



**AGH**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

Fizyka 2 - laboratorium 5

## **Moduł Younga**

Ćwiczenie nr 11

29 października 2024

Aleksander Jóźwik

Adrian Krawczyk

Wydział WI	Imię i nazwisko 1. Aleksander Jóźwik 2. Adrian Krawczyk		Rok II	Grupa 3	Zespół 3
PRACOWNIA FIZYCZNA WFIS AGH	Temat:  Moduł Younga				Nr ćwiczenia 11
Data wykonania 29.10.2024	Data oddania 01.11.2024	Zwrot do popr.	Data oddania	Data zaliczenia	Ocena

## 1. Wprowadzenie

### 1.1. Cel ćwiczenia

Wyznaczenie modułu Younga metodą statyczną za pomocą pomiaru wydłużenia drutu z badanego metalu obciążonego stałą siłą.

### 1.2. Wstęp teoretyczny

Rzeczywiste ciała zmieniają swój kształt pod wpływem przyłożonych sił, więc pojęcie bryły sztywnej jest tylko użytecznym przybliżeniem. Odształcenie nazywamy sprężystym, gdy ciało wraca do pierwotnego kształtu po usunięciu działającej siły. Prawo Hooke'a stanowi, że odształcenie sprężyste ciała jest proporcjonalne do przyłożonej siły. Dotyczy ono dowolnego kształtu ciała i konfiguracji przyłożonych sił. Dla najprostszego przypadku rozciągania jednorodnego pręta może ono być wyrażone wzorem:

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}$$

gdzie  $\Delta l$  to przyrost długości pręta,  $l$  to jego długość,  $F$  to siła przyłożona do pola przekroju pręta,  $E$  to moduł Younga, a  $S$  to pole przekroju poprzecznego pręta.

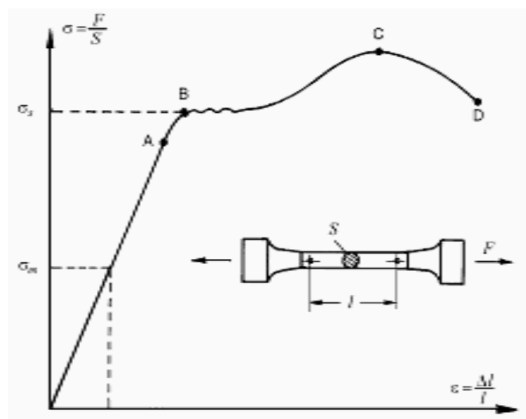
Prawo Hooke'a dla rozciągania lub ściskania może być także zapisane za pomocą wzoru:

$$\sigma = E\varepsilon$$

gdzie:

- $\sigma$  - naprężenie normalne ( $\sigma = \frac{F}{S}$ ),
- $\varepsilon$  - odształcenie względne ( $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ).

Wzór w tej postaci charakteryzuje stan naprężeń i odształceń w rozciąganej próbce w sposób niezależny od jej kształtu.



Rysunek 1: Charakterystyka rozciągania typowa dla większości metali.

Wstawka pokazuje wygląd próbki wykorzystywanej w profesjonalnej aparaturze do badania pełnej zależności  $\sigma(\epsilon)$  [1].

Na rysunku przedstawiono typową dla metali zależność naprężenie-odkształcenie. Charakterystyczne punkty na krzywej to: granica proporcjonalności (A), oznaczająca koniec odcinka liniowego, granica sprężystości (B), po przekroczeniu której pojawiają się odkształcenia nieodwracalne, punkt maksymalnego naprężenia (C) oraz punkt zerwania materiału (D).

Materiały kruche charakteryzuje prostszy przebieg rozciągania - podlegają prawu Hooke'a aż do momentu pęknięcia, które następuje przy określonym naprężeniu.

Wyznaczenie modułu Younga metodą statyczną polega na bezpośrednim pomiarze wielkości wchodzących do wzoru  $\Delta l = \frac{Fl}{ES}$ . W ćwiczeniu, siła  $F$  rozciągająca drut jest siłą ciężkości odważników o masie  $m$ . Wobec tego  $F = mg$ , gdzie  $g$  to wartość przyspieszenia ziemskiego. Zgodnie z prawem Hooke'a  $\Delta l(F)$  powinna być prostą:  $\Delta l = aF + b$ .

Poprzez przyrównanie tej zależności z  $\Delta l = \frac{Fl}{ES}$  otrzymujemy:

$$a = \frac{l}{ES} \Rightarrow E = \frac{l}{aS}$$

Ponadto uwzględniając, że pole przekroju  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  (gdzie  $d$  to średnica przekroju drutu), to wzór na moduł Younga przyjmuje postać:

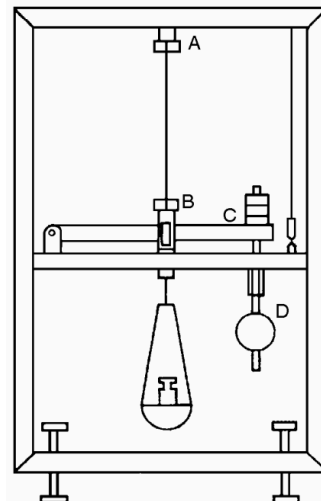
$$E = \frac{4l}{\pi d^2 a}$$

Niepewność złożoną  $u_C(E)$  obliczyć można przy pomocy prawa propagacji niepewności względnej na podstawie niepewności  $l$ ,  $d$  oraz  $a$ :

$$\frac{u_C(E)}{E} = \sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{u(d)}{d}\right)^2 + \left(-\frac{u(a)}{a}\right)^2}$$

## 2. Układ pomiarowy

1. Druty wykonane ze stali i mosiądzu
2. Przyrząd do pomiaru wydłużenia drutu pod wpływem stałej siły, zaopatrzony w czujnik mikrometryczny (dokładność 0.01 mm)
3. Zestaw odważników
4. Śruba mikrometryczna (dokładność 0.01 mm)
5. Przmiar milimetrowy przymocowany do prawego ramienia statywu (działka elementarna 1 mm)



Rysunek 2: Urządzenie do pomiaru modułu Younga metodą statyczną [2]

## 3. Przebieg ćwiczenia

Pomiary rozpoczęto od wyznaczenia długości drutów (stalowego i mosiężnego) przy użyciu przymiaru milimetrowego. Po zamocowaniu drutu w statywie przy pomocy nakrętek i wstępnym obciążeniu szalki dwoma odważnikami kilogramowymi, dokonano pomiaru średnicy drutu śrubą mikrometryczną w trzech miejscach. Po zdjęciu odważników i wyregulowaniu mocowania, wyzerowano czujnik mikrometryczny. Następnie przeprowadzono serię pomiarów wydłużenia drutu, stopniowo zwiększając, a później zmniejszając obciążenie szalki odważnikami, notując każdorazowo sumaryczną masę i odpowiadające jej wydłużenie. Procedurę powtórzono dla obu badanych drutów.

## 4. Analiza danych pomiarowych

Do pomiaru długości obu drutów skorzystano z przymiaru milimetrowego przymocowanego do statywu. Ze względu na to, przyjęto niepewność pomiarową typu B:

$$u_B(l) = 3 \text{ mm}$$

Niepewność pomiaru średnicy drutu jest równa działce elementarnej śruby mikrometrycznej:

$$u_B(d) = 0.01 \text{ mm}$$

### 4.1. Dla drutu stalowego

Długość drutu  $l = 107 \text{ cm}$

Pomiary średnicy drutu stalowego $d$ [mm]		
0.80	0.81	0.86

$$d_{\text{srFeC}} = \frac{0.80 \text{ mm} + 0.81 \text{ mm} + 0.86 \text{ mm}}{3} = 0.823 \text{ mm} \approx 0.82 \text{ mm}$$

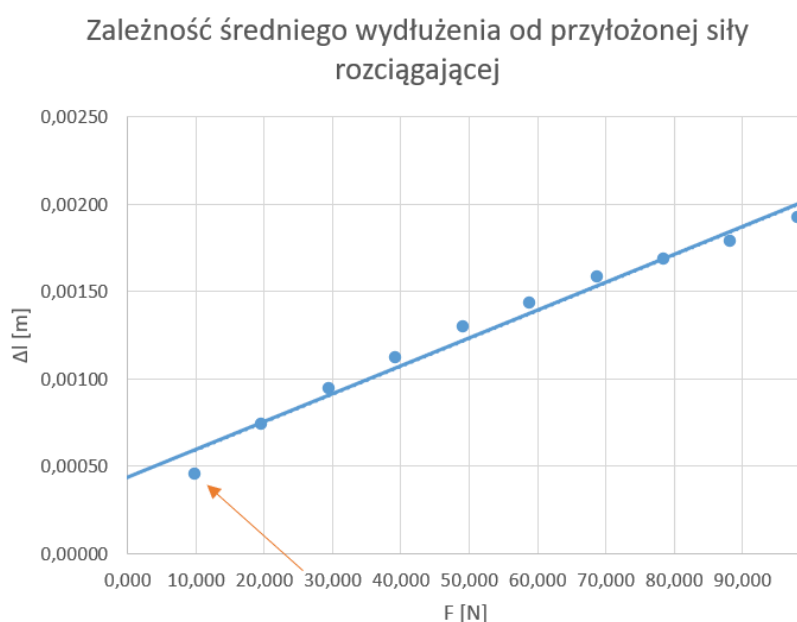
$m$ [kg]	$F$ [N]	Wskazanie czujnika podczas zmniejszania obciążenia [m]	Wskazanie czujnika podczas zwiększania obciążenia [m]	$\Delta l$ [m]
1	9.811	0.00106	0.00076	0.00046
2	19.622	0.00158	0.00137	0.00074
3	29.433	0.00200	0.00176	0.00094
4	39.244	0.00235	0.00212	0.00112
5	49.055	0.00275	0.00245	0.00130
6	58.866	0.00299	0.00274	0.00143
7	68.677	0.00326	0.00308	0.00159
8	78.488	0.00340	0.00333	0.00168
9	88.299	0.00359	0.00357	0.00179
10	98.110	0.00384	0.00384	0.00192

Tabela 1: Wyniki pomiarów wydłużenia drutu stalowego dla zwiększającej się masy odważników  $m$ , dla siły rozciągającej  $F = mg$ , gdzie  $\Delta l$  - wydłużenie średnie

W powyższej tabeli  $\Delta l$  wyznaczono ze wzoru:

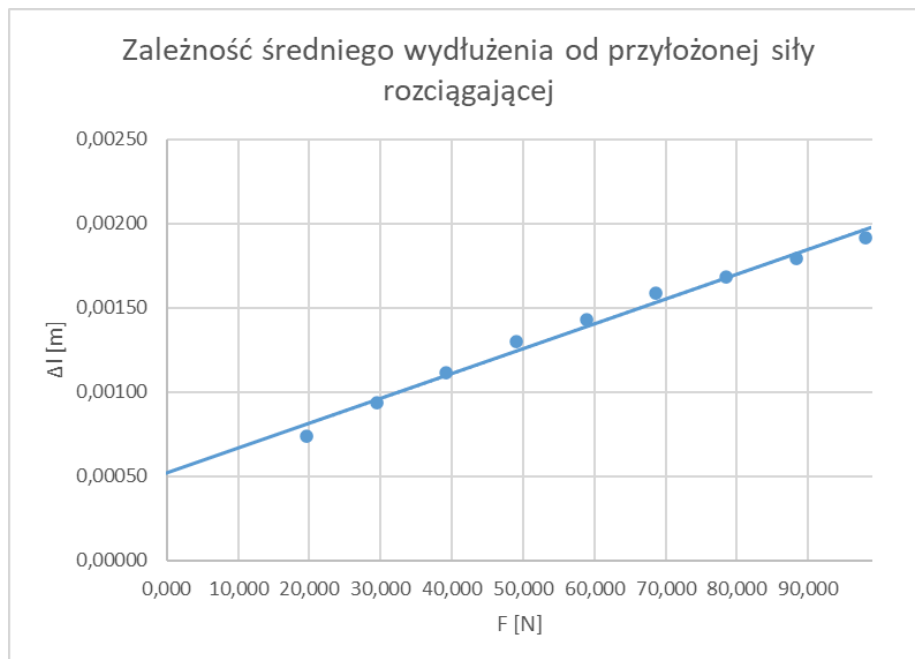
$$\Delta l = \frac{cz \uparrow + cz \downarrow}{4}$$

Przy obliczaniu średniej dzielimy przez 4 aby uwzględnić działanie dźwigni.



Rysunek 3: Wykres zależności średniego wydłużenia stalowego drutu od przyłożonej siły rozciągającej

Zaznaczony na wykresie punkt znacząco odbiega od liniowego przebiegu. Przyczyną może być obecność zagięć w drucie - początkowo przykładana siła mogła powodować prostowanie drutu zamiast jego wydłużania. Z tego względu punkt ten zostanie pominięty w dalszych obliczeniach.



Rysunek 4: Wykres zależności średniego wydłużenia stalowego drutu od przyłożonej siły rozciągającej (z pominiętym pierwszym punktem)

Wykorzystując funkcję *REGLINP* programu *Microsoft Excel* wyznaczono współczynnik nachylenia prostej oraz jego niepewność:

$$u(a) = 0.06455 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N} \approx 0.065 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

$$a = 1.47708 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N} \approx 1.477 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

Wartość modułu Younga dla stali obliczyć można z zależności:

$$E = \frac{4l}{\pi d^2 a}$$

$$E_{FeC} = \frac{4 \cdot 1.07 \text{ m}}{\pi \cdot (0.82 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot 1.477 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}} = 1.37178 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 137.178 \text{ GPa}$$

Niepewność  $E$  można wyznaczyć przy pomocy poniższego wzoru:

$$u_C(E) = E \sqrt{\left(\frac{u_B(l)}{l}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{u_B(d)}{d_{\text{śr}}}\right)^2 + \left(-\frac{u(a)}{a}\right)^2}$$

$$u_C(E_{\text{FeC}}) = 137.178 \text{ GPa} \cdot \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1.07 \text{ m}}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{0.01 \text{ mm}}{0.82 \text{ mm}}\right)^2 + \left(-\frac{0.065 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{N}}}{1.477 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{N}}}\right)^2}$$

$$u_C(E_{\text{FeC}}) = 6.913 \text{ GPa} \approx 7.0 \text{ GPa}$$

Niepewność rozszerzona wyrażona jest wzorem:

$$U(E_{\text{FeC}}) = k \cdot u_C(E_{\text{FeC}})$$

gdzie przyjęto  $k = 2$ .

$$U(E_{\text{FeC}}) = 2 \cdot 7.0 \text{ GPa} = 14 \text{ GPa}$$

Odpowiednio zaokrąglony do niepewności wynik:

$$E_{\text{FeC}} \approx 137 \text{ GPa}$$

$$E_{\text{FeC}} = (137 \pm 14) \text{ GPa}$$

## 4.2. Dla drutu mosiężnego

Długość drutu  $l = 107.1 \text{ cm}$

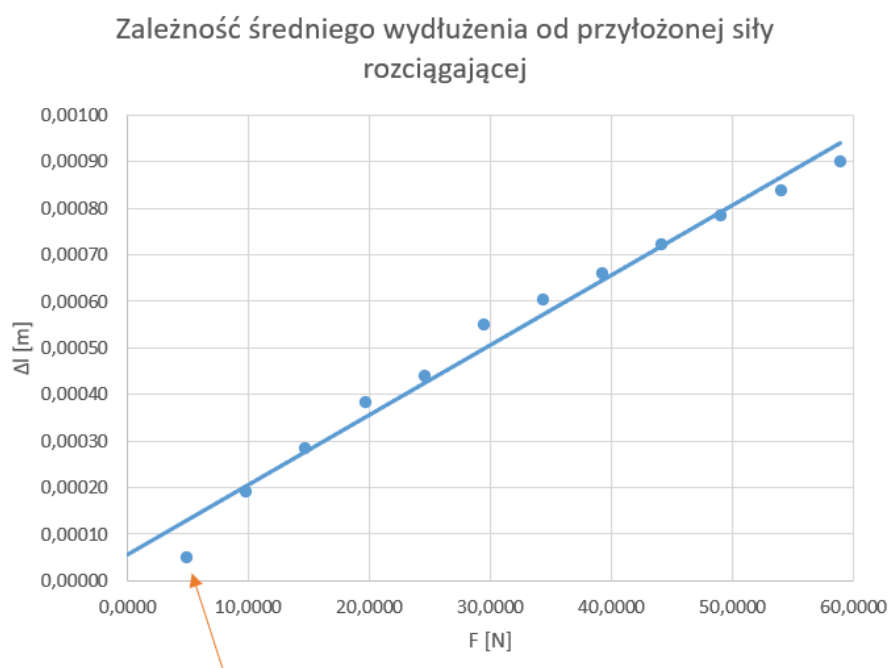
Pomiary średnicy drutu mosiężnego $d$ [mm]		
1.21	1.20	1.20

$$d_{\text{śrCuZn}} = \frac{1.21 \text{ mm} + 1.20 \text{ mm} + 1.20 \text{ mm}}{3} = 1.203 \text{ mm} \approx 1.20 \text{ mm}$$

$m$ [kg]	$F$ [N]	Wskazanie czujnika podczas zmniejszania obciążenia [m]	Wskazanie czujnika podczas zwiększania obciążenia [m]	$\Delta l$ [m]
0.5	4.9055	0.00008	0.00012	0.00005
1	9.8110	0.00040	0.00037	0.00019
1.5	14.7165	0.00059	0.00055	0.00029
2	19.6220	0.00078	0.00075	0.00038
2.5	24.5275	0.00088	0.00088	0.00044
3	29.4330	0.00113	0.00107	0.00055
3.5	34.3385	0.00124	0.00118	0.00061
4	39.2440	0.00134	0.00130	0.00066
4.5	44.1495	0.00145	0.00144	0.00072
5	49.0550	0.00156	0.00158	0.00079
5.5	53.9605	0.00168	0.00167	0.00084
6	58.8660	0.00180	0.00180	0.00090

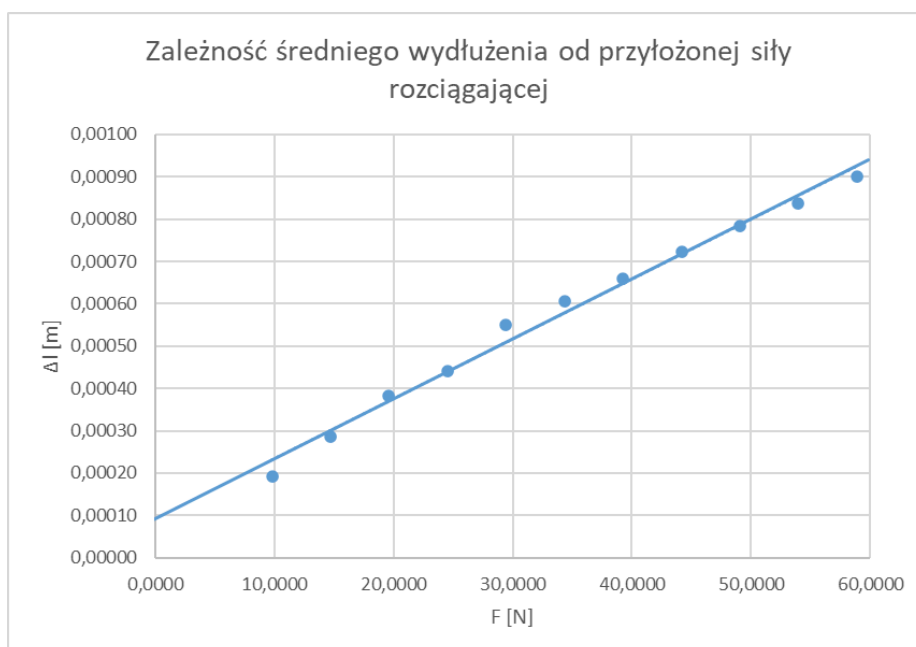
Tabela 2: Wyniki pomiarów wydłużenia drutu mosiężnego dla zwiększającej się masy odważników  $m$ , dla siły rozciągającej  $F = mg$ , gdzie  $\Delta l$  - wydłużenie średnie

W powyższej tabeli  $\Delta l$  wyznaczono tak samo jak w przypadku dla drutu stalowego.



Rysunek 5: Wykres zależności średniego wydłużenia mosiężnego drutu od przyłożonej siły rozciągającej

Zaznaczony na wykresie punkt zostanie pominięty w dalszych obliczeniach z podobnego powodu co w przypadku dla drutu stalowego.



Rysunek 6: Wykres zależności średniego wydłużenia mosiężnego drutu od przyłożonej siły rozciągającej (z pominiętym pierwszym punktem)



Wykorzystując funkcję *REGLINP* programu *Microsoft Excel* wyznaczono współczynnik nachylenia prostej oraz jego niepewność:

$$u(a) = 0.04791 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N} \approx 0.048 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

$$a = 1.41400 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N} \approx 1.414 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

Wartość modułu Younga dla stali obliczyć można z zależności:

$$E = \frac{4l}{\pi d^2 a}$$

$$E_{\text{CuZn}} = \frac{4 \cdot 1.071 \text{ m}}{\pi \cdot (1.20 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot 1.414 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}} = 6.6971 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 66.971 \text{ GPa}$$

Niepewność  $E$  można wyznaczyć przy pomocy poniższego wzoru:

$$u_C(E) = E \sqrt{\left(\frac{u_B(l)}{l}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{u_B(d)}{d_{\text{śr}}}\right)^2 + \left(-\frac{u(a)}{a}\right)^2}$$

$$u_C(E_{\text{CuZn}}) = 66.971 \text{ GPa} \cdot \sqrt{\left(\frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1.071 \text{ m}}\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{0.01 \text{ mm}}{1.20 \text{ mm}}\right)^2 + \left(-\frac{0.048 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}}{1.414 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}}\right)^2}$$

$$u_C(E_{\text{CuZn}}) = 2.539 \text{ GPa} \approx 2.6 \text{ GPa}$$

Niepewność rozszerzona wyrażona jest wzorem:

$$U(E_{\text{CuZn}}) = k \cdot u_C(E_{\text{CuZn}})$$

gdzie przyjęto  $k = 2$ .

$$U(E_{\text{CuZn}}) = 2 \cdot 2.6 \text{ GPa} = 5.2 \text{ GPa}$$

Odpowiednio zaokrąglony do niepewności wynik:

$$E_{\text{CuZn}} \approx 67.0 \text{ GPa}$$

$$E_{\text{CuZn}} = (67.0 \pm 5.2) \text{ GPa}$$

## 5. Porównanie wyznaczonych wartości modułu Younga z wartościami tabelarycznymi

Materiał	$E$ wyznaczone [GPa]	$E_0$ tablicowe [GPa]	$U$ [GPa]	$ E - E_0 $ [GPa]
Stal	137	210 - 220	14	$73 > U(E_{FeC})$
Mosiądz	67.0	100	5.2	$33 > U(E_{CuZn})$

Tabela 3: Porównanie wyznaczonych wartości modułu Younga z wartościami tabelarycznymi [1].

## 6. Wnioski

W trakcie ćwiczenia otrzymano wartości modułu Younga, dla poszczególnych metali, które wynoszą:

$$E_{FeC} = (137 \pm 14) \text{ GPa}$$

$$E_{CuZn} = (67.0 \pm 5.2) \text{ GPa}$$

Otrzymane wyniki nie są zgodne z wartościami tabelarycznymi w granicach niepewności. Przyczyną tego zjawiska mogą być zużyte i lekko pozaginane druty użyte w doświadczeniu, które w początkowej fazie obciążenia zamiast wykazywać liniowe wydłużenie, charakterystyczne dla wyznaczania modułu Younga, najpierw się prostowały. Powoduje to, że ich rozciągnięcie jest łatwiejsze niż wynikałoby to z teoretycznych założeń. Moduł Younga dla stali jest większy niż dla mosiądzu, co oznacza, że potrzeba większej siły, aby rozciągnąć stal na tę samą odległość co mosiądz, co jest zgodne z przewidywaniami teoretycznymi.

## Bibliografia

- AGH WFiIS, „Opis ćwiczenia nr 11: Moduł Younga”. Dostęp: 31 październik 2024. [Online].  
 [1] Dostępne na: [https://pf.agh.edu.pl/home/wfiis/pracfiz/Opisy\\_cwiczen/11\\_opis.pdf](https://pf.agh.edu.pl/home/wfiis/pracfiz/Opisy_cwiczen/11_opis.pdf)  
 AGH WFiIS, „Instrukcja wykonania ćwiczenia nr 11: Moduł Younga”. Dostęp: 31 październik 2024. [Online]. Dostępne na: [https://pf.agh.edu.pl/home/wfiis/pracfiz/Opisy\\_cwiczen/11\\_wykon.pdf](https://pf.agh.edu.pl/home/wfiis/pracfiz/Opisy_cwiczen/11_wykon.pdf)  
 [2] 11\_wykon.pdf