2. Das Standard-Simplexverfahren

Sind $c_1, c_2, \dots, c_n$ reele Zahlen, dann wird die von den reelen Variablen $x_1, \dots, x_n$ abhängige Funktion f, definiert durch $f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ als lineare Funktion bezeichnet. Ist f eine lineare Funktion und b eine reele Zahl, dann wird die Gleichung $f(x_1, \dots, x_n) = b$ als lineare Gleichung und $f(x_1, \dots, x_n) \geq b$ als lineare Ungleichungen.
Lineare Gleichungen und Ungleichungen zusammen werden als lineare Nebenbedingungen bezeichnet. Als lineares Programmierungsproblem (LP) wird das Problem des Maximierens (oder Minimierens) einer linearen Funktion unter Berücksichtigung einer endlichen Menge lineare Nebenbedingungen bezeichnet. Die Standardform eines LPs hat folgende Gestalt:

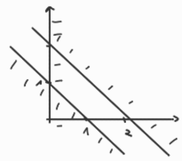
$$\begin{aligned} \max \ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{so dass } & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \forall i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 & \forall j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

In der Standardform eines LPs wird maximiert und es gibt keine Gleichungs-Nebenbedingung. Die letzten n der $m+n$ Ungleichungen sind besonders: Sie geben an, dass die x_j nicht negativ werden dürfen. Man bezeichnet sie als Nicht-Negativitätsbedingungen oder triviale Nebenbedingungen. Die lineare Funktion, die minimiert oder maximiert wird, wird Zielfunktion des LPs genannt.
Erfüllen die reelen Zahlen $x_1, \dots, x_n$ alle Nebenbedingungen, so werden sie als zulässige Lösung bezeichnet. Eine zulässige Lösung, die die Zielfunktion maximiert \ minimiert, ist eine optimale Lösung. Der dazugehörige Zielfunktionswert heißt Optimalwert des Problems.
Lineare Programme, die keine zulässige Lösung haben, werden unzulässig genannt. Ein lineares Programm, bei dem es zu jeder reelen Zahl M eine zulässige Lösung x gibt mit Zielfunktionswert $\geq M$ wird unbeschränkt genannt.

i) Das LP in Standardform:

$$\begin{aligned} \max \ & x_1 - x_2 \\ \text{s.d. } & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & -x_1 - x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

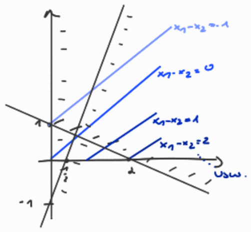
ist unzulässig



ii) Das LP in Standardform:

$$\begin{aligned} \max \ & x_1 - x_2 \\ \text{s.d. } & -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

hat zulässige Lösungen, aber keine davon ist optimal.



Jedes LP hat entweder mindestens eine Optimallösung oder ist unzulässig oder unbeschränkt.

Das Standard-Simplex-Verfahren

Wir wollen als erstes Beispiel folgendes LP lösen:

$$\begin{aligned} \max \ & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.d. } & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Der erste Schritt der Simplexmethode besteht darin, sogenannte Schlupfvariablen einzuführen:
In einer zulässigen Lösung x^* sind die Werte auf der linken Seite der Ungleichungen unter Umständen echt kleiner als die Werte der rechten Seite. Die Schlupfvariablen speichern diese Differenz. Die Originalvariablen bezeichnen wir als Struktur- oder Entscheidungsvariablen.
Ferner führen wir eine Variable z für den Wert der Zielfunktion ein.

Damit bekommt unser Ausgangsproblem folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \max \ & z \\ \text{s.d. } & x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ & x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ & x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ & z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ & 0 \leq x_1, \dots, x_6 \end{aligned}$$

Die Simplex-Methode startet mit einer zulässigen Lösung $x = (x_1, \dots, x_6)$. Diese wird zu einer neuen Lösung x' verbessert, wobei $5x_1' + 4x_2' + 3x_3' > 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$. Die Hoffnung ist, dass dieses nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen zu einer Optimallösung führt.
Um anzufangen, brauchen wir irgendeine zulässige Lösung. Im vorliegenden Fall ist dies nicht weiter schwierig: wir setzen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und das liefert dann folgende Werte für $x_4, \dots, x_6$: $x_4 = 5$, $x_5 = 11$, $x_6 = 8$. Der Zielfunktionswert ist entsprechend $z = 0$.

Jetzt machen wir uns auf die Suche nach einer Lösung mit höherem z. Wir halten $x_2 = x_3 = 0$ und erhöhen den Wert von x_1. Dadurch bekommen wir Lösungen mit $z = 5x_1 > 0$.

- Wenn wir $x_1 := 1$ wählen, dann bekommen wir: $x_4 = 3$, $x_5 = 7$, $x_6 = 5$ und $z = 5$.
- Wenn wir $x_1 := 2$ wählen, dann bekommen wir: $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, $x_6 = 2$ und $z = 10$.
- Wenn wir $x_1 := 3$ wählen, dann bekommen wir: $x_4 = x_5 = x_6 = -1$ und $z = 15$.

Die letzte Erhöhung geht zu weit, da $x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6$ gilt. Daraus ergibt sich die folgende Frage: Wie weit kann x_1 erhöht werden, so dass die Lösung noch zulässig bleibt?

Aus der Bedingung $x_4 \geq 0$ folgt $5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq 0$, also $x_1 \leq \frac{5}{2}$,

$x_5 \geq 0$ folgt $11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 0$, also $x_1 \leq \frac{11}{4}$,

$x_6 \geq 0$ folgt $8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \geq 0$, also $x_1 \leq \frac{8}{3}$.

Von diesen drei Schranken ist die erste die strengste. Wir setzen x_1 daher auf diesen Wert und kommen so auf unsere nächste Lösung: $x_1 := \frac{5}{2}$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 := 1$, $x_6 := \frac{1}{2}$ mit $z = \frac{25}{2} = 12{,}5$, also eine deutliche Verbesserung gegenüber $z = 0$.

30. April 2024

Nun wollen wir versuchen, die Lösung abermals zu verbessern. Wir würden gerne genauso verfahren, d.h. eine Variable die momentan auf Null ist, wachsen lassen und dann prüfen, wie weit sie höchstens wachsen kann, ohne dass die Nichtnegativitätsbedingungen verletzt werden. Dies ging beim ersten Mal deshalb so gut, weil das Schlupf-Modell die entsprechende „kritischen" Variablen als lineare Gleichungen der übrigen Variablen ausdrückte. Das heißt, wir hatten x_4, x_5, x_6 mittels x_1, x_2, x_3 ausgedrückt.

Nun hat die Variable x_1 einen positiven Wert bekommen und sollte daher auf der linken Seite stehen. Variable x_4 wurde von einem positiven Wert auf Null gesetzt und sollte nun von der linken auf die rechte Seite kommen.

Die beiden Variablen x_1 und x_4 kommen zusammen in der ersten Gleichung vor: $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \quad | +2x_1 \quad | -x_4 \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$$

Daher wird diese verwendet, um den Seitenwechsel der beiden Variablen durchzuführen:

$$x_5 = 11 - 4\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - x_2 - 2x_3 = 1 + 5x_2 + 2x_4$$
$$x_6 = 8 - 3\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - 4x_2 - 2x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4$$
$$z = 5\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) + 4x_2 + 3x_3 = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4$$

Diese vier Gleichungen für x_1, x_5, x_6 und z sind unser neues System, welches wir in der nächsten Runde verwenden. Wir versuchen wiederum z zu erhöhen. Die Variablen x_2, x_4 haben negative Vorzeichen. Würde man sie erhöhen, würde sich z verkleinern. Also kommen sie nicht in Frage. Wir wählen x_3 und setzen $x_2 = x_4 = 0$. Um zu entscheiden, wie weit x_3 letztlich erhöht werden kann, betrachten wir die folgenden Ungleichungen:

$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \geq 0 \quad \Rightarrow x_3 \leq 5$

$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4 \geq 0 \quad \Rightarrow x_3$ kann bel. groß werden

$x_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \geq 0 \quad \Rightarrow x_3 \leq 1$

Also setzen wir $x_3 = 1$ und erhalten die neue Lösung: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$. Der Wert für z wächst auf 13.

Als nächstes müssen wir das System wieder anpassen. Die von Null verschiedenen Variablen x_1, x_3, x_5 kommen nach links. Im Vergleich zur vorherigen Iteration tauschen wir also x_3 gegen x_6 aus. Wir stellen um:

$$x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$$
$$x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6$$
$$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$$
$$z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6$$

Die Variablen in z haben alle negative Vorzeichen. Erhöht man eine davon, wird z kleiner. Es sieht so aus, als wäre das Verfahren in einer Sackgasse. Dies bedeutet, dass wir eine Optimallösung gefunden haben.

Denn: Sei $x' = (x_1', \dots, x_6')$ eine optimale Lösung mit $z' = 13 - 3x_2' - x_4' - x_6'$. Dann gilt $x_2', x_4', x_6' \geq 0$, also $z' \leq 13 = z$.

Der Simplex im Allgemeinen

Wir verallgemeinern: Gegeben sei ein Optimierungsproblem der Form:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.d.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Im Folgenden werden Schlupfvariablen $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ und Zielfunktionsvariable z ein: $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Eine zulässige Lösung ist ein Vektor $x = (x_1, \dots, x_{n+m})$, der diesen Gleichungen genügt. In einer Iteration des Simplex-Verfahrens gehen wir über von einer Lösung x zu einer Lösung x' mit $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j' > \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. → Aussage unvollständig, Gleichheit möglich.

Wie wir in dem Beispiel gesehen haben, ist es hilfreich, jede Lösung x mit einem Gleichungssystem zu verbinden. Dieses Gleichungssystem macht es leichter, nach verbesserten zulässigen Lösungen zu suchen. Die Gleichungen „übersetzen" die Variablenwerte der rechten Seite in die zugehörigen Variablen der linken Seite. Diese Systeme werden als Dictionary bezeichnet.

Ein Dictionary hat einige Eigenschaften:

- Jede Lösung x eines Dictionary ist auch Lösung aller anderen Dictionaries.
- Die Gleichungen drücken m der Variablen $x_1, \dots, x_{(n+m)}$ und die Zielfunktion z in Abhängigkeit der übrigen n Variablen aus.
- Setzt man alle Variablen auf der rechten Seite auf Null, so erhält man eine zulässige Lösung. Jedes Dictionary beschreibt eine zulässige Lösung. Die Umkehrung ist nicht richtig.

  Bsp.: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$, $x_6 = 3$ ist zulässige Lösung für Eingangsbeispiel, zu dem kein Dictionary existiert – denn dann müssten $n = 3$ der Variablen Null sein.

Zulässige Lösungen, die durch ein Dictionary beschrieben werden, heißen Basislösungen. Eine Eigenschaft des Simplex ist es, nur auf Basislösungen zu arbeiten und alle anderen zulässigen Lösungen zu ignorieren.

Die Variablen x_j auf der linken Seite eines Dictionary heißen Basisvariablen. Die Variablen x_j auf der rechten Seite heißen Nichtbasisvariablen. Alle Basisvariablen zusammen bilden die Basis. Diese Basis ändert sich von Iteration zu Iteration. Dabei wird stets eine Nichtbasisvariable in die Basis aufgenommen und eine Basisvariable wird zu einer Nichtbasisvariable.

Die Wahl der eintretenden Variablen hängt davon ab, welche Nichtbasisvariable in der Lage ist den Zielfunktionswert zu erhöhen. Die Wahl der austretenden Variablen hängt an der Bedingung, dass alle Variablen nichtnegative Werte annehmen müssen. Die austretende Variable ist diejenige, deren Nicht-negativitäts-Bedingung die restriktivste obere Schranke auf die Erhöhung der eintretenden Variable definiert. Die dazugehörige Gleichungsbedingung, die ein- und austretende Variablen aneinander koppelt, wird als Austauschzeile oder Pivotzeile bezeichnet. Der Prozess an sich, heißt Austausch oder Pivot.

Das eingangs gewählte Beispiel war so gewählt, dass gewisse Probleme, die beim Simplexverfahren auftreten können, nicht vorkamen. Nachfolgend wollen wir uns diesen Details stellen und Probleme lösen.

- Initialisierung: Wie kommen wir zum initialen Dictionary?
- Iteration: Kann man immer eine eintretende und austretende Variable finden und ein neues Dictionary aufstellen?
- Terminierung: Kann es passieren, dass der Simplex-Algorithmus in einer Endlosschleife festhängt, ohne jemals eine Optimallösung zu erreichen?

Die Initialisierung

In unserem ersten Beispiel hatten wir keine Schwierigkeiten mit der Initialisierung.

Um für das folgende Optimierungsproblem ein initiales zulässiges Dictionary anzugeben, haben wir einfach die Schlupfvariablen in die Basis gesteckt.

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.d.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \forall i=1,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \quad \forall j=1,\dots,n$$

Dieses Vorgehen funktioniert dann und nur dann, wenn $b_i \ge 0 \; \forall i=1,\dots,n$. In diesem Fall ist $x_1 = \dots = x_n = 0$ eine zulässige Lösung, zu der mittels des obigen Dictionary eine Basislösung bestimmt werden kann. Solche Probleme als Probleme mit zulässiger Nulllösung bezeichnet.

Falls die Nulllösung unzulässig ist, müssen wir uns ein anderes Verfahren überlegen.

Grundsätzliche Schwierigkeiten dabei:
- nicht jedes Optimierungsproblem hat eine zulässige Lösung.
- selbst wenn eine zulässige Lösung existiert, haben wir dennoch nicht immer ein Dictionary.

Wir stellen ein Hilfsproblem auf:

$$\left.\begin{aligned} &\min x_0 \\ &\text{s.d.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + x_0 \quad \forall i=1,\dots,m \\ &x_j \ge 0 \quad \forall j=1,\dots,n \end{aligned}\right\}$$

hat stets eine Lösung: - setze $x_j = 0 \;\; \forall j=1,\dots,n$
- $x_0 := -\min\{b_i \mid 1 \le i \le m\}$

Das Originalproblem ohne diese Hilfsvariable hat genau dann eine Lösung, wenn das Hilfsproblem eine Lösung mit $x_0 = 0$ hat, bzw. die Optimallösung des Hilfsproblem Null ist $\rightarrow$ Lösung mit Simplex-Verfahren.

Dazu schreibe es in Standardform:

$$\max -x_0$$
$$\text{s.d.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_0 \le b_i \quad \forall i=1,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \quad \forall j=1,\dots,n$$

Das erste Dictionary mit Zielfunktionswert w hat folgende Gestalt: $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_0 \;\; \forall i=1,\dots,m$ ist aber unzulässig.

$w = -x_0$.

02. Mai 2024

Durch einen Austausch wird daraus ein zulässiges Dictionary: - als eintretende Variable wählen wir x_0
- als austretende Variable wählen wir die am meisten unzulässige x_{n+k} mit $k = \operatorname{argmin}\{b_i \mid 1 \le i \le m\}$

Nach dem Austausch: - hat die Variable x_0 den Wert $-b_k > 0$
- hat jede Basisvariable x_{n+i} den Wert $b_i - b_k \; (\ge 0)$

Jetzt kann das Hilfsproblem wie gewohnt mit dem Simplex-Verfahren gelöst werden. Während der weiteren Iterationen kann ein Dictionary auftreten, bei dem die Basisvariable x_0 die Möglichkeit bekommt, die Basis zu verlassen.

<u>Regel</u>: Sobald x_0 unter den Kandidaten der austretenden Variablen ist, soll x_0 gewählt werden. Nach dem Austausch ist x_0 eine Nichtbasisvariable und hat als solche den Wert 0. Also ist der Zielfunktionswert $w = 0$. Dieses Dictionary ist damit optimal. Wir können dann die Hilfsvariable x_0 streichen und haben dann ein Dictionary für das Optimalproblem.

Haben wir dagegen ein optimales Dictionary, bei dem x_0 noch in der Basis ist, dann ist <u>entweder</u> der Wert der Zielfunktion $w \neq 0$. In diesem Fall ist das Originalproblem unzulässig. <u>Oder</u> der Wert von $w = 0$. In diesem Fall war das vorangegangene Dictionary noch nicht optimal und es war $w = -x_0 < 0$.

Der Wert der Basisvariable x_0 ist in der letzten Iteration von einem positiven Wert auf Null gefallen. Dann ist x_0 ein Kandidat für eine austretende Variable und hätte nach unserer Regel gewählt werden müssen. Widerspruch $\Rightarrow$ dieser Fall kann also nicht auftreten.

Diese Methode wird als zwei-Phasen-Simplex-Methode bezeichnet.

Erste Phase: Aufstellen und Lösen des Hilfsproblems

Zweite Phase: Wenn in der ersten Phase ein Dictionary mit $w=0$ gefunden wurde, dann löse das Originalproblem mit der Startbasis abgeleitet aus dem Hilfsproblem.

Beispiel 2.2

Wir wollen folgendes Originalproblem lösen und suchen als erstes eine Startbasis:

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.d. } & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le -5 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \le -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Dazu stellen wir das Hilfsproblem auf:

$$\begin{aligned} \max\ & -x_0 \\ \text{s.d. } & 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \le 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_0 \le -5 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_0 \le -1 \end{aligned}$$

Dann führen wir Schlupfvariablen x_4, x_5, x_6 und Zielfunktion w ein und erhalten folgendes Dictionary:

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0 \\ x_5 &= -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_0 \\ x_6 &= -1 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_0 \\ w &= -x_0 \end{aligned}\right\} \text{Das Dictionary ist unzulässig!}$$

Wenn man alle Nichtbasisvariablen auf 0 setzt, erhält man negative Basisvariablen. Durch einen Austausch kommt x_0 in die Basis und x_5 verlässt sie.

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 5 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 \\ x_4 &= 9 \qquad - 2x_2 - x_3 + x_5 \\ x_6 &= 4 + 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 \\ w &= -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 \end{aligned}\right\} \text{Das Dictionary ist zulässig!}$$

Der Zielfunktionswert ist $w=-5$. Nun muss das optimale Dictionary berechnet werden. Als eintretende Variable kommt nur x_2 in Frage. Daraus folgt, dass x_6 die Basis verlässt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1{,}6 - 0{,}2x_4 + 0{,}2x_5 + 0{,}6x_6 - 0{,}8x_0 \\ x_2 &= 2{,}2 + 0{,}6x_1 + 0{,}4x_5 + 0{,}2x_6 - 0{,}6x_0 \\ x_4 &= 3 - x_1 - x_6 + 2x_0 \\ w &= 0 - x_0 \end{aligned}$$

Jetzt haben wir ein optimales Dictionary mit $w=0$ gefunden. Also ist das Originalproblem zulässig. Die zulässige Lösung des Dictionary ist $x_1=0$, $x_2=2{,}2$, $x_3=1{,}6$.
Um ein Dictionary für das Originalproblem zu bekommen, streichen wir die Spalte mit x_0:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1{,}6 - 0{,}2x_4 + 0{,}2x_5 + 0{,}6x_6 \\ x_2 &= 2{,}2 + 0{,}6x_1 + 0{,}4x_5 + 0{,}2x_6 \\ x_4 &= 3 - x_1 - x_6 \end{aligned}$$

Die fehlende letzte Zeile erhalten wir, wenn wir die Basisvariablen in der Originalfunktion $z=x_1-x_2+x_3$ durch Nichtbasisvariablen mit der obigen Gleichung ersetzen:

$$\begin{aligned} z &= x_1 - (2{,}2 + 0{,}6x_1 + 0{,}4x_5 + 0{,}2x_6) + (1{,}6 - 0{,}2x_4 + 0{,}2x_5 + 0{,}6x_6) \\ &= -0{,}6 + 0{,}2x_1 - 0{,}2x_5 + 0{,}4x_6 \end{aligned}$$

Die Iteration

Gegeben sei ein Dictionary, dessen letzte Zeile folgende Gestalt habe: $z = z^* + \sum_{j\in N} \bar{c}_j x_j$.
Hierbei bezeichnet N die Indexmenge der Nichtbasisvariablen. In der aktuellen Lösung ist $x_j = 0$ $\forall j \in N$. Daher ist z^* der Zielfunktionswert der aktuellen Lösung.
Wenn $\bar{c}_j \le 0$ für alle $j\in N$, dann ist die aktuelle Lösung bereits eine Optimallösung. Denn: alle zulässigen Lösungen müssen auch $x_j \ge 0$ erfüllen. Also kann ihr Zielfunktionswert nicht besser als z^* sein.
Die eintretende Variable ist eine Nichtbasisvariable x_j mit $\bar{c}_j > 0$. Wenn es mehr als einen Kandidaten für die eintretende Variable gibt, dann kann ein beliebiger Kandidat gewählt werden. Für händische Rechnungen nimmt man üblicherweise denjenigen mit dem größten Koeffizienten. Für Computerimplementation ist diese Regel zu zeitaufwendig, daher werden dort andere Auswahlkriterien bevorzugt.
Als austretende Variable wird eine Basisvariable x_j gewählt, deren Nebenbedingung $x_j \ge 0$ die kleinste obere Schranke für die eintretende Nichtbasisvariable liefert.
Auch diese Regel ist nicht immer eindeutig:

1) Es kann keinen Kandidaten geben

Gegeben sei das folgende Dictionary:

$$x_2 = 5 + 2x_3 - x_4 - 3x_1$$
$$x_5 = 7 \qquad - 3x_4 - 4x_1$$
$$z = 5 + x_3 - x_4 - x_1$$

Die eintretende Variable ist x_3. Keine der Basisvariablen x_2, x_5 liefert eine obere Schranke für x_3. Daher kann x_3 beliebig groß sein. Setzt man $x_3 := t$ für ein $t > 0$, so ist $x_1 = 0$, $x_2 = 5 + 2t$, $x_3 = t$, $x_4 = 0$, $x_5 = 7$ und $z = 5 + t$ eine zulässige Lösung. Da t beliebig groß sein kann, kann auch z beliebig groß sein. Für jede Zahl M gibt es eine Lösung $x_1, \dots, x_5$ mit $x_3 - x_4 - x_1 > M$.

Allgemein gilt: Wenn es keinen Kandidaten für das Verlassen der Basis gibt, kann der Wert der eintretenden Variable und damit der Zielfunktionswert beliebig groß werden. Das Problem ist unbeschränkt.

2) Es können mehrere Kandidaten in Frage kommen. In diesem Fall kann ein beliebiger Kandidat ausgewählt werden und der Austausch kann vollzogen werden. Falls es mehrere Kandidaten als austretende Variable gibt, so hat das Konsequenzen, die wir nachfolgend betrachten.

Degeneriertheit:

Gegeben sei das Dictionary

$$x_4 = 1 \qquad - 2x_3$$
$$x_5 = 3 - 2x_1 + 4x_2 - 6x_3$$
$$x_6 = 2 + x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$z = 2x_1 - x_2 + 8x_3$$

Wir wählen x_3 als eintretende Variable. Aus $x_4, x_5, x_6 \geq 0$ folgt jeweils $x_3 \leq \frac{1}{2}$. Also ist jede dieser Variablen ein Kandidat um die Basis zu verlassen.
Wir wählen z.B. x_4. Dann erhalten wir durch diesen Austausch als neues Dictionary:

$$x_3 = 0{,}5$$
$$x_5 = \qquad -2x_1 + 4x_2 + 3x_4$$
$$x_6 = \qquad x_1 - 3x_2 + 2x_4$$
$$z = 4 + 2x_1 - x_2 - 4x_4$$

Dieses Dictionary ist anders als alle anderen Dictionaries, die wir bisher gesehen haben: Neben den Nichtbasisvariablen sind auch Basisvariablen $x_5 = x_6 = 0$.
Basislösungen, bei denen eine oder mehr Basisvariablen 0 sind, heißen degeneriert. Aufgrund der Degeneriertheit folgt aus $x_5 \geq 0$, dass $x_1 \leq 0$ ist. Es ist x_5 die austretende Variable, aber der Wert von x_1 und z ändern sich nicht:

$$x_1 = \qquad 2x_2 + 1{,}5x_4 - 0{,}5x_5$$
$$x_3 = 0{,}5 \qquad - 0{,}5x_4$$
$$x_6 = \qquad - x_2 + 3{,}5x_4 - 0{,}5x_5$$
$$z = 4 + 3x_2 - x_4 - x_5$$

Simplexiterationen, welche die Basislösung nicht verändern, werden ebenso degeneriert genannt.

Kreiseln (Zykeln): Degeneriertheit kann zur Folge haben, dass die Simplexmethode kreiselt/zykelt, d.h. die ewig gleiche Sequenz nicht-optimaler Dictionaries endlos produziert und deshalb nicht terminiert.

Beispiel 2.3 (K.T. Marshall)

Gegeben sei das LP:
$$x_5 = -0{,}5x_1 + 5{,}5x_2 + 2{,}5x_3 - 9x_4$$
$$x_6 = -0{,}5x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 - x_4$$
$$x_7 = 1 - x_1$$
$$z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4$$

Regel für die Auswahl der ein- und austretenden Variable:
- eintretende Variable ist die Nebenbedingung, die den größten Koeffizienten in der z-Gleichung
- austretende Variable ist diejenige (unter den Kandidaten) mit kleinstem Index

Nach sechs Iterationen gelangt man mit dieser Auswahlregeln wieder bei obigem Dictionary. Der Zielfunktionswert ist stets $z = 0$.
Eine Optimallösung mit $z = 1$ wird nicht gefunden.

07. Mai 2024

Kreiseln tritt nur bei degenerierten Austauschen auf, da nicht-degenerierte Austausche zu einem anderen Zielfunktionswert führen, d.h. das gleiche Dictionary kein zweites Mal auftreten. Kreiseln ist der einzige Grund, warum der Simplex versagt.

Satz 2.4

Wenn die Simplex-Methode nicht terminiert, dann kreiselt sie.

Beweis: Es gibt nur endlich viele Möglichkeiten m Basisvariablen aus $m+n$ Variablen zu wählen. Wenn die Simplex-Methode nicht terminiert, dann muss eine Basis in zwei Iterationen sein.
Wir zeigen: Zwei Dictionaries mit derselben Basis sind identisch. Sei B die Indexmenge der Basisvariablen und N die Indexmenge der Nichtbasisvariablen. Seien $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \quad \forall i \in B$ und $x_i = b_i^* - \sum_{j \in N} a_{ij}^* x_j \quad \forall i \in B$ zwei Dictionaries mit derselben Basisvariable x_i für $i \in B$.

$$z = \bar{v} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j \qquad z = v^* + \sum_{j \in N} c_j^* x_j$$

Eine der Eigenschaften eines Dictionary ist es, dass jede Lösung $x_1, \dots, x_{n+m}, z$ des einen Dictionary auch eine Lösung des jeweils anderen Dictionary ist. Wenn also x_k eine Nichtbasisvariable ($k \in N$) und $t \in \mathbb{R}$ bel. sind, setze $x_k := t$, $x_j := 0$ für alle $j \in N \setminus \{k\}$, $x_i := \bar{b}_i - a_{ik} t$ für $i \in B$ und $z = \bar{v} + \bar{c}_k t$ eine Lösung des ersten Dictionary ist, dann ist dies auch eine Lösung des zweiten Dictionary.

Also gilt: $\bar{b}_i - \bar{a}_{ik} t = b_i^* - a_{ik}^* t \quad \forall i \in B$ und $\bar{v} - \bar{c}_k t = v^* - c_k^* t$. Da dies für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, also insbesondere für $t = 0$ und $t = 1$ folgt: $b_i = b_i'$, $\bar{v} = v^*$ $(t=0)^*$ und $\bar{a}_{ik} = a_{ik}^*$ sowie $\bar{c}_k = c_k^*$. Da x_k eine beliebige Nichtbasisvariable war, kann man für alle anderen $k \in N$ ebenso argumentieren und die Gleichheit der Koeffizienten nachweisen. Damit sind die Dictionaries identisch. □

Satz 2.5 (Auswahlregel von Bland)

Der Simplex terminiert, wenn unter den Kandidaten für die eintretende und austretende Variablen in jeder Iteration diejenigen Variablen x_k mit dem kleinsten Index k gewählt werden.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass das Simplex-Verfahren mit dieser Auswahlregel nicht kreiselt. Wir nehmen an, dass die Auswahlregel zu einem Dictionary D_0 führt, welches nach einer endlichen Anzahl von degenerierten Austauschen $D_1, D_2, \dots, D_k$ wieder $D_k = D_0$ liefert. Eine Variable heißt <u>schwankend</u>, wenn sie in einigen Dictionaries Basisvariable und in einigen Nichtbasisvariable ist. Sei x_t die schwankende Variable mit dem größten Index t. In der Liste $D_1, \dots, D_k$ gibt es ein Dictionary $\bar{D} = D_p$, in dem x_t die Basis verlässt (d.h. x_t ist Basisvariable in D_p und Nichtbasisvariable in D_{p+1}) und eine andere schwankende Variable x_s die Basis betritt (d.h. x_s ist Nichtbasisvariable in D_p und Basisvariable in D_{p+1}). Wir schreiben das Dictionary $\bar{D}$ als:

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \bar{N}} \bar{a}_{ij} x_j \quad \forall i \in \bar{B}$$
$$z = \bar{v} - \sum_{j \in \bar{N}} \bar{c}_j x_j.$$

Ferner gibt es in der Liste $D_1, \dots, D_k$ ein Dictionary $D^* = D_q$, in dem x_t die Basis betritt. Dieses Dictionary D^* schreiben wir als:

$$x_i = b_i^* - \sum_{j \in \bar{N}} a_{ij}^* x_j \quad \forall i \in \bar{B}$$
$$z = v^* - \sum_{j \in \bar{N}} c_j^* x_j.$$

Da alle Iterationen von $\bar{D}$ zu D^* degeneriert sind, hat die Zielfunktion z den gleichen Wert in beiden Dictionaries: $\bar{v} = v^* = v$. Ferner fügen wir noch alle Basisvariablen $j \in B^*$ in die z-Gleichung von D^* mit der Setzung $c_j^* := 0$ ein: $z = v + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j$.

Die Gleichung ging aus dem Dictionary $\bar{D}$ durch algebraisches Umformen hervor. Also wird jede Lösung von $\bar{D}$ auch diese Gleichung erfüllen:

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Dann ist $x_s = y$, $x_j = 0$ für $j \in \bar{N} \setminus \{s\}$, $x_i := \bar{b}_i - \bar{a}_{is} y$ für $i \in B$ und $z := v + \bar{c}_s y$ eine Lösung von $\bar{D}$ (unter Umständen ist das eine unzulässige Lösung).

Dann gilt: $v + \bar{c}_s y = z = v + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j = v + c_s^* y + \sum_{i \in \bar{B}} c_i^* (b_i - \bar{a}_{is} y)$.

Umformen führt zu: $(\bar{c}_s - c_s^* + \sum_{i \in \bar{B}} c_i^* \bar{a}_{is}) y = \sum_{i \in \bar{B}} c_i^* b_i$. Diese Gleichung gilt für alle $y \in \mathbb{R}$. Ihre rechte Seite ist eine Konstante. Daraus folgt $\underbrace{\bar{c}_s}_{>0} - \underbrace{c_s^*}_{\leq 0} + \sum_{i \in \bar{B}} c_i^* \bar{a}_{is} = 0$. Da x_s eine eintretende Variable für $\bar{D}$ ist, gilt $\bar{c}_s > 0$. Da x_s keine eintretende Variable für D^* und $s < t$ (weil t größter Index) gilt $c_s^* \leq 0$ (bei $c_s^* > 0$ hätte die Auswahlregel nicht x_t wählen dürfen, da x_s ein Kandidat mit kleinerem Index gewesen wäre). Zusammen folgt nun, dass es einen Index $r \in \bar{B}$ mit $c_r^* \bar{a}_{rs} < 0$.

Interpretation: • Die Variable x_r ist wegen $r \in \bar{B}$ eine Basisvariable in $\bar{D}$.

• Die Variable x_r ist wegen $c_r^* \neq 0$ eine Nichtbasisvariable in D^*.

Also ist x_r ebenfalls eine schwankende Variable. Da x_t den größten Index unter allen schwankenden Variablen hat, gilt $r \leq t$.

Angenommen $r = t$. Dann wäre $c_r^* \bar{a}_{rs} = c_t^* \bar{a}_{ts} < 0$. (Zur Erinnerung: x_t ist die austretende Variable des Dictionary $\bar{D}$ und x_s die eintretende)

Das bedeutet, aus der Gleichung $x_t = \bar{b}_t - \sum_{j \in \bar{N}} \bar{a}_{tj} x_j$ des Dictionary $\bar{D}$ wurde durch die Nichtnegativitätsbedingung $x_t \geq 0$, also $\bar{b}_t - \sum_{j \in \bar{N}} \bar{a}_{tj} x_j \geq 0$ eine obere Schranke für x_s abgeleitet: $x_s \leq \frac{\bar{b}_t}{\bar{a}_{ts}}$. Damit dies funktioniert, muss $\bar{a}_{ts} > 0$ sein (für $\bar{a}_{ts} \leq 0$ wird $x_t \geq 0$ nie verletzt). Da x_t eintretende Variable im Dictionary D^* ist, muss $c_t^* > 0$ sein. Also ist $c_t^* \bar{a}_{ts} > 0$, Widerspruch - es gilt demnach $r < t$ und x_r ist nicht die eintretende Variable im Dictionary D^* (dort tritt x_t ein). Also kann nicht $c_r^* > 0$ sein, es muss $c_r^* \leq 0$ sein.

Aus $c_r^* a_{rs} < 0$ folgt dann $\bar{a}_{rs} > 0$. Da alle Iterationen von $\bar{D}$ zu D^* degeneriert sind, beschreiben beide die gleiche Lösung. Insbesondere ist der Wert von x_r immer gleich. Überdies ist er immer gleich Null, da x_r Nichtbasisvariable in D^* ist. Da x_r Basisvariable $\bar{D}$ ist, haben wir die Gleichung $x_r = \bar{b}_r - \sum_{j \in \bar{N}} \dots$, also ist $\bar{b}_r = 0$. Im Dictionary $\bar{D}$ wurde aus der Nichtnegativitätsbedingung $x_r \geq 0$ eine obere Schranke für x_r abgeleitet: $x_r \leq \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = 0$. Also war x_r unter den Kandidaten der austretenden Variablen und es gilt $r < t$. Wir haben aber x_t als austretende Variable ausgewählt, was ein Widerspruch zur Auswahlregel ist. □

14. Mai 2024

Satz 2.6

<u>Hauptsatz der linearen Programmierung</u>

Jedes LP in Standardform hat die folgenden drei Eigenschaften:

i) Wenn es keine optimale Lösung hat, ist entweder unbeschränkt oder unzulässig.

ii) Wenn es eine zulässige Lösung hat, dann hat es eine zulässige Basislösung.

iii) Wenn es eine optimale Lösung hat, dann hat es eine optimale Basislösung.

Beweis: Die erste Phase des zwei-Phasen-Simplex liefert entweder eine zulässige Basislösung oder findet heraus, dass das Problem unzulässig ist. Die zweite Phase des zwei-Phasen-Simplex liefert entweder eine optimale Basislösung oder findet heraus, dass das Problem unbeschränkt ist. □

Die Laufzeit des Simplex-Verfahrens hängt von der verwendeten Austauschregel ab, mittels der ein- und austretenden Variablen von einer Kandidatenliste ausgewählt werden.

Es ist bis heute keine Regel bekannt, die zu einer polynomiellen Laufzeit des Simplex-Verfahrens führt.

Wir betrachten die größte-Koeffizienten-Regel für die eintretende Variable:

Wenn es mehrere Kandidaten für die eintretende Variable gibt, wird diejenige mit dem größten Koeffizienten in der Zielfunktion wählt.

(Klee, Minty, 1972) Bsp. 2.7

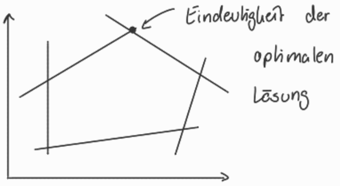
Für das Problem:

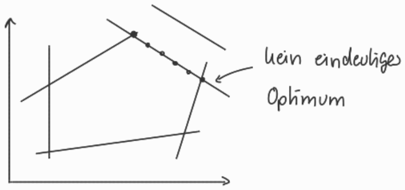
$$\max \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} \cdot x_j$$
$$\text{s.d.} \quad \left(2 \cdot \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} \cdot x_j\right) + x_i \leq 100^{i-1} \quad \forall i = 1, \dots, n$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Man kann beweisen, dass das Simplex-Verfahren mit der größten-Koeffizienten-Regel 2^{n-1} Iterationen benötigt.

Derartige "Problemfälle" gibt es auch für andere Austauschregeln.

Eindeutigkeit von Lösungen





Neben der Existenz von Lösungen, kann man auch fragen, ob die Lösung eindeutig ist. Dies kann anhand des finalen (optimalen) Dictionary beantworten.

Beispiel (Eindeutigkeit)

Betrachten das letzte Dictionary aus dem Ausgangsbeispiel

$$x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$$
$$x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6$$
$$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$$
$$z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6$$

Die letzte Zeile zeigt, dass jede zulässige Lösung mit $z=13$, dann $x_2 = x_4 = x_6 = 0$ erfüllt. Der Rest des Dictionary zeigt, dass jede solche Lösung $x_3 = 1$, $x_2 = 2$, $x_5 = 1$ erfüllt.

Daher gibt es hier nur eine einzige optimale Lösung - die Optimallösung ist eindeutig.

Es gibt aber auch LP mit mehr als einer optimalen Lösung. Das finale Dictionary kann dazu genutzt werden, die Gesamtheit aller Lösungen zu beschreiben.

Beispiel (Uneindeutigkeit)

$$x_4 = 3 + x_2 - 2x_5 + 7x_3$$
$$x_1 = 1 - 5x_2 + 6x_5 - 8x_3$$
$$x_6 = 4 + 9x_2 + 2x_5 - x_3$$
$$z = 8 - x_3$$

Die letzte Zeile zeigt uns, dass jede Optimallösung $x_3 = 0$ erfüllt, aber nicht notwendigerweise $x_2 = x_5 = 0$. Für solche Lösungen impliziert das restliche Dictionary folgendes:

$$x_4 = 3 + x_2 - 2x_5$$
$$x_1 = 1 - 5x_2 + 6x_5$$
$$x_6 = 4 + 9x_2 + 2x_5$$

Aus $x_4, x_1, x_6 \geq 0$ folgern wir, dass jede Optimallösung folgendes System erfüllt:

$$-x_2 + 2x_5 \leq 3$$
$$5x_2 - 6x_5 \leq 1$$
$$\cancel{\underbrace{-9x_2 - 2x_5}_{\leq 0} \leq 4}$$
$$x_2, \; x_5 \geq 0$$

Lösungsraum aller Optimallösungen!

redundant

Tableau-Simplex

Die Standard-Simplex-Methode wird in Lehrbüchern oftmals in einer etwas anderen Form eingeführt, welche als "Tableau-Simplex" bezeichnet wird. Dazu schreiben wir das Anfangsdictionary in einer etwas modifizierten Form auf:

$$
\begin{array}{lllllll}
2x_1 + 3x_2 + x_3 & + x_4 & & & = 5 \\
4x_1 + x_2 + 2x_3 & & + x_5 & & = 11 \\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & & & + x_6 & = 8 \\
-z + 5x_1 \quad 4x_2 + 3x_3 & & & & = 0
\end{array}
$$

Nun schreiben wir lediglich die Koeffizienten von den x_i und die rechte Seite auf und erhalten so unser erstes Tableau:

r_1	2	3	1	1	0	0	5	s_1
r_2	4	1	2	0	1	0	11	s_2
r_3	3	4	2	0	0	1	8	s_3
r_4	5	4	3	0	0	0	$\boxed{0}$	s_4 negativer Zielfunktionswert

Jetzt können wir die Austauschregeln des Dictionary in die Sprache des Tableau überführen. Die Simplexmethode läuft dann wie folgt ab:

Schritt 1: Betrachte alle Zahlen in der letzten Zeile (mit Ausnahme rechts unten). Wenn alle Zahlen negativ oder null sind: STOP → das Tableau beschreibt eine optimale Lösung. Andernfalls wähle eine positive Zahl. Die zugehörige Spalte heißt Austausch- / Pivot-Spalte und entspricht der eintretenden Variable

Schritt 2: Für jede Zeile i deren Eintrag r_i in der Austauschspalte positiv ist, betrachte den Eintrag s_i in der Spalte ganz rechts. Diejenige Zeile i^* mit dem kleinsten Verhältnis $\frac{s_i}{r_i}$ heißt Austausch- / Pivot-Zeile und entspricht der austretenden Variable.

Wenn alle Einträge in der Austauschspalte negativ oder 0 sind, dann ist das Problem unbeschränkt. In unserem Beispiel ist die erste Zeile die Austauschzeile mit $\frac{s_1}{r_1} = \frac{5}{2}$.

Schritt 3: Teile jeden Eintrag der Austauschzeile durch das Pivotelement, welches der Koeffizient am Schnittpunkt von Austauschzeile und -spalte ist (hier: 2).

$\boxed{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$
4	1	2	0	1	0	11
3	4	2	0	0	1	8
5	4	3	0	0	0	0

Schritt 4: Von jeder verbleibenden Zeile subtrahieren wir ein geeignetes Vielfaches der Austauschzeile, sodass die Koeffizienten in allen anderen Zeilen der Austauschspalte auf Null gebracht werden. Daraus entsteht ein neues Tableau mit welchem bei Schritt 1 weitergearbeitet wird.

1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$
0	-5	0	-2	1	0	1
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{25}{2}$

Zusammengefasst ist die Tableau-Methode eine verkürzte Variante der Dictionary-Variante ist, bei der die Variablennamen nicht hingeschrieben werden.