# 第二章　逻辑代数基础

## 2.1 逻辑代数中的几个概念

十九世纪中叶，英国数学家 **George Boole** 提出了将人的逻辑思维规律和推理过程归结为一种数学运算的代数系统——布尔代数。

**1938**年，**Claude E.Shannon**将布尔代数应用于继电器电路的分析与描述，形成二值布尔代数，即开关代数，又称为逻辑代数。

逻辑代数是逻辑电路分析与设计的数学基础。

*逻辑命题*：一段具有意义，且能判断真假的文字构成逻辑命题。

*逻辑状态*

- 在一定条件下，事物的某种性质只表现为两种互不相容的状态，称为逻辑状态。

- 这两种状态必出现且仅出现一种，一种状态是另一种状态的反状态。

- 用符号**0**、**1**分别表示这两种逻辑状态

- 0和1不是数，不表示数的大小，而是代表状态的符号。

## *逻辑变量*

条件的变化，表示事物状态的逻辑状态也随之变化，这种未予确定的逻辑状态称为逻辑变量。

- 逻辑变量反映逻辑状态的变化；
- 逻辑变量仅能取值“0”或“1”；
- “0”或“1”称为逻辑常量。

## *逻辑电平*

在二值逻辑电路中，把物理量离散成两种电平（相对于参考地的电压值），即高电平（H）和低电平（L）。

# 不同工艺器件定义的逻辑电平（5V）

| 工艺 | 逻辑电平 | |
|---|---|---|
| | L | H |
| TTL | 0V~0.40V | 3.0V~5.0V |
| CMOS | 0V~0.80V | 2.0V~5.0V |

- 高、低电平之间存在逻辑不确定区间——噪音区。如果输入、输出电平稳定于噪音区，称为逻辑模糊，在逻辑电路中认为出错。
- H电平也可表示在规定时间内一定幅度的正脉冲出现；L电平也可表示在规定时间内没有脉冲，或负脉冲出现。
- 总之，逻辑电平是表示逻辑状态的物理特性。

## *正、负逻辑规定（约定）*

正逻辑规定（约定）

| 逻辑电平 | 逻辑状态 |
|---|---|
| L | 0 |
| H | 1 |

负逻辑规定（约定）

| 逻辑电平 | 逻辑状态 |
|---|---|
| L | 1 |
| H | 0 |

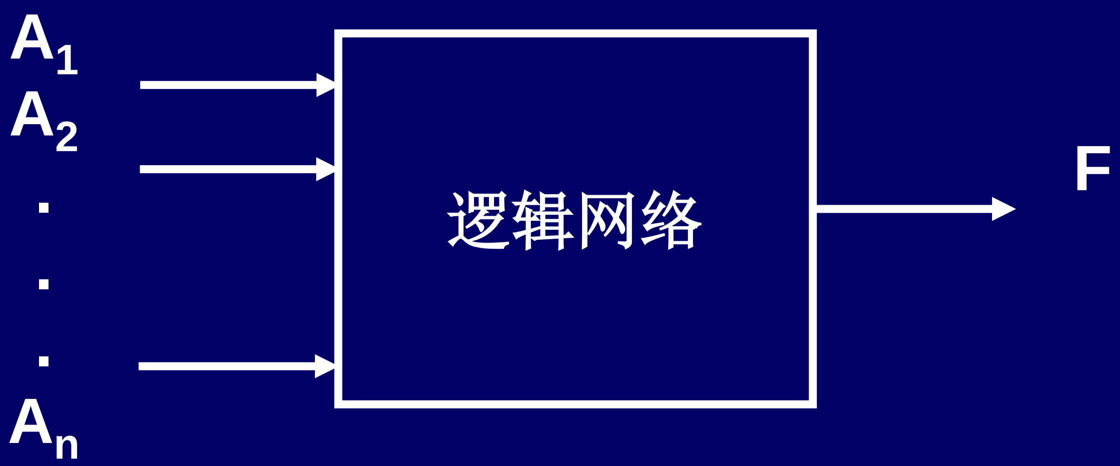
确定了逻辑规定（约定）后，各种物理量都转化为逻辑状态含义，可用逻辑变量表示，可用各种数学或逻辑方法对数字电路进行分析和表达。

## *逻辑代数*

逻辑代数是一个由逻辑变量集K、逻辑常量0和1、与运算符、或运算符、非运算符所构成的代数系统。记为：

$$\mathrm{L} = \left\{ K, 0, 1, \bullet, +, \overline{\phantom{x}} \right\}$$

***逻辑函数***




设某一逻辑网络的输入变量为$A_1$、$A_2$、…、$A_n$，输出逻辑变量为$F$，当$A_1$、$A_2$、…、$A_n$的取值确定后，$F$的值就唯一的被确定下来，则称F是$A_1$、$A_2$、…、$A_n$的逻辑函数，记为：$F = f(A_1、A_2、…、A_n)$

- 逻辑函数反映了可用逻辑变量描述的因果关系
- 逻辑函数也可作为另一逻辑网络的逻辑变量

## *逻辑函数的相等*

若$F$、$G$都是某$n$个逻辑变量的逻辑函数，在这$n$个变量的$2^n$种组合中的任意一组输入，$F$、$G$均有相同的输出，则称逻辑函数$F$和$G$相等。记为$F=G$。

## *逻辑函数的表示方法*

逻辑真值表、卡诺图、逻辑表达式、逻辑图、波形图以及硬件描述语言。

● 逻辑真值表

由逻辑变量的所有可能取值组合及其对应的逻辑函数值所构成的表格。

| *a* | *b* | *F* |
|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *0* |
| *1* | *0* | *0* |
| *1* | *1* | *1* |

- n个变量，$2^n$种组合，$2^n$行，列在左边。一般采用二进制编码顺序给出。
- 对应的逻辑函数值列在右边。

## ●*卡诺图*

真值表的变形，由表示逻辑变量所有可能组合的小方格构成的图形。

## ●*逻辑表达式*

由逻辑变量、逻辑常量、三种逻辑运算符（与、或、非）和括号构成的代数表达式。

$$F = A \bullet B + \overline{B \bullet C \bullet D}$$

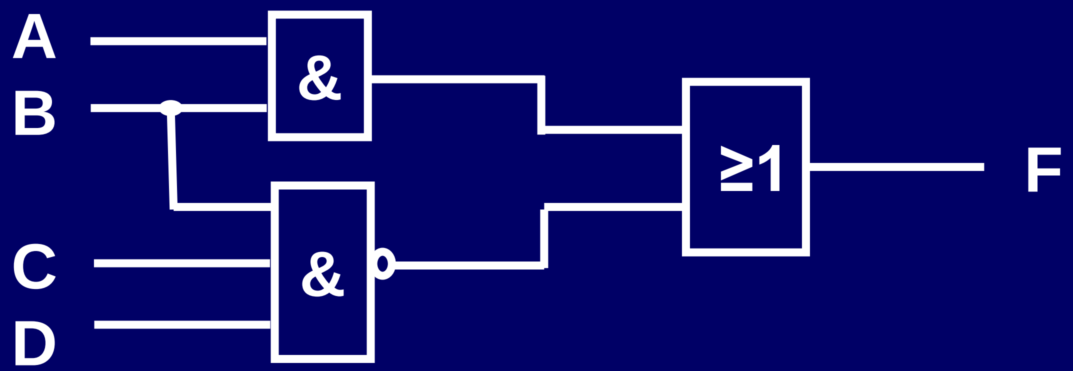
## ●*波形图*

反映输入、输出波形变化的图形称为波形图，又称为时序图。

波形图能清晰、直观地反映出变量间的时间关系和函数值随时间变化的规律。

## ●逻辑图

用逻辑符号来表示逻辑函数的运算关系称为函数的逻辑图。




逻辑图和数字集成器件有明显的对应关系，便于构成实际数字电路。

## ●硬件描述语言（Hardware Description Language）

是现代数字系统设计中基于EDA平台的最基本的电路描述工具。

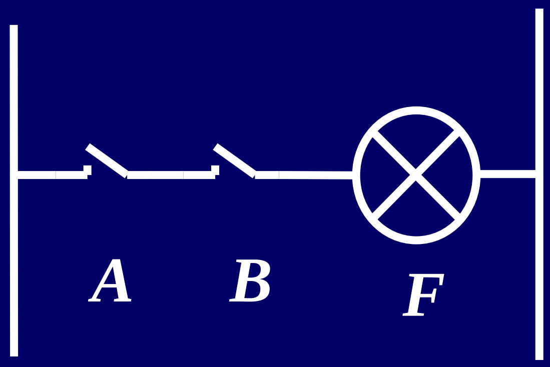
对于一个给定的逻辑函数，其真值表和卡诺图表示法是唯一的，而其逻辑表达式可以有多种形式。

## 2.2 逻辑代数的基本运算

### 2.2.1 与运算（逻辑乘）

与运算又称为“逻辑乘”（**Logic Multiplication**），其运算结果称为“逻辑积”（**Logic Product**）。

在逻辑问题中，如果决定某一事件的多个条件必须同时具备，事件才能发生，则这种因果关系称之为“与”逻辑。




串联开关电路是与逻辑的典型实例。

只有开关A、B都闭合，灯F才会亮；只要有一个开关不闭合，灯F就不会亮。

如果将“条件”和“结果”的各种可能性列成表格，则可得到与逻辑关系表。

| 开关A | 开关B | 灯F |
| --- | --- | --- |
| 断开 | 断开 | 灭 |
| 断开 | 闭合 | 灭 |
| 闭合 | 断开 | 灭 |
| 闭合 | 闭合 | 亮 |

设开关闭合状态为“1”，
断开状态为“0”；
灯亮状态为“1”，
灯灭状态为“0”。

可得到对应的逻辑状态关系表——真值表。

| A | B | F |
| --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

与逻辑的逻辑表达式，记为：

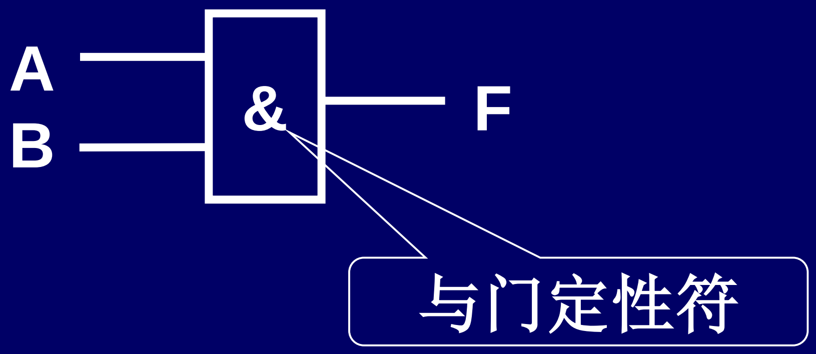
$$F = A \times B = A \bullet B = AB$$

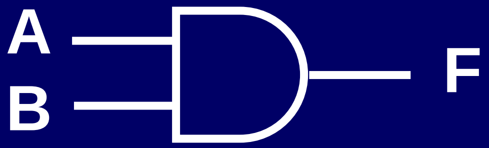
式中“×”、“•”表示与逻辑的运算符，

有些文献中用“∧”、“∩”、“&”、“*AND*”表示。

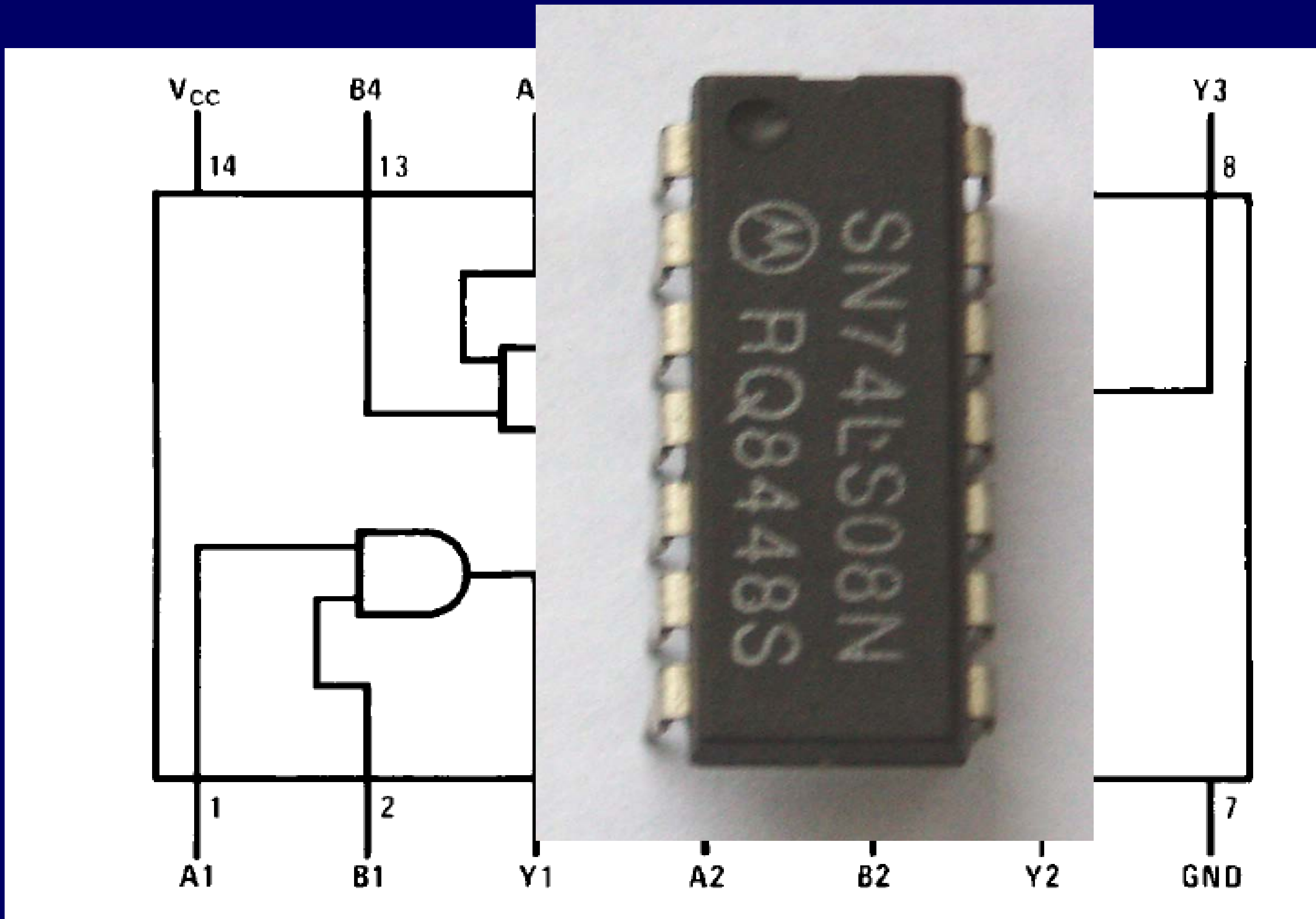
显然，若上述开关电路中有4个开关A、B、C、D串联，则有 F=ABCD。

数字电路中，实现与逻辑功能的电路称为“与门”（AND Gate），其逻辑符号为：



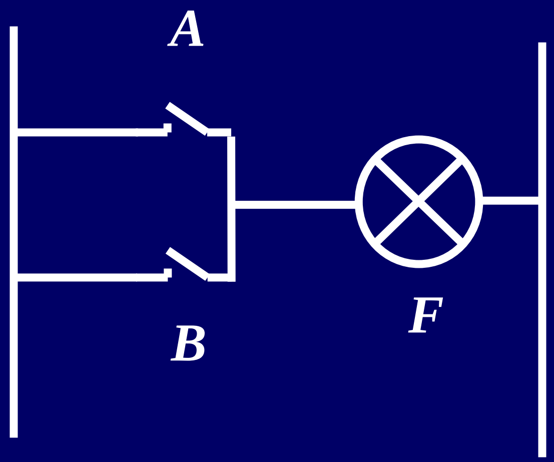
# 小规模集成电路74LS08集成了4个双输入与门



## 2.2.2 或运算（逻辑加）

或运算又称为“逻辑加”（**Logic Addition**），
其运算结果称为“逻辑和”（**Logic Sum**）。

在逻辑问题中，如果决定某一事件的多个条件中，只要有一个或一个以上条件具备，事件就发生，则这种因果关系称之为“或”逻辑。




并联开关电路是或逻辑的典型实例。

只要开关A、B有一个闭合，灯F就亮；只有开关都断开，灯F才不亮。

如果将“条件”和“结果”的各种可能性列成表格，则可得到或逻辑关系表。

| 开关A | 开关B | 灯F |
| --- | --- | --- |
| 断开 | 断开 | 灭 |
| 断开 | 闭合 | 亮 |
| 闭合 | 断开 | 亮 |
| 闭合 | 闭合 | 亮 |

设开关闭合状态为“1”，
断开状态为“0”；
灯亮状态为“1”，
灯灭状态为“0”。

可得到对应的逻辑状态关系表——真值表。

| A | B | F |
| --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

或逻辑的逻辑表达式，记为：

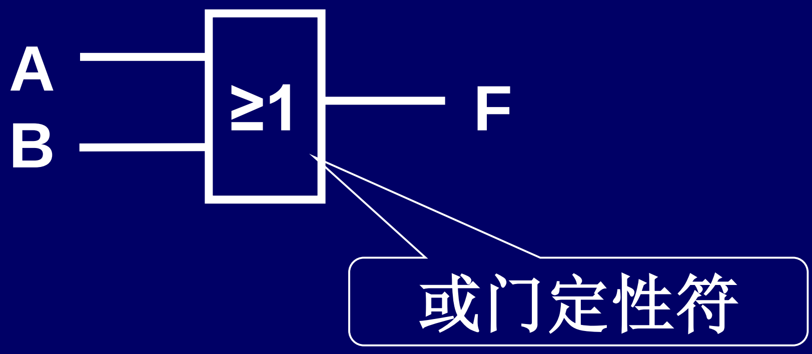
$$F = A + B$$

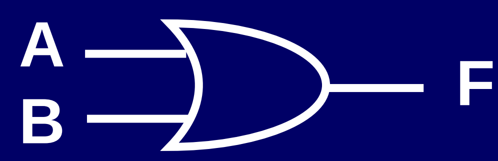
式中“+”表示或逻辑的运算符，

有些文献中用“∨”、“∪”、“*OR*”表示。

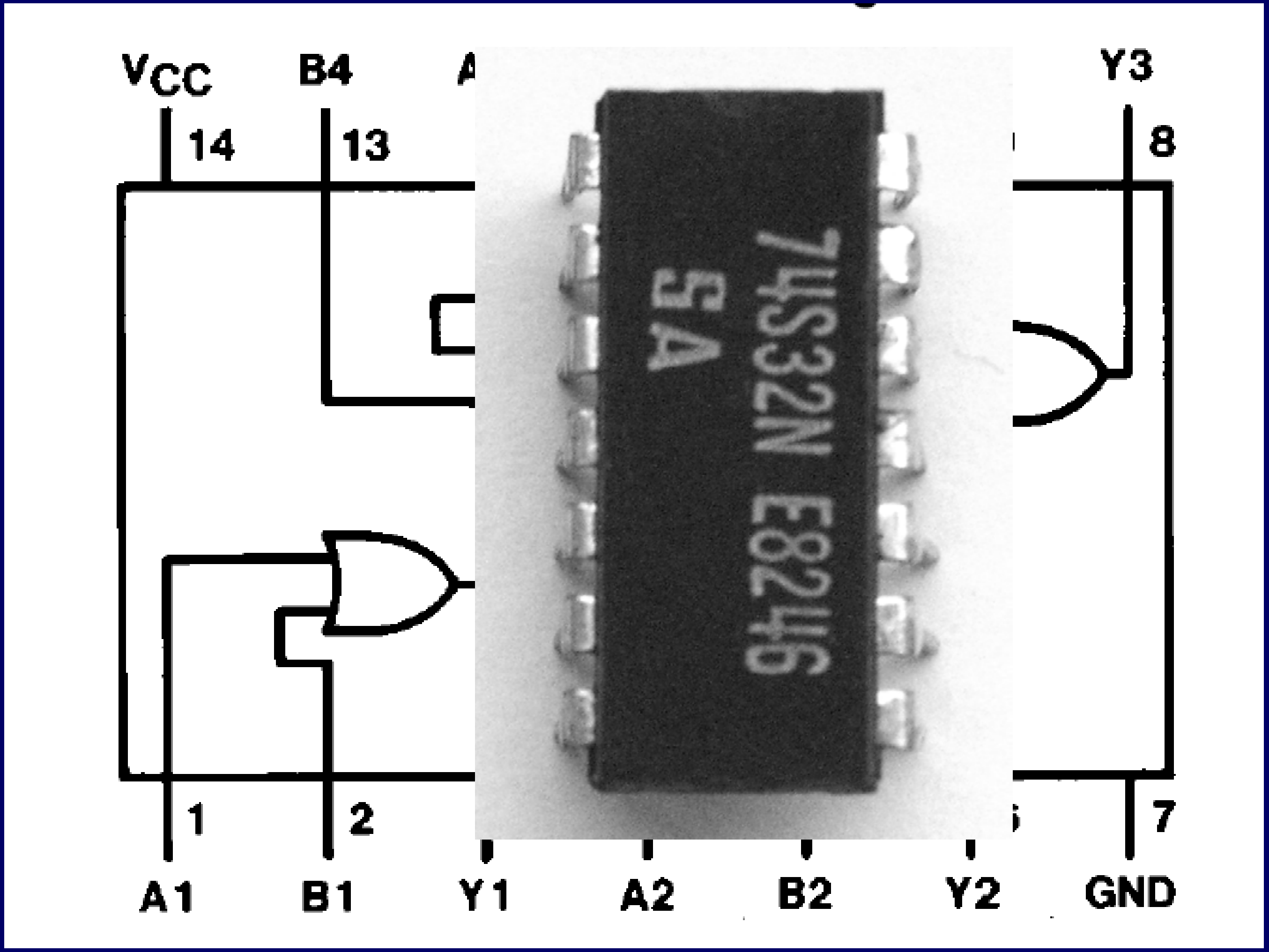
显然，若上述开关电路中有4个开关A、B、C、D并联，则有 F=A+B+C+D。

数字电路中，实现或逻辑功能的电路称为“或门”（OR Gate），其逻辑符号为：



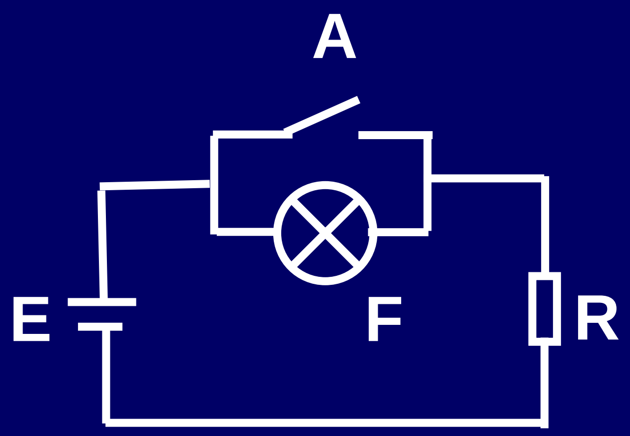
# 小规模集成电路74LS32集成了4个双输入或门



## 2.2.3 非运算（逻辑非）

非运算又称为“逻辑非”（**Logic Negation**），或称为“求补”（**Complement**）。

在逻辑问题中，如果决定某一事件的条件满足时，事件不发生；反之事件发生，则这种因果关系称之为“非”逻辑。




开关和灯并联电路是非逻辑的实例。

只要开关A闭合，灯F就不亮；
只有开关A断开，灯F才会亮。

如果将“条件”和“结果”的各种可能性列成表格，则可得到非逻辑关系表。

| 开关A | 灯F |
|---|---|
| 断开 | 亮 |
| 闭合 | 灭 |

设开关闭合状态为“1”，
断开状态为“0”；
灯亮状态为“1”，
灯灭状态为“0”。

| A | F |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

可得到对应的逻辑状态关系表——真值表。

非逻辑的逻辑表达式，记为：

$$F = \overline{A}$$

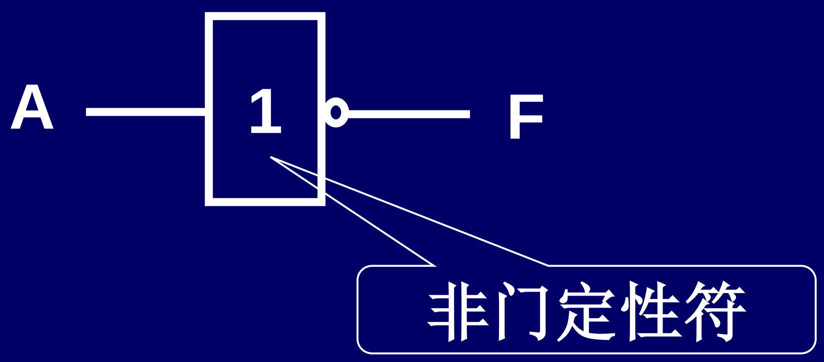
式中“ $\overline{\ }$ ”表示非逻辑的运算符，

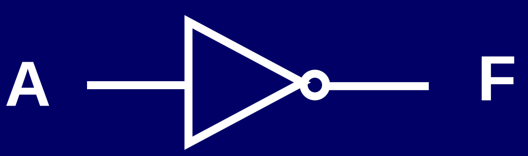
有些文献中用“*NOT*”表示。

若$A$称为原变量，则$\overline{A}$称为其反变量。

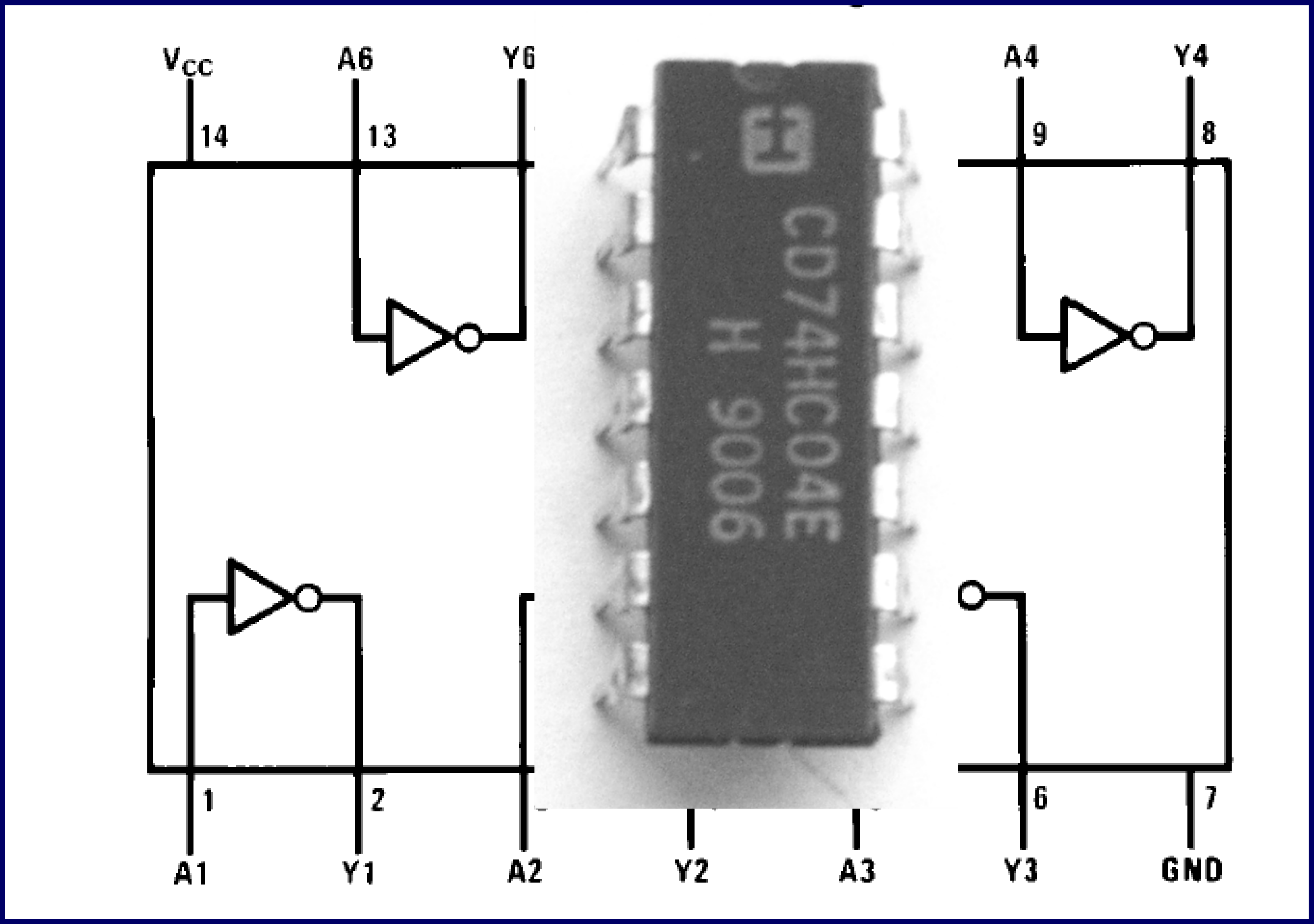
$A$和$\overline{A}$是一个变量的两种状态。

数字电路中，实现非逻辑功能的电路称为“非门”（NOT Gate）或称为“反相器”，其逻辑符号为：



# 小规模集成电路74LS04集成了6个非门



# 2.3 逻辑代数的基本定理及规则

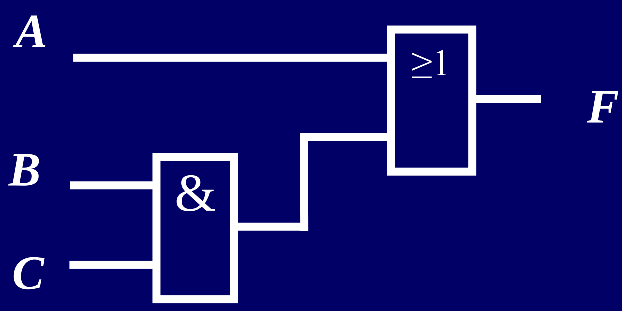
## 2.3.1 逻辑代数的基本公理

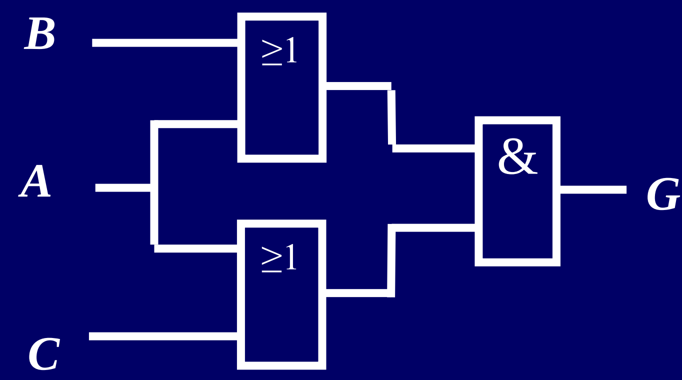
| 名称 | 公理（I） | 公理（II） |
|---|---|---|
| 0-1律 | $A \bullet 0 = 0$ | $A + 1 = 1$ |
| 自等律 | $A \bullet 1 = A$ | $A + 0 = A$ |
| 互补律 | $A \bullet \overline{A} = 0$ | $A + \overline{A} = 1$ |
| 交换律 | $A \bullet B = B \bullet A$ | $A + B = B + A$ |
| 结合律 | $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$ | $(A + B) + C = A + (B + C)$ |
| 重叠律 | $A \bullet A = A$ | $A + A = A$ |
| 还原律 | $\overline{\overline{A}} = A$ | |
| 分配律 | $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$ | $A + B \bullet C = (A + B) \bullet (A + C)$ |

用真值表证明 $A+B\bullet C=(A+B)\bullet(A+C)$

| $A$ | $B$ | $C$ | $A+B\bullet C$ | $(A+B)\bullet(A+C)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$F = A + BC \qquad G = (A+B)(A+C)$$




由真值表已证明 $F = G$

一个逻辑函数可以用不同的逻辑表达式、逻辑图描述，但它的真值表是唯一的。

## 2.3.2 逻辑代数的基本定理

吸收定理1 （吸收律）

$$(a)\quad A+A\bullet B=A \qquad (b)\quad A\bullet(A+B)=A$$

吸收定理2 （消因律）

$$(a)\quad A+\overline{A}\bullet B=A+B \qquad (b)\quad A\bullet(\overline{A}+B)=A\bullet B$$

吸收定理3 （邻接律、合并律）

$$(a)\quad A\bullet B+A\bullet\overline{B}=A \qquad (b)\quad (A+B)\bullet(A+\overline{B})=A$$

反演定理（摩根定理——Morgan定理）

$$(a)\quad \overline{A+B}=\overline{A}\bullet\overline{B} \qquad (b)\quad \overline{A\bullet B}=\overline{A}+\overline{B}$$

用真值表证明：

| $A$ | $B$ | $\overline{A+B}$ | $\overline{A}\bullet\overline{B}$ | $\overline{A\bullet B}$ | $\overline{A}+\overline{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

摩根定理是一个十分重要的定理，它证明了变量进行“与”和“或”运算时的互补效应。常用于逻辑函数的化简及逻辑变换。

$$(a)\quad \overline{A+B}=\overline{A}\bullet\overline{B}$$

它提供了将原变量或运算的非改成反变量与运算的简便方法。

$$(b)\quad \overline{A\bullet B}=\overline{A}+\overline{B}$$

它提供了将原变量与运算的非改成反变量或运算的简便方法。

多余项定理（包含律）

$$(a)\quad A\bullet B+\overline{A}\bullet C+BC=A\bullet B+\overline{A}\bullet C$$

$$(b)\quad (A+B)\bullet(\overline{A}+C)\bullet(B+C)=(A+B)\bullet(\overline{A}+C)$$

关于（a）的证明：

$$\text{左边}AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC$$
$$=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC$$
$$=AB(1+C)+\overline{A}C(1+B)$$
$$=AB+\overline{A}C$$
$$=\text{右边}$$

该包含律说明：如果与或表达式中，两个与项分别包含同一因子的原变量和反变量，而两与项的剩余因子包含在第三个与项中，则第三个与项是多余的。

## 2.3.3 逻辑代数的基本规则

- 代入规则

任何一个含有变量**x**的逻辑等式，如果将所有出现**x**的地方都代之以一个逻辑函数**H**，则此等式仍然成立。

证明：因为函数H与逻辑变量一样，只有0和1两种取值，而且当H取0或1时等式成立，所以代入规则必然成立。

利用代入规则可以证明n变量的摩根定理，即：

$$(a)\quad \overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A_1} \bullet \overline{A_2} \bullet \ldots \bullet \overline{A_n}$$

$$(b)\quad \overline{A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_n}$$

证明等式（b）成立

由摩根定理(b)，有$\overline{A_1 \bullet X} = \overline{A_1} + \overline{X}$

将$X = A_2 \bullet Y$ 代入，则可得

$$\overline{A_1 \bullet A_2 \bullet Y} = \overline{A_1} + \overline{A_2 \bullet Y} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{Y}$$

将$Y = A_3 \bullet Z$ 代入，则可得

$$\overline{A_1 \bullet A_2 \bullet A_3 \bullet Z} = \overline{A_1} + \overline{A_2 \bullet A_3 \bullet Z} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3 \bullet Z} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3} + \overline{Z}$$

以此类推，则得

$$(b) \quad \overline{A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_n}$$

应用：将较复杂逻辑函数中的某一部分或公共部分代之以变量，达到简化的目的，便于分析。

## ●反演规则（香农定理——Shannon定理）

从原函数求反函数的过程称之为反演。

求任何函数的反函数时，可将该函数的所有变量取反；并将函数中“0”变成“1”，“1”变成“0”；且运算符“+”变成“•”，“•”变成“+”；即可得反函数。

在使用反演规则时应注意：

（1）必须保持原有的运算次序，必要时添加各种括号。

（2）不属于单个变量上的非号保留，而非号下面的函数式按反演规则变换。

例：已知 $F = A \bullet (\overline{B} + C \bullet \overline{D} + \overline{E} \bullet G)$，求反函数$\overline{F}$。

解：利用反演规则可得：

$$\overline{F} = \overline{A} + B \bullet (\overline{C} + D) \bullet (E + \overline{G})$$

也可利用反演律求得：

$$\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{A[\overline{B} + (C\overline{D} + \overline{E}G)]} \\
&= \overline{A} + \overline{\overline{B} + (C\overline{D} + \overline{E}G)} \\
&= \overline{A} + B \bullet \overline{(C\overline{D} + \overline{E}G)} \\
&= \overline{A} + B \bullet \overline{C\overline{D}} \bullet \overline{\overline{E}G} \\
&= \overline{A} + B(\overline{C} + D)(E + \overline{G})
\end{aligned}$$

其结果与直接利用反演规则的运算结果相同。

例：已知 $F = A\overline{B} + \overline{(A+C)B} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

利用反演规则，其反函数为

$$\overline{F} = (\overline{A}+B)\bullet\overline{\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}}\bullet(A+B+C)$$

注意：反演律是逻辑运算中使用的定律公式，可以获得多种反函数的表达形式；反演规则是求反函数的一种简便方法。

●对偶规则

对偶函数：对于任何逻辑函数F，将该函数中的所有变量保持不变；并将函数中“0”变成“1”，“1”变成“0”；且运算符“+”变成“•”，“•”变成“+”；得到的新函数称为原函数的对偶函数，记为F'。

对偶规则：如果函数F'是函数F的对偶函数，那么F也是F'的对偶函数。如果函数F、G相等，它们的对偶函数F'、G'也相等，即若F=G，则F'=G'。

前面讨论的公理、定理中式（a）和式（b）均为对偶的。因此，若式（a）成立，按对偶规则，式（b）必定成立。

利用对偶规则，使需要证明和记忆的公式减少一半，且为函数的形式变换和简化带来方便。

求对偶函数时，也应适当地添加括号，以保持原函数中的运算顺序不变。

例：$F=(A+B)(\overline{A}+C)(C+DE)$

$$F'=AB+\overline{A}C+C(D+E)$$

有些逻辑函数的对偶函数就是原函数本身，即F’=F。此时，称函数F为自对偶函数。

例：$F=A$，　　则 $F'=A$

例：证明$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$

由多余项定理可得

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

两边同时取对偶，得到

左边：$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)$

右边：$(A+B)(\overline{A}+C)$

根据对偶规则，原等式成立。

课堂练习：

已知$F = A \bullet \overline{B+\overline{C}} + \overline{A}D$,

请写出其反演式和对偶式：

$$\overline{F} = (\overline{A}+\overline{\overline{B}C})(A+\overline{D})$$

$$F' = (A+\overline{B\overline{C}})(\overline{A}+D)$$

利用逻辑代数的公理、基本定理及规则证明

$$ABC+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{A}C}$$

证明：右边 $=\overline{A\overline{B}}\bullet\overline{B\overline{C}}\bullet\overline{\overline{A}C}$ 摩根定理

$=(\overline{A}+B)(\overline{B}+C)(A+\overline{C})$ 摩根定理

$=(\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}C+B\overline{B}+BC)(A+\overline{C})$ 分配律

$=(\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}C+BC)(A+\overline{C})$ 互补律、0－1律

$=(\overline{A}\,\overline{B}+BC)(A+\overline{C})$ 多余项定理

$=\overline{A}\,\overline{B}A+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+ABC+BC\overline{C}$ 分配律

$=ABC+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 交换律、互补律、0－1

＝左边 证毕。

## 2.4 逻辑函数的性质

前面讨论的与、或、非三种基本逻辑运算，可以组合起来实现任何逻辑函数；采用对应的与门、或门、非门可以组合起来构造具有各种逻辑功能的逻辑电路。

实际工程设计中的基本要求是：最少的门电路、最少的门的输入端、最少的门电路类型。

显然，仅采用与门、或门、非门构造逻辑电路，不能满足工程设计的基本要求。所以，在实际应用的基本逻辑器件中，还有与非门、或非门、与或非门、异或门等，称为复合逻辑门。

## 2.4.1 复合逻辑

### 1. 与非逻辑（NAND）

与非逻辑是“与”和“非”的复合逻辑，它的逻辑表达式为：

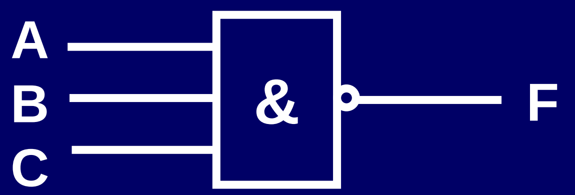
$$F = \overline{A \bullet B \bullet C}$$

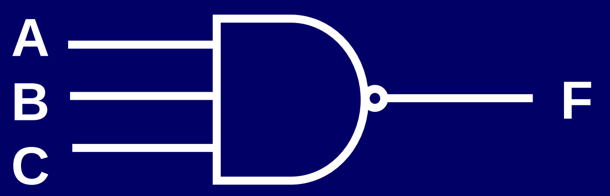
只要有一个变量取值为0，F就为1；
只有所有变量均取值为1，F才为0。

与非逻辑真值表

| A B C | F |
|---|---|
| 0 0 0 | 1 |
| 0 0 1 | 1 |
| 0 1 0 | 1 |
| 0 1 1 | 1 |
| 1 0 0 | 1 |
| 1 0 1 | 1 |
| 1 1 0 | 1 |
| 1 1 1 | 0 |

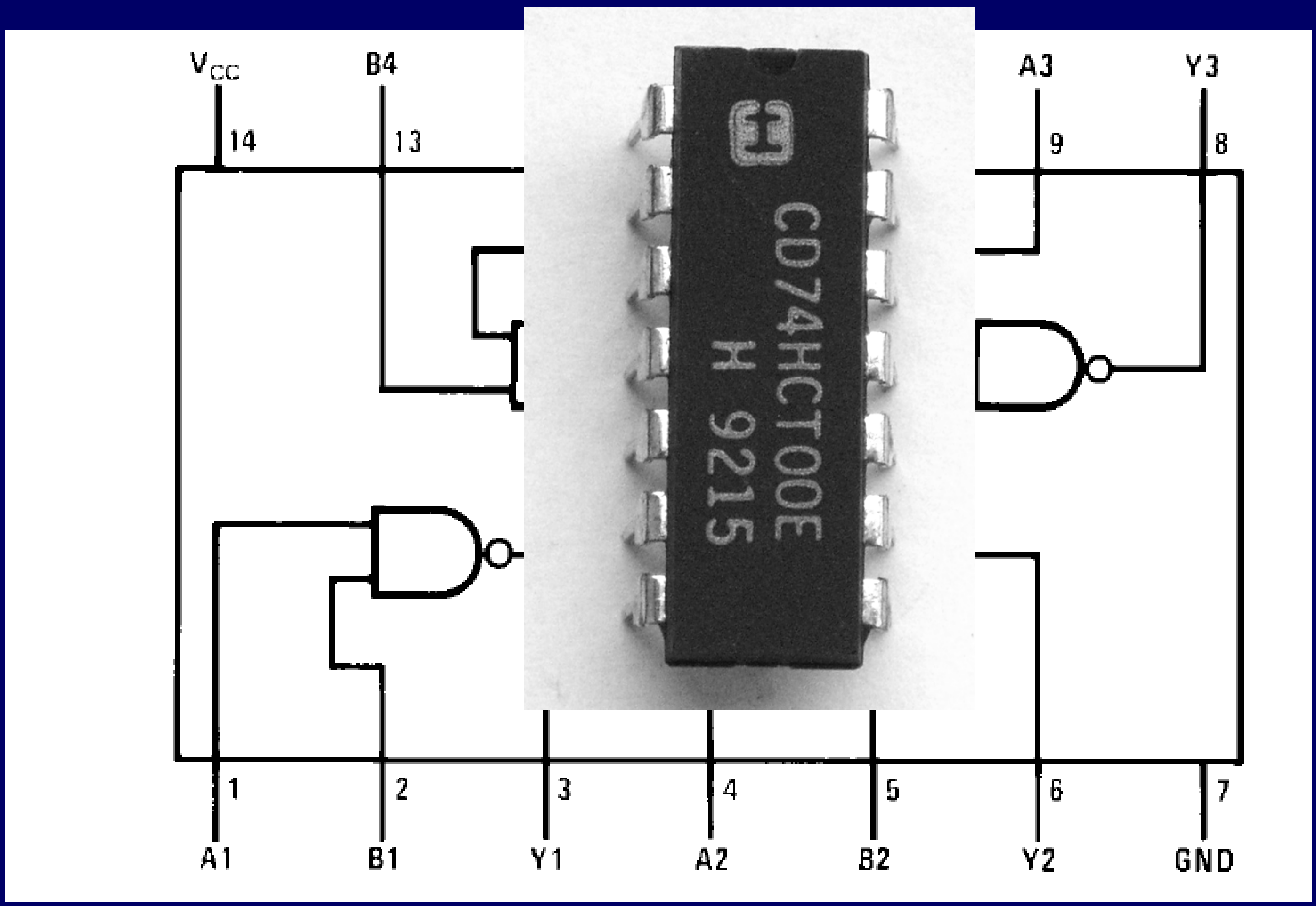
与非门的逻辑符号(三变量)




逻辑功能：只有输入端全为1时，输出才为0。

# 小规模集成电路74LS00集成了4个双输入与非门

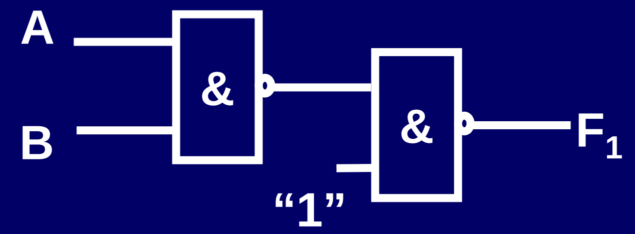


由摩根定律 $\overline{A\bullet B}=\overline{A}+\overline{B}$ 可看出，

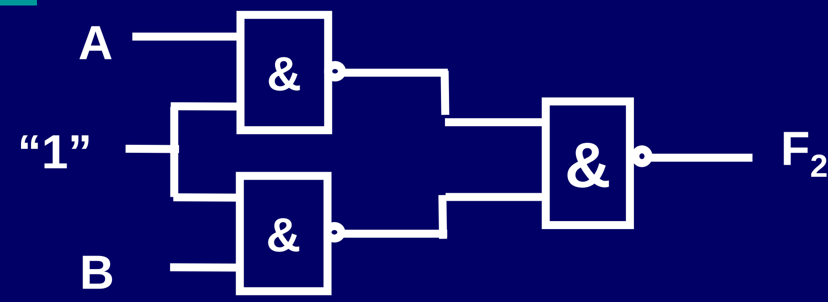
“与”之“非”可以产生“或”的关系。

因此，可以用单一的与非门实现与、或、非三种基本逻辑运算。

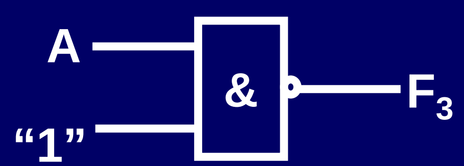
$$F_1=AB=\overline{\overline{AB}}=\overline{\overline{AB}\bullet 1}$$




$$F_2=A+B=\overline{\overline{A}\bullet\overline{B}}=\overline{\overline{A\bullet 1}\bullet\overline{B\bullet 1}}$$




$$F_3=\overline{A}=\overline{A\bullet 1}$$




**结论：有了与非门，就可构成实现各种逻辑功能的电路。**

## 2. 或非逻辑（NOR）

或非逻辑是“或”和“非”的复合逻辑，其逻辑表达式为：

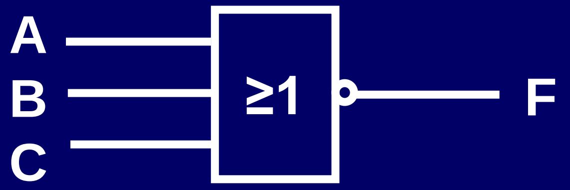
$$F = \overline{A + B + C}$$

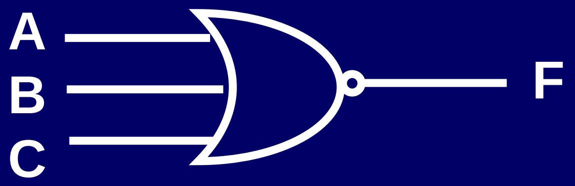
只要有一个变量取值为1，F就为0；
只有所有变量均取值为0，F才为1。

或非逻辑真值表

| A | B | C | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

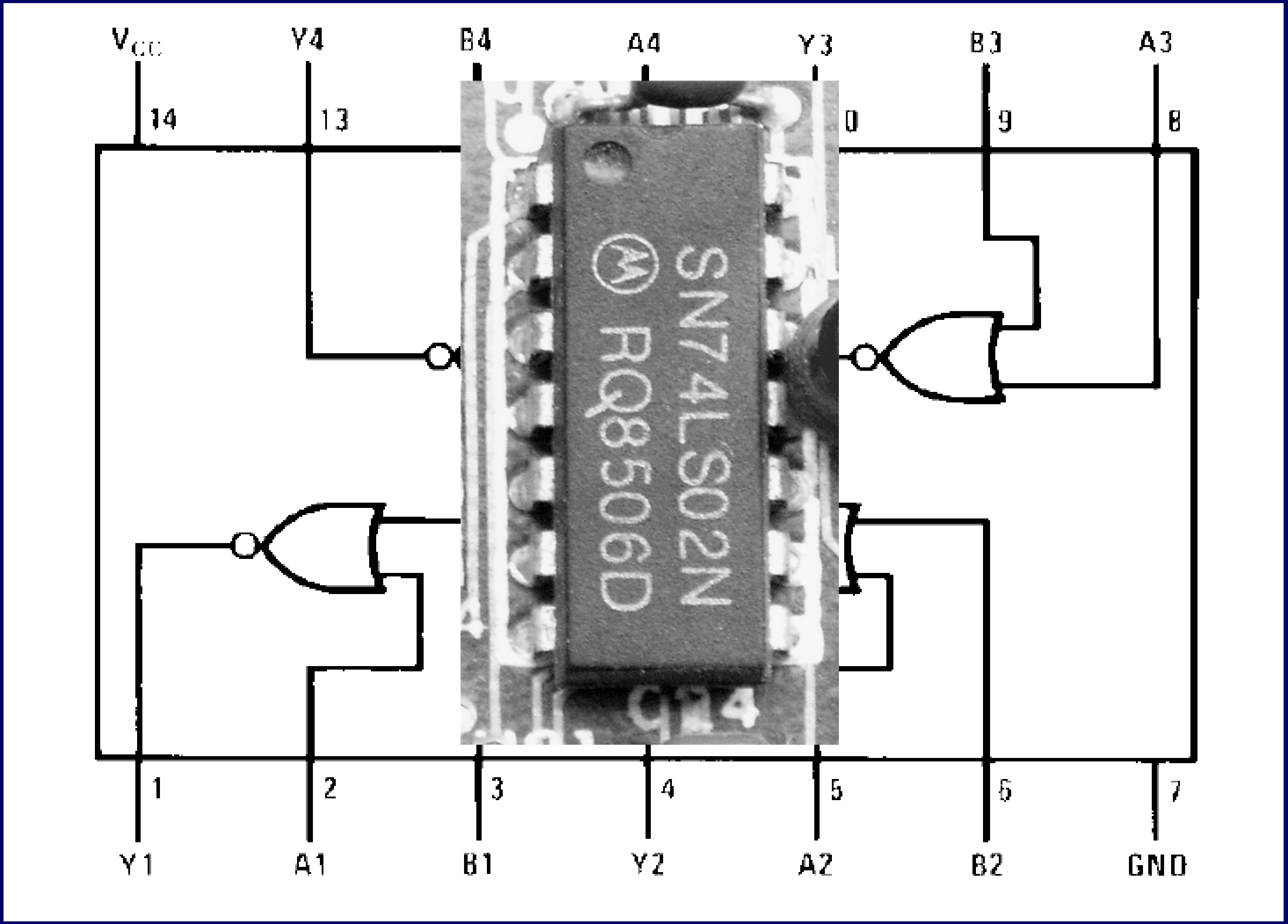
或非门的逻辑符号(三变量)



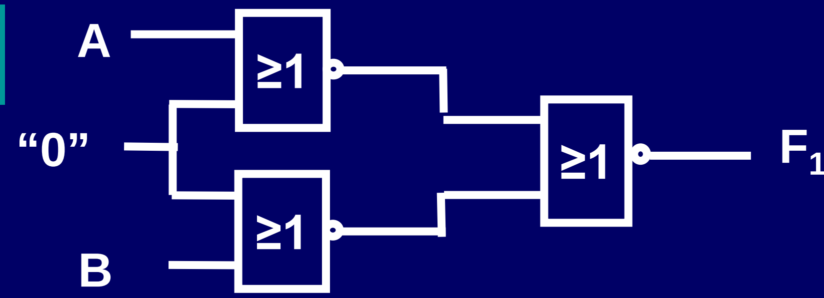

逻辑功能：只有输入端全为0时，输出才为1。

# 小规模集成电路74LS02集成了4个双输入或非门

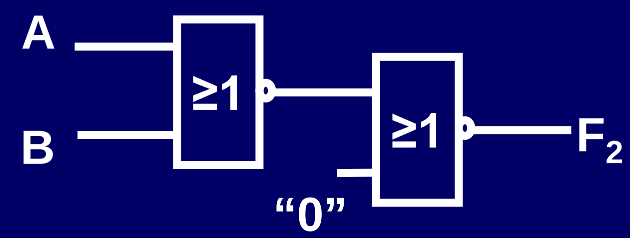


由摩根定律 $\overline{A+B}=\overline{A}\bullet\overline{B}$ 可看出，
“或”之“非”可以产生“与”的关系。
因此，可以用单一的或非门实现与、或、非三种基本逻辑运算。

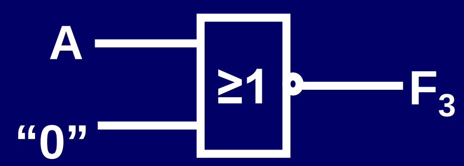
$$F_1=AB=\overline{\overline{A}+\overline{B}}=\overline{\overline{A+0}+\overline{B+0}}$$




$$F_2=A+B=\overline{\overline{A+B}}=\overline{\overline{A+B}+0}$$




$$F_3=\overline{A}=\overline{A+0}$$




结论：有了或非门，就可构成实现各种逻辑功能的电路。

## 3. 与或非逻辑（AOI）

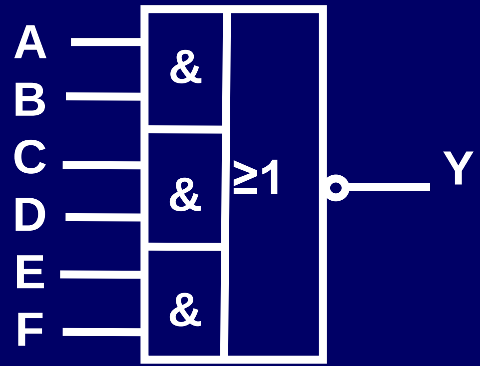
与或非逻辑是“与”、“或”和“非”的复合逻辑，其逻辑表达式为：

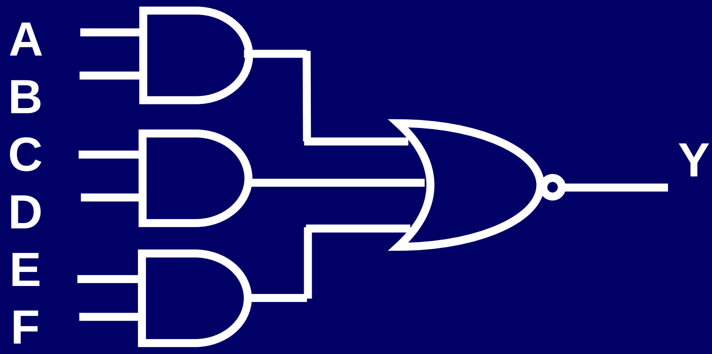
$$Y = \overline{AB + CD + EF}$$

仅当每个“与项”均为0，Y才为1；否则，Y为0。

显然，用单一的与或非门可以实现与、或、非三种基本逻辑运算。

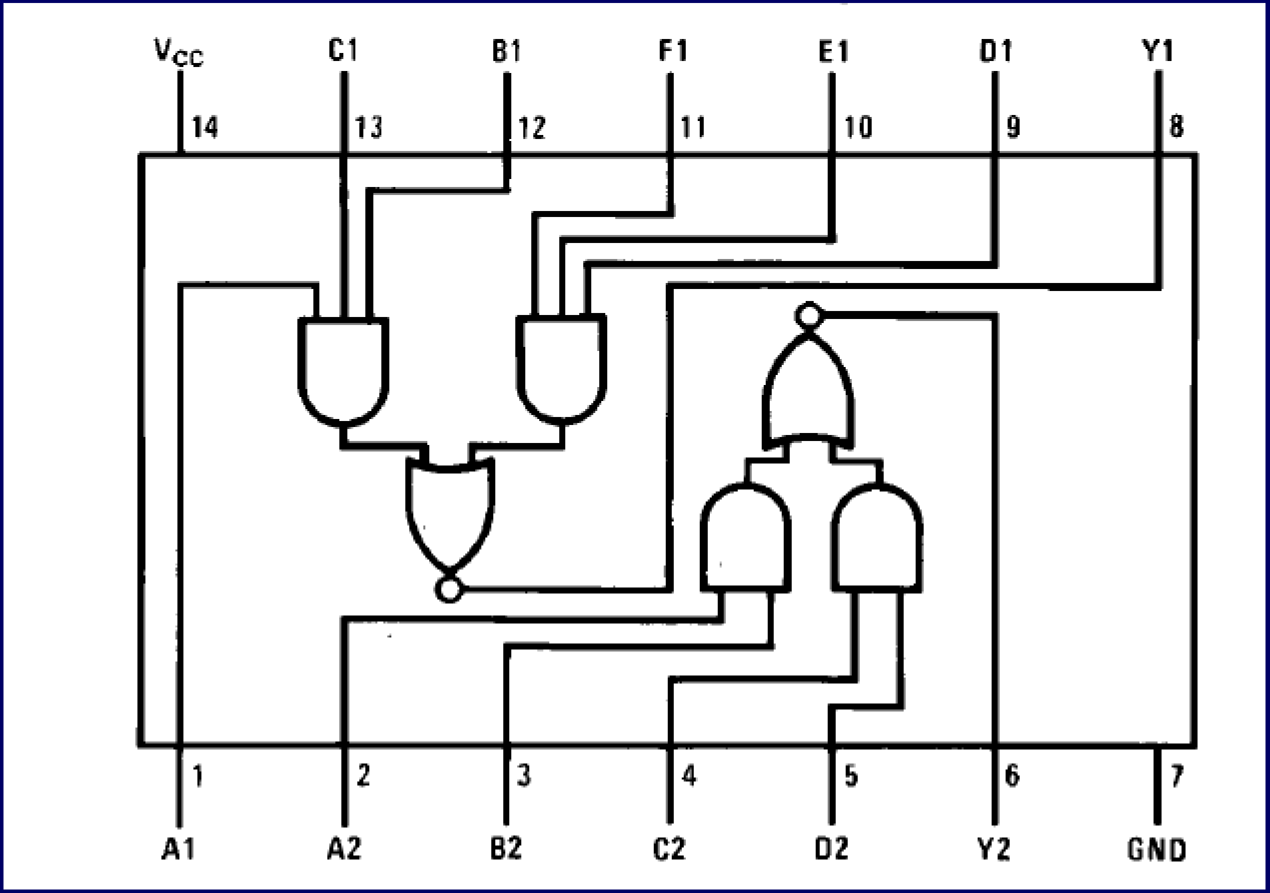
与或非门的逻辑符号




结论：用与或非门，可构成实现各种逻辑功能的电路，但不经济。

# 小规模集成电路74LS51集成了2个与或非门



## 4. 异或逻辑（XOR）

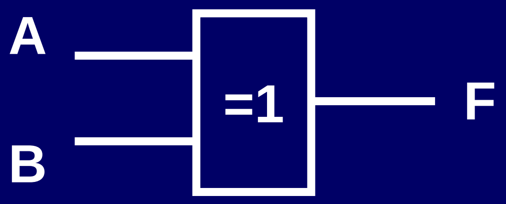
异或逻辑——对于二输入变量问题，当输入变量取值相异时，输出为1；当输入变量取值相同时，输出为0。

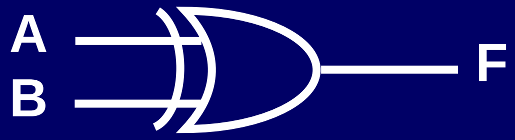
其逻辑表达式为： $F = A \bullet \overline{B} + \overline{A} \bullet B = A \oplus B$

异或逻辑真值表

| A | B | F |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

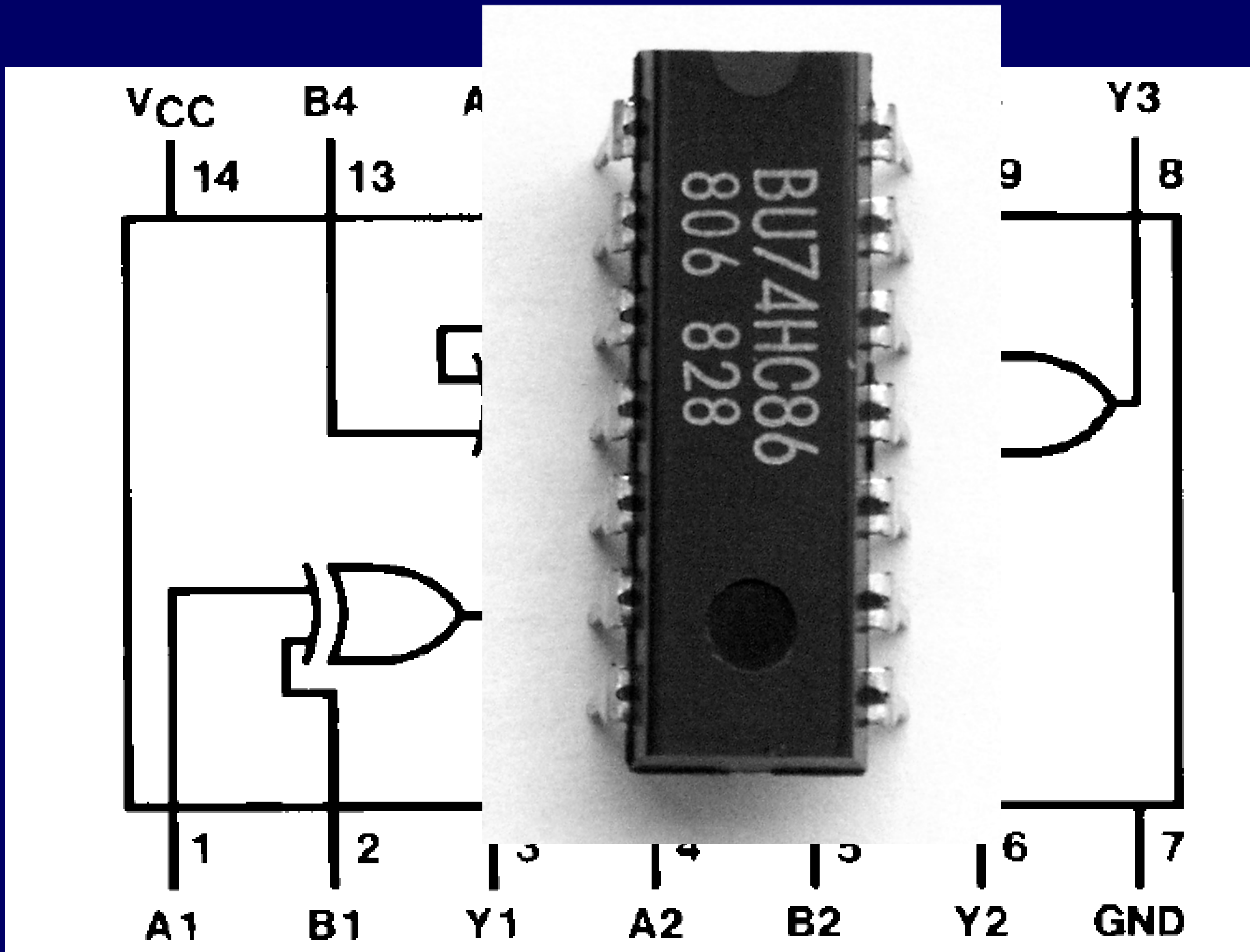
异或门的逻辑符号




异或逻辑可实现“模2加”运算

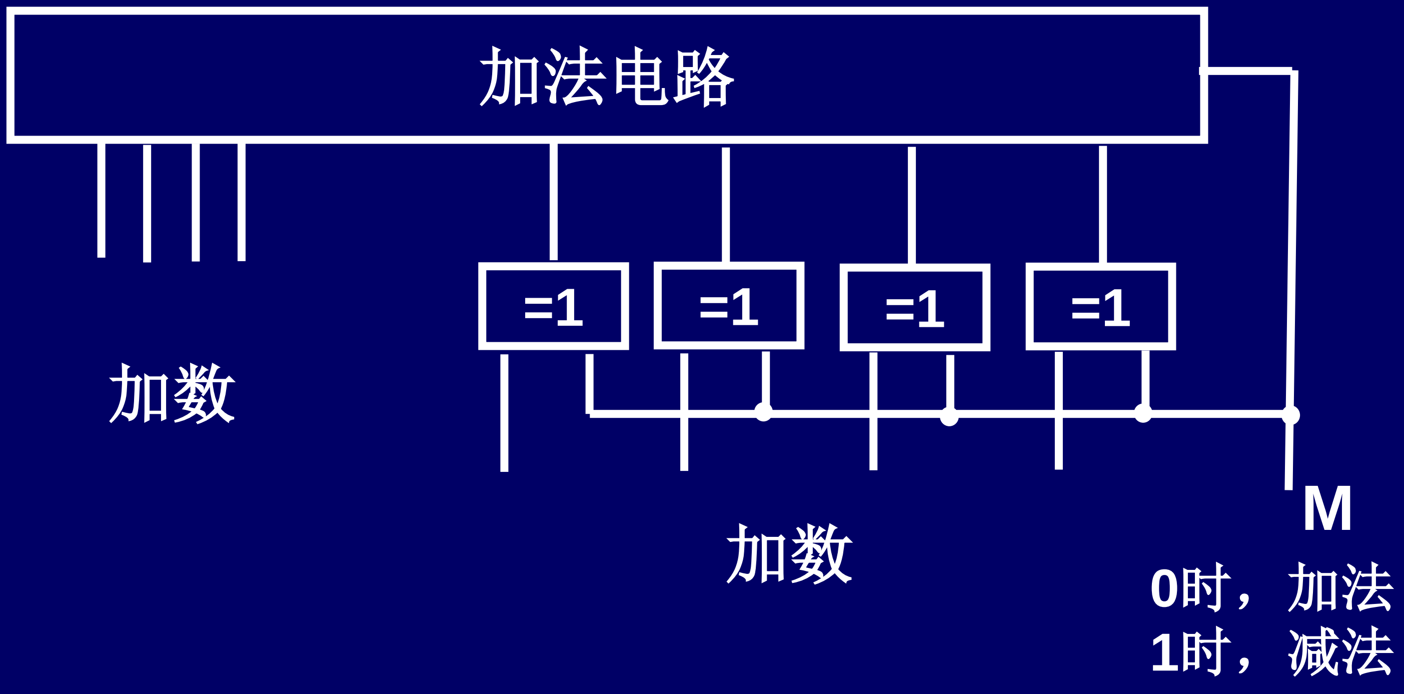
# 小规模集成电路74LS86集成了4个双输入异或门



由异或逻辑可推出 下列等式：

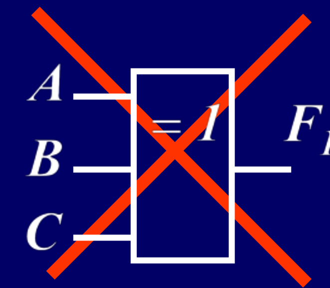
$$A \oplus A = 0 \qquad A \oplus \overline{A} = 1 \qquad A \oplus 0 = A \qquad A \oplus 1 = \overline{A}$$

异或逻辑的应用：加法电路实现减法运算、输入变量非一致性判断...



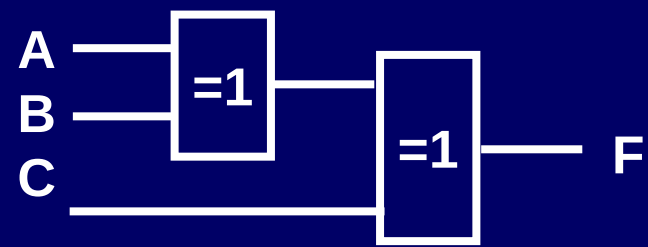
利用代入规则，可得到三变量的异或逻辑表达式：

$$F = A \oplus B \oplus C = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + ABC$$




三变量
异或逻辑真值表

| A B C | F |
|---|---|
| 0 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 1 |
| 0 1 0 | 1 |
| 0 1 1 | 0 |
| 1 0 0 | 1 |
| 1 0 1 | 0 |
| 1 1 0 | 0 |
| 1 1 1 | 1 |




重要特性：

当输入变量为1的个数是奇数时，
输出为1；偶数时，输出为0。

可推广到n个变量的异或逻辑中。

这一特性常用于奇偶校验逻辑电路中

异或逻辑的反函数称为同或逻辑（符合逻辑）。

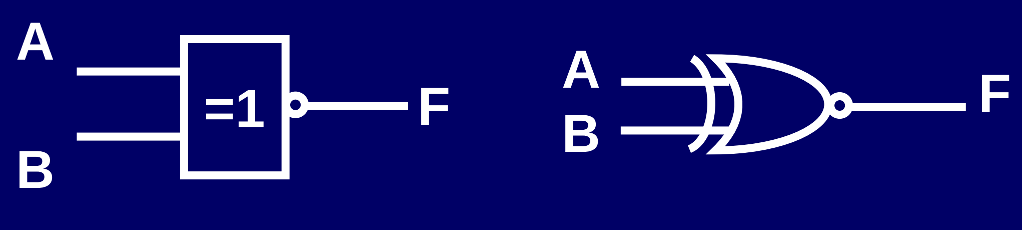
同或逻辑——对于二输入变量问题，当输入变量取值相同，输出为1；当输入变量取值相异时，输出为0。

其表达式为： $F=\overline{A\oplus B}=AB+\overline{A}\,\overline{B}=A\odot B$

同或逻辑真值表

| A | B | F |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

同或门的逻辑符号




同或逻辑的应用：常用于比较器电路中的一致性判定，也可用于奇偶校验。

观察二变量异或逻辑、同或逻辑的真值表：

异或逻辑真值表

| A | B | F |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

同或逻辑真值表

| A | B | F |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

对于多输入变量，用代入法可证明：
偶数个变量的异或逻辑和同或逻辑之间具有互补关系。

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n = \overline{A_1 \odot A_2 \odot \cdots \odot A_n} \qquad (n\text{为偶数})$$

观察三变量异或逻辑、同或逻辑的真值表：

三变量
异或逻辑真值表

| A B C | F |
|---|---|
| 0 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 1 |
| 0 1 0 | 1 |
| 0 1 1 | 0 |
| 1 0 0 | 1 |
| 1 0 1 | 0 |
| 1 1 0 | 0 |
| 1 1 1 | 1 |

三变量
同或逻辑真值表

| A B C | F |
|---|---|
| 0 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 1 |
| 0 1 0 | 1 |
| 0 1 1 | 0 |
| 1 0 0 | 1 |
| 1 0 1 | 0 |
| 1 1 0 | 0 |
| 1 1 1 | 1 |

对于多输入变量，用代入法可证明：
奇数个变量的异或逻辑和同或逻辑之间具有相等关系。

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n = A_1 \odot A_2 \odot \cdots \odot A_n \qquad (n\text{为奇数})$$

关于异或运算、同或运算的基本代数性质：

强调

| | |
|---|---|
| 0-1律 | (a) $A\oplus 0=A$　　$A\oplus 1=\overline{A}$ |
| | (b) $A\odot 0=\overline{A}$　　$A\odot 1=A$ |
| 交换律 | (a) $A\oplus B=B\oplus A$ |
| | (b) $A\odot B=B\odot A$ |
| 分配律 | (a) $A(B\oplus C)=AB\oplus AC$ |
| | (b) $A+(B\odot C)=(A+B)\odot(A+C)$ |
| 结合律 | (a) $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$ |
| | (b) $A\odot(B\odot C)=(A\odot B)\odot C$ |
| 调换律 | (a) 如 $A\oplus B=C$ 则$A\oplus C=B$　$B\oplus C=A$ |
| | (b) 如 $A\odot B=C$ 则$A\odot C=B$　$B\odot C=A$ |

调换律是异或运算、同或运算的特有性质，可用于函数的化简。

分配律： $A(B\oplus C) = AB\oplus AC$

证明：

$$A(B\oplus C) = A(B\bar{C} + \bar{B}C) = \underline{AB\bar{C} + A\bar{B}C}$$

$$AB\oplus AC = AB\overline{AC} + \overline{AB}AC$$

$$= AB(\bar{A}+\bar{C}) + (\bar{A}+\bar{B})AC$$

$$= \underline{AB\bar{C} + A\bar{B}C}$$

左边等于右边。证毕。

$A+(B\odot C)=(A+B)\odot(A+C)$

证明：

$$A+(B\odot C) = \underline{A+BC+\bar{B}\bar{C}}$$

$$(A+B)\odot(A+C) = \overline{A+B}\bullet\overline{A+C} + (A+B)(A+C)$$

$$= \bar{A}\bar{B}\bar{A}\bar{C} + A + AB + BC$$

$$= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A + BC$$

$$= \underline{A+BC+\bar{B}\bar{C}}$$

左边等于右边。证毕。

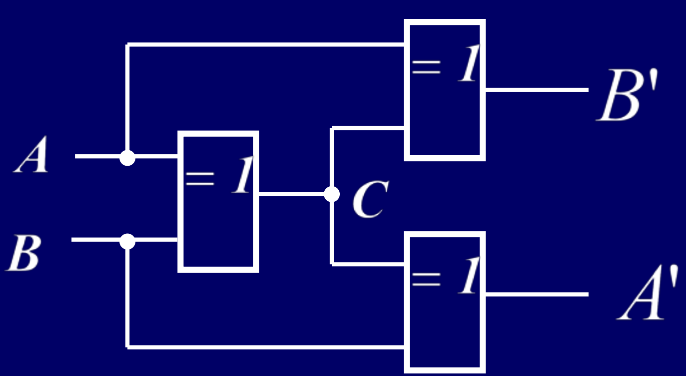
注意：以下两个式子不成立。

$$\cancel{A+(B\oplus C)=(A+B)\oplus(A+C)}$$

$$\cancel{A(B\odot C)=AB\odot AC}$$

调换律：若$A\oplus B=C$ 则$A\oplus C=B$ $B\oplus C=A$

证明，题意为：




$$B'=A\oplus C=A\oplus A\oplus B$$
$$=0\oplus B=B$$

同理，输出*A*'即等于输入*A*。

证毕。

如果一个函数的表达式中，含有$\oplus$ 、$\odot$运算符：

利用反演规则求反函数时

或　利用对偶规则求对偶函数时

$$\oplus \longrightarrow \odot$$

$$\odot \longrightarrow \oplus$$

作业3:

2. 3 (1，2）

2. 5（2）

2. 6 （1，3）

## 2.4.2 逻辑函数的基本表达式

一个给定的逻辑函数，其真值表是唯一的，但其逻辑表达式具有多种形式。

例如： 函数 $F = A\overline{B} + \overline{A}B$ 可以表达为

$$F = A\overline{B} + \overline{A}B$$ 与或式

分配律、吸收定理2

$$= (A+B)(\overline{A}+\overline{B})$$ 或与式

还原律、摩根定理

$$= \overline{\overline{A\overline{B}} \bullet \overline{\overline{A}B}}$$ 与非式

还原律、摩根定理

$$= \overline{\overline{(A+B)} + \overline{(\overline{A}+\overline{B})}}$$ 或非式

摩根定理

$$= \overline{AB + \overline{A}\,\overline{B}}$$ 与或非式

$$= \cdots$$

与或式、或与式是逻辑表达式中最基本的两种形式，其它形式的表达式都可以转换成这两种形式。

一般与或表达式（积之和表达式）

一个逻辑表达式中，用逻辑加的形式将若干与项相连在一起，这样的表达式称为与或式。（若干“与项”进行“或”运算构成的表达式。）

$$F(A,B) = AB + \overline{A}\,\overline{B}$$

$$G(x_1,x_2,x_3) = x_1\overline{x_2}x_3 + x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3$$

一般或与表达式（和之积表达式）

一个逻辑表达式中，由逻辑与的形式将若干或项相连在一起，这样的表达式称为或与式。（若干“或”项进行“与”运算构成的表达式）

$$F(A,B) = (A+B)\bullet(\overline{A}+\overline{B})$$

$$G(x_1,x_2,x_3) = (x_1+\overline{x_2}+x_3)(x_2+\overline{x_3})(\overline{x_1}+x_3)$$

## 2.4.3 逻辑函数的标准表达式

一个逻辑函数可以用真值表、逻辑表达式、卡诺图、逻辑图、波形图、硬件描述语言等多种方式来描述。

真值表是最基本的表达方式，由真值表导出的逻辑函数表达式是一种标准的形式——最小项之和表达式

——最大项之积表达式

由此引出两个重要的概念：最小项和最大项

## 1. 最小项（minterm）

设有一个二变量的逻辑函数：$F = f(A,B) = A + B$

应用有关定理可转换为

$$F = A(B+\overline{B}) + B(A+\overline{A})$$
$$= AB + A\overline{B} + BA + B\overline{A}$$
$$= AB + A\overline{B} + \overline{A}B$$

最规则的形式，其中每个与项具有如下特点：包含该函数的全部变量（两个），每个变量或以原变量（A,B）形式出现，或以反变量（ $\overline{A},\overline{B}$ ）形式出现，且仅出现一次。

### 最小项的定义

设有n个逻辑变量，它们组成的与项中，每个变量或以原变量形式或以反变量形式出现一次，且仅出现一次，此与项称之为n个变量的最小项。

对于n个变量，可以构成$2^n$个最小项。

例如：三个变量A,B,C可构成8个最小项

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$$

$$\overline{A}\,\overline{B}C = m_1$$

$$\overline{A}B\overline{C} = m_2$$

$$\overline{A}BC = m_3$$

$$A\overline{B}\,\overline{C} = m_4$$

$$A\overline{B}C = m_5$$

$$AB\overline{C} = m_6$$

$$ABC = m_7$$

常用符号 $m_i$ 表示最小项。
下标 $i$ 的取值规则：当变量顺序确定后，用“1”代替原变量，用“0”代替反变量，得到一个二进制数，该二进制数对应的十进制数即为下标 $i$ 的取值。

## 2. 最大项（maxterm）

最大项的定义

设有n个逻辑变量，它们组成的或项中，每个变量或以原变量形式或以反变量形式出现一次，且仅出现一次，此或项称之为n个变量的最大项。

对于n个变量，可以构成$2^n$个最大项。

例如：三个变量A,B,C构成的8个最大项记为

$$A+B+C=M_0$$
$$A+B+\overline{C}=M_1$$
$$A+\overline{B}+C=M_2$$
$$A+\overline{B}+\overline{C}=M_3$$
$$\overline{A}+B+C=M_4$$
$$\overline{A}+B+\overline{C}=M_5$$
$$\overline{A}+\overline{B}+C=M_6$$
$$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=M_7$$

常用符号 $M_i$ 表示最大项。
下标 $i$ 的取值规则：当变量顺序确定后，用“0”代替原变量，用“1”代替反变量，得到一个二进制数，该二进制数对应的十进制数即为下标 $i$ 的取值。

## 3. 最小项的性质

以三个变量为例：　$F = f(A, B, C)$

| | | | $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ | $\bar{A}\bar{B}C$ | $\bar{A}B\bar{C}$ | $\bar{A}BC$ | $A\bar{B}\bar{C}$ | $A\bar{B}C$ | $AB\bar{C}$ | $ABC$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $C$ | $m_0$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $m_6$ | $m_7$ |
| 0 | 0 | 0 | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | |

## 最小项的性质：

性质1：对于任意一个最小项，只有一组变量的取值使其值为*1*。

（即只有最小项下标对应的一组变量的取值使其为1 ）

性质2：对于任一组变量的取值，任意两个最小项之积为*0*。

$$m_i \bullet m_j = 0, \quad i \neq j$$

性质3：n变量的全部最小项之和为*1*。

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

性质4：n个变量的任一最小项，都有n个相邻最小项。

相邻最小项：只有一个变量互为相反，其余均相同。

## 4. 最大项的性质

以三个变量为例：　$F = f(A,B,C)$

$A+B+C$　　$A+\overline{B}+C$　　$\overline{A}+B+C$　　$\overline{A}+\overline{B}+C$

$A+B+\overline{C}$　　$A+\overline{B}+\overline{C}$　　$\overline{A}+B+\overline{C}$　　$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

| $A$ | $B$ | $C$ | $M_0$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | $M_5$ | $M_6$ | $M_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

# 最大项的性质

性质1：对于任意一个最大项，只有一组变量的取值使其值为*0*。

（即只有最大项下标对应的一组变量的取值使其为0）

性质2：对于任一组变量的取值，任意两个最大项之和为*1*。

$$M_i + M_j = 1, \quad i \neq j$$

性质3：n变量的全部最大项之积为*0*。

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

性质4：n个变量的任一最大项，都有n个相邻最大项。

相邻最大项：只有一个变量互为相反，其余均相同。

变量个数相同、变量顺序相同时，下标相同的最小项和最大项具有互补特性。

即： $\overline{m_i} = M_i \qquad \overline{M_i} = m_i$

例： $\overline{m_5} = \overline{A\bar{B}C} = \bar{A} + B + \bar{C} = M_5$

$$\overline{M_7} = \overline{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}} = ABC = m_7$$

## 5. 函数的最小项标准式

如果函数的与或表达式中，每一个与项均为最小项，则称之为最小项标准式。

例如：$F(A,B,C)=ABC+A\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}$

是一个最小项标准式，可记为：

$$F(A,B,C)=m_7+m_5+m_3+m_2$$

或 $F=\sum m^3(2,3,5,7)$

最小项表达式中必须标明变量数。

由n变量组成的任何逻辑函数均可以表示成最小项标准式，且这种表示是唯一的。

如果给定的函数为**一般与或表达式**，可反复使用公式 $X = X(Y+\overline{Y})$，转换成最小项之和的形式。

例： $\mathrm{F}(\mathrm{A},\mathrm{B},C) = AC + A\overline{B} + BC$

$$
\begin{aligned}
&= AC(B+\overline{B}) + A\overline{B}(C+\overline{C}) + BC(A+\overline{A}) \\
&= ABC + A\overline{B}C + A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC + \overline{A}BC \\
&= ABC + A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC \\
&= \sum m^3(3,4,5,7)
\end{aligned}
$$

如果给定函数用真值表表示，则真值表每一种变量组合对应一个最小项。

例如： $F = f\,(A,B,C)$

| $A$ | $B$ | $C$ | $F$ | $m_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $m_1 = \overline{A}\,\overline{B}C$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | $m_2 = \overline{A}B\overline{C}$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | $m_3 = \overline{A}BC$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $m_4 = A\overline{B}\,\overline{C}$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | $m_5 = A\overline{B}C$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $m_6 = AB\overline{C}$ |
| 1 | 1 | 1 | 0 | $m_7 = ABC$ |

函数值为1对应的最小项相“或”构成原函数的最小项标准式。

（或的叠加性）

$$F(A,B,C) = \sum m(4,5,6)$$

$$F = \sum m^3(4,5,6)$$

函数值为0对应的最小项相“或”构成反函数的最小项标准式。

$$\overline{F}(A,B,C) = \sum m(0,1,2,3,7)$$

$$\overline{F} = \sum m^3(0,1,2,3,7)$$

通过以上分析，可知：

对于n个变量的函数$F$，共有$2^n$个最小项，这些最小项不是包含在F的最小项表达式中，就包含在$\overline{F}$的最小项表达式中。

例： 如果 $F=\sum m^4(0,2,4,7,13)$

则 $\overline{F}=\sum m^4(1,3,5,6,8,9,10,11,12,14,15)$

在逻辑函数的最小项表达式中，显性地给出了使函数值为“1”的变量组合，隐性地给出了使函数值为“0”的变量组合。

## 6. 函数的最大项标准式

如果函数的或与表达式中，每一个或项均为最大项，则称之为最大项标准式。

例如：$F(A,B,C)=(A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$

是一个最大项标准式，可记为：

$$F(A,B,C)=M_0 \bullet M_2 \bullet M_5$$

或 $F=\prod M^3(0,2,5)$

最大项表达式中必须标明变量数。

由n变量组成的任何逻辑函数均可以表示成最大项标准式，且这种表示是唯一的。

如果给定的函数为一般或与表达式，可反复使用公式 $X=X+Y\bullet\overline{Y}=(X+Y)(X+\overline{Y})$，转换成最大项之积的形式。

例： $F(A,B,C)=(A+C)(\overline{A}+B)$

$$
\begin{aligned}
&=[(A+C)+B\bullet\overline{B}]\bullet[(\overline{A}+B)+C\bullet\overline{C}]\\
&=(A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})\\
&=M_0M_2M_4M_5\\
&=\prod M^3(0,2,4,5)
\end{aligned}
$$

如果给定函数用真值表表示，则真值表每一种变量组合对应一个最大项。

| A B C | F | $\overline{F}$ | $M_0$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | $M_5$ | $M_6$ | $M_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 0 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

函数值为0对应的最大项相“与”构成原函数的最大项标准式。

（与的公共性）

$$F(A,B,C) = M_1 \bullet M_2 \bullet M_3$$

$$= \prod M(1,2,3)$$

$$F = \prod M^3(1,2,3)$$

| A B C | F | $\overline{F}$ | $M_0$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | $M_5$ | $M_6$ | $M_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 0 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

函数值为1对应的最大项相“与”构成反函数的最大项标准式。

$$\overline{F}(A,B,C)=\prod M(0,4,5,6,7)$$

$$\overline{F}=\prod M^{3}(0,4,5,6,7)$$

通过以上分析，可知：

对于n个变量的函数$F$，共有$2^n$个最大项，这些最大项不是包含在F的最大项表达式中，就包含在$\overline{F}$的最大项表达式中。

例： 如果 $F=\prod M^4(1,3,4,7,11,15)$

则 $\overline{F}=\prod M^4(0,2,5,6,8,9,10,12,13,14)$

在逻辑函数的最大项表达式中，显性地给出了使函数值为“0”的变量组合，隐性地给出了使函数值为“1”的变量组合。

## 7. 同一函数的最小项标准式与其最大项标准式之间的关系

设 $F=\sum m^3(0,2,3)$ 则 $\overline{F}=\sum m^3(1,4,5,6,7)$

对 $\overline{F}$ 求反，并运用摩根定理

$$F=\overline{m_1+m_4+m_5+m_6+m_7}$$
$$=\overline{m_1}\bullet\overline{m_4}\bullet\overline{m_5}\bullet\overline{m_6}\bullet\overline{m_7}$$
$$=M_1\bullet M_4\bullet M_5\bullet M_6\bullet M_7$$
$$=\prod M^3(1,4,5,6,7)$$

$$F=\sum m^3(0,2,3)=\prod M^3(1,4,5,6,7)$$

同一逻辑函数的一种标准式（原式）变换成另一种标准式时，互换 $\sum m^n$ 和 $\prod M^n$ 符号，并在符号后列出原式中缺少的那些数字。

作业4：

2.8

2.9（2）

2.10（1）

2.12（2）

2.13（2）

2.14