Komplexität von Algorithmen
Sommersemester 2023

Institut für Theoretische Informatik
Leibniz Universität Hannover

Vorbereitungsblatt 0

Zettel bearbeiten bis: 17.04.2024

Inhalte des Vorbereitungsblatts:

Definitionen: deterministische Turingmaschine, Entscheidungsproblem, O-Notation
Literaturstellen: Sipser (3rd edition) S. 165–168, S. 176–179, S. 277–278

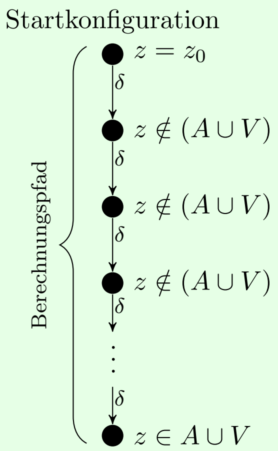
Erklärvideo: (3 Minuten)
Link: `https://youtu.be/Sx6ME5ZBCp8`
Titel: Formale Beschreibung einer Turingmaschine

Definition: Deterministische Turingmaschine

$$M = (Z, \Gamma, \delta, z_0, A, V),$$

wobei

- Z: Menge der Zustände,
- Γ: Menge der Bandsymbole,
- $\delta\colon Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{N}\}$
- z_0: Startzustand,
- A : Menge der akzeptierenden Zustände,
- V : Menge der verwerfenden Zustände.



DTM akzeptiert Eingabe gdw. δ-Folge führt zu $z \in A$.
Beachte: Sie verwirft, wenn die Folge zu $z \in V$ führt.

Wir betrachten in dieser Vorlesung immer eine x-Band Turingmaschine mit einem Eingabeband (read-only) und x vielen Arbeitsbändern.

Definition: Entscheidungsproblem
Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ wird von einer TM $M = (Z, \Gamma, \delta, z_o, A, V)$ entschieden, wenn bei allen Eingaben $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$M \text{ akzeptiert } w \iff w \in L.$$

Erklärvideo: (6 Minuten)
Link: `https://www.youtube.com/watch?v=dbunHuH-ixg`
Titel: Simulation einer Turingmaschine am Beispiel: Anagramme

Erklärvideo: (3 Minuten)
Link: `https://www.youtube.com/watch?v=Uh2SiUMcz80`
Titel: Die Landau-Symbole O und o

Definition: O-Notation
Seien $f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ drei Funktionen und $e \in \mathbb{N}$ eine Konstante. Dann ist:
$f \in O(g)$, falls es $c, n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$f(n) \leq c \cdot g(n).$$

$f \in h \cdot e^{O(g)}$, falls es $c, n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$f(n) \leq h(n) \cdot e^{c \cdot g(n)}.$$

$f \in O(e^{O(g)})$, falls es $d \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt:

$$f \in d \cdot e^{O(g)}.$$

Es gilt $f \in o(g)$, falls es für alle $c \in \mathbb{N}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$f(n) < c \cdot g(n).$$

Definition: Rechenregeln für O-Notation und log-Funktion
Summe, Produkt und Potenzierung von O-Klassen geschieht komponentweise:

$$\begin{aligned}
h \in O(f) + O(g) &\Leftrightarrow h \in \{f' + g' \mid f' \in O(f),\ g' \in O(g)\} \\
h \in O(f) - O(g) &\Leftrightarrow h \in \{f' - g' \mid f' \in O(f),\ g' \in O(g)\} \\
h \in O(f) \cdot O(g) &\Leftrightarrow h \in \{f' \cdot g' \mid f' \in O(f),\ g' \in O(g)\} \\
h \in O(f)^{O(g)} &\Leftrightarrow h \in \{f'^{g'} \mid f' \in O(f),\ g' \in O(g)\}
\end{aligned}$$

Wir definieren $\log(x) := \lceil \log_2(x) \rceil$.

Beobachtung: Limes Definition für O und o
Es gilt $f \in O(g)$, falls
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty,$$
sowie $f \in o(g)$, falls
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$
Falls der Grenzwert existiert, genügt es also zu zeigen:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty,$$
bzw.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$