



**AGH**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

Fizyka 2 - laboratorium 1

# **Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego z wykorzystaniem wahadła matematycznego**

Ćwiczenie nr 0

1 października 2024

Aleksander Józwik

Adrian Krawczyk

Wydział WI	Imię i nazwisko 1. Aleksander Jóźwik 2. Adrian Krawczyk		Rok II	Grupa 3	Zespół 3
PRACOWNIA FIZYCZNA WFIS AGH	Temat: Opracowanie danych pomiarowych				Nr ćwiczenia 0
Data wykonania 01.10.2024	Data oddania 06.10.2024	Zwrot do popr.	Data oddania	Data zaliczenia	Ocena

## 1. Wprowadzenie

### 1.1. Cel ćwiczenia

Zaznajomienie się z typowymi metodami opracowania danych pomiarowych przy wykorzystaniu wyników pomiarów dla wahadła prostego (matematycznego).

### 1.2. Wstęp teoretyczny

Wahadło matematyczne to teoretyczny model składający się z punktowej masy zawieszanej na nieważkiej, nierozciągliwej nici. W rzeczywistości używamy małego ciężarka na cienkiej nici, co stanowi odpowiednie przybliżenie modelu teoretycznego. To podejście jest poprawne, gdy  $\sin \theta \approx \theta$  (gdzie  $\theta$  to kąt wychylenia w radianach), co jest dobrym przybliżeniem dla kątów mniejszych niż około  $5^\circ$ .

Okres wahadła można wyliczyć ze wzoru:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdzie  $T$  to okres wahadła,  $l$  to długość nici mierzona od punktu zaczepienia do środka ciężkości ciężarka, a  $g$  to przyspieszenie ziemskie.

Powyższy wzór możemy przekształcić do następujących postaci:

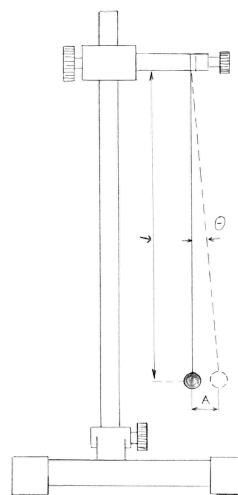
$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

oraz:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

## 2. Układ pomiarowy

1. **Zestaw wahadła prostego** (Rysunek 1)
2. **Sekundomierz** (stoper) - z dokładnością do 0.01 s
3. **Przymiar milimetrový** (linijka) - działka elementarna 1 mm



Rysunek 1: Zestaw wahadła prostego [1].

## 3. Przebieg ćwiczenia

### 3.1. Sposób pierwszy - wahadło o stałej długości

W ramach ćwiczenia przeprowadzono serię pomiarów okresu wahadła przy zachowaniu stałej długości nici. Wykorzystano stoper do wykonania 10 niezależnych pomiarów. W celu zminimalizowania błędów wynikających z czasu reakcji człowieka, każdy pojedynczy pomiar obejmował czas trwania 10 pełnych cykli wahadła. Przed rozpoczęciem pomiarów czasowych, pierwszym etapem było określenie długości wahadła.

### 3.2. Sposób drugi - wahadło o zmiennej długości

Tym razem dla każdej z 3 zmierzonych długości wahadła, wykonano po 3 pomiary czasu trwania 10 okresów drgań. Czwarty zestaw danych opiera się na długości nici oraz średnim czasie jednego okresu, uzyskanym z pomiarów wykonanych w pierwszym sposobie.

## 4. Analiza danych pomiarowych

### 4.1. Sposób pierwszy

#### 4.1.1. Długość wahadła $l$ wraz z niepewnością standardową $u_B(l)$

Zmierzona długość wahadła  $l = 64$  cm

Najmniejsza działka przyrządu to  $\Delta l = 1$  mm

Ze względu na problem z dokładnym ustaleniem środka ciężkości zawieszonego ciała oraz punktu zaczepienia nici, niepewność standardowa (typu B) została przyjęta na:

$$u_B(l) = 3 \text{ mm}$$

Niepewność względna pomiaru wyniosła:

$$\frac{u_B(l)}{l} \cdot 100\% = \frac{0.003 \text{ m}}{0.64 \text{ m}} = 0.4688\% \approx 0.47\%$$

#### 4.1.2. Pomiar okresów drgań

Nr pomiaru	Czas 10 okresów	Czas 1 okresu	Kwadrat odchyłki od średniej
i	$10T_i$ [s]	$T_i$ [s]	$(T_i - T_{\text{sr}})^2$ [s <sup>2</sup> ]
1	16.03	1.603	0.00006084
2	16.11	1.611	0.00024964
3	15.99	1.599	0.00000484
4	15.77	1.577	0.00033124
5	15.78	1.578	0.00029584
6	15.90	1.590	0.00002704
7	15.97	1.597	0.00000324
8	15.89	1.589	0.00003844
9	15.97	1.597	0.00000324
10	16.11	1.611	0.00024964

W wynikach pomiarów nie zaobserwowano żadnych błędów grubych.

$$N = 10$$

$$T_{\text{sr}} = 1.5952 \text{ s}$$

$$\sum_{i=1}^{10} (T_i - T_{\text{sr}})^2 = 0.0012736 \text{ s}^2$$

#### 4.1.3. Niepewność standardowa $u_A(T_{\text{sr}})$

$$u_A(T_{\text{sr}}) = \sqrt{\frac{\sum (T_i - T_{\text{sr}})^2}{N(N-1)}}$$

$$u_A(T_{\text{sr}}) = \sqrt{\frac{0.0012736 \text{ s}^2}{10(10-1)}} = 0.00376 \text{ s} \approx 0.0038 \text{ s}$$

Niepewność względna:

$$\frac{u_A(T_{\text{sr}})}{T_{\text{sr}}} \cdot 100\% = \frac{0.0038 \text{ s}}{1.5952 \text{ s}} \cdot 100\% \approx 0.24\%$$

#### 4.1.4. Obliczenie przyspieszenia ziemskiego wraz z niepewnością

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_{\text{sr}}^2}$$

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 0.64 \text{ m}}{(1.5952 \text{ s})^2} = \frac{25.26612 \text{ m}}{2.5447 \text{ s}^2} = 9.9289 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Z prawa przenoszenia niepewności o ogólnym wzorze:

$$u_C(g) = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial g}{\partial x_{k'}} u(x_{k'}) \right)^2}$$

$u_c$  - niepewność złożona, w tym przypadku  $k' = 2$ , co daje:

$$u_C(g) = \sqrt{\left( \frac{\partial g}{\partial l} u_B(l) \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial T} u_A(T_{\text{sr}}) \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{4\pi^2}{T_{\text{sr}}^2} u_B(l) \right)^2 + \left( \frac{-8\pi^2 l}{T_{\text{sr}}^3} u_A(T_{\text{sr}}) \right)^2}$$

$$u_C(g) = \sqrt{\left( \frac{4\pi^2}{(1.5952 \text{ s})^2} \cdot 0.003 \text{ m} \right)^2 + \left( \frac{-8\pi^2 \cdot 0.64 \text{ m}}{(1.5952 \text{ s})^3} \cdot 0.0038 \text{ s} \right)^2} = 0.0664 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0.067 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Niepewność rozszerzona:

$$U(g) = u_C(g) \cdot k$$

gdzie  $k$  to współczynnik rozszerzenia (przyjmujemy  $k = 2$ )

$$U(g) = 2 \cdot 0.067 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.134 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0.14 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

#### 4.1.5. Przyspieszenie ziemskie otrzymane przy pomocy sposobu pierwszego

Odpowiednio zaokrąglamy wynik:

$$g = 9.9289 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 9.93 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Porównanie wartości zmierzonej z teoretyczną:

$$g_0 = 9.811 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$|g - g_0| = \left| 9.93 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 9.811 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right| = 0.118 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} < U(g)$$

Otrzymany wynik jest zgodny z wartością przyspieszenia ziemskiego dla Krakowa.

$$g = (9.93 \pm 0.14) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

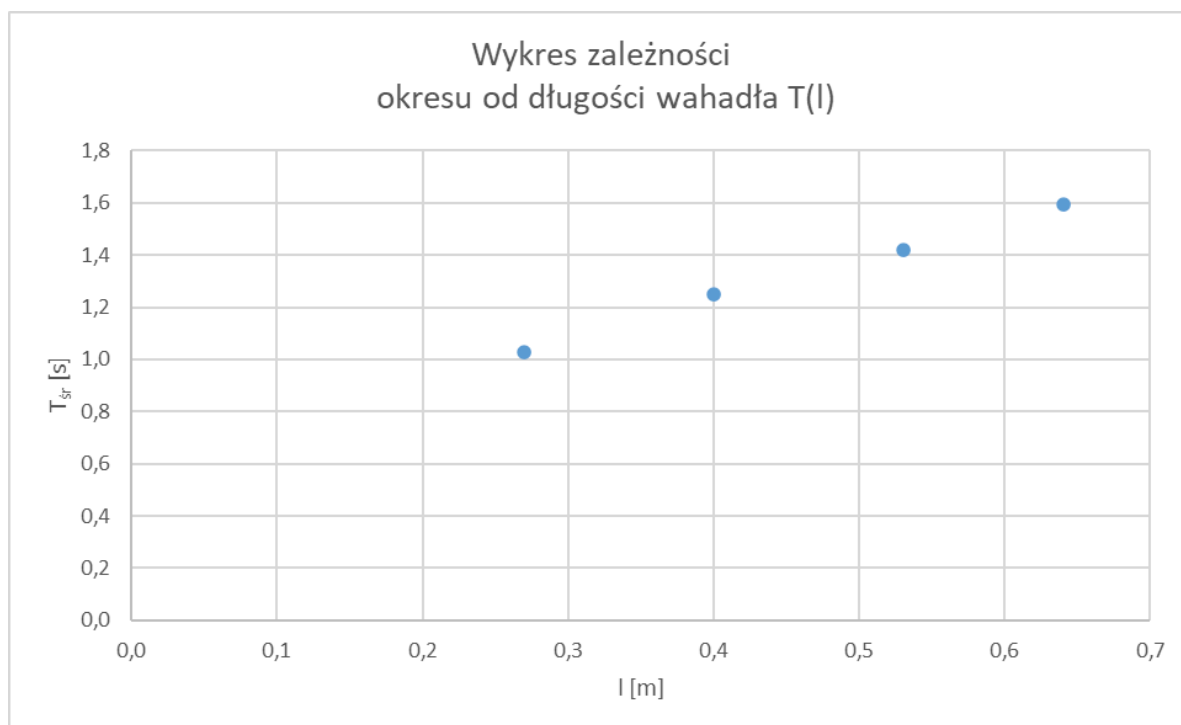
## 4.2. Sposób drugi

### 4.2.1. Pomiar długości wahadła oraz okresów drgań

Nr pomiaru	Długość wahadła	Czas 10 okresów	Czas 1 okresu	Średni okres dla danego L	Kwadrat okresu
i	$L_i[m]$	$10T_i[s]$	$T_i[s]$	$T_{i\text{śr}}[s]$	$T_i^2[s^2]$
1	0.530	14.24	1.424	1.4187	2.0126
1		14.18	1.418		
1		14.14	1.414		
2	0.400	12.50	1.250	1.2510	1.5650
2		12.62	1.262		
2		12.41	1.241		
3	0.270	10.14	1.014	1.0257	1.0520
3		10.25	1.025		
3		10.38	1.038		
4	0.640	z poprzedniej części ćw.		1.5952	2.5447

W wynikach pomiarów nie zaobserwowano żadnych błędów grubych.

### 4.2.2. Wykres zależności okresu od długości wahadła $T(l)$

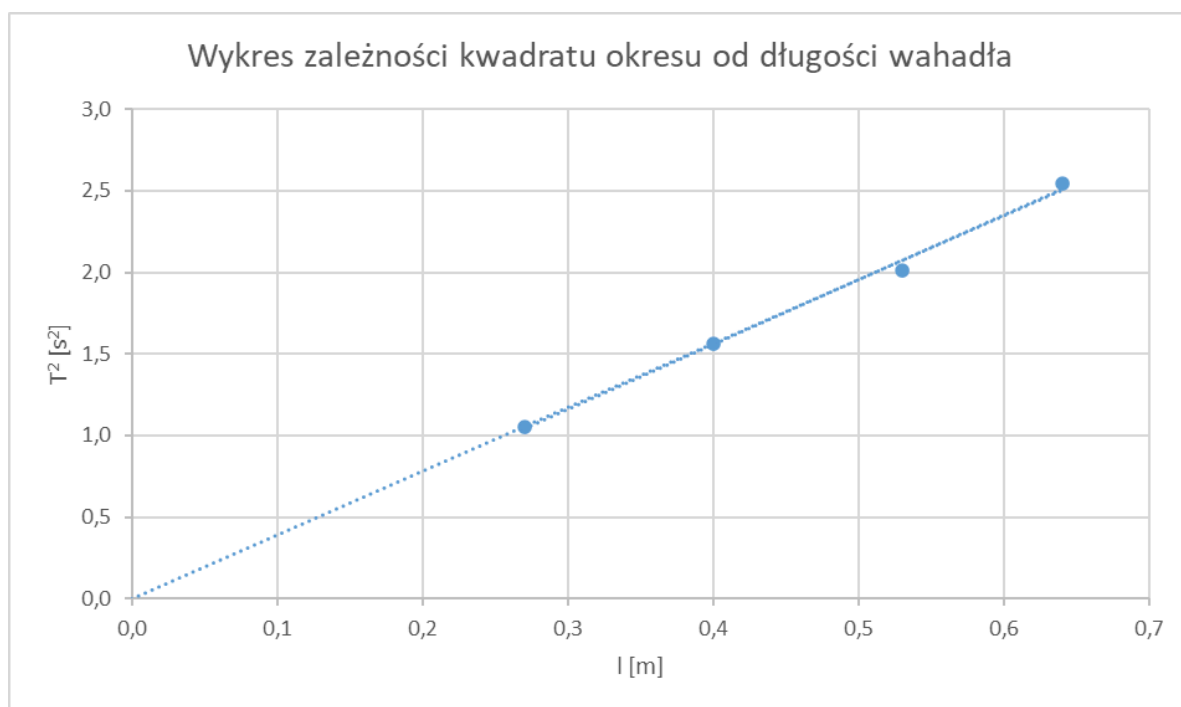


Rysunek 2: Wykres zależności okresu od długości wahadła  $T(l)$

### 4.2.3. Zlinearyzowany wykres $T^2$ w funkcji $l$

Wzór  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  możemy przekształcić i zapisać jako zależność liniową  $T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l$ , gdzie typ zależności liniowej to  $y = Ax + B$  oraz odpowiednio  $y \rightarrow T^2, x \rightarrow l, A \rightarrow \frac{4\pi^2}{g}$ .

Wykorzystując dane z tabeli powyżej, na wykres naniesiono 4 punkty o współrzędnych  $(L_i, T_i^2)$ . Przy pomocy funkcji *REGLINP* programu *Microsoft Excel* dopasowano do nich prostą regresji  $T_i^2 = A \cdot l_i + B$ .



Rysunek 3: Wykres dopasowanej prostej zależności  $T^2(l)$

Otrzymano wartość współczynnika  $A$  oraz jej niepewność  $u(A)$ :

$$A = 3.96 \frac{s^2}{m}, u(A) = 0.19 \frac{s^2}{m}$$

### 4.2.4. Obliczenie przyspieszenia ziemskiego wraz z niepewnością

Ze wzoru  $A = \frac{4\pi^2}{g}$  można wyliczyć  $g = \frac{4\pi^2}{A}$ :

$$g = \frac{4\pi^2}{3.96 \frac{s^2}{m}} = 9.9693 \frac{m}{s^2}$$

Niepewność obliczamy z prawa przenoszenia niepewności:

$$u_C(g) = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{-A^2}\right)^2 (u(A))^2} = \frac{4\pi^2 u(A)}{A^2}$$

$$u_C(g) = \frac{4\pi^2 \cdot 0.19 \frac{s^2}{m}}{\left(3.96 \frac{s^2}{m}\right)^2} = 0.4783 \frac{m}{s^2} \approx 0.48 \frac{m}{s^2}$$

Niepewność rozszerzona:

$$U(g) = u_C(g) \cdot k$$

$$U(g) = 0.48 \frac{m}{s^2} \cdot 2 = 0.96 \frac{m}{s^2}$$

#### 4.2.5. Przyspieszenie ziemskie otrzymane przy pomocy sposobu drugiego

Odpowiednio zaokrąglamy wynik:

$$g = 9.9693 \frac{m}{s^2} \approx 9.97 \frac{m}{s^2}$$

Porównanie wartości zmierzonej z teoretyczną:

$$|g - g_0| = \left| 9.97 \frac{m}{s^2} - 9.811 \frac{m}{s^2} \right| = 0.159 \frac{m}{s^2} < U(g)$$

Otrzymany wynik jest zgodny z wartością przyspieszenia ziemskiego dla Krakowa.

$$g = (9.97 \pm 0.96) \frac{m}{s^2}$$

## 5. Wnioski

Wartości przyspieszenia grawitacyjnego  $g_1 = (9.93 \pm 0.14) \frac{m}{s^2}$  oraz  $g_2 = (9.97 \pm 0.96) \frac{m}{s^2}$  otrzymane kolejno z pierwszego i drugiego sposobu wykonania ćwiczenia są zgodne z przyspieszeniem dla Krakowa  $g_0 = 9.811 \frac{m}{s^2}$  w granicach niepewności. Przyjęta metoda pozwala wyznaczyć dobre przybliżenie przyspieszenia ziemskiego. Na dokładność wpływ mogły mieć:

- czas reakcji człowieka podczas obsługi stopera,
- problem z dokładnym ustaleniem środka ciężkości zawieszonego ciała oraz punktu zaczepienia nici,
- niedoskonałe wprowadzanie wahadła w ruch,
- niewielka liczba pomiarów.

## Bibliografia

AGH WFiIS, „Protokół wykonania ćwiczenia nr 0: Opracowanie danych pomiarowych”. Dostęp: 6 październik 2024. [Online]. Dostępne na: <https://pf.agh.edu.pl/home/wfiis/pracfiz/>

[1] Opisy\_cwiczen/00\_protokol.pdf