Aleksander Jóźwik 20.01.2025

Równania Różniczkowe i Różnicowe

Potencjał elektromagnetyczny Wyliczenia sformułowania wariacyjnego

1. Problem obliczeniowy

$$\begin{cases} \Phi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_r} \\ \Phi'(0) - \Phi(0) = 3 \quad \text{(warunek Robin)} \\ \Phi(3) = -5 \qquad \text{(warunek Dirichleta)} \end{cases}$$

$$\varepsilon_r(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1,2] \\ 1 & \text{dla } x \in (2,3] \end{cases}$$

Z warunku Robin:

$$\Phi'(0) = \Phi(0) + 3$$

Niech $V = \{f \in H^1 : f(3) = 0\}$

$v \in V$ - funkcja testująca

$$\Phi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_r} \quad / \cdot v$$

$$\Phi'' v = -\frac{\rho}{\varepsilon_r} v \quad / \int_0^3$$

$$\int_0^3 \Phi'' v dx = -\int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx$$

$$\int_0^3 \Phi'' v dx = \begin{vmatrix} u = v & u' = v' \\ t' = \Phi'' & t = \Phi' \end{vmatrix} = [\Phi' v]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v' dx$$

$$= \Phi'(3)v(3) - \Phi'(0)v(0) - \int_0^3 \Phi' v' dx =$$

$$= 0 - (\Phi(0) + 3)v(0) - \int_0^3 \Phi' v' dx =$$

$$= -\Phi(0)v(0) - 3v(0) - \int_0^3 \Phi' v' dx$$

$$-\Phi(0)v(0) - 3v(0) - \int_0^3 \Phi' v' dx = -\int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx$$

Funkcja shift:

$$\Phi = w + \bar{\Phi},\ w \in V$$

$$w(3) = 0$$

$$\bar{\Phi}(3) = -5$$

$$\bar{\Phi}(x) = -5$$

$$\Phi = w - 5 \Rightarrow \Phi' = w'$$

$$-(w(0) - 5)v(0) - 3v(0) - \int_0^3 w' v' dx = -\int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx$$

$$-w(0)v(0) + 5v(0) - 3v(0) - \int_0^3 w' v' dx = -\int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx$$

$$-w(0)v(0) + 2v(0) - \int_0^3 w' v' dx = -\int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx$$

$$-w(0)v(0) - \int_0^3 w' v' dx = -2v(0) - \int_0^3 \frac{\rho}{\varepsilon_r} v dx$$

$$b(w, v) = l(v)$$

2. Galerkin

$$V_h \subset V$$

$$\dim V_h < \infty$$

$$w \approx w_h \in V_h$$

$$b(w_h, v_h) = l(v_h)$$

$$w_h \in V_h,\ \forall v_h \in V_h$$

Zawsze ostatnia „funkcja piramidkowa" jest pomijana, bo nie jest spełniony dla niej warunek Dirichleta.

$$\begin{bmatrix} b(e_0,e_0) & b(e_1,e_0) & b(e_2,e_0) & ... & b(e_{n-1},e_0) \\ b(e_0,e_1) & & & & . \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ b(e_0,e_{n-1}) & ... & ... & ... & b(e_{n-1},e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(e_0) \\ l(e_1) \\ . \\ . \\ . \\ l(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie otrzymujemy w postaci:

$$\Phi \approx \Phi_h = w_h + \bar{\Phi} = w_h - 5$$

Przyjmujemy

$$h = \frac{3}{n}$$

$$x_i = ih$$

$$e_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < (i-1)h \text{ oraz } \ x > (i+1)h \\ \frac{x-(i-1)h}{h} & \text{dla } \ x \in [(i-1)h, ih) \\ \frac{(i+1)h-x}{h} & \text{dla } \ x \in [ih, (i+1)h] \end{cases}$$