j) \in {\mathbb{N}_+}^2 : 1 \leqslant i < j \leqslant n+1\Big\} - \Big\{(i,j) \in {\mathbb{N}_+}^2 : 1 \leqslant i < j \leqslant n\Big\} = \tag{11}$$
$$= \Big\{(i,n+1) \in {\mathbb{N}_+}^2 : 1 \leqslant i \leqslant n\Big\}$$

D:. Dla $n \in \mathbb{N}_+$, zdefiniujmy funckję $A(n)$:

$$A(n) = \Big\{(i,j) \in {\mathbb{N}_+}^2 : 1 \leqslant i < j \leqslant n\Big\} \tag{12}$$

$$\forall n : n \leqslant n+1 \implies \forall n : A(n) \subset A(n+1) \tag{13}$$

Dla każdego n i dla każdego i, dla którego $1 \leqslant i \leqslant n+1$:

$$(i,j) \in A(n) \iff i+1 \leqslant j \leqslant n \tag{14}$$
$$(i,j) \in A(n+1) \iff i+1 \leqslant j \leqslant n+1 \tag{15}$$

Tak więc

$$(i,j) \notin A(n) \wedge (i,j) \in A(n+1) \iff j = n+1 \tag{16}$$

Jeśli $j = n+1$, to

$$1 \leqslant i < j \leqslant n+1 \iff 1 \leqslant i \leqslant n \tag{17}$$

Co daje nam

$$A(n+1) - A(n) = \Big\{(i,n+1) \in {\mathbb{N}_+}^2 : 1 \leqslant i \leqslant n\Big\} \quad \square \tag{18}$$

Korzystając z Lematu 1:

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}(a_ib_j - a_jb_i)^2 - b_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 - a_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 + \tag{19}$$
$$+ 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_ib_i + 2a_{k+1}^2b_{k+1}^2 \overset{L1}{=}$$
$$\overset{L1}{=} \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2\right) - \left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k+1}(a_ib_j - a_jb_i)^2 - \sum_{i=1}^{k}(a_ib_{k+1} - a_{k+1}b_i)^2\right) - \tag{20}$$
$$- b_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 - a_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_ib_i + 2a_{k+1}^2b_{k+1}^2 =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2\right) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k+1}(a_ib_j - a_jb_i)^2 + \sum_{i=1}^{k}(a_ib_{k+1} - a_{k+1}b_i)^2 - \tag{21}$$
$$- b_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 - a_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_ib_i + 2a_{k+1}^2b_{k+1}^2 =$$

$$= \beta(k+1) + \sum_{i=1}^{k} \left(a_i^2 b_{k+1}^2 - 2a_i b_{k+1} a_{k+1} b_i + a_{k+1}^2 b_i^2 \right) - \tag{22}$$

$$- b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 - a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 + 2a_{k+1} b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} a_i b_i + 2a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 =$$

$$= \beta(k+1) + b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2 - 2a_{k+1} b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 - \tag{23}$$

$$- b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 - a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 + 2a_{k+1} b_{k+1} \sum_{i=1}^{k} a_i b_i + 2a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 =$$

$$= \beta(k+1) + b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 - \tag{24}$$

$$- b_{k+1}^2 \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2 \right) - a_{k+1}^2 \left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2 \right) +$$

$$+ 2a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 =$$

$$= \beta(k+1) + b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 -$$

$$- b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} a_i^2 - a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k} b_i^2 - 2a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 + 2a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 =$$

$$= \beta(k+1) \quad \square \tag{25}$$