Lösungen zu Übungsblatt 9

1

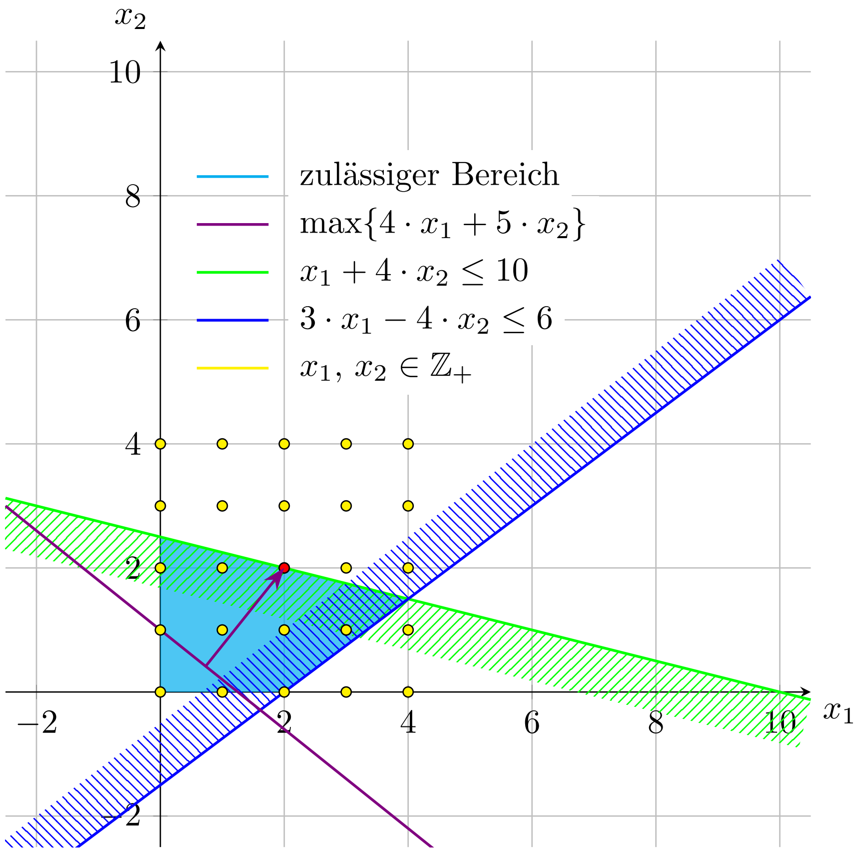
$$
\begin{array}{lrll}
\min & \sum_{t \in T} (f_t \cdot y_t + p_t \cdot x_t + h_t \cdot s_t) & & \\
\text{s.d.} & s_{t-1} + x_t & = d_t + s_t & \forall t \in T \\
 & s_0 & = 0 & \\
 & s_n & = 0 & \\
 & x_t & \leq \left(\sum_{t \in T} d_t \right) \cdot y_t & \forall t \in T \\
 & y_t & \in \{0,1\} & \forall t \in T \\
 & x_t, s_t & \geq 0 & \forall t \in T
\end{array}
$$

2

IP:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 4 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & & \\
\text{s.d.} & x_1 & + & 4 \cdot x_2 & \leq & 10 \\
 & 3 \cdot x_1 & - & 4 \cdot x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$

a)



b)

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 4 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & & \\ \text{s.d.} & x_1 & + & 4 \cdot x_2 & \leq & 10 \\ & 3 \cdot x_1 & - & 4 \cdot x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

LP-Relaxierung (Lösen mit Simplex):

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_3 & = & 10 & - & x_1 & - & 4 \cdot x_2 \\ x_4 & = & 6 & - & 3 \cdot x_1 & + & 4 \cdot x_2 \\ z & = & & & 4 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 \end{array}$$

Austausch: x_2 eintretend, x_3 austretend

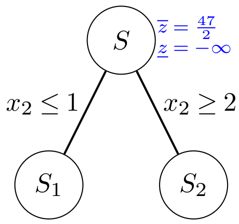
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{1}{4} \cdot x_1 & - & \frac{1}{4} \cdot x_3 \\ x_4 & = & 16 & - & 4 \cdot x_1 & - & x_3 \\ z & = & \frac{25}{2} & + & \frac{11}{4} \cdot x_1 & - & \frac{5}{4} \cdot x_3 \end{array}$$

Austausch: x_1 eintretend, x_4 austretend

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 &=& 4 &-& \frac{1}{4}\cdot x_3 &-& \frac{1}{4}\cdot x_4 \\ x_2 &=& \frac{3}{2} &-& \frac{3}{16}\cdot x_3 &+& \frac{1}{16}\cdot x_4 \\ z &=& \frac{47}{2} &-& \frac{31}{16}\cdot x_3 &-& \frac{11}{16}\cdot x_4 \end{array}$$

$\rightarrow$ Optimalwert: $\overline{z} = \frac{47}{2}$ bei $\overline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow$ Verzweigen

Aufzählungsbaum:



Mit $S_1 := S \cap \{x \mid x_2 \leq 1\}$, $S_2 := S \cap \{x \mid x_2 \geq 2\}$, $L = [S_1, S_2]$
Löse LP(S_1) mit Dualem Simplex: $x_2 \leq 1 \rightarrow x_2' := -x_2 + 1, x_2' \geq 0 \rightarrow$ neues Dictionary:

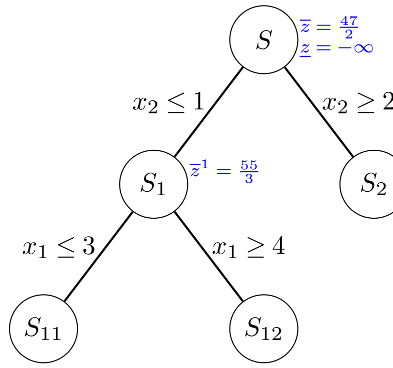
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 &=& 4 &-& \frac{1}{4}\cdot x_3 &-& \frac{1}{4}\cdot x_4 \\ x_2 &=& \frac{3}{2} &-& \frac{3}{16}\cdot x_3 &+& \frac{1}{16}\cdot x_4 \\ x_2' &=& -\frac{1}{2} &+& \frac{3}{16}\cdot x_3 &-& \frac{1}{16}\cdot x_4 \\ z &=& \frac{47}{2} &-& \frac{31}{16}\cdot x_3 &-& \frac{11}{16}\cdot x_4 \end{array}$$

Austausch: x_2' austretend, x_3 eintretend

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 &=& \frac{10}{3} &-& \frac{4}{3}\cdot x_2' &-& \frac{1}{3}\cdot x_4 \\ x_2 &=& 1 &-& x_2' && \\ x_3 &=& \frac{8}{3} &+& \frac{16}{3}\cdot x_2' &+& \frac{1}{3}\cdot x_4 \\ z &=& \frac{55}{3} &-& \frac{31}{3}\cdot x_2' &-& \frac{4}{3}\cdot x_4 \end{array}$$

$\overline{z}^1 = \frac{55}{3}$, $\overline{x}^1 = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Verzweigen

Aufzählungsbaum:



Mit $S_{11} := S_1 \cap \{x \mid x_1 \leq 3\}$, $S_{12} := S_1 \cap \{x \mid x_1 \geq 4\}$, $L = [S_2, S_{11}, S_{12}]$
Löse LP(S_2): $x_2 \geq 2 \to x_2' := x_2 - 2$, $x_2' \geq 0 \to$ neues Dictionary:

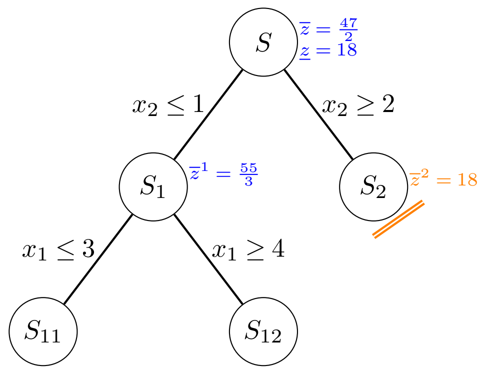
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 4 & - & \frac{1}{4} \cdot x_3 & - & \frac{1}{4} \cdot x_4 \\ x_2 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{3}{16} \cdot x_3 & + & \frac{1}{16} \cdot x_4 \\ x_2' & = & -\frac{1}{2} & - & \frac{3}{16} \cdot x_3 & + & \frac{1}{16} \cdot x_4 \\ z & = & \frac{47}{2} & - & \frac{31}{16} \cdot x_3 & - & \frac{11}{16} \cdot x_4 \end{array}$$

Austausch: x_2' austretend, x_4 eintretend

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 2 & - & 4 \cdot x_2' & - & x_3 \\ x_2 & = & 2 & + & x_2' & & \\ x_4 & = & 8 & + & 16 \cdot x_2' & + & 3 \cdot x_3 \\ z & = & 18 & - & 11 \cdot x_2' & - & 4 \cdot x_3 \end{array}$$

$\overline{z}^2 = 18$, $\overline{x}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \to \underline{z} = 18$ und Abschneiden (wegen Optimalität)

<u>Aufzählungsbaum:</u>



$L = [S_{11}, S_{12}]$
Löse LP(S_{11}): $x_1 \leq 3 \to x_1' := -x_1 + 3$, $x_1' \geq 0 \to$ neues Dictionary:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 4 & - & \frac{1}{4}\cdot x_3 & - & \frac{1}{4}\cdot x_4 \\
x_2 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{3}{16}\cdot x_3 & + & \frac{1}{16}\cdot x_4 \\
x_2' & = & -\frac{1}{2} & + & \frac{3}{16}\cdot x_3 & - & \frac{1}{16}\cdot x_4 \\
x_1' & = & -1 & + & \frac{1}{4}\cdot x_3 & + & \frac{1}{4}\cdot x_4 \\
z & = & \frac{47}{2} & - & \frac{31}{16}\cdot x_3 & - & \frac{11}{16}\cdot x_4
\end{array}
$$

Austausch: x_1' austretend, x_4 eintretend

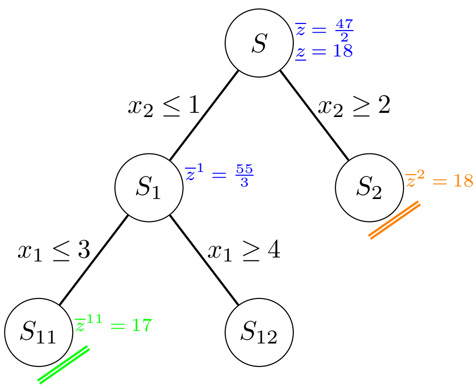
$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 3 & - & x_1' & & \\
x_2 & = & \frac{7}{4} & + & \frac{1}{4}\cdot x_1' & - & \frac{1}{4}\cdot x_3 \\
x_2' & = & -\frac{3}{4} & - & \frac{1}{4}\cdot x_1' & + & \frac{1}{4}\cdot x_3 \\
x_4 & = & 4 & + & 4\cdot x_1' & - & x_3 \\
z & = & \frac{83}{4} & - & \frac{11}{4}\cdot x_1' & - & \frac{5}{4}\cdot x_3
\end{array}
$$

Austausch: x_2' austretend, x_3 eintretend

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 3 & - & x_1' & & \\
x_2 & = & 1 & & & - & \frac{1}{16}\cdot x_2' \\
x_3 & = & 3 & + & x_1' & + & \frac{1}{4}\cdot x_2' \\
x_4 & = & 1 & + & 3\cdot x_1' & - & \frac{1}{4}\cdot x_2' \\
z & = & 17 & - & 4\cdot x_1' & - & \frac{5}{16}\cdot x_2'
\end{array}
$$

$\overline{z}^{11} = 17$, $\overline{x}^{11} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ aber $\overline{z}^{11} = 17 < 18 = \underline{z} \rightarrow$ Abschneiden (wegen Schranke)

Aufzählungsbaum:



$L = [S_{12}]$
Löse LP(S_{12}): $x_1 \geq 4 \rightarrow x_1' := x_1 - 4$, $x_1' \geq 0 \rightarrow$ neues Dictionary:

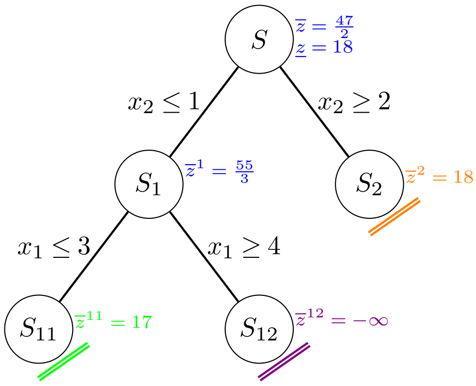
$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & 4 & - & \frac{1}{4}\cdot x_3 & - & \frac{1}{4}\cdot x_4 \\
x_2 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{3}{16}\cdot x_3 & + & \frac{1}{16}\cdot x_4 \\
x_2' & = & -\frac{1}{2} & + & \frac{3}{16}\cdot x_3 & - & \frac{1}{16}\cdot x_4 \\
x_1' & = & 0 & - & \frac{1}{4}\cdot x_3 & - & \frac{1}{4}\cdot x_4 \\
z & = & \frac{47}{2} & - & \frac{31}{16}\cdot x_3 & - & \frac{11}{16}\cdot x_4
\end{array}
$$

Austausch: x_2' austretend, x_3 eintretend

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & \frac{10}{3} & - & \frac{4}{3}\cdot x_2' & - & \frac{1}{3}\cdot x_4 \\
x_2 & = & 1 & - & x_2' & & \\
x_3 & = & \frac{8}{3} & + & \frac{16}{3}\cdot x_2' & + & \frac{1}{3}\cdot x_4 \\
x_1' & = & -\frac{2}{3} & - & \frac{4}{3}\cdot x_2' & - & \frac{1}{3}\cdot x_4 \\
z & = & \frac{55}{3} & - & \frac{31}{3}\cdot x_2' & - & \frac{4}{3}\cdot x_4
\end{array}
$$

LP(S_{12}) ist unzulässig (austretend x_1', aber keine eintretende) $\rightarrow$ Abschneiden (wegen Unzulässigkeit)

Aufzählungsbaum:



$L = []$ $\rightarrow$ Der Algorithmus termniert mit $z^* = 18$ bei $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.