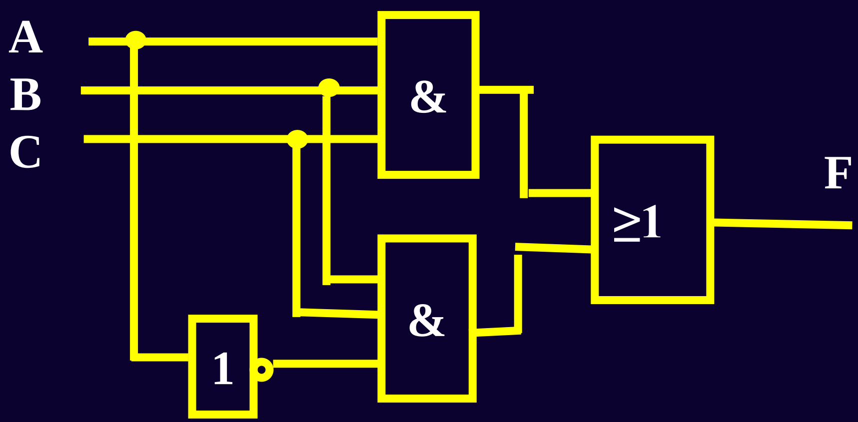
2.5 逻辑函数的化简

同一逻辑函数，可以有不同形式的表达式，对应有不同的逻辑电路；即使同一类型的表达式，也有繁有简。

$$F = ABC + \overline{A}BC = (A + \overline{A}) \bullet BC = BC$$



逻辑表达式的繁简，直接关系到数字电路的复杂程度和性能指标，有必要对逻辑函数进行化简。

逻辑化简的目标：

与或表达式与项数最少，每一与项的变量数最少。

或与表达式或项数最少，每一或项的变量数最少。

物理化简的目标：

电路板上芯片数量最少，信号传递级数最少，门的输入端最少。

逻辑函数的化简方法主要有：代数法、卡诺图法、列表法。

2.4.1 代数化简法

知识点 代数化简法

代数法化简就是应用逻辑代数的公理、定理及三个规则对已有的逻辑表达式进行逻辑化简的工作。

通过摩根定理（反演律）的变换，加之对公理的应用，这样代数法化简的基本方法就集中综合在以下两组定理上。

		与或式化简	或与式化简
消项	1	$A+AB=A$	$A(A+B)=A$
消元	2	$A+\overline{A}B=A+B$	$A(\overline{A}+B)=AB$
并项	3	$AB+A\overline{B}=A$	$(A+B)(A+\overline{B})=A$
配项	4	$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$	$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$

如果再结合反演规则或者对偶规则的应用，则只需要综合用好其中一组定理既可以进行逻辑函数的化简。

1. 并项：利用 $AB + A\overline{B} = A$ ， 将两项合并为一项，
且消去一个变量。

2. 消项：利用 A + A B = A，消去多余的项。

利用 $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$ ，消去多余的项。

3. 消元：利用 $A + \overline{A}B = A + B$ 消去多余变量。

4. 配项：利用 $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$ 和互补律、重叠律，
先增加 一些项，再利用增加项消去多余项。

5. 综合：前面几种方法的综合应用。

例1：将函数$F = A\bar{B} + \bar{A}C + BC + \bar{C}D$化简为最简与或式。

解：$F = A\bar{B} + \bar{A}C + BC + \bar{C}D$

$= A\bar{B} + C(\bar{A} + B) + \bar{C}D$ 分配律

$= A\bar{B} + C\overline{A\bar{B}} + \bar{C}D$ 反演律（摩根定理）

$= A\bar{B} + C + \bar{C}D$ 吸收律

$= A\bar{B} + C + D$ 吸收律

解毕。

例2:用代数法化简函数 $F = \overline{\overline{AC} + B\overline{CD} + \overline{C}D}$

解：$F = \overline{\overline{AC} + B\overline{CD} + \overline{C}D}$

$= \overline{\overline{AC}} \bullet \overline{B\overline{CD}} \bullet \overline{\overline{C}D}$ 反演律（摩根定理）

$= AC(\overline{B} + CD)(C + \overline{D})$ 反演律（摩根定理）

$= (A\overline{B}C + ACD)(C + \overline{D})$ 分配律

$= A\overline{B}C + ACD + A\overline{B}C\,\overline{D}$ 分配律

$= A\overline{B}C + ACD$ 吸收律

解毕。

直接利用公式化简或与式的难度较大，一般用二次对偶法。

F（或与式）

↓ 求对偶式

F’（与或式）

↓ 化简

F’（最简与或式）

↓ 求对偶式

F（最简或与式）

例3 化简函数 $F=(A+B)(A+\overline{B})(B+C)(\overline{C}+D)(B+D)$

解：用二次对偶法

$$F'=AB+A\overline{B}+BC+\overline{C}D+BD$$

$$=A+BC+\overline{C}D$$

$$F=(F')'=A(B+C)(\overline{C}+D)$$

解毕。

例4 化简函数 $F=\overline{A}\,\overline{B}+AB+\overline{A}\,\overline{C}+B\overline{D}$

解：用二次反演法

$$\overline{F}=(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+C)(\overline{B}+D)$$

$$=(\overline{A}B+A\overline{B})(A+C)(\overline{B}+D)$$

$$=(\overline{A}BC+A\overline{B}+A\overline{B}C)(\overline{B}+D)$$

$$=(\overline{A}BC+A\overline{B})(\overline{B}+D)$$

$$=A\overline{B}+\overline{A}BCD+A\overline{B}D$$

$$=A\overline{B}+\overline{A}BCD$$

$$F=\overline{\overline{F}}=(\overline{A}+B)(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$$

解毕。

2.4.2卡诺图化简法

卡诺图是真值表的一种变形，为逻辑化简提供了直观的图形方法，是数字系统硬件工程师必须熟练掌握的工程工具。

一. 卡诺图的构成

两个变量的真值表，可以变形为右图。

A	B	m_i
0	0	$m_0=\bar{A}\bar{B}$
0	1	$m_1=\bar{A}B$
1	0	$m_2=A\bar{B}$
1	1	$m_3=AB$

B \ A	0	1
0	m_0	m_2
1	m_1	m_3

图中每一个小方格对应一个最小项。

若两个最小项（或者与项）只有一个变量取值不同，其它变量均一样，则称这两个最小项（与项）为相邻最小项（相邻与项）。

若是三个变量的真值表，可以变形为卡诺图。

A	B	C	m_i
0	0	0	$m_0=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	$m_1=\bar{A}\bar{B}C$
0	1	0	$m_2=\bar{A}B\bar{C}$
0	1	1	$m_3=\bar{A}BC$
1	0	0	$m_4=A\bar{B}\bar{C}$
1	0	1	$m_5=A\bar{B}C$
1	1	0	$m_6=AB\bar{C}$
1	1	1	$m_7=ABC$

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

由于卡诺图采用的是循环码标记，首尾代码只有一个变量不同，所以，卡诺图中相邻最小项不仅有边界相邻的特点，还具有首尾相邻的特点。

若是四个变量的卡诺图，可以绘成下图。

CD \ AB	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

在卡诺图的行、列位置上都是具有首尾相邻特性的相邻最小项。

简单归纳1：两变量的函数，其每个最小项有两个相邻最小项；三变量的函数，其每个最小项有三个相邻最小项；……；n变量的函数，其每个最小项有n个相邻最小项。

简单归纳2：n个变量的卡诺图有2^n个最小项，对应有2^n个小方格组成一个矩阵。每一个变量的原变量和反变量各占一半（2^{n-1}）小方格，任一变量的原变量和反变量所占区域又被其它变量的原变量和反变量分为两半。

如，四变量的卡诺图：

A

CD \ AB	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

D

C

B

若是五个变量的卡诺图，可以绘成下图。

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8	m_{24}	m_{28}	m_{20}	m_{16}
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9	m_{25}	m_{29}	m_{21}	m_{17}
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}	m_{27}	m_{31}	m_{23}	m_{19}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}	m_{26}	m_{30}	m_{22}	m_{18}

五个变量的卡诺图，除去边界相邻、首尾相邻的四个相邻最小项之外，每个最小项还有一个对折相邻的相邻最小项。

m_7	00111
m_3	00011
m_5	00101
m_6	00110
m_{15}	01111
m_{23}	10111

m_{24}	11000
m_8	01000
m_{16}	10000
m_{25}	11001
m_{26}	11010
m_{28}	11100

五变量卡诺图重叠相邻的形式。注意不再采用连续的循环代码做为列标记，在两组图中的重叠位置上只有*A*变量不同，因此重叠位置上是相邻最小项。

DE \ *ABC*	000	001	011	010
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m9
11	m_3	m_7	m_{15}	m11
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

100	101	111	110
m_{16}	m_{20}	m_{28}	m_{24}
m_{17}	m_{21}	m_{29}	m_{25}
m_{19}	m_{23}	m_{31}	m27
m_{18}	m_{22}	m_{30}	m_{26}

如m_{24}的相邻最小项有m_{25}、m_{28}、m_{26}、m_{16}，还有m_8这个相邻最小项在重叠相邻的位置上。

注意：m_8和m_{16}不是相邻最小项，m_8的相邻最小项是m_{24}，m_{12}，m_9，m_0和m_{10}。

若是六个变量的卡诺图，可以绘成下图。

DEF \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
000	m_0	m_8	m_{24}	m_{16}	m_{48}	m_{56}	m_{40}	m_{32}
001	m_1	m_9	m_{25}	m_{17}	m_{49}	m_{57}	m_{41}	m_{33}
011	m_3	m_{11}	m_{27}	m_{19}	m_{51}	m_{59}	m_{43}	m_{35}
010	m_2	m_{10}	m_{26}	m_{18}	m_{50}	m_{58}	m_{42}	m_{34}
110	m_6	m_{14}	m_{30}	m_{22}	m_{54}	m_{62}	m_{46}	m_{38}
111	m_7	m_{15}	m_{31}	m_{23}	m_{55}	m_{63}	m_{47}	m_{39}
101	m_5	m_{13}	m_{29}	m_{21}	m_{53}	m_{61}	m_{45}	m_{37}
100	m_4	m_{12}	m_{28}	m_{20}	m_{52}	m_{60}	m_{44}	m_{36}

六个变量的卡诺图，除去边界相邻、首尾相邻的四个相邻最小项之外，每个最小项还有两个对折相邻的相邻最小项分别在水平和垂直的对折位置上。如m_{15}的对折相邻最小项是m_{11}和m_{47}。

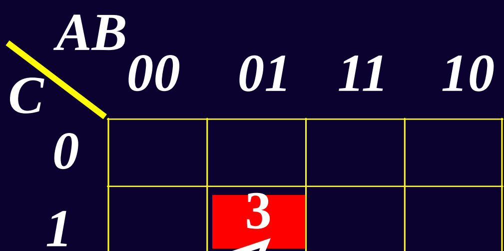
六个变量的卡诺图，可以按照重叠相邻的形式绘成下图。

AEF \ BCD	000	001	011	010	100	101	111	110
000	m_0	m_4	m_{12}	m_8	m_{16}	m_{20}	m_{28}	m_{24}
001	m_1	m_5	m_{13}	m_9	m_{17}	m_{21}	m_{29}	m_{25}
011	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}	m_{19}	m_{23}	m_{31}	m_{27}
010	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}	m_{18}	m_{22}	m_{30}	m_{26}
100	m_{32}	m_{36}	m_{44}	m_{40}	m_{48}	m_{52}	m_{60}	m_{56}
101	m_{33}	m_{37}	m_{45}	m_{41}	m_{49}	m_{53}	m_{61}	m_{57}
111	m_{35}	m_{39}	m_{47}	m_{43}	m_{51}	m_{55}	m_{63}	m_{59}
110	m_{34}	m_{38}	m_{46}	m_{42}	m_{50}	m_{54}	m_{62}	m_{58}

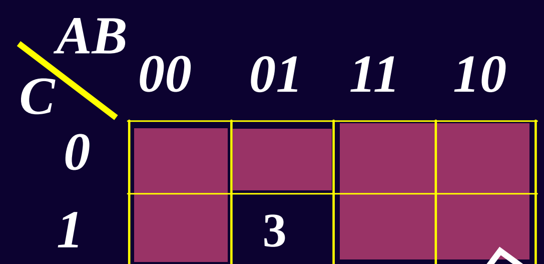
在图中，m_{15}的相邻最小项m_{31}和m_{47}分别在垂直相邻组和水平相邻组的重叠位置上。

卡诺图中最小项和最大项的关系

在卡诺图中：每个最小项对应一个小方格。每个最大项对应其下标所指小方格之外的所有小方格。以 **F=m$_3$** 和 **G=M$_3$** 为例。



$$m_3 = \bar{A}BC = \overline{\overline{\bar{A}BC}} = \overline{A+\bar{B}+\bar{C}} = \overline{M_3}$$



$$M_3 = (A+\bar{B}+\bar{C}) = \overline{\bar{A}BC} = \overline{m_3}$$

两个逻辑函数相“与”，表示两个函数在卡诺图上所占区域的公共区域；
两个逻辑函数相“或”，表示两个函数在卡诺图上所覆盖的全部区域；
一个逻辑函数的“非”，就是该函数覆盖之外的区域。

二. 逻辑函数在卡诺图上的表示

1. 逻辑函数为最小项表达式

在卡诺图上，将逻辑函数包含的每个最小项所对应的小方格填“1”，所有标“1”方格的集合就表示该函数。

例： $F=\sum m^{3}(0,1,3,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	1	0

例：$F(A,B,C,D)=m_0+m_4+m_7+m_9+m_{10}+m_{13}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	1	1
11	0	1	0	0
10	0	0	0	1

2. 逻辑函数为最大项表达式

在卡诺图上，将逻辑函数包含的每个最大项下标值所对应的小方格填“0”，其余小方格填“1”，所有标“1”方格的集合就表示该函数。

也可将最大项表达式转换为最小项表达式填卡诺图。

例：

$$F=\prod M^4(3,5,7,8,14)$$

$$=\sum m^4(0,1,2,4,6,9,10,11,12,13,15)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	0	1	1
11	0	0	1	1
10	1	1	0	1

3. 逻辑函数为一般与或表达式

利用逻辑运算在卡诺图上几何意义的概念，即“与”的共性和“或”的叠加性。

先在卡诺图上标出一个“与项”所占的区域，再逐个标出其它“与项”，相重的小方格只需标注一个“1”，所有标“1”方格的集合就表示该函数。

例： $F = AJ_{-1} + BJ_{-1} + AB$

J_{-1} \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

AB

J_{-1} \ AB	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1

AJ_{-1}

J_{-1} \ AB	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1

BJ_{-1}

4. 逻辑函数为一般或与表达式

先将函数取反，获得反函数的与或表达式，填图时，反函数对应的小方格填“0”，其余小方格填“1”，标“1”方格的集合就是该函数的卡诺图表示。

例： $F=(A+\overline{B})(\overline{C}+B)(\overline{A}+B)$

反函数 $\overline{F}=\overline{A}B+C\overline{B}+A\overline{B}$

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0

5. 逻辑函数为其它形式的表达式

可转换成前述形式填图，也可直接填图。

例: $Y = \overline{AB} + \overline{A + CD}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

+

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	0

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

三.用卡诺图化简逻辑函数的基本原理

卡诺图化简的原理是使用邻接律 $AB + A\overline{B} = A$ 将相邻最小项（与项）合并成一个最简与项。

$$F(A,B,C,D) = \underline{\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D}} + \underline{AB\overline{C}\,\overline{D} + ABC\overline{D}}$$

$$= \underline{\overline{A}B\overline{D} + AB\overline{D}}$$

$$= B\overline{D}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

卡诺图清晰反映出最小项的相邻关系，通过把卡诺图上相邻1方格“圈”起来进行合并，达到用一个简单与项代替若干最小项（与项）的目的。这个“圈”称之为卡诺圈。

任何 2^m 个（m≤变量数n）相邻“1”方格均可画成一个卡诺圈。

归纳：

两个相邻1方格所代表的最小项可以合并为一项，消去*1*个变量；

四个相邻1方格所代表的最小项可以合并为一项，消去*2*个变量；

八个相邻1方格所代表的最小项可以合并为一项，消去*3*个变量；

……

2^m 个相邻1方格所代表的最小项可以合并为一项，消去m个变量。

三变量卡诺图的几种典型合并

C \ AB	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

B

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

$\overline{B}$

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0

$\overline{C}$

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0

$\overline{A}$

四变量卡诺图的几种典型合并

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

BD

$\overline{B}\,\overline{D}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

$\overline{B}D$

$B\overline{D}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	1	0

CD

AB

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

D

$\overline{B}$

n个变量卡诺图中最小项合并规律

1。卡诺圈中1方格的个数必须为 2^m 个，m为小于或等于n的整数。

2。卡诺圈中 2^m 个1方格有一定的排列规律，含有m个不同变量，（n - m)个相同变量。

3。卡诺圈中 2^m 个1方格对应的最小项可用（n – m)个变量的“与项”表示，该“与项”由这些最小项的相同变量构成。

4。当 m=n 时，卡诺圈包围整个卡诺图，用“1”表示，即n 个变量的全部最小项之和为 1。

卡诺图是研究、分析逻辑函数的图形工具。函数化简是其主要应用。

从逻辑表达式到卡诺图：当得到一个逻辑表达式时，首先将逻辑表达式变换为与或表达式或者或与表达式，填入卡诺图。然后进行化简和表达式的变换。

例如：化简函数 $F = ABC + \overline{A}B + A\overline{C}$

C \ AB	00	01	11	10
0		$\overline{A}B$	$A\overline{C}$	$A\overline{C}$
1		$\overline{A}B$	ABC	

C \ AB	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

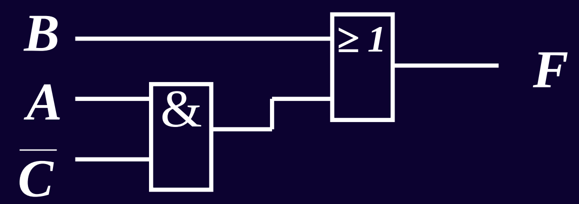
$F = B + A\overline{C}$

答： $F = ABC + \overline{A}B + A\overline{C} = B + A\overline{C}$

接续前题：

$$F = B + A\overline{C}$$

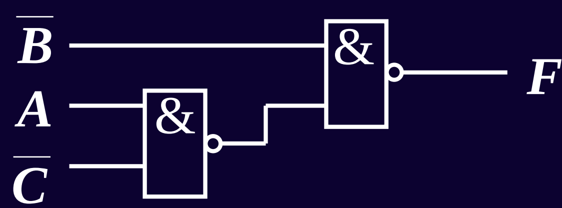
$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0



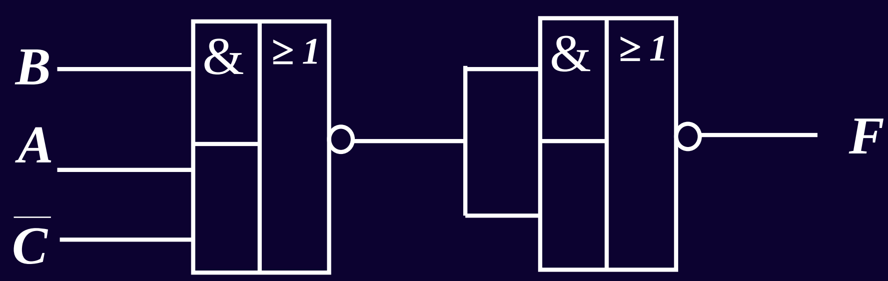
若要求用与非-与非门实现：

$$F = B + A\overline{C}$$

$$= \overline{\overline{B + A\overline{C}}} = \overline{\overline{B} \bullet \overline{A\overline{C}}}$$



若要求用与或非门实现：$F = B + A\overline{C} = \overline{\overline{B + A\overline{C}}}$



此解的门数不是最简。

接续前题：

C \ AB	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

$$F = B + A\overline{C}$$

$$\overline{F} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}C$$

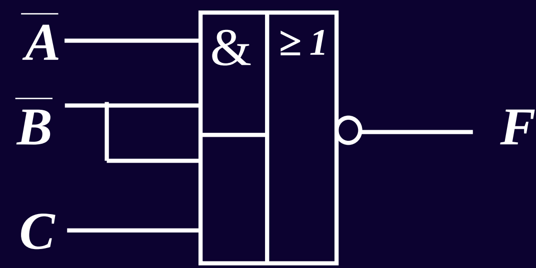
$$F = \overline{\overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}C}$$

$$F = B + A\overline{C}$$

$$\overline{F} = \overline{B}(\overline{A} + C) = \overline{B}\,\overline{A} + \overline{B}C$$

$$F = \overline{\overline{B}\,\overline{A} + \overline{B}C}$$

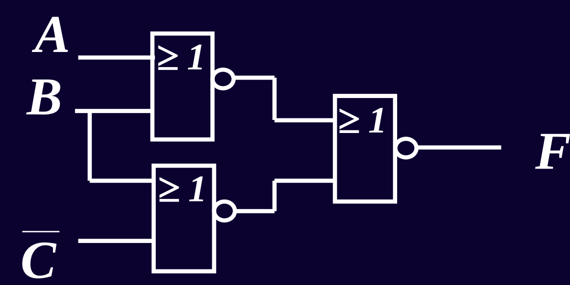
若要求用与或非门实现：



若要求或非-或非门实现：

$$F = \overline{\overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}C} = \overline{\overline{\overline{\overline{A}\,\overline{B}}} + \overline{\overline{\overline{B}C}}}$$

$$= \overline{\overline{A + B} + \overline{B + \overline{C}}}$$



任何一个逻辑函数都可以用与、或、非运算中的任意两个运算实现。

卡诺圈的选择是化简函数的基本保证，前人总结了多种方法，以满足人工化简和机器自动化简。

人工化简的基本概念、方法和规则，用实例说明：

例1：化简函数 $F=\sum m^4(0,1,6,7,8,9,12,13,14,15)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

蕴涵项（Implicant）：在逻辑函数的与或表达式中，每一个与项都称为该函数的蕴涵项。

质蕴涵项（Prime Implicant）：若函数的某一蕴涵项不能全部包含在其它任一蕴涵项中，则称此蕴涵项为质蕴涵项（素蕴涵项）。在卡诺图上，按最小项合并规律，若某个卡诺圈不可能被其它更大的卡诺圈包含，则这个卡诺圈称为极大圈，其所对应的“与项”称为质蕴涵项。此例中，质蕴涵项有：

$$\overline{B}\,\overline{C}\ ,\ BC\ ,\ AB\ ,\ A\overline{C}$$

*必要质蕴涵项（Essential Prime Implicant）：*至少包含了一个其它任一质蕴涵项所不能包括的标*1*小方格（实质最小项）：$\overline{B}\,\overline{C}$, BC

选用最少数量的质蕴涵项（极大圈），包含卡诺图上所有“1”方格， 这就是最小覆盖。

即，以必要质蕴涵项为基本与项，再选加质蕴涵项求卡诺图（函数）的最小覆盖。

用卡诺图化简逻辑函数的总原则是：

在覆盖函数所有最小项（卡诺图中所有1方格）前提下，卡诺圈的个数最少，每个卡诺圈达到最大。

用卡诺图化简逻辑函数的基本步骤

（1）作出函数的卡诺图。

（2）在卡诺图上圈出函数的全部极大圈。（质蕴涵项）

（3）确定全部实质最小项，找出必要极大圈。（必要质蕴涵项）

（4）如果选出的所有必要极大圈已覆盖卡诺图上的所有“1”方格，则所有极大圈的集合就是最小覆盖。

（5）如果所有必要极大圈不能覆盖卡诺图上的所有1方格，则从剩余的极大圈中选择最少的极大圈，与必要极大圈一起构成函数的最小覆盖。此时，函数的最简表达式不是唯一的。

（6）根据最小覆盖，写出函数的最简表达式。

接前例：

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

极大圈：$\overline{B}\,\overline{C}$ BC $A\overline{C}$ AB

实质最小项：m_0、m_1、m_6、m_7

必要极大圈：$BC, \overline{B}\,\overline{C}$

两个必要极大圈不能实现最小覆盖，增加其他极大圈。

$$F = AB + BC + \overline{B}\,\overline{C}$$

$$= A\overline{C} + BC + \overline{B}\,\overline{C}$$

例2：化简函数 $F=\sum m^4(1,3,4,5,9,11,12,13,14,15)$

解：依题意填写卡诺图如下：

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	0	1	0

必要质蕴涵项有：

$\overline{B}D$, $B\overline{C}$, AB

这三项已经构成最小覆盖，化简的函数为：$F=\overline{B}D+B\overline{C}+AB$

解毕。

例3：用卡诺图化简函数 $F(A,B,C,D)=\sum m(0,1,3,4,7,12,13,15)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

质蕴涵项：

$\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D},\ B\overline{C}\,\overline{D},\ \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},\ \overline{A}\,\overline{B}D,$

$AB\overline{C},\ ABD,\ \overline{A}CD,\ BCD$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

$$F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+B\overline{C}\,\overline{D}+ABD+\overline{A}CD$$

要求覆盖全部为1的最小项。

解毕。

例4：用卡诺图化简函数

$$F=\sum m^5(0,1,2,4,5,6,10,16,17,18,20,21,22,24,26,27,28,30,31)$$

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	$^{0}1$	$^{4}1$	$^{12}0$	$^{8}0$	$^{24}1$	$^{28}1$	$^{20}1$	$^{16}1$
01	$^{1}1$	$^{5}1$	$^{13}0$	$^{9}0$	$^{25}0$	$^{29}0$	$^{21}1$	$^{17}1$
11	$^{3}0$	$^{7}0$	$^{15}0$	$^{11}0$	$^{27}1$	$^{31}1$	$^{23}0$	$^{19}0$
10	$^{2}1$	$^{6}1$	$^{14}0$	$^{10}1$	$^{26}1$	$^{30}1$	$^{22}1$	$^{18}1$

$\overline{B}\,\overline{D}$　$\overline{B}\,\overline{E}$　$\overline{C}D\overline{E}$　$A\overline{E}$　ABD

$$F=\overline{B}\,\overline{D}+\overline{B}\,\overline{E}+\overline{C}D\overline{E}+A\overline{E}+ABD$$

解毕。

例5：用卡诺图求证表达式相等：$A\overline{B}+B\overline{C}+C\overline{A}=\overline{A}B+\overline{B}C+\overline{C}A$

解：绘制等式两边表达式的卡诺图

左边

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

右边

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

答：左、右两边卡诺图相同，因此等式两边相等，证毕。

将逻辑函数化简成最简或与表达式

圈“0”方格，求出反函数的最简与或式，利用反演规则可得到原函数的最简或与式。

例：将下列函数化简成最简或与式

$$F = \sum m^4(0,8,9,10,11,12,13,14,15)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

$$\overline{F} = \overline{A}B + \overline{A}D + \overline{A}C$$

$$F = (A+\overline{B})(A+\overline{D})(A+\overline{C})$$

可否直接写出最简或与式？

2.5.3非完全描述的函数化简

知识点 非完全描述逻辑化简

无关项：
- 约束项：某些输入变量的组合根本不会出现。
- 任意项：某些输入变量组合的输出结果对逻辑函数无关紧要。

根据逻辑化简的需要，将无关项加入到逻辑函数的化简之中，有时可以使逻辑表达式更为简单。

例： $F=\sum m^4(0,1,4,7,9,10,13)+\sum d(2,5,6,8,12,14,15)$

不考虑无关项：

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	0	1	1
11	0	1	0	0
10	0	0	0	1

$$F=\bar A\bar C\bar D+\bar A\bar B\bar C+A\bar C D+\bar A BCD+A\bar B C\bar D$$

考虑无关项：

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	d	d
01	1	d	1	1
11	0	1	d	0
10	d	d	d	1

$$F=B+\bar C+\bar D$$

条件等式: $\bar A C\bar D+ABC+A\bar C\bar D+\bar A B\bar C D=0$

即: $\sum d(2,5,6,8,12,14,15)=0$

例2：设计一个余3码输入的素数检测器，当输入为素数时，输出为1。

解：余3码是一种用四位二进制表示一位十进制数的代码，它使用16种组合中的中间10种，即m3、m4、…、m12对应十进制数0、1、…、9。正常情况下，首尾各三种组合不会出现，即m0、m1、m2、m13、m14、m15。设余3码的输入为$Y_3Y_2Y_1Y_0$，输出为F。

由一位十进制数中的2、3、5、7是素数，可得

$$F(Y_3,Y_2,Y_1,Y_0)=\sum m^4(5,6,8,10)+\sum d^4(0,1,2,13,14,15)$$

Y_1Y_0 \ Y_3Y_2	00	01	11	10
00	d	0	0	1
01	d	1	d	0
11	0	0	d	0
10	d	1	d	1

$$F=\overline{Y_3}\,\overline{Y_1}Y_0+\overline{Y_2}\,\overline{Y_0}+Y_1\overline{Y_0}$$

注意：化简时，需要的d当作“1”；不需要的d当作“0”。

第二章　　小结

逻辑代数中的基本运算、公理、定理、三个规则

要求：进行等式证明，运用规则求反函数和对偶函数

逻辑表达式的五种基本形式之间的转换

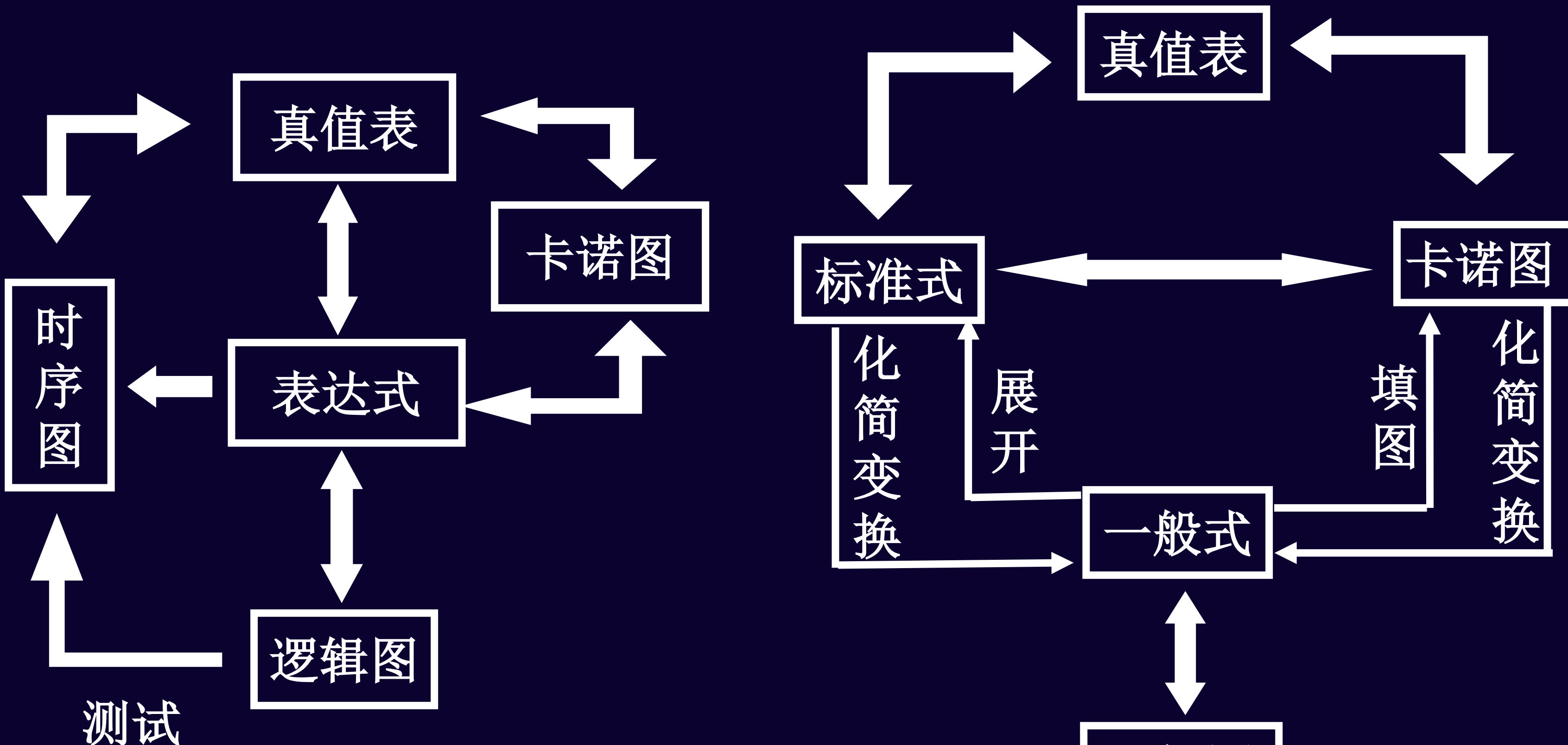
与或式、或与式、与非式、或非式、与或非式

逻辑函数的性质

要求：最小项的概念与性质、最大项的概念与性质、最小项与最大项之间的关系、

逻辑函数的标准形式——最小项表达式、最大项表达式及相互转换

逻辑问题的描述可用真值表、逻辑表达式、逻辑图、卡诺图和时序图，它们各具特点又相互关联。



逻辑函数的化简

代数化简法：

卡诺图化简法：重点

常用编码的卡诺图表示及化简（格雷码、格雷BCD码、8421码、2421码、余3码）

逻辑函数表达形式 填图 → 卡诺图 化简 → 逻辑函数最简表达形式

真值表
标准式
一般与或式
一般或与式
其它形式

利用无关项进行化简的原则：尽量利用与尽量不用

最简与或式
最简与非式
最简或与式
最简或非式
最简与或非式

作业5:

2.16（1，3）

2.17（1，2）

2.18

2.19（1）

2.20（2）

2.21