

# Krefter og respons i hiv

MEK4420

OLE SANDOK

March 2025

## Introduksjon

I denne oppgaven ser vi på en flytende geometri i to dimensjoner. Vi regner først på kreftene fra en geometri i bevegelse til tillestående vann. Så regner vi på kreftene som mottas og reflekteres av en stillestående geometri. Vi undersøker resonans og repons i hiv.

### 7.1

Først ser vi på grenseverdiproblemet (boundary value problem, BVP) for potensialet til  $\phi_2$  i hiv, altså vertikal bevegelse, til en geometri som flyter i havoverflaten. Vi har radiasjonspotensialet gitt ved

$$\Phi_R(x, y, t) = \text{Re}\left(i\omega\xi_2\phi_2(x, y)e^{i\omega t}\right), \quad (1)$$

der  $\frac{\omega}{g} = K$  er bølgetallet, og  $\xi_2$  er gitt kompleks amplitude i hiv.

### 7.2

Vi formulerer grenseverdiproblemet med Green-funksjonen, der

$$g(x, y; \bar{x}, \bar{y}, t) = \text{Re}\left(G(x, y; \bar{x}, \bar{y}, t)e^{i\omega t}\right), \quad (2)$$

$$G(x, y; \bar{x}, \bar{y}, t) = \log r + H(x, y; \bar{x}, \bar{y}, t), \quad (3)$$

$$r = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} \quad (4)$$

**gjøre oppgaven: Formulate the bvp for the green function G, where ... in this formulation, formulate field equation, bc at free surface, at x-pm-infty and y- -infty**

### 7.3

Vi formulerer grenseverdiproblemet med Green-funksjonen, der

$$g(x, y; \bar{x}, \bar{y}, t) = \text{Re}\left(G(x, y; \bar{x}, \bar{y}, t)e^{i\omega t}\right), \quad (5)$$

$$G(x, y; \bar{x}, \bar{y}, t) = \log r + H(x, y; \bar{x}, \bar{y}, t), \quad (6)$$

$$r = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} \quad (7)$$

**gjøre oppgaven 7.3 : use greens theorem to derive an integral eq for the hiv prob w/ free surface.**

## 7.4 - Integrallikningen

For punktet  $(\bar{x}, \bar{y})$ , på geometriens grense, blir integrallikningen

$$-\pi\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{S_B} \phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} = \int_{S_B} G n_2 dS \quad (8)$$

Når  $(\bar{x}, \bar{y})$  er i fluidet (ikke på  $S_B$ ), får vi likningen

$$2\pi\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{S_B} (\phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} - G n_2) dS \quad (9)$$

Dette er da ikke lenger en integrallikning.

### 7.5.1

#### Diskretisering av skip

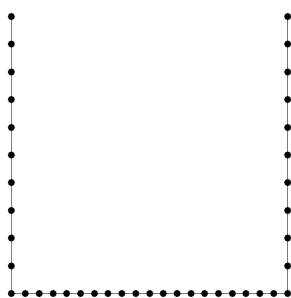
Nå ser vi på diskretisering av den våte delen av en rektangulær geometri. Dypgangen  $D$  velges som enhetslengde i problemet, og  $L$  er lengden. Vi har fire geometrier.  $L/D = 10, 2, 1, 0,1$



Figur 1:  $L/D = 10$



Figur 2:  $L/D = 2$



Figur 3:  $L/D = 1$



Figur 4:  $L/D = 0.1$

### 7.5.2 - Løsning av integrallikningen med kjente variabler

Vi ønsker å løse integrallikningen:

$$-\pi\phi_2 + \int_{S_B} \phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int_{S_B} G n_2 dS \quad (10)$$

Men før vi gjør det vil vi sjekke at likningen fungerer. Så vi løser høyre- og venstresiden av en integral-likning der vi kjenner variablene. Vi ønsker å se om den reelle delen til høyresiden tilsvarer den reelle delen til venstresiden, og tilsvarende for de imaginære delene.

$$\pi\varphi_0 + \int_{S_B} \varphi_0 \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int_{S_B} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (11)$$

Her er  $\varphi_0 = e^{K\bar{y} - iK\bar{x}}$  og  $K = \frac{\omega}{g}$

Likningen diskretiseres ved å dele opp geometriens grense  $S_B$  i  $N$  stykker, der  $S_B = \sum_{m=1}^N S_m$ , med hver  $S_m$  definert av startkoordinatet  $(x_m^-, y_m^-)$  og sluttkoordinatet  $(x_m^+, y_m^+)$ . Midten av stykket er  $(\bar{x}_m, \bar{y}_m) = \frac{1}{2}[x_m^- + x_m^+, y_m^- + y_m^+]$ .

Diskretisering av venstre side gir

$$V.S = \pi\varphi_0(\bar{x}_m, \bar{y}_m) + \sum_{m=1}^N \varphi_0(\bar{x}_m, \bar{y}_m) \int_{S_m} \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (12)$$

Bidraget fra log-termene fåes analytisk, som gir høy oppløsning.

$$\int_{S_m} \frac{\partial}{\partial n} (\log r + \log r_1) dS = -Im \left( \log[x + iy - (\bar{x}_n + i\bar{y}_n)] \right) \Big|_{\bar{x}_m + i\bar{y}_m^-}^{\bar{x}_m^+ + i\bar{y}_m^+} - Im \left( \log[x + iy - (\bar{x}_n - i\bar{y}_n)] \right) \Big|_{\bar{x}_m + i\bar{y}_m^-}^{\bar{x}_m^+ + i\bar{y}_m^+} \quad (13)$$

Integralet over bølgedelen av  $\frac{\partial G}{\partial n}$  får vi fra midtpunktsregelen

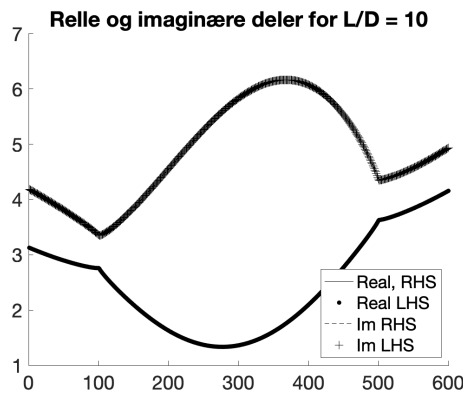
$$\simeq \Delta S_m \left( n_1 \nu [Im(f_1) + iIm(f_2)] + n_2 \nu [Re(f_1) + iRe(f_2)] \right) \Big|_{(\bar{x}_m, \bar{y}_m)} \quad (14)$$

Diskretisering av høyre side

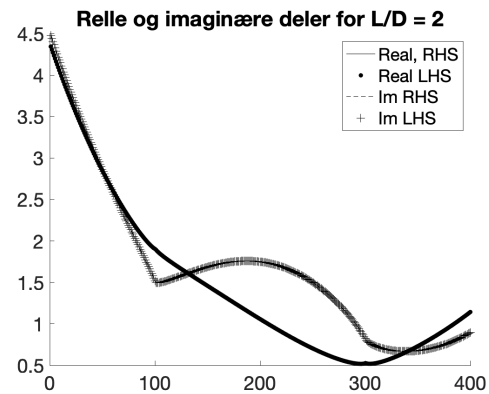
$$H.S = \sum_{m=1}^N \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \Big|_{(\bar{x}_m, \bar{y}_m)} \int_{S_m} G dS, \quad (15)$$

der integralet av logaritmen gjøres med to-punkts Gauss-integrasjon og de resterende med midtpunkt-regelen.

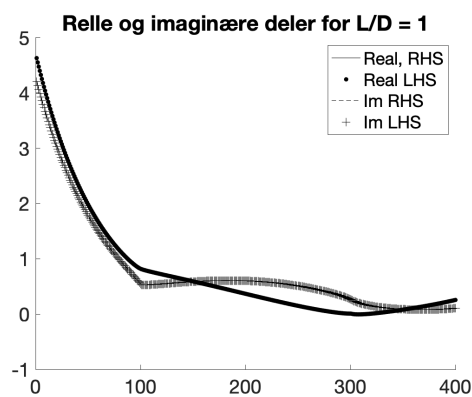
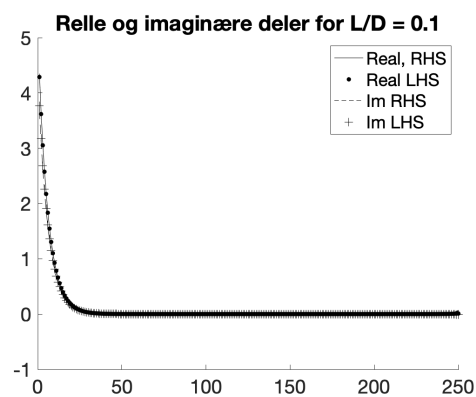
**Vi tester den numeriske løseren med KD=1.2**



Figur 5: L/D = 10

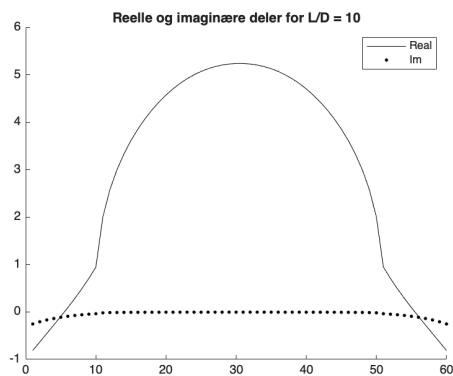
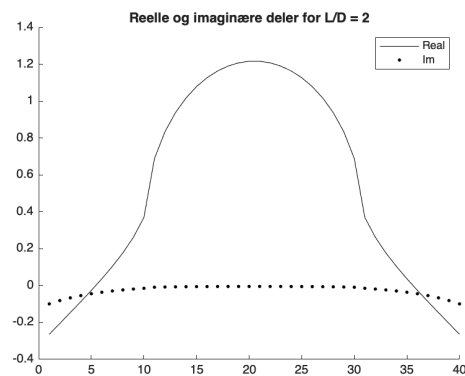


Figur 6: L/D = 2

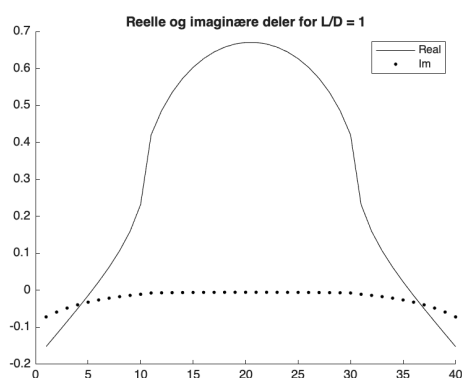
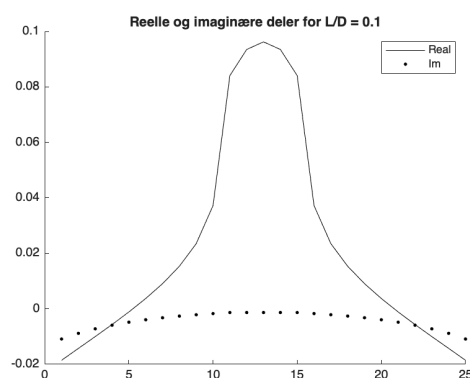
Figur 7:  $L/D = 1$ matlab, bruke rett oppløsning, og  $kd=1.2$  el  $0.9$ Figur 8:  $L/D = 0.1$ 

### 7.5.3 - Solution of the heave problem

Så løser vi den originale likningen (10) numerisk for alle 4 geometriene. Og ser på plott av verdiene for potensialet  $\phi_2$  på y-aksen. På x-aksen har vi de diskrete punktene. Plottet er symmetrisk fordi geometrien

Figur 9:  $L/D = 10$ Figur 10:  $L/D = 2$ 

er symmetrisk.

Figur 11:  $L/D = 1$ Figur 12:  $L/D = 0.1$ 

### 7.6 - Far field behaviour of $\phi_2$

Langt borte har potensialet  $\phi_2$  denne formen

$$\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow A_2^{-\infty} e^{K\bar{y} + iK\bar{x}}, \quad \bar{x} \rightarrow -\infty, \quad (16)$$

$$\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow A_2^{\infty} e^{K\bar{y} - iK\bar{x}}, \quad \bar{x} \rightarrow \infty, \quad (17)$$

der  $K = \frac{\omega^2}{g}$

fra (9) så kan vi finne  $A_2^{-\infty}$  og  $A_2^{\infty}$

$$2\pi\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{S_B} (\phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} - Gn_2) dS \quad (18)$$

oppførselen til  $\phi_j$  for  $\bar{x} \rightarrow \pm\infty \dots$

Der de komplekse konstantene A finnes ved å ta integralet over svømmefflaten.

$$A_2^{\pm\infty} = i \int_{S_B} \left[ \phi_2 \left( n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) - n_2 \right] e^{K(\bar{y} \pm i\bar{x})} dS \quad (19)$$

arbeid gjenstår: løse.Taste inn (103)? og vise tydeligere overgang

## 7.7 Utgående bølgeamplitude

Den utgående bølgeamplituden har komplekse amplituder,

$$amp_2^{\infty} = \xi_2 A_j^{\infty} \frac{\omega^2}{g}, \quad \text{og} \quad amp_2^{-\infty} = \xi_2 A_j^{-\infty} \frac{\omega^2}{g}. \quad (20)$$

Gjennomsnittet av energifluksen til den utgående bølgen er gitt ved

$$\overline{\text{Energifluks}} = \bar{E}^{\infty} c_g + \bar{E}_j^{-\infty} c_g = \frac{1}{2} \rho g |amp_2|^{\infty} c_g + \frac{1}{2} \rho g |amp_2|^{-\infty} c_g, \quad (21)$$

der  $\bar{E}^{\pm\infty}$  er gjennomsnittlig energitetthet til utgående bølger og  $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial K}$  er gruppehastigheten. [se over hva i denne 7.7 oppgaven som samsvarer med neste 7.8](#)

## 7.8 Added mass

Vi bruker den numeriske løsningen til  $\phi_2$  langs [svømmefflaten\(?\)](#)  $S_B$  for å regne addert masse  $a_{22}$  og dempning  $b_{22}$  for bølgetall (ganget med dypgang) fra 0 til 2:  $0 < KD = \omega D/g < 2$ . Vi regner også ut  $b_{22}$  fra energibalansen. (merk: subscript 2 midlertidig fjernet for  $\xi, A, amp$ )

$$\frac{1}{2} |\xi|^2 \omega^2 b_{22} = \bar{E}^{\infty} c_g + \bar{E}^{-\infty} c_g \quad (22)$$

$$b_{22} = \frac{\bar{E}^{\infty} c_g + \bar{E}^{-\infty} c_g}{\frac{1}{2} |\xi|^2 \omega^2} \quad (23)$$

$$b_{22} = \frac{\frac{1}{2} \rho g |amp^{\infty}|^2 c_g + \frac{1}{2} \rho g |amp^{-\infty}|^2 c_g}{\frac{1}{2} |\xi|^2 \omega^2} \quad (24)$$

$$b_{22} = \frac{\rho g |amp^{\infty}|^2 (\frac{g}{2\omega}) + \rho g |amp^{-\infty}|^2 (\frac{g}{2\omega})}{|\xi|^2 \omega^2} \quad (25)$$

$$b_{22} = \frac{\rho g |\xi A^{\infty} \frac{\omega^2}{g}|^2 (\frac{g}{2\omega}) + \rho g |\xi A^{-\infty} \frac{\omega^2}{g}|^2 (\frac{g}{2\omega})}{|\xi|^2 \omega^2} \quad (26)$$

$$b_{22} = \frac{\rho g |\xi|^2 (\frac{\omega^2}{g}) (\frac{\omega^2}{g}) |A^{\infty}|^2 (\frac{g}{2\omega}) + \rho g |\xi|^2 (\frac{\omega^2}{g}) (\frac{\omega^2}{g}) |A^{-\infty}|^2 (\frac{g}{2\omega})}{|\xi|^2 \omega^2} \quad (27)$$

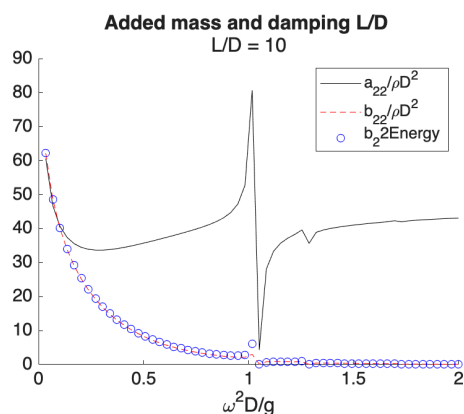
$$b_{22} = \rho g (\frac{1}{g}) (\frac{\omega^2}{g}) |A^{\infty}|^2 (\frac{g}{2\omega}) + \rho g (\frac{1}{g}) (\frac{\omega^2}{g}) |A^{-\infty}|^2 (\frac{g}{2\omega}) \quad (28)$$

$$b_{22} = \rho (\frac{\omega^2}{g}) (\frac{g}{2\omega}) (|A^{\infty}|^2 + |A^{-\infty}|^2) \quad (29)$$

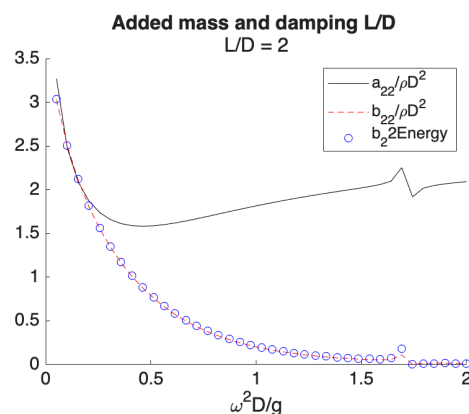
$$b_{22} = \frac{1}{2} \rho \omega (|A^{\infty}|^2 + |A^{-\infty}|^2) \quad (30)$$

Legger på subscript og flytter omega og rho under, så får vi ønsket likning,

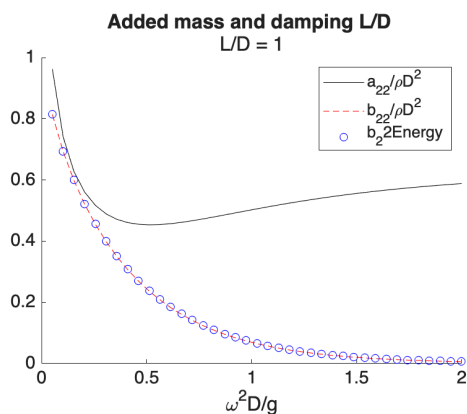
$$\frac{b_{22}}{\rho\omega} = \frac{1}{2}(|A_2^\infty|^2 + |A_2^{-\infty}|^2) \quad (31)$$



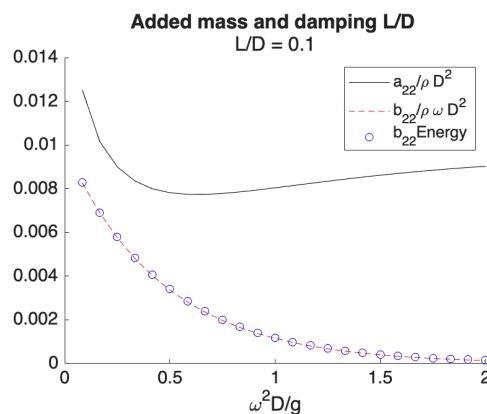
Figur 13: L/D = 10



Figur 14: L/D = 2



Figur 15: L/D = 1



Figur 16: L/D = 0.1

over på nytt

se

## 7.9 Approximate solution

- solve problem 6.17 in newman for the 2d case obtaining approximations of the exciting force and damping force. compare the approxiamte solution to the full calculation of b22

hint: in the calculation of the exciting force in prob 6.17 use of the froud-Krylov approximation is made, obtaining, in the 2d case,

$$X_2^{FK} = -i\omega\rho \int_{S_B} \phi_0 n_2 dS = \rho g \int_{-L/2}^{L/2} e^{-KD-iKX} dx = \rho g L e^{-KD} \frac{\sin(KL/2)}{KL/2} \quad (32)$$

løse

## 7.10 Diffraksjonsproblemet

### 7.10.1 Exciting force

task: obtain numerically the exciting force.

## 7.10.2 Haskind relations

fortsett å skrive av og så er oppgaven å VISE AT  $X_2/\rho\omega g = i A_2$ -infty. Så ber oppgaven om å KALKULERE eksitasjonskraften  $X_2/\rho\omega g$  for de 4 seksjonene ved bruk av 155, 158 og v2 162

## 7.11 Body response in heave

se over om jeg har formulert likningen. legge til mange flere steg fra kladdeboken?

### 7.11.1 Body response in heave

task: sjølkoding?

### 7.11.2-3-4 Response as function of frequency

task: plot  $\xi/A$  task: include in the plots the response by FK.. .. task: use the approximate method w a22 included in calculation..

## 7.12 write a conclusion

task: Write down in 10 main points, A) what you have done, B) what you have found, and C) the main perspectives of this kind of analysis (the main conclusions) regarding the force and response calculations of the heave problem.

## Kladd

## References

[1]: Open Met Buoy, J. Rabault - DOI: 10.13140/RG.2.2.15826.07368