Potensialer og addert masse
Krefter og Respons i hiv

Ole

Vår 2025

Del 1 - Geometri som beveger seg i fluid

- Randverdi i 2D
- Sirkel
- Ellipser
- Kvadrat

Del 2 - Krefter og respons i hiv

- Radiasjonsproblemet
- Diffraksjonsproblemet
- Respons i hiv

Randverdi i 2D

Vi har en geometri som beveger seg med en fart U i et ubegrenset fluid. Bevegelsen i fjernfeltet er null. Løsningen på problemet finnes ved å løse integrallikningen:

$$-\pi\phi(\bar{x}, \bar{y}) + \int_{S_B} \phi \frac{\partial}{\partial n} \ln r dS = \int_{S_B} \frac{\partial \phi}{\partial n} \ln r dS \tag{1}$$

der $\partial\phi/\partial n = n_1$ langs med S_B.

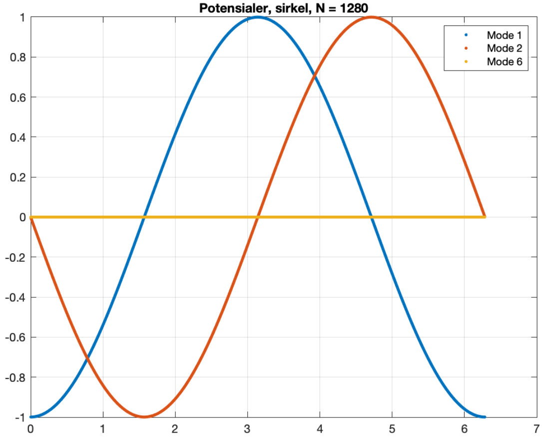
Likninger på diskret form

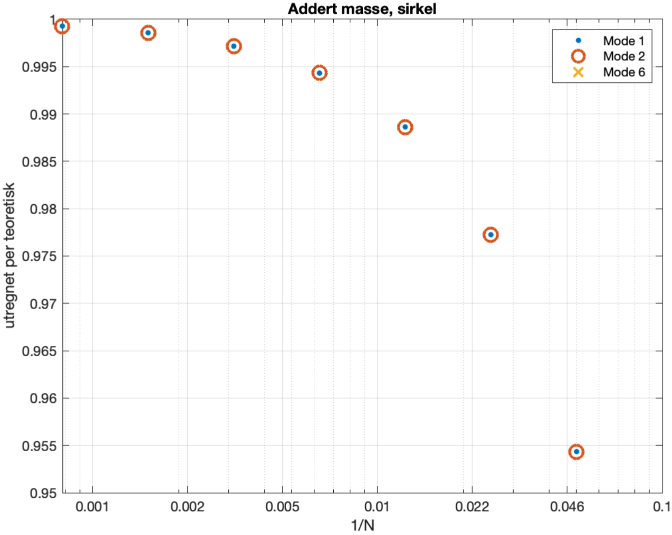
Potensialet

$$-\pi\phi_n + \Sigma_{m=1}^{N}\phi_m(-\Delta\Theta_{n,m}) = \sum_{m=1}^{N}[\frac{\partial\phi}{\partial n}]_m h_{n,m} \tag{2}$$

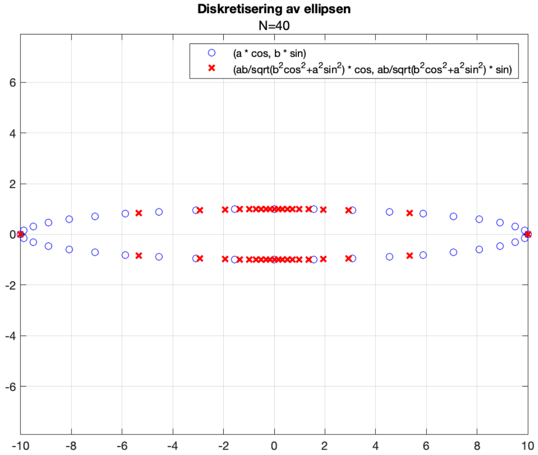
Addert masse kan approksimeres slik:

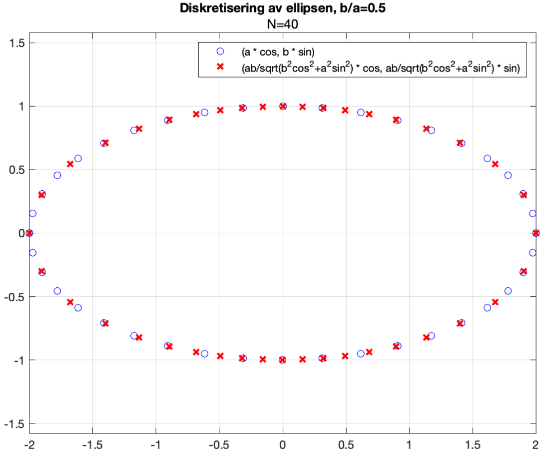
$$m_{ij} = -\rho\int_S \phi_j n_i dS \simeq -\rho\sum_{m=1}^{N}[\phi_j]_m[n_i]_m\Delta S_m. \tag{3}$$

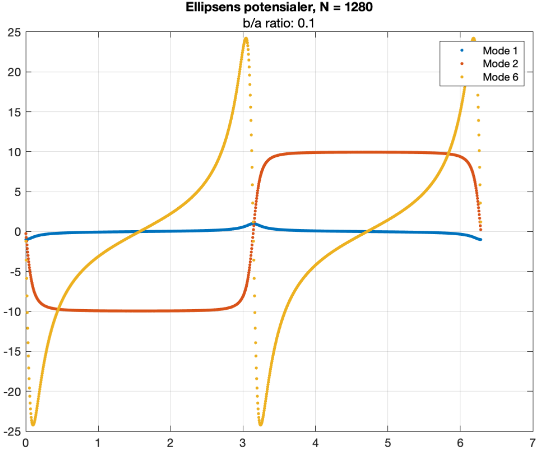

Potensialer, sirkel, N = 1280
Mode 1
Mode 2
Mode 6
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

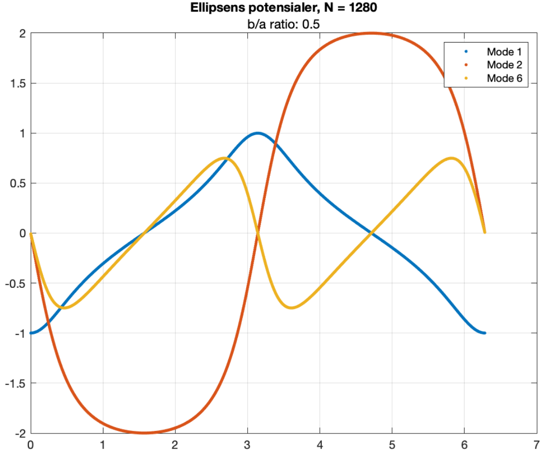


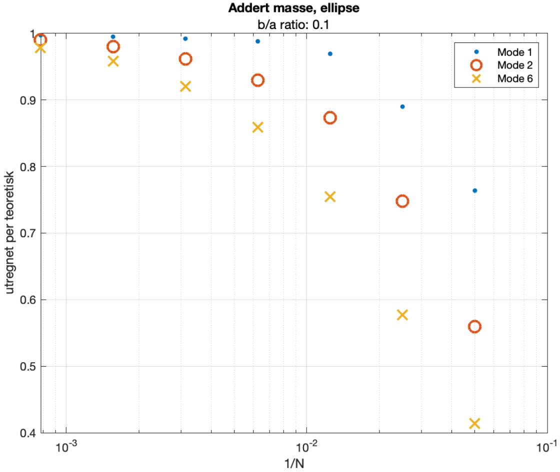
Allerede ved første diskretisering, N=20, så har vi over 95%


Diskretisering av ellipsen
N=40
(a * cos, b * sin)
(ab/sqrt(b²cos²+a²sin²) * cos, ab/sqrt(b²cos²+a²sin²) * sin)
6
4
2
0
-2
-4
-6
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

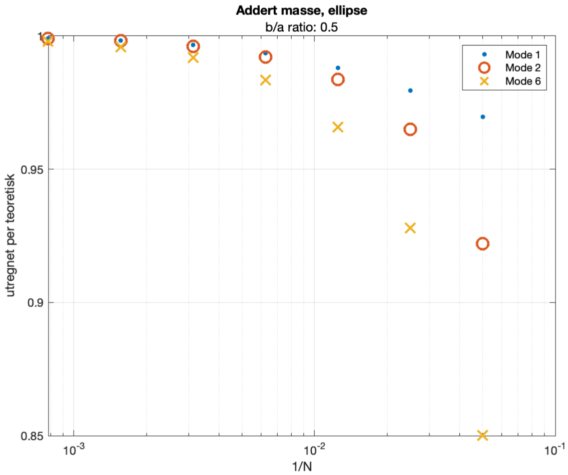

Diskretisering av ellipsen, b/a=0.5
N=40
(a * cos, b * sin)
(ab/sqrt(b²cos²+a²sin²) * cos, ab/sqrt(b²cos²+a²sin²) * sin)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


Ellipsens potensialer, N = 1280
b/a ratio: 0.1
Mode 1
Mode 2
Mode 6
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
0
1
2
3
4
5
6
7

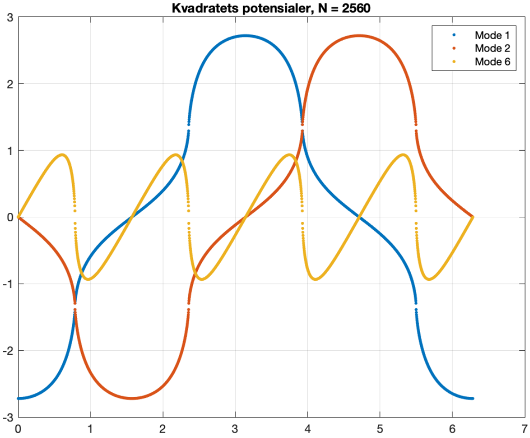

Ellipsens potensialer, N = 1280
b/a ratio: 0.5
Mode 1
Mode 2
Mode 6
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
1
2
3
4
5
6
7

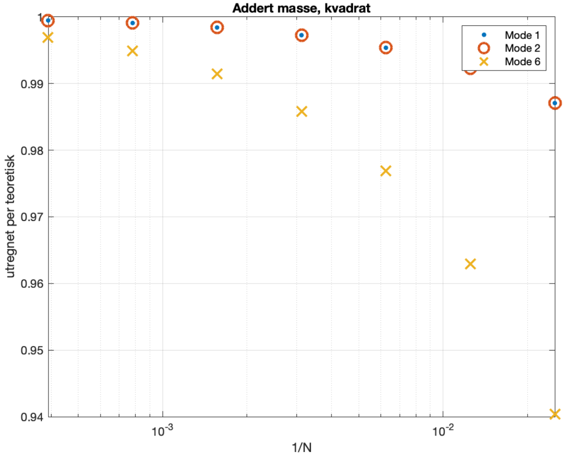


N = 20,40,80,160,320,640,1280.



N = 20,40,80,160,320,640,1280.


Kvadratets potensialer, N = 2560
Mode 1
Mode 2
Mode 6
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
1
2
3
4
5
6
7



N = 40,80,160,320,640,1280,2560.

Vi har sett på 3 geometrier: sirkel, ellipse, og kvadrat. Vi har sett at den utregnede adderte massen konvergerer mot den teoretiske, med ulik hastighet, når vi øker N diskretiseringspunkter. Det er fasongen på geometrien som avgjør den adderte massen.

Del 2 - Krefter og respons i hiv

Vi ønsker å se på kreftene som virker på et flytende legme. Kun i hiv.

1. Radiasjonsproblemet
2. Diffraksjonsproblemet
3. Respons i hiv

Radiasjonsproblemet

Radiasjonspotensialet er gitt ved

$$\Phi_R(x, y, t) = Re\left(\mathrm{i}\omega\xi_2\phi_2(x, y)e^{\mathrm{i}\omega t}\right), \tag{4}$$

Randbetingelsene for problemet.

1. Kinematisk grensebetingelse: $g\frac{\partial\phi_2}{\partial y} = -\omega^2\phi_2$
2. Uendelig dyp: $|\nabla\phi_2| \to 0$, når $y \to -\infty$
3. Fluidet er inkompressibelt, uten virvling. LAPLACE $\nabla^2\phi_2 = 0$ i fluidet.

Vi konstruerer en GREEN-funksjon som oppfyller de samme randbetingelsene, bortsett fra i en liten omegn om singulariteten.

Bølge-Green-funksjon

$$g(x,y;\bar{x},\bar{y},t) = Re\big(G(x,y;\bar{x},\bar{y},t)e^{\mathrm{i}\omega t}\big),$$
$$G(x,y;\bar{x},\bar{y},t) = \log(r/r_1) + Re(f_1) + iRe(f_2),$$
$$r = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2}$$

$$f_1 = 2PV\int_0^\infty \frac{e^-\mathrm{i}k(z-\bar{\zeta}^*)}{K-k}dk = -2e^Z(E_1(Z) + \log Z - \log(-Z))$$
$$f_1 \to \pm 2\pi e^Z, x-\bar{x} \to \pm\infty$$
$$f_2 = 2\pi e^Z$$
$$Z = K(y+\bar{y}) - \mathrm{i}K(x-\bar{x})$$

Figure: L/D = 10

Figure: L/D = 2

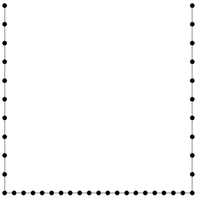


Figure: L/D = 1

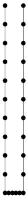


Figure: L/D = 0.1

Vi ønsker å løse integrallikningen:

$$-\pi\phi_2 + \int_{S_B} \phi_2 \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int_{S_B} G n_2 dS \tag{5}$$

Men før vi gjør det vil vi sjekke at likningen fungerer. Så vi løser høyre- og venstresiden av en integrallikning der vi kjenner alle variablene. Vi ønsker å se om den reelle delen til høyresiden tilsvarer den reelle delen til venstresiden, og tilsvarende for de imaginære delene.

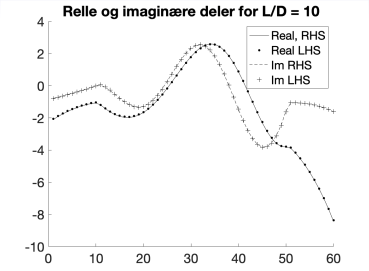


Figure: $L/D = 10$

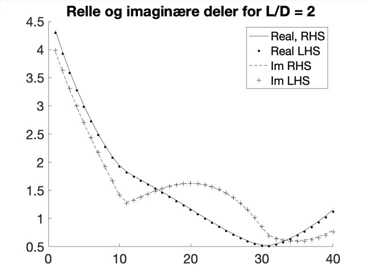
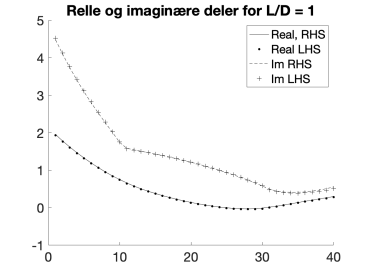
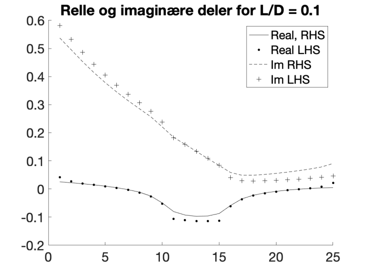


Figure: $L/D = 2$





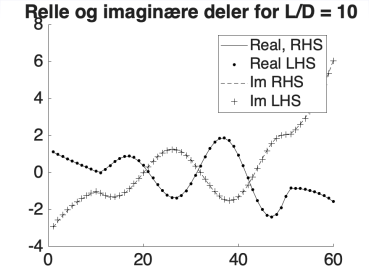


Figure: $L/D = 10$

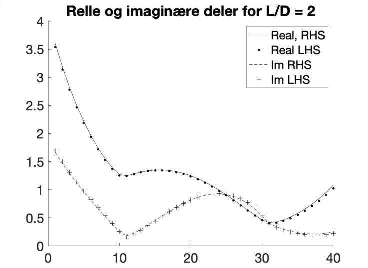
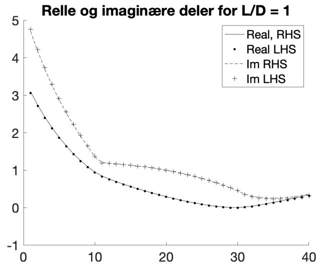
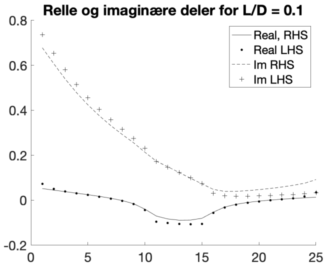


Figure: $L/D = 2$





Løsning for potensialet i hiv

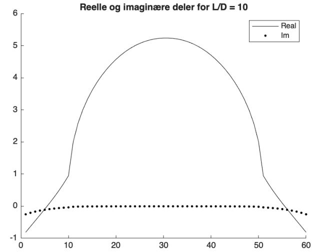


Figure: L/D = 10

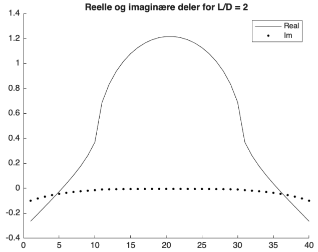
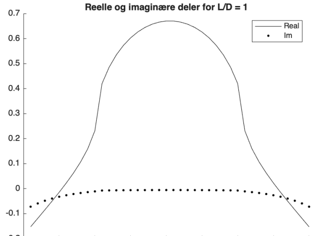
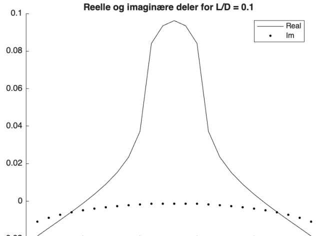


Figure: L/D = 2





Finne addert masse og dempning

Vi bruker den numeriske løsningen til ϕ_2 langs S_B for å regne addert masse a_{22} og dempning b_{22}.

$$F_{ij}(t) = -\rho\omega^2 \int_{S_B} \phi_i \hat{n}_j dS = -\omega^2 \xi_2 a_{22} + i\omega\xi b_{22} \tag{6}$$

Vi regner også ut b_{22} fra energibalansen.

$$\frac{1}{2}|\xi|^2\omega^2 b_{22} = \bar{E}^{\infty} c_g + \bar{E}^{-\infty} c_g \tag{7}$$

$$\frac{b_{22}}{\rho\omega} = \frac{1}{2}(|A_2^{\infty}|^2 + |A_2^{-\infty}|^2) \tag{8}$$

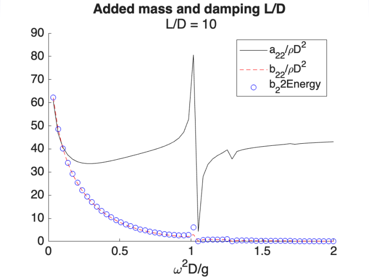


Figure: L/D = 10

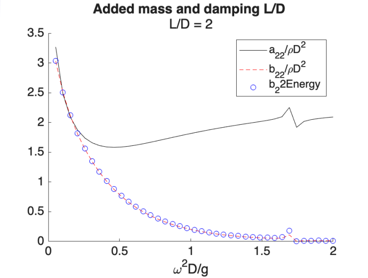
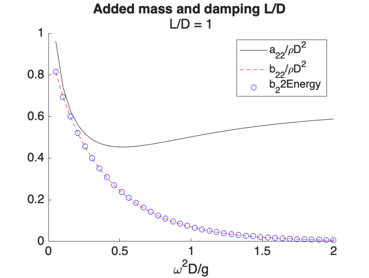
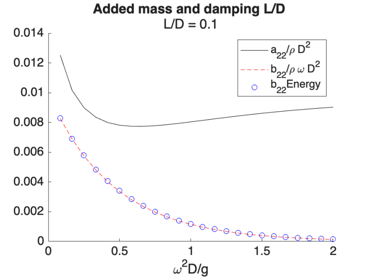


Figure: L/D = 2





Sparbøye - fritt flytende

Utgangspunkt fra Froude-Krylov approksimasjon for å estimere eksitasjonskraften. D er dypgang og L er lengden.

$$X_2^{FK} = -\mathrm{i}\omega\rho \int_{S_B} \phi_0 n_2 dS = \rho g \int_{-L/2}^{L/2} e^{-KD-\mathrm{i}Kx} dx = \rho g L e^{-KD} \frac{\sin(KL/2)}{KL/2} \tag{9}$$

$$X_2^{FK} = \rho g L e^{-KD}, \quad \text{fordi } \frac{\sin(KL/2)}{KL/2} \simeq 1, \frac{KL}{2} \ll 1 \tag{10}$$

Vi har $c_{22} = \rho g L$. Fra Haskindrelasjonene finner vi dempningskoeffisienten: $\frac{b_{22}}{\rho\omega} = \frac{|X_2|^2}{(\rho g)^2}$
Vi finner så responsen i hiv.

$$(c_{22} - \omega^2(m_{22} + a_{22}) + \mathrm{i}\omega b_{22})\xi_2 = AX_2 \tag{11}$$

$$\frac{\xi_2}{A} = \frac{e^{-KD}}{1 - KD + \mathrm{i}KLe^{-2KD}} \tag{12}$$

Diffraksjonsproblemet

Geometrien holdes fast. Fluidets bevegelse er gitt ved

$$\Phi_D(x, y, t) = Re\left(A\phi_D(x, y)e^{\mathrm{i}\omega t}\right), \tag{13}$$

Spredningen ϕ_7 er ukjent.
Integrallikningen vi bruker for å bestemme summen $\phi_D = \phi_0 + \phi_7$ til et punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ på S_B er

$$-\pi\phi_D(\bar{x}, \bar{y}) + \int_{S_B} \phi_D \frac{\partial G}{\partial n} dS = -2\pi\phi_0 \tag{14}$$

Eksitasjonskraften

Vi ønsker å finne eksitasjonskraften numerisk.

$$F_j(t) = \int_{S_B} -\rho \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} n_j dS = Re(AX_j e^{i\omega t}) \tag{15}$$

$$\frac{X_2}{\rho g} = -\frac{i\omega}{g} \int_{S_B} \phi_D n_2 dS \tag{16}$$

Haskindrelasjonene

Første haskind-relasjon

$$\frac{X_2^{\text{Haskind v1}}}{i\omega\rho} = -\int_{S_B} (\phi_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \phi_2 \frac{\partial \phi_0}{\partial n}) dS \tag{17}$$

Andre haskind-relasjon

$$\frac{X_2^{\text{Haskind v2}}}{i\omega\rho} = \int_{S_\infty} (\phi_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \phi_2 \frac{\partial \phi_0}{\partial n}) dS = \frac{\omega}{k} A_2^{-\infty}, \tag{18}$$

Fjernfeltet ϕ_2 er gitt ved

$$\phi_2 = A_2^{\pm\infty} e^{K(y \mp \mathrm{i}x)}, \quad x \to \pm\infty \tag{19}$$

Eksitasjonskraften

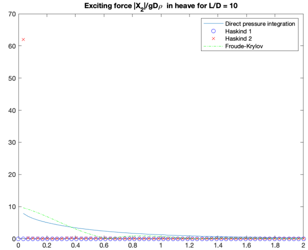


Figure: $L/D = 10$

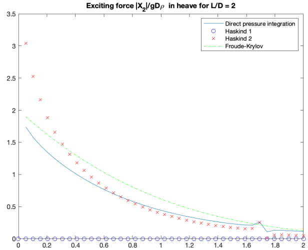
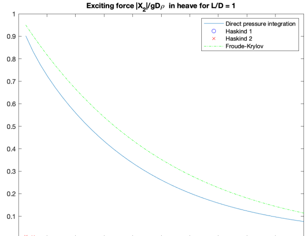
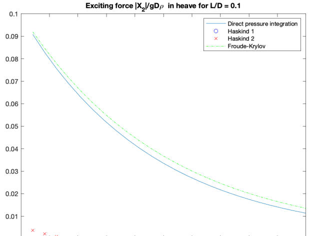


Figure: $L/D = 2$





Respons i hiv

Likning for bevegelsen, kun i hiv, er gitt ved

$$(-\omega^2(m + a_{22}) + i\omega b_{22} + c_{22})\xi_2 = AX_2, \tag{20}$$

$$\frac{|\xi_2|}{A} = \frac{X_2}{c_{22} - \omega^2(m + a_{22}) + i\omega b_{22}}, \tag{21}$$

der $c_{22} = \rho g S$. Svømmeflaten S i vårt todimensjonale tilfelle er lengden på geometrien. m er massen til geometrien, som for et fritt flytende legme er lik oppdriftskraften. Den adderte massen blir $a_{22} = \rho\forall = \rho LD$. b_{22} er

$$b_{22} = \frac{K}{4\rho g V_g}|X_2|^2. \tag{22}$$

Resonansfrekvens

Resonansfrekvensen ω_n oppstår der de hydrostatiske kreftene balanserer treghetskreftene, $c_{22} - \omega^2(m + a_{22}) = 0$.
Resonansfrekvensen for en fritt flytende todimensjonal rektangulær seksjon med bredde L og dypgang D=1 blir,

$$\omega_n^2 = \frac{g}{D} \frac{1}{1 + \frac{a_{22}}{\rho D L}}, \tag{23}$$

Table: Resonansfrekvens

L/D	10	2	1	0.1
a_{22}	40	1.8	0.5	0.009
$\frac{w_n^2}{g}$	0.2	0.53	0.67	0.92

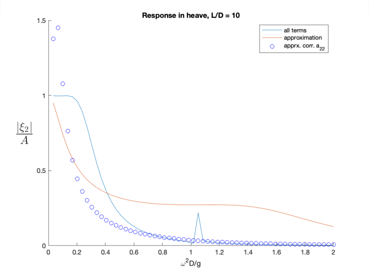


Figure: L/D = 10

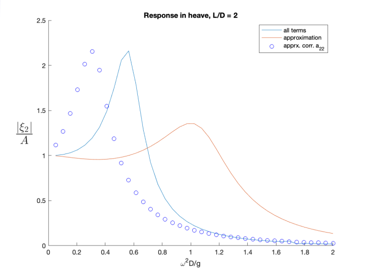


Figure: L/D = 2

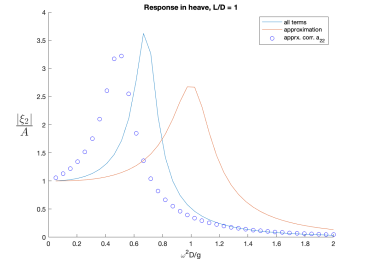


Figure: L/D = 1

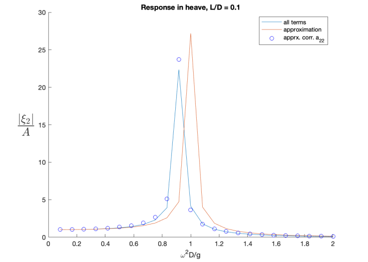


Figure: L/D = 0.1

Takk for meg