



AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

Fizyka 2 - laboratorium 4

Modelowanie pola elektrycznego

Ćwiczenie nr 31

22 października 2024

Aleksander Jóźwik

Adrian Krawczyk

Wydział WI	Imię i nazwisko 1. Aleksander Jóźwik 2. Adrian Krawczyk	Rok II	Grupa 3	Zespół 3
PRACOWNIA FIZYCZNA WFIS AGH	Temat: Modelowanie pola elektrycznego			Nr ćwiczenia 31
Data wykonania 22.10.2024	Data oddania 27.10.2024	Zwrot do popr.	Data oddania	Data zaliczenia
				Ocena

1. Wprowadzenie

1.1. Cel ćwiczenia

Poznanie podstawowych wielkości opisujących pole elektrostatyczne. Wyznaczenie powierzchni ekwipotencjalnych i wektorów natężenia pola elektrycznego na płaszczyźnie dla różnych konfiguracji elektrod.

1.2. Wstęp teoretyczny

Pole elektrostatyczne powstaje w wyniku obecności nieruchomych ładunków elektrycznych w przestrzeni. Określenie jego rozkładu wymaga wyznaczenia dwóch funkcji dla każdego punktu przestrzennego - wektorowej funkcji natężenia $E(x, y, z)$ oraz skalarnej funkcji potencjału $V(x, y, z)$.

Pole elektryczne wewnątrz kondensatora można wyznaczyć w sposób analityczny.

1.2.1. Kondensator płaski

Wewnątrz kondensatora płaskiego pole elektryczne jest jednorodne, a jego wartość wyraża się wzorem:

$$E = \frac{U}{d}$$

gdzie E - wartość natężenia pola, U - napięcie między okładkami, a d to odległość między okładkami.

Wartość potencjału $V(x)$ zmienia się liniowo w przestrzeni - od zera przy elektrodzie z uziemieniem, aż do wielkości U , która jest równa napięciu źródła zasilania.

$$V(x) = \frac{U}{d}x$$

gdzie x to odległość od okładki o potencjale 0V.

1.2.2. Kondensator cylindryczny

Zakładając, że potencjał elektrody zewnętrznej jest równy zeru, to wartość potencjału w punkcie odległym o r od osi kondensatora określa wzór:

$$V(r) = \frac{U}{\ln\left(\frac{r_z}{r_w}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_z}\right)$$

gdzie r_z to promień zewnętrzny kondensatora cylindrycznego, a r_w to promień wewnętrzny.

Obliczając analitycznie pochodną z powyższego wzoru można otrzymać wzór na natężenie pola:

$$E(r) = -\frac{U}{r \ln\left(\frac{r_z}{r_w}\right)}$$

Jak można zauważyć powyżej, rozkłady pola elektrycznego $E(r)$ oraz potencjału $V(r)$ nie zależą od długości kondensatora l , więc mogą być zbadane na płaskim modelu.

Pole elektryczne można wyznaczyć także w sposób doświadczalny.

Pomiar pola elektrycznego jest trudny z powodu zakłóceń wprowadzanych przez sondę pomiarową. W praktyce stosuje się więc modelowanie analogowe, zastępując pole elektrostatyczne innym polem o tych samych funkcjach opisowych, ale łatwiejszym do zmierzenia. Dobrym przykładem jest pole elektryczne stacjonarnego przepływu prądu w obszarze o stałej oporności właściwej, które może służyć jako model pola elektrostatycznego w przestrzeni bez ładunków.

Przybliżoną wartość natężenia E uzyskać można obliczając numerycznie gradient potencjału:

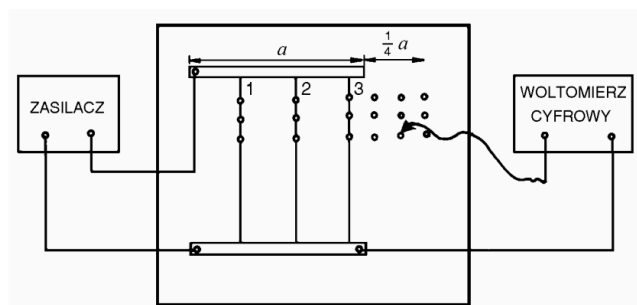
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V(x+h, y) - V(x, y)}{h}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \approx \frac{V(x, y+k) - V(x, y)}{k}$$

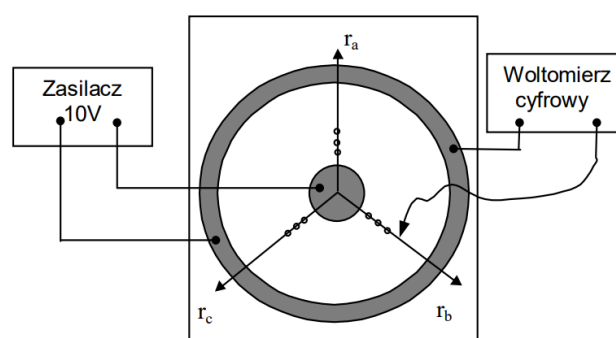
gdzie h i k są krokami siatki, przyjmujemy $h = k$.

2. Układ pomiarowy

1. Płyty modelowe kondensatorów: cylindrycznego i płaskiego
2. Zasilacz
3. Woltomierz o dokładności 0.01 V
4. Sonda
5. Linijka o działce elementarnej 1 mm



Rysunek 1: Obwód elektryczny do badania pola w kondensatorze płaskim [1]



Rysunek 2: Schemat połączeń układu pomiarowego do modelowania pola elektrycznego w kondensatorze cylindrycznym [2]

3. Przebieg ćwiczenia

Doświadczenie rozpoczęto od podłączenia elementów zgodnie ze schematami dla dwóch typów kondensatorów: płaskiego oraz cylindrycznego. Następnie zmierzono wymiary geometryczne kondensatora cylindrycznego, takie jak jego promień wewnętrzny i zewnętrzny, oraz odstęp między okładkami w kondensatorze płaskim. Kolejnym etapem było określenie odległości wyznaczonych punktów pomiarowych od okładek obu kondensatorów, co umożliwiło odczyt napięcia w tych punktach za pomocą sondy. Na końcu dokonano dodatkowych pomiarów napięcia w miejscach znajdujących się poza obszarem kondensatora płaskiego. Wszystkie uzyskane dane zostały zapisane w tabelach pomiarowych.

4. Analiza danych pomiarowych

4.1. Kondensator płaski

1,66	1,90	2,11	2,48	2,92	3,33	3,79	4,10	4,81	5,26	5,71	6,27	6,89	7,10	7,86	8,23	8,57	8,79	8,95	
1,55	1,75	2,07	2,37	2,76	3,18	3,40	4,25	4,70	5,33	5,81	6,30	6,96	7,33	7,92	8,34	8,66	8,91	9,11	
1,29	1,45	1,75	2,10	2,47	3,14	3,39	4,20	4,71	5,29	5,91	6,58	7,04	7,55	8,03	8,54	9,02	9,30	9,33	
	-			2,36	3,05	3,55	3,98	4,71	5,35	5,98	6,51	7,05	7,69	8,28	+				
				1,73	2,47	3,04	3,86	4,51	5,25	6,03	6,82	7,48	8,18	9,06					
V [V]				1,14	1,97	2,69	3,48	4,23	5,10	5,97	6,69	7,51	8,25	9,22					
							1,23	2,01	2,80	3,40	4,24	5,16	5,83	6,52					7,50
		d [cm]		0,8	1,6	2,7	3,8	4,9	5,9	7	8	8,9	10	11					

Rysunek 3: Wyniki pomiarów wartości potencjału V [V] oraz odległości d [cm] punktów siatki w przestrzeni dla kondensatora płaskiego

Napięcie zasilania U ustawiono na 10 V oraz zmierzono odległość między okładkami kondensatora: $D = 11.9$ cm

4.1.1. Wyniki pomiarów dla wnętrza kondensatora

L.p.	x [m]	V_a [V]	V_b [V]	V_c [V]	$V_{\text{dośw}}$ [V]	V_{teor} [V]
1	0.008	1.23	1.14	1.73	1.37	0.67
2	0.016	2.01	1.97	2.47	2.15	1.34
3	0.027	2.80	2.69	3.04	2.84	2.27
4	0.038	3.40	3.48	3.86	3.58	3.19
5	0.049	4.24	4.23	4.51	4.33	4.12
6	0.059	5.16	5.10	5.25	5.17	4.96
7	0.070	5.83	5.97	6.03	5.94	5.88
8	0.080	6.52	6.69	6.82	6.68	6.72
9	0.089	7.50	7.51	7.48	7.50	7.48
10	0.100	8.28	8.25	8.18	8.24	8.40
11	0.110	9.21	9.22	9.06	9.16	9.24

Tabela 1: Wyniki pomiarów i obliczeń potencjału dla płaskiego układu elektrod

W powyższej tabeli x to odległość od okładki o potencjale 0 V,

$V_{\text{dośw}}$ to średnia wartość potencjału dla danego położenia x wyznaczona ze wzoru:

$$V_{\text{dośw}} = \frac{V_a + V_b + V_c}{3}$$

a V_{teor} wyznaczono według zależności:

$$V(x) = \frac{U}{d}x$$

Następnie obliczono wartości doświadczalne natężenia pola jako:

$$E_{\text{dośw}} = \frac{V_{n+1} - V_n}{x_{n+1} - x_n}$$

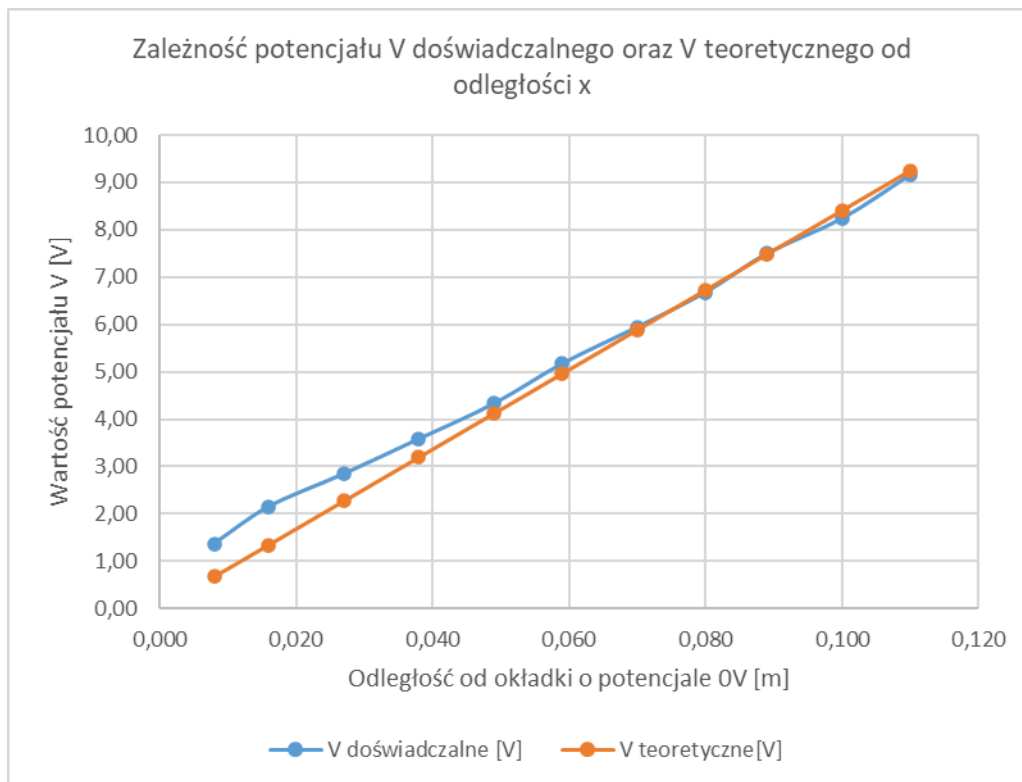
Każdą z wartości przypisano do punktu leżącego w połowie odległości między x_{n+1} oraz x_n :

$$x^* = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$$

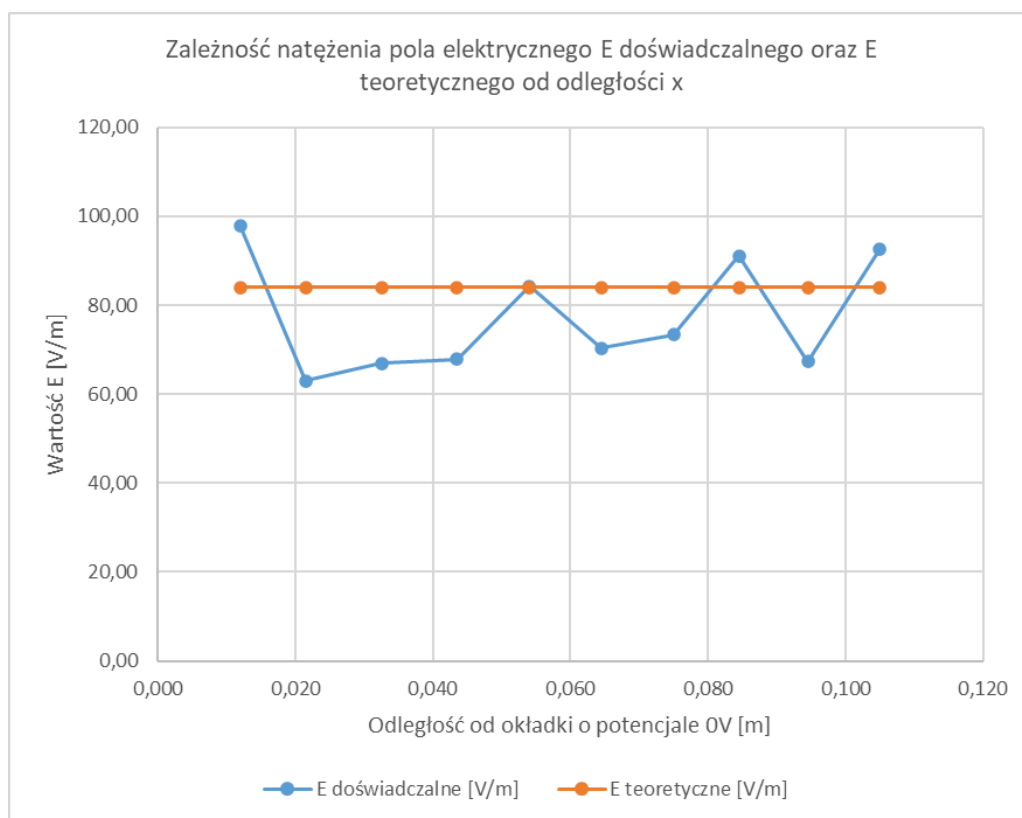
$$E_{\text{teor}} = \frac{U}{d}$$

L.p.	x [m]	$E_{\text{dośw}}$ [$\frac{V}{m}$]	E_{teor} [$\frac{V}{m}$]
1	0.012	97.92	84.03
2	0.022	63.03	84.03
3	0.033	66.97	84.03
4	0.044	67.88	84.03
5	0.054	84.33	84.03
6	0.065	70.30	84.03
7	0.075	73.33	84.03
8	0.085	91.11	84.03
9	0.095	67.27	84.03
10	0.105	92.67	84.03

Tabela 2: Wyniki pomiarów i obliczeń wartości natężenia pola dla płaskiego układu elektrod



Rysunek 4: Zależność potencjału $V_{\text{dośw}}$ oraz V_{teor} od odległości x dla kondensatora płaskiego



Rysunek 5: Zależność natężenia pola elektrycznego $E_{\text{dośw}}$ oraz E_{teor} od odległości x dla kondensatora płaskiego

4.1.2. Wyniki pomiarów na zewnątrz kondensatora

0,03	2,48	2,92	3,33	3,79	4,10	4,81		
0,02	2,37	2,76	3,18	3,40	4,25	4,70		V [V]
0,01	2,10	2,47	3,14	3,39	4,20	4,71		
y [m]	-							
	x [m]	0,008	0,016	0,027	0,038	0,049		

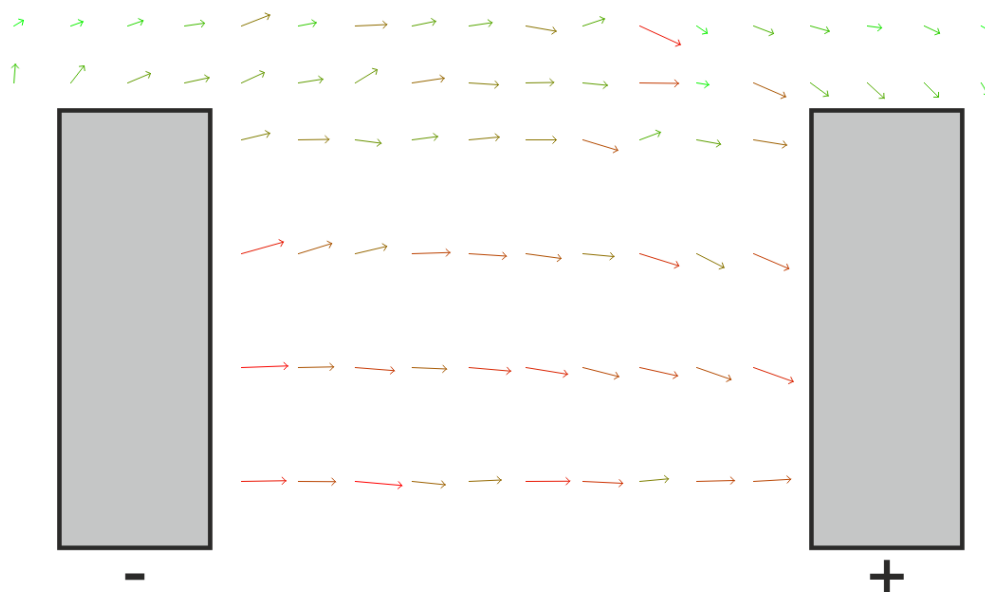
Rysunek 6: Wartości potencjału V w wybranych punktach na zewnątrz kondensatora płaskiego, wraz z ustalonymi współrzędnymi (x, y)

Za pomocą wzorów $E_x \approx \frac{V(x+h,y)-V(x,y)}{h}$ oraz $E_y \approx \frac{V(x,y+k)-V(x,y)}{k}$ wyznaczono wektory \vec{E} dla punktów na zewnątrz kondensatora ($h = k \approx 1$ cm):

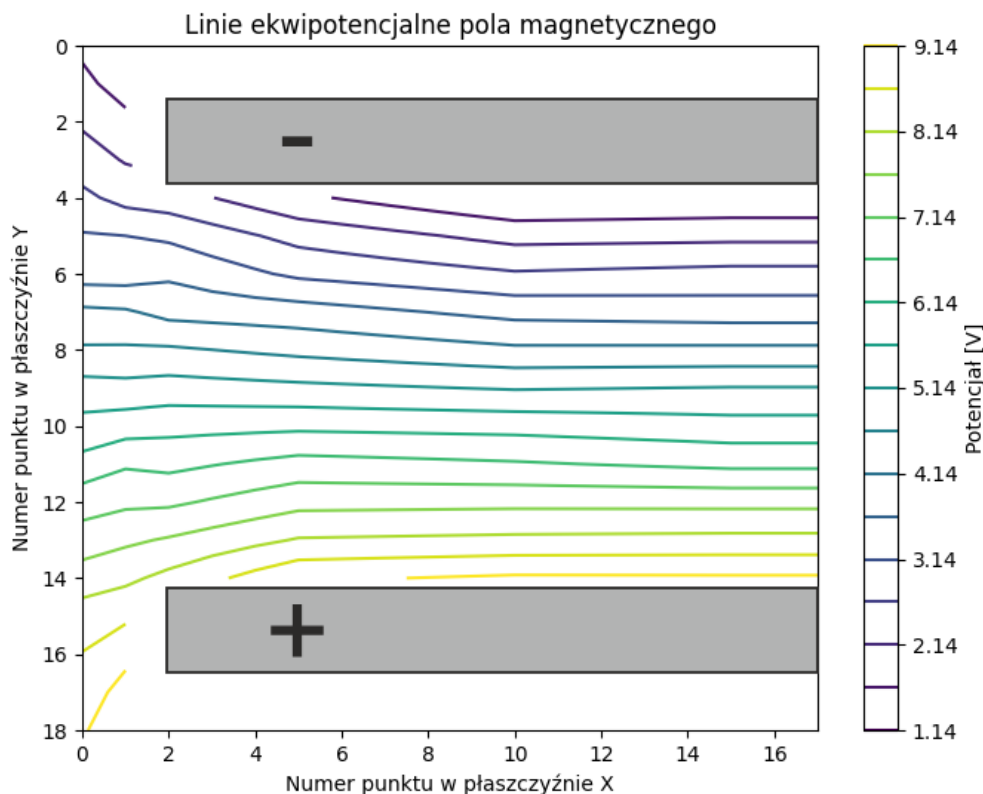
L.p.	x [m]	y [m]	E_x [$\frac{V}{m}$]	E_y [$\frac{V}{m}$]	$ \vec{E} $ [$\frac{V}{m}$]
1	0	0.02	39.00	11	40.52
2	0	0.01	37.00	27	45.80
3	0.008	0.02	42.00	16	44.94
4	0.008	0.01	67.00	29	73.01
5	0.016	0.02	22.00	15	26.63
6	0.016	0.01	25.00	4	25.32
7	0.027	0.02	85.00	39	93.52
8	0.027	0.01	81.00	1	81.01
9	0.038	0.02	45.00	-15	47.43
10	0.038	0.01	51.00	5	51.24

Tabela 3: Wyniki wyznaczenia wektora \vec{E} w wybranych punktach dla płaskiego układu elektrod

4.1.3. Wizualizacje dla kondensatora płaskiego



Rysunek 7: Wizualizacja przedstawiająca wektory natężenia pola \vec{E} w przestrzeni dla kondensatora płaskiego. Rysunek został wygenerowany przy pomocy skryptu w języku *Python* [3].



Rysunek 8: Linie ekwipotencjalne dla kondensatora płaskiego o rozdzielczości $\Delta V = 0.5V$, wygenerowane przy pomocy algorytmu interpolacji z biblioteki *numpy* oraz *matplotlib*.

4.2. Kondensator cylindryczny

4.2.1. Wyniki pomiarów

L.p.	x [m]	V_a [V]	V_b [V]	V_c [V]	$V_{\text{dośw}}$ [V]	V_{teor} [V]
1	0.027	7.43	7.33	7.70	7.49	8.07
2	0.033	6.68	5.57	6.36	6.20	6.79
3	0.039	5.68	4.55	5.26	5.16	5.71
4	0.047	4.95	3.92	4.61	4.49	4.52
5	0.054	4.33	3.28	3.94	3.85	3.63
6	0.062	3.44	2.78	3.37	3.20	2.74
7	0.069	2.93	2.22	2.84	2.66	2.05
8	0.076	2.45	1.70	2.43	2.19	1.43
9	0.083	1.92	1.22	1.99	1.71	0.87
10	0.089	1.39	0.83	1.61	1.28	0.42

Tabela 4: Wyniki pomiarów i obliczeń dla cylindrycznego układu elektrod

Zmierzono napięcie zasilania $U = 10 \text{ V}$, $r_{\text{wewn}} = 2 \text{ cm}$ oraz $r_{\text{zewn}} = 9.5 \text{ cm}$.

W powyższej tabeli x to odległość od okładki o potencjale 10 V ,

V_{teor} wyznaczono według zależności:

$$V_{\text{teor}}(r) = \frac{U}{\ln\left(\frac{r_z}{r_w}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_z}\right)$$

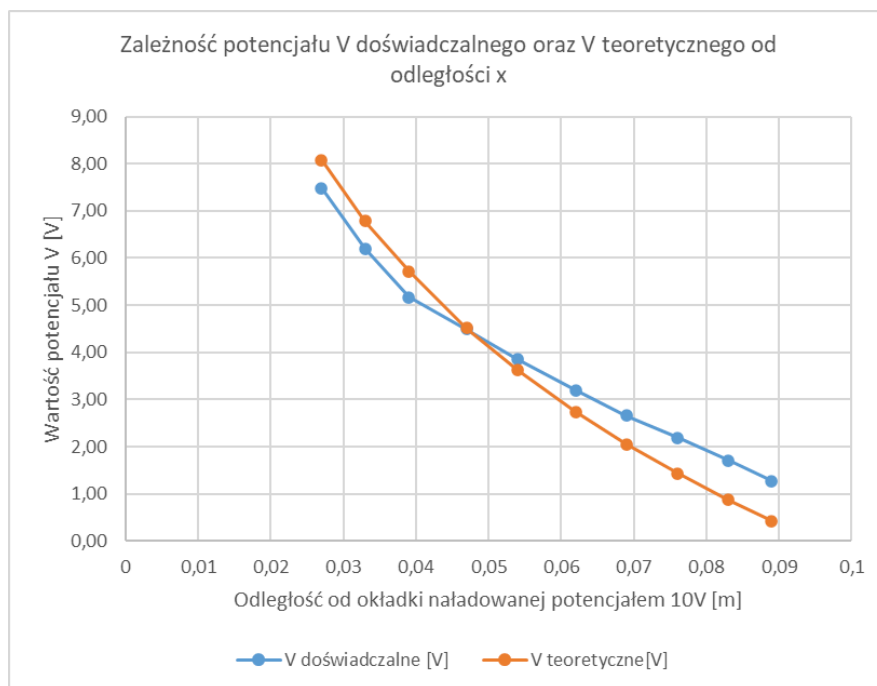
gdzie r to odległość od osi kondensatora.

$$E_{\text{teor}}(r) = -\frac{U}{r \ln\left(\frac{r_z}{r_w}\right)}$$

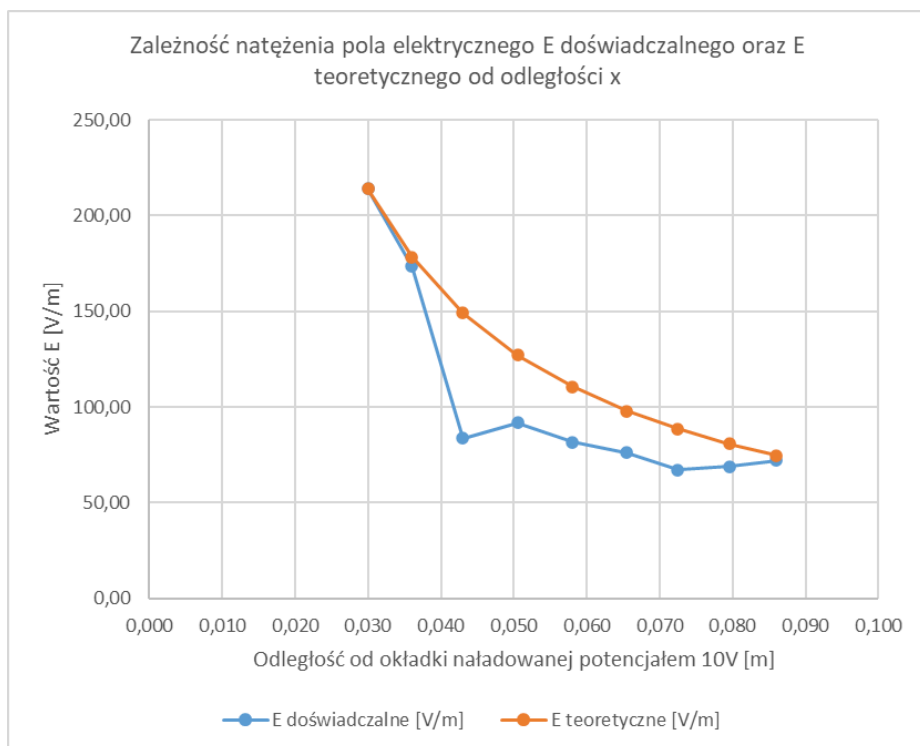
L.p.	$x \text{ [m]}$	$E_{\text{dośw}} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$	$E_{\text{teor}} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$
1	0.030	213.89	213.93
2	0.036	173.33	178.27
3	0.043	83.75	149.25
4	0.051	91.90	127.09
5	0.058	81.67	110.65
6	0.066	76.19	97.98
7	0.073	67.14	88.52
8	0.080	69.05	80.73
9	0.086	72.22	74.63

Tabela 5: Wyniki pomiarów i obliczeń wartości natężenia pola dla cylindrycznego układu elektrod

Wartość natężenia pola oznaczona na czerwono najprawdopodobniej jest błędna, jednakże nie udało się zidentyfikować oczywistego błędu grubego, który znacząco odbiegałby od trendu obserwowanego w pozostałych pomiarach.

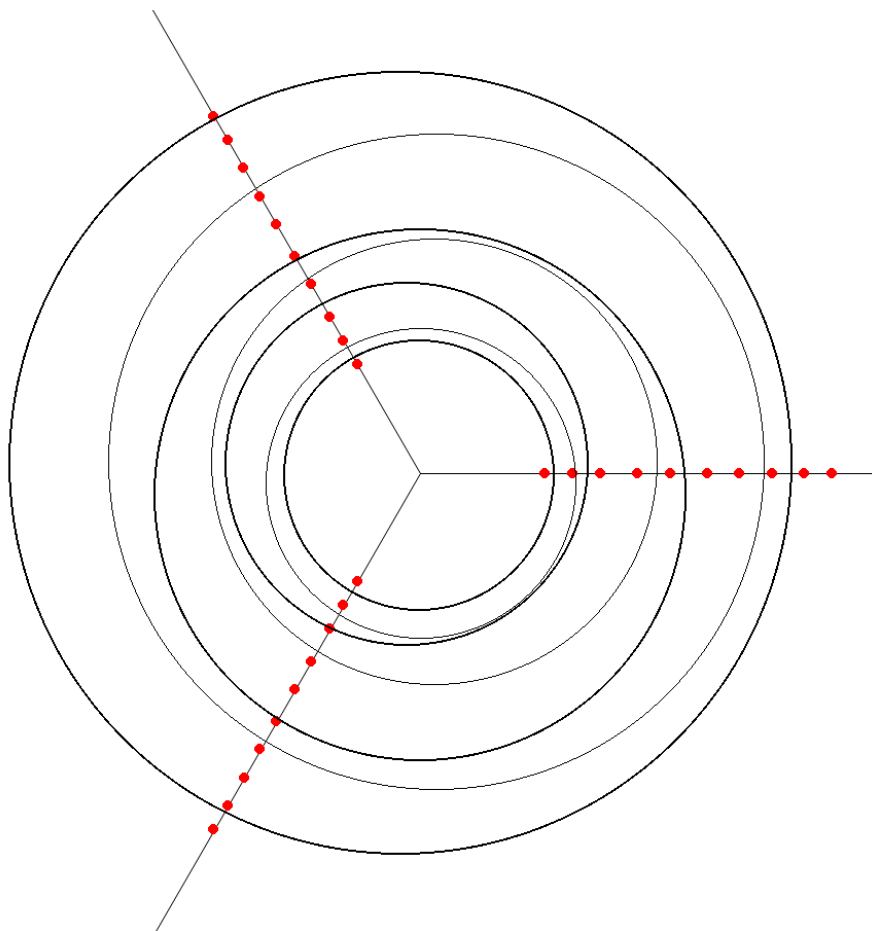


Rysunek 9: Zależność potencjału $V_{\text{dośw}}$ oraz V_{teor} od odległości x dla kondensatora cylindrycznego



Rysunek 10: Zależność natężenia pola elektrycznego $E_{\text{dośw}}$ oraz E_{teor} od odległości x dla kondensatora cylindrycznego

4.2.2. Wizualizacja dla kondensatora cylindrycznego



Rysunek 11: Linie ekwipotencjalne dla kondensatora cylindrycznego wygenerowane przy pomocy skryptu w języku *Python* [3].

5. Wnioski

Doświadczenie wykazało, że uzyskane wartości natężenia pola elektrycznego odbiegały od teoretycznych, co można przypisać złemu stanowi technicznemu płyty modelowej. Zużyty i zdeformowany papier przewodzący prąd elektryczny, posiadający liczne wgniecenia i odkształcenia, uniemożliwił uzyskanie dokładnych odczytów wartości potencjału, co prowadziło do problemów z ustaleniem się stałej wartości dla punktów pomiarowych.

Wyniki eksperymentalne przy krańcowych wartościach x wykazały najmniejsze odchylenia od wartości teoretycznych, co sugeruje, że w tych obszarach papier przewodzący był najmniej uszkodzony. Aby uzyskać dokładniejsze wyniki, konieczne byłoby przeprowadzenie pomiarów na sprawnej płycie modelowej z nieuszkodzonym papierem przewodzącym.

W przypadku dokładniejszych pomiarów, doświadczenie prawdopodobnie potwierdziłoby, że wewnątrz kondensatora płaskiego natężenie pola elektrycznego ma stałą wartość, podczas gdy potencjał maleje liniowo. Natomiast w kondensatorze cylindrycznym, że potencjał zmienia się nieliniowo, co ilustrują zagęszczające się linie ekwipotencjalne w pobliżu środka kondensatora.

Dodatkowo, w pobliżu końców kondensatora płaskiego pole elektryczne przestaje być jednorodne, co udało się zmierzyć oraz zwizualizować, ukazując zmiany wartości oraz kierunków wektorów natężenia pola.

Bibliografia

- AGH WFiIS, „Opis ćwiczenia nr 31: Modelowanie pola elektrycznego ”. Dostęp: 27 październik 2024. [Online]. Dostępne na: https://pf.agh.edu.pl/home/wfiis/pracfiz/Opisy_cwiczen/31_opis.pdf
- AGH WFiIS, „Instrukcja wykonania ćwiczenia nr 31: Modelowanie pola elektrycznego”. Dostęp: 27 październik 2024. [Online]. Dostępne na: https://pf.agh.edu.pl/home/wfiis/pracfiz/Opisy_cwiczen/31_wykon.pdf
- „Skrypt do generowania pól wektorowych”. Dostęp: 27 październik 2024. [Online]. Dostępne na: <https://github.com/Nepommuck/Vector-Field-Modelling>