Krefter og Respons i hiv

Ole

Vår 2025

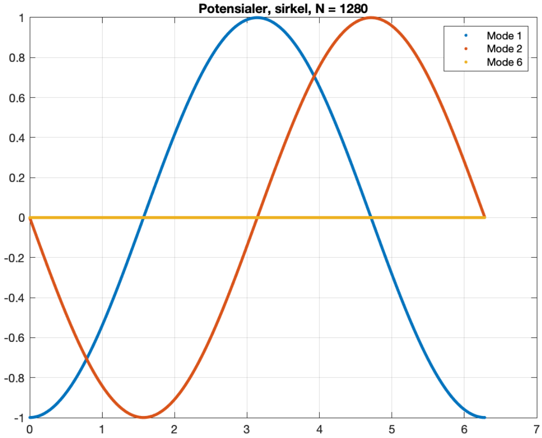
I denne oppgaven ser vi på en flytende geometri i to dimensjoner. Vi regner først på kreftene fra en geometri i bevegelse til tillestående vann. Så regner vi på kreftene som mottas og reflekteres av en stillestående geometri. Vi undersøker resonans og repons i hiv.

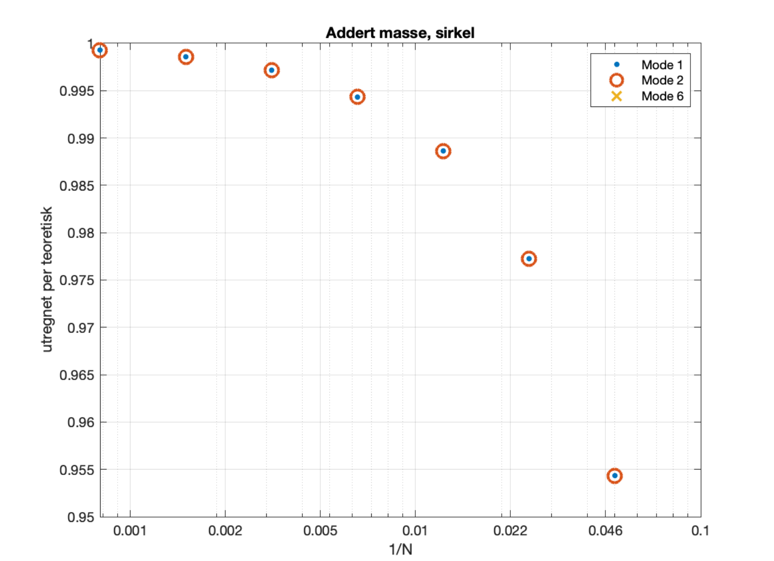
Randverdi i 2D

Vi har en geometri som beveger seg med en fart U i et ubegrenset fluid. Bevegelsen i fjernfeltet er null. Løsningen på problemet finnes ved å løse integrallikningen:

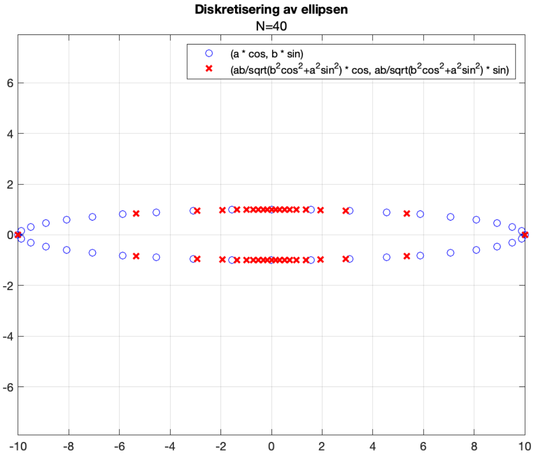
$$-\pi\phi(\bar{x},\bar{y}) + \int_{S_B} \phi \frac{\partial}{\partial n} \ln r dS = \int_{S_B} \frac{\partial \phi}{\partial n} \ln r dS \tag{1}$$

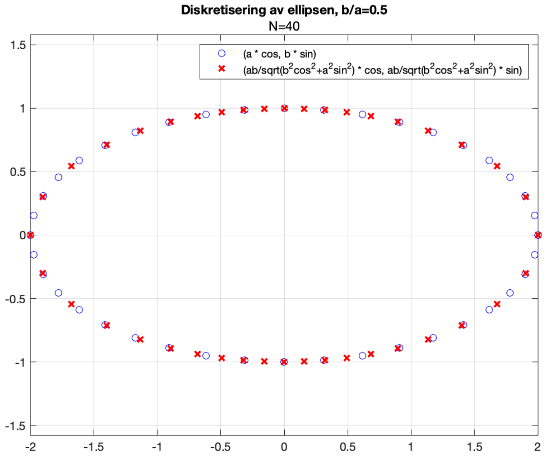
der $\partial\phi/\partial n = n_1$ langs med S_B.

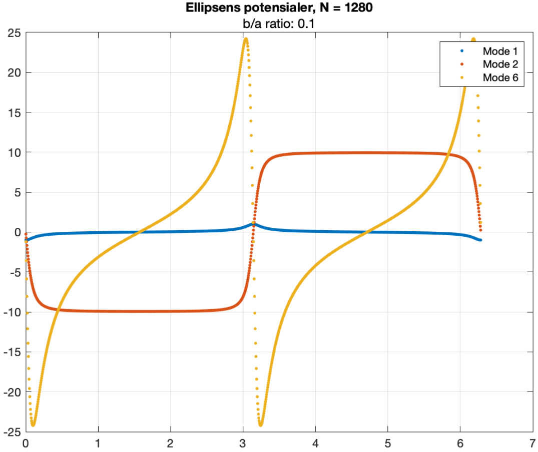

Potensialer, sirkel, N = 1280
Mode 1
Mode 2
Mode 6
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

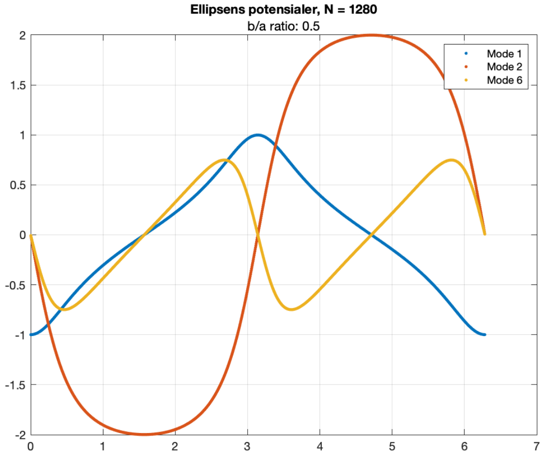


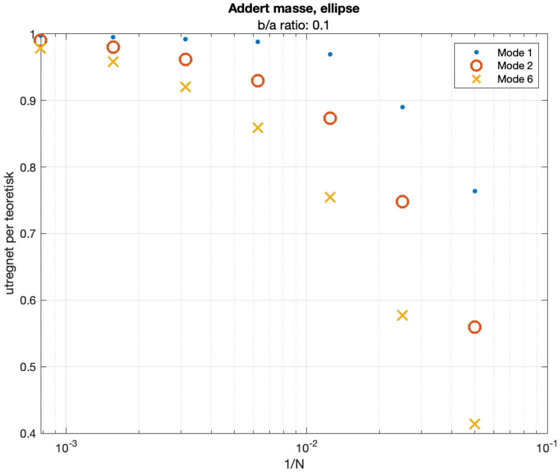
Allerede ved første diskretisering, N=20, så har vi over 95% samsvar mellom teoretisk og utregnet.


Diskretisering av ellipsen
N=40
(a * cos, b * sin)
(ab/sqrt(b^2cos^2+a^2sin^2) * cos, ab/sqrt(b^2cos^2+a^2sin^2) * sin)
6
4
2
0
-2
-4
-6
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

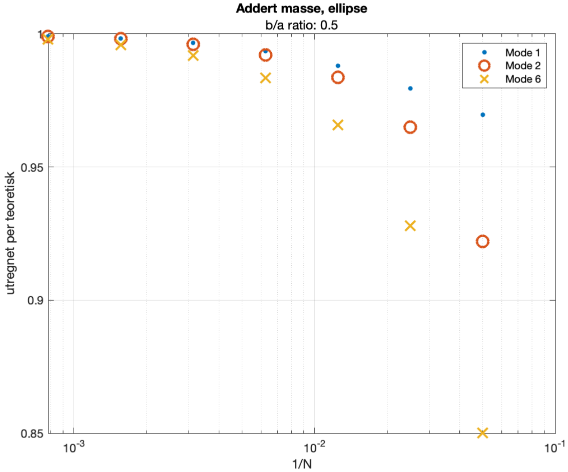

Diskretisering av ellipsen, b/a=0.5
N=40
(a * cos, b * sin)
(ab/sqrt(b^2cos^2+a^2sin^2) * cos, ab/sqrt(b^2cos^2+a^2sin^2) * sin)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


Ellipsens potensialer, N = 1280
b/a ratio: 0.1
Mode 1
Mode 2
Mode 6
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
1
2
3
4
5
6
7

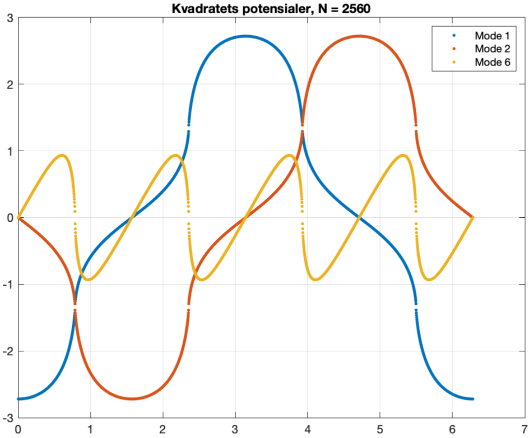

Ellipsens potensialer, N = 1280
b/a ratio: 0.5
Mode 1
Mode 2
Mode 6
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
1
2
3
4
5
6
7

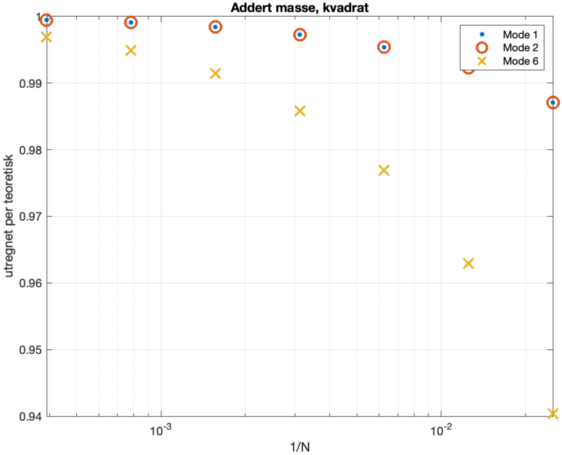


N = 20,40,80,160,320,640,1280.



$$N = 20,40,80,160,320,640,1280.$$


Kvadratets potensialer, N = 2560
Mode 1
Mode 2
Mode 6
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
1
2
3
4
5
6
7



$$N = 40,80,160,320,640,1280,2560.$$

Vi har sett på 3 geometrier: sirkel, ellipse, og kvadrat. Vi har sett at den utregnede adderte massen konvergerer mot den teoretiske, med ulik hastighet, når vi øker N diskretiseringspunkter. Det er fasongen på geometrien som avgjør responsen.

Randverdiene for problemet

1. Kinematisk grensebetingelse
2. uendelig dyp.
3. innkompressibelt, uten virvling. Laplace.

Randverdiene for Green-funksjonen

1.

Figure: $L/D = 10$

Figure: $L/D = 2$

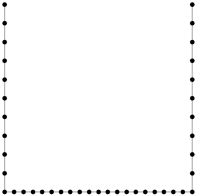


Figure: $L/D = 1$

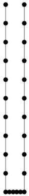


Figure: $L/D = 0.1$

Vi ønsker å løse integrallikningen:

$$-\pi\phi_2 + \int_{S_B} \phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int_{S_B} G n_2 dS \tag{2}$$

Men før vi gjør det vil vi sjekke at likningen fungerer. Så vi løser høyre- og venstresiden av en integrallikning der vi kjenner alle variablene. Vi ønsker å se om den reelle delen til høyresiden tilsvarer den reelle delen til venstresiden, og tilsvarende for de imaginære delene.

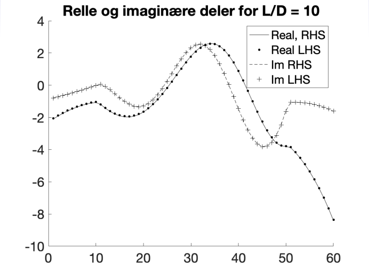


Figure: $L/D = 10$

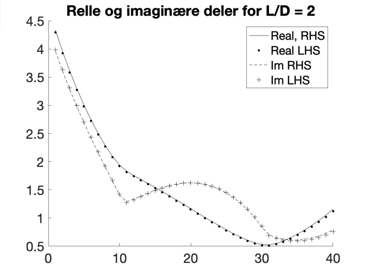


Figure: $L/D = 2$

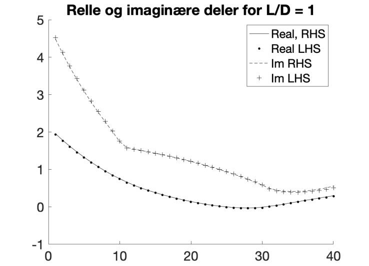


Figure: $L/D = 1$

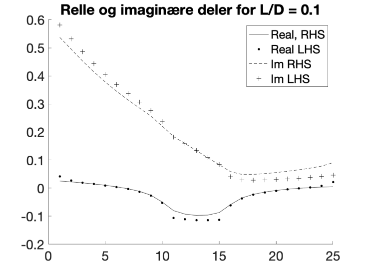


Figure: $L/D = 0.1$

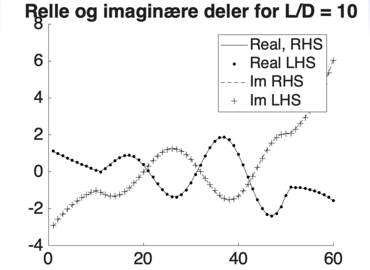


Figure: $L/D = 10$

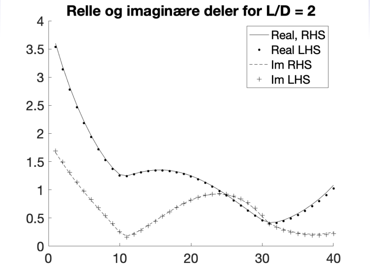


Figure: $L/D = 2$

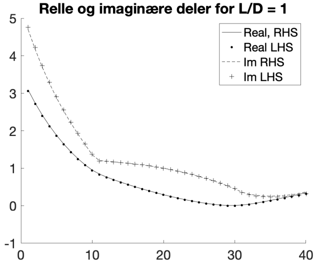


Figure: $L/D = 1$

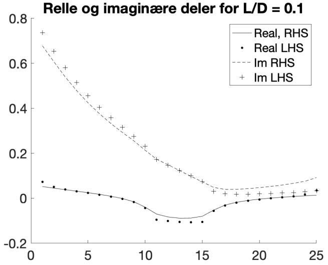


Figure: $L/D = 0.1$

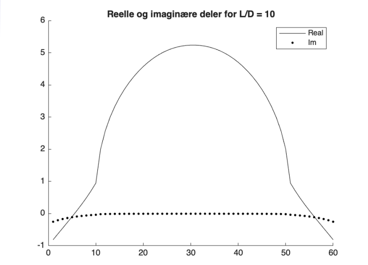


Figure: $L/D = 10$

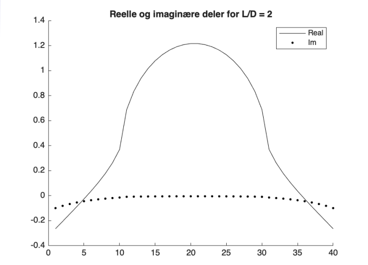


Figure: $L/D = 2$

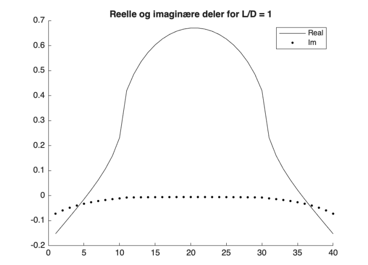


Figure: $L/D = 1$

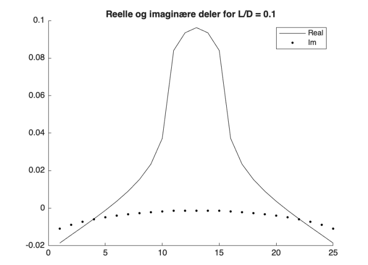


Figure: $L/D = 0.1$

Langt borte, når for $\bar{x} \to \pm\infty$ har potensialet ϕ_2 denne formen

$$\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) \to A_2^{-\infty} e^{K\bar{y} + \mathrm{i}K\bar{x}}, \quad \bar{x} \to -\infty, \tag{3}$$

$$\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) \to A_2^{\infty} e^{K\bar{y} - \mathrm{i}K\bar{x}}, \quad \bar{x} \to \infty, \tag{4}$$

der $K = \frac{\omega^2}{g}$

fra likningen for fluidet så kan vi finne $A_2^{-\infty}$ og A_2^{∞}

$$2\pi\phi_2(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{S_B} (\phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} - Gn_2) dS \tag{5}$$

oppførselen til ϕ_j for $\bar{x} \to \pm\infty$,

$$\phi_2 \to A_2^{\pm\infty} e^{K(\bar{y} \mp \mathrm{i}\bar{x})}, \quad \bar{x} \to \pm\infty. \tag{6}$$

Der de komplekse konstantene $A_2^{\pm\infty}$ finnes ved å ta integralet over svømmeflaten, som gir

$$A_2^{\pm\infty} = \mathrm{i} \int_{S_B} \left(\phi_2 (n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y}) - n_2 \right) e^{K(\bar{y} \pm \mathrm{i}\bar{x})} dS \tag{7}$$

Den utgående bølgeamplituden har komplekse amplituder,

$$amp_2^{\infty} = \xi_2 A_j^{\infty} \frac{\omega^2}{g}, \quad \text{og} \quad amp_2^{-\infty} = \xi_2 A_j^{-\infty} \frac{\omega^2}{g}. \tag{8}$$

Gjennomsnittet av energifluksen til den utgående bølgen er gitt ved

$$\overline{\text{Energifluks}} = \bar{E}^{\infty} c_g + \bar{E}_j^{-\infty} c_g = \frac{1}{2}\rho g |amp_2|^{\infty} c_g + \frac{1}{2}\rho g |amp_2|^{-\infty} c_g, \tag{9}$$

der $\bar{E}^{\pm\infty}$ er gjennomsnittlig energitetthet til utgående bølger og $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial K}$ er gruppehastigheten.

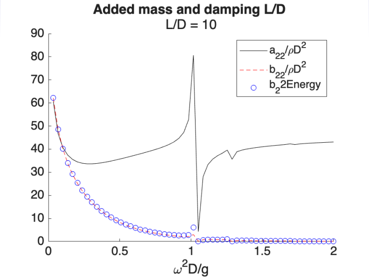


Figure: L/D = 10

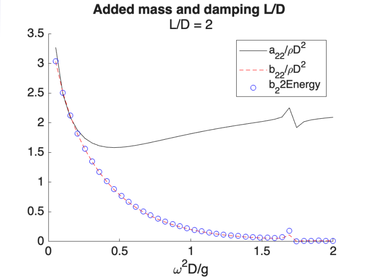


Figure: L/D = 2

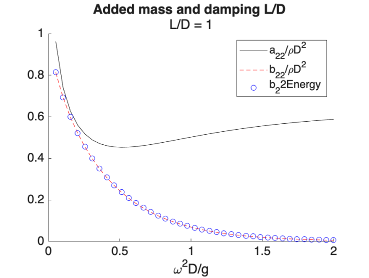


Figure: L/D = 1

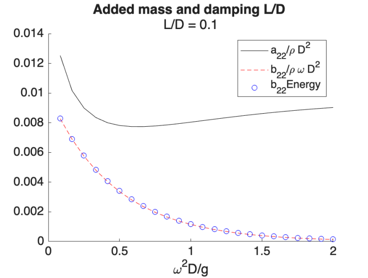


Figure: L/D = 0.1

Vi starter med utgangspunkt i følgende fra Froude-Krylov approksimasjon for å estimere eksitasjonskraften

$$X_2^{FK} = -\mathrm{i}\omega\rho \int_{S_B} \phi_0 n_2 dS = \rho g \int_{-L/2}^{L/2} e^{-KD - \mathrm{i}Kx} dx = \rho g L e^{-KD} \frac{\sin(KL/2)}{KL/2} \tag{10}$$

der D er dypgang og L er lengden. Som gir oss

$$X_2^{FK} = \rho g L e^{-KD}, \qquad \text{fordi } \frac{\sin(KL/2)}{KL/2} \simeq 1, \frac{KL}{2} \ll 1 \tag{11}$$

vi har $c_{22} = \rho g L$. Fra Haskindrelasjonene finner vi dempningskoeffisienten b_{22},

$$\frac{b_{22}}{\rho\omega} = \frac{|X_2|^2}{(\rho g)^2} \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

Vi finner så responsen i hiv.

$$(c_{22} - \omega^2(m_{22} + a_{22}) + \mathrm{i}\omega b_{22})\xi_2 = A X_2 \tag{14}$$

$$\xi_2 \qquad \frac{g}{g} L e^{-KD}$$

I diffraksjonsproblemet holdes geometrien fast. Fluidets bevegelse er gitt ved hastighetspotensialet

$$\Phi_D(x, y, t) = Re\Big(A\phi_D(x, y)e^{\mathrm{i}\omega t}\Big), \tag{17}$$

der A er amplituden og ϕ_0 potensialet til innkommende bølger. Potensialet D finner vi fra $\phi_D(x, y) = \phi_0(x, y) + \phi_7(x, y)$. $\phi_0(x, y) = \frac{\mathrm{i}g}{\omega}e^{Ky-\mathrm{i}Kx}$. Og $K = \frac{\omega^2}{g}$. Spredningen ϕ_7 er ukjent. Integrallikningen vi bruker for å bestemme summen $\phi_D = \phi_0 + \phi_7$ til et punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ på S_B er

$$-\pi\phi_D(\bar{x}, \bar{y}) + \int_{S_B} \phi_D \frac{\partial G}{\partial n} dS = -2\pi\phi_0(\bar{x}, \bar{y}) \tag{18}$$

Vi ønsker å finne påvirkningskraften numerisk.

$$\frac{X_2}{\rho g} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{g} \int_{S_B} \phi_D n_2 dS \tag{19}$$

haskind, FK,

Likning for bevegelsen, kun i hiv, er gitt ved

$$(-\omega^2(m + a_{22}) + \mathrm{i}\omega b_{22} + c_{22})\xi_2 = AX_2, \tag{20}$$

$$\frac{|\xi_2|}{A} = \frac{X_2}{c_{22} - \omega^2(m + a_{22}) + \mathrm{i}\omega b_{22}}, \tag{21}$$

der $c_{22} = \rho g S$. Svømmeflaten S i vårt todimensjonale tilfelle er lengden på geometrien. m er massen til geometrien, som for et fritt flytende legme er lik oppdriftskraften. Den adderte massen blir $a_{22} = \rho\forall = \rho LD$. b_{22} er

$$b_{22} = \frac{K}{4\rho g V_g}|X_2|^2. \tag{22}$$

Resonansfrekvensen ω_n oppstår der de hydrostatiske kreftene balanserer treghetskreftene, $c_{22} - \omega^2(m + a_{22}) = 0$. Resonansfrekvensen for en fritt flytende todimensjonal rektangulær seksjon med bredde L og dypgang D=1 blir,

$$\omega_n^2 = \frac{g}{D} \frac{1}{1 + \frac{a_{22}}{\rho DL}}, \tag{23}$$

Table: Resonansfrekvens

L/D	10	2	1	0.1
a_{22}	40	1.8	0.5	0.009
$\frac{w_n^2}{g}$	0.2	0.53	0.67	0.92

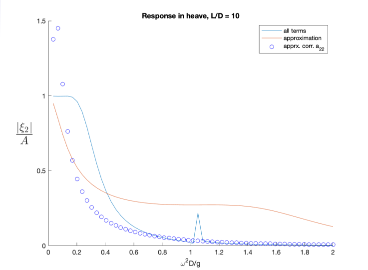


Figure: L/D = 10

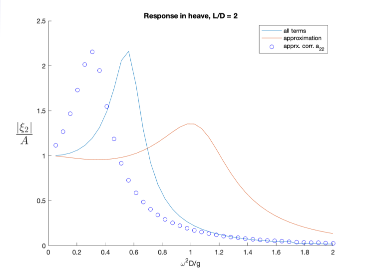


Figure: L/D = 2

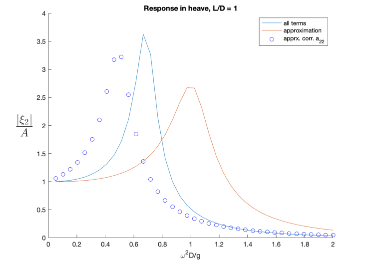


Figure: L/D = 1

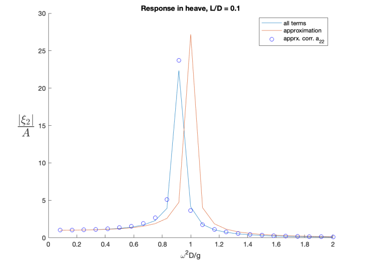


Figure: L/D = 0.1

slutt