4. Das duale Simplexverfahren

- wird benötigt für Sensitivitätsanalyse (wie ändert sich eine LP-Optimallösung bei kleinen Änderungen an A, b, c) sowie (gemischt-)ganzzahlige Optimierung (Lösungen liegen im $\mathbb{Z}_+^n$)

Im Kapitel 2 haben wir den Begriff des Dictionary eingeführt in Verbindung mit dem LP $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ s.d. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ \forall i=1,\dots,m$, $x_j \geq 0, \ \forall j=1,\dots,n$. Das Dictionary ist ein System von Gleichungen $x_r = \bar{b}_r - \sum_{s \notin B} \bar{a}_{rs} x_s \ \forall r \in B$ und $z = \bar{d} + \sum_{s \notin B} \bar{c}_s x_s$ mit der Eigenschaft, dass jede Lösung $x_1, x_2, \dots, x_{n+m}$ des Systems $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \forall i=1,\dots,m$, $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \forall j=1,\dots,n$ eine Lösung des Dictionary ist und umgekehrt.

Wir sprechen auch dann noch von einem Dictionary, wenn $\bar{b}_r < 0$ für einige $r \in B$, d.h. nicht jedes Dictionary ist zulässig. Unser nächstes Ziel ist es, eine bestimmte 1:1-Beziehung zwischen obigen Dictionaries (des primalen LP) und den Dictionaries eines sog. „dualen LP" herauszuarbeiten. Dazu ändern wir zunächst die Art der Indexierung der x-Variablen. Bisher waren $x_1, \dots, x_n$ die Entscheidungsvariablen und $x_{n+1}, \dots, x_{n+i}$ die Schlupfvariablen. Nun drehen wir es um. Schlupfvariablen $x_1, \dots, x_m$ und Entscheidungsvariablen $x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$.

Daraus ergibt sich:

$$\max \sum_{j=m+1}^{m+n} c_j x_j$$
$$\text{s.d. } \sum_{j=m+1}^{m+n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i=1,\dots,m$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j=m+1,\dots,m+n$$

Das initiale Dictionary ist dann:

$$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{m+n} a_{ij} x_j \quad \forall i=1,\dots,m$$
$$z = \sum_{j=m+1}^{m+n} c_j x_j$$

Das duale LP zu obigem primalen LP lautet dann:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$
$$\text{s.d. } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j=m+1,\dots,m+n$$
$$y_i \geq 0 \quad \forall i=1,\dots,m$$

und das zugehörige initiale Dictionary:

$$y_j = -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad \forall j=m+1,\dots,m+n$$
$$-w = -\sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Man bemerke, dass das primale und das duale Dictionary gespiegelt sind: Die Koeffizienten einer Zeile im primalen Dictionary entsprechen den Koeffizienten in den Spalten des dualen Dictionary und umgekehrt.

Beispiel 4.1

Wenn das primale LP lautet:

$$\max \ 4x_3 - 13x_4 + 7x_5$$
$$\text{s.d. } 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 5$$
$$x_3 - 3x_4 + 2x_5 \leq 3$$
$$x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

so lautet das duale LP wie folgt:

$$\min \ 5y_1 + 3y_2$$
$$\text{s.d. } 3y_1 + y_2 \geq 4$$
$$2y_1 - 3y_2 \geq -13$$
$$5y_1 + 2y_2 \geq 7$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Und die beiden Dictionaries sind:

$$x_1 = 5 - 3x_3 - 2x_4 - 5x_5$$
$$x_2 = 3 - x_3 + 3x_4 - 2x_5$$
$$z = 4x_3 - 13x_4 + 7x_5$$

und

$$y_3 = -4 + 3y_1 + y_2$$
$$y_4 = 13 + 2y_1 + 3y_2$$
$$y_5 = -7 + 5y_1 + 2y_2$$
$$-w = -5y_1 - 3y_2$$

Diese Paarbildung gilt auch für weitere Dictionaries:

$$x_1 = -4 + 3x_2 - 11x_4 + x_5$$
$$x_3 = 3 - x_2 + 3x_4 - 2x_5$$
$$z = 12 - 4x_2 - x_4 - x_5$$

$$y_2 = 4 - 3y_1 + y_3$$
$$y_4 = 1 + 11y_1 - 3y_3$$
$$y_5 = 1 - y_1 + 2y_3$$
$$-w = -11 - 4y_1 - 3y_3$$

Und so weiter...

Allgemein: Ist

$$x_r = \bar{b}_r - \sum_{s \in N} \bar{a}_{rs} x_s \quad \forall r \in B$$
$$z = \bar{d} + \sum_{s \in N} \bar{c}_s x_s$$

ein primales Dictionary mit x_r ($r \in B$) Basis- und x_s ($s \in N$) Nichtbasisvariablen, dann

$$y_s = -\bar{c}_s + \sum_{r \in B} \bar{a}_{rs} y_r \quad \forall s \in N$$
$$-w = -\bar{d} - \sum_{r \in B} \bar{b}_r y_r$$

ein duales Dictionary mit y_s ($s \in N$) Basis- und y_r ($r \in B$) Nichtbasisvariablen.

Ein primales Dictionary ist dual-zulässig, wenn das zugehörige duale Dictionary zulässig ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\bar{c}_s \leq 0 \ \forall s \in N$ ist.

Bekannt: Jedes LP in Standardform lässt sich lösen, indem man das Simplexverfahren auf das duale LP anwendet. Die primale Optimallösung lässt sich dann dann aus dem Dictionary des dualen Problems herauslesen.

Diese Strategie lässt sich auch implementieren ohne das Problem explizit hinauszuschreiben. Die Abfolge der zulässigen Dictionaries, die die Simplex-Methode erzeugt während sie auf dem dualen Problem arbeitet, lässt sich repräsentieren durch eine Abfolge dual zulässiger Dictionaries des primalen Problems.

Der daraus resultierende Algorithmus von C.E. Lemke und (unabhängig) von E.M.L. Beale (1954) wird duale Simplex-Methode genannt.

Die duale Simplex-Methode nutzt aus, dass eine duale Variable y_u genau dann Basisvariable im dualen Dictionary ist, wenn die zugehörige primale Variable eine Nichtbasisvariable im primalen Dictionary ist. Wenn dann in einem Pivotschritt im dualen Dictionary die Variable y_i eintretend und y_j austretend ist, dann entspricht das genau dem primalen Pivotschritt bei dem x_i austretend und x_j eintretend in die Basis ist. Wenn man ein duales Dictionary durch das Simplex-Verfahren erzeugt hat, dann wird man y_i und y_j auf die übliche Weise wählen: Die eintretende Variable y_i wird so bestimmt, dass sie $-w$ erhöht. Die Wahl von y_j wird dadurch bestimmt, dass Zulässigkeit erhalten bleibt, wenn y_i erhöht wird. Dabei kann i ein beliebiger Index $i \in B$ mit $\bar{b}_i < 0$ sein und $j \in N$ für den gilt: $\bar{a}_{ij} < 0$ und $\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{ij}} \leq \frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{is}}$ $\forall s \in N$ mit $\bar{a}_{is} < 0$

Begründung: Beim Erhöhen von y_i muss jedes y_s ($s \in N$) zulässig bleiben. Da alle anderen Nichtbasisvariablen auf Null bleiben, lautet die entsprechende Bedingung aus dem dualen Dictionary $-\bar{c}_s + \bar{a}_{is} \cdot y_i \geq 0$ ($s \in N$). Es ist $-c_s \geq 0$, da das Dictionary zulässig ist.
Also folgt: $\bar{a}_{is} \overbrace{y_i}^{\geq 0} \geq \overbrace{\bar{c}_s}^{\leq 0}$ ($s \in N$). Dies liefert keine Beschränkung, wenn $\bar{a}_{is} > 0$ ist. Also kommen nur solche Indizes für die austretende Variable in Frage für die $\bar{a}_{is} < 0$ ist.
Dann ist: $\bar{a}_{is} \cdot y_i \geq \bar{c}_s \quad | : \bar{a}_{is} \Rightarrow y_i \leq \frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{is}}$. Wähle nun unter allen in Frage kommenden Indizes s ($s \in N$ mit $\bar{a}_{is} < 0$) als j, der die kleinste obere Schranke liefert, d.h.: $\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{ij}} \leq \frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{is}}$ $\forall s \in N$ mit $\bar{a}_{is} < 0$.

Somit beginnt eine Iteration der dualen Simplex-Methode mit einem dual-zulässigen primalen Dictionary, sucht einen Index $i \in B$ der $\bar{b}_i < 0$ erfüllt, sucht dann einen Index $j \in N$, der $\bar{a}_{ij} < 0$ und $\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{ij}} \leq \frac{\bar{c}_s}{\bar{a}_{is}}$ für alle $s \in N$, $\bar{a}_{is} < 0$ erfüllt und tauscht dann austretendes x_i durch eintretendes x_j aus.

Beispiel 4.2

Primales Dictionary:
$$\begin{aligned} x_1 &= -4 + 3x_2 - 11x_4 + x_5 \\ x_3 &= 3 - x_2 + 3x_4 - 2x_5 \\ z &= 12 - 4x_2 - x_4 - x_5 \end{aligned}$$

Da $\bar{c}_2 = -4$, $\bar{c}_4 = -1$, $\bar{c}_5 = -1$, also $\bar{c}_s \leq 0$ $\forall s \in N$, ist es dual-zulässig. Um die austretende Basisvariable zu $B = \{1, 3\}$ zu bestimmen, betrachte $\bar{b}_1 = -4$ und $\bar{b}_3 = 3$. Somit muss x_1 die austretende Variable sein. Um die eintretende Variable aus $N = \{2, 4, 5\}$ zu bestimmen, betrachten wir $\bar{a}_{12} = -3$, $\bar{a}_{14} = 11$ und $\bar{a}_{15} = -1$. Somit kann $s = 4$ entfallen, da die Bedingung $\bar{a}_{is} < 0$ nicht erfüllt ist. Es bleiben nur die Kandidaten $s = 2$ und $s = 5$.
Für diese betrachten wir die Verhältnisse $\frac{\bar{c}_2}{\bar{a}_{12}} = \frac{4}{3}$ und $\frac{\bar{c}_5}{\bar{a}_{15}} = 1$. Da $s = 5$ die schärfere Schranke liefert, muss x_5 die eintretende Variable sein.
Wir tauschen die beiden aus und erhalten:
$$\begin{aligned} x_3 &= -5 - 2x_1 + 5x_2 - 15x_4 \\ x_5 &= 4 + x_1 - 3x_2 + 11x_4 \\ z &= 8 - x_1 - x_2 - 12x_4 \end{aligned}$$
Da $\bar{c}_1 = -1$, $\bar{c}_2 = -1$, $\bar{c}_4 = -12$ ist dieses Dictionary dual zulässig. Aber: beide Dictionaries sind nicht primal zulässig.

Eine Iteration des dualen Simplex ist eine „versteckte“ Version des „normalen“ Simplex auf dem dualen Problem.

Im obigen Fall handelt es sich um diejenige Iteration, die vom Dictionary
$$\begin{aligned} y_2 &= 4 - 3y_1 + y_3 \\ y_4 &= 1 + 11y_1 - 3y_3 \\ y_5 &= 1 - y_1 + 2y_3 \\ -w &= -12 - 4y_1 - 3y_3 \end{aligned}$$
auf das Dictionary:
$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + 2y_3 - y_5 \\ y_2 &= 1 - 5y_3 + 3y_5 \\ y_4 &= 12 + 15y_3 - 11y_5 \\ -w &= -8 - 5y_3 - 4y_5 \end{aligned}$$
geführt.

Falls kein $i \in B$ die Bedingung $\bar{b}_i < 0$ erfüllt, kann die Berechnung beendet werden: Da das Dictionary im Fall von $\bar{b}_i \geq 0$ $\forall i \in B$ nicht nur dual-zulässig sondern auch primal zulässig ist, beschreibt es eine optimale Lösung $x_1^*, \dots, x_{n+m}^*$ mit $x_s^* = 0$ $\forall s \in N$ und $x_r^* = \bar{b}_r$ $\forall r \in B$.
Falls kein $j \in N$ die Bedingung $\bar{a}_{ij} < 0$ erfüllt, kann die Berechnung abgebrochen werden: in diesem Fall ist $\bar{a}_{ij} \geq 0$ und das eintretende y_i könnte unbeschränkt wachsen. Das bedeutet, dass das duale Problem unbeschränkt ist. Damit ist das primale Problem unzulässig.
Hierbei wurde Dualitätstheorie benutzt. Direktes Argument: wenn $\bar{a}_{is} \geq 0$ $\forall s \in N$, dann ist $x_i = \bar{b}_i - \sum_{s \in N} \bar{a}_{is} x_s$. Somit $x_i < 0$, also primal unzulässig.

Initialisierung

Das duale Simplex-Verfahren kann sehr einfach initialisiert werden, wenn alle Zielfunktionskoeffizienten (in der max-ZF) nicht-positiv sind. Diese ZF ist äquivalent zu einer min-ZF mit nicht-negativen Koeffizienten. In diesem Fall lässt sich der duale Simplex schnell starten.
Sonst: künstliche Zielfunktion, die obige Eigenschaften (max + ≤ 0) erfüllt. Dualer Simplex liefert Nachweis der Unzulässigkeit (wenn keine eintretende Variable gefunden), oder Optimallösung. Diese ist primal und dual zulässig. Tausche Zielfunktion aus und rechne mit primalen Simplex weiter.