Lösungen zu Übungsblatt 10

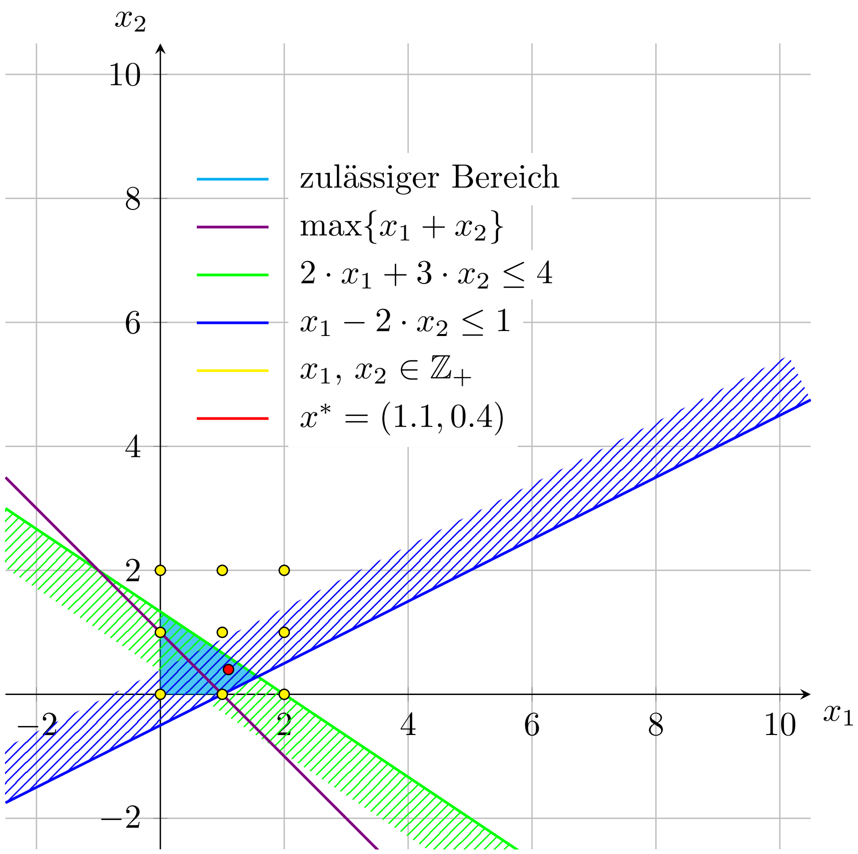
1

IP:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.d.} & 2\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & - & 2\cdot x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

$x^* = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

a)



b)

Wähle $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Neue Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot (2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2) + \frac{3}{2} \cdot (x_1 - 2 \cdot x_2) &\leq 1 \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot 1 \\
\left(2 + \frac{3}{2}\right) \cdot x_1 + (3 - 3) \cdot x_2 &\leq 4 + \frac{3}{2} \\
\frac{7}{2} \cdot x_1 &\leq \frac{11}{2}
\end{aligned}
$$

wegen $x_1 \geq 0$ runde links ab:

$$3 \cdot x_1 \leq \frac{11}{2}$$

wegen links ganzzahlig runde rechts ab:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot x_1 &\leq 5 \\
\Leftrightarrow \quad x_1 &\leq \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

wegen links ganzzahlig runde rechts ab:

$$x_1 \leq 1$$

Neue Ungleichung $x_1 \leq 1$ schneidet x^* ab

2

IP:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & 8 \cdot x_2 & & \\
\text{s.d.} & 2 \cdot x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & + & 2 \cdot x_2 & \leq & 6 \\
 & 2 \cdot x_1 & + & 6 \cdot x_2 & \leq & 15 \\
 & x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$

a)

LP-Relaxierung:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 10 & - & 2 \cdot x_1 & - & x_2 \\
x_4 & = & 6 & - & x_1 & - & 2 \cdot x_2 \\
x_5 & = & 15 & - & 2 \cdot x_1 & - & 6 \cdot x_2 \\
z & = & & & x_1 & + & 8 \cdot x_2
\end{array}
$$

Austausch: x_2 eintretend, x_5 austretend

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & \frac{15}{2} & - & \frac{5}{3} \cdot x_1 & + & \frac{1}{6} \cdot x_5 \\
x_4 & = & 1 & - & \frac{1}{3} \cdot x_1 & + & \frac{1}{3} \cdot x_5 \\
x_2 & = & \frac{15}{6} & - & \frac{1}{3} \cdot x_1 & - & \frac{1}{6} \cdot x_5 \\
z & = & 20 & - & \frac{5}{3} \cdot x_1 & - & \frac{4}{3} \cdot x_5
\end{array}
$$

$z^* = 20$ bei $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{15}{6} \end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^2$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{6} \cdot x_5 \leq \frac{15}{6} \\
\text{neue Ungleichung:} \quad &\left(\frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\right) \cdot x_1 + \left(\frac{1}{6} - \left\lfloor \frac{1}{6} \right\rfloor\right) \cdot x_5 \geq \frac{15}{6} - \left\lfloor \frac{15}{6} \right\rfloor \\
= &\left(\frac{1}{3} - 0\right) \cdot x_1 + \left(\frac{1}{6} - 0\right) \cdot x_5 \geq \frac{15}{6} - 2 \\
\rightarrow = &\frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{6} \cdot x_5 \geq \frac{1}{2} \\
\rightarrow = &-\frac{1}{3} \cdot x_1 - \frac{1}{6} \cdot x_5 \leq -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & \frac{15}{2} & - & \frac{5}{3} \cdot x_1 & + & \frac{1}{6} \cdot x_5 \\
x_4 & = & 1 & - & \frac{1}{3} \cdot x_1 & + & \frac{1}{3} \cdot x_5 \\
x_2 & = & \frac{15}{6} & - & \frac{1}{3} \cdot x_1 & - & \frac{1}{6} \cdot x_5 \\
x_6 & = & -\frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} \cdot x_1 & + & \frac{1}{6} \cdot x_5 \\
z & = & 20 & - & \frac{5}{3} \cdot x_1 & - & \frac{4}{3} \cdot x_5
\end{array}$$

Austausch: x_6 austretend, x_1 eintretend

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 5 & + & x_5 & - & 5 \cdot x_6 \\
x_4 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} \cdot x_5 & - & x_6 \\
x_2 & = & 2 & & & - & x_6 \\
x_1 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{1}{2} \cdot x_5 & + & 3 \cdot x_6 \\
z & = & 17.5 & - & \frac{1}{2} \cdot x_5 & - & 5 \cdot x_6
\end{array}$$

$z^* = 17.5$ bei $x^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^2$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \cdot x_5 - 3 \cdot x_6 \leq \frac{3}{2} \\
\text{neue Ungleichung:} \quad &\left(\frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor\right) \cdot x_5 + (-3 - \lfloor -3 \rfloor) \cdot x_6 \geq \frac{3}{2} - \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \\
= &\left(\frac{1}{2} - 0\right) \cdot x_5 + (-3 + 3) \cdot x_6 \geq \frac{3}{2} - 1 \\
\rightarrow = &\frac{1}{2} \cdot x_5 \geq \frac{1}{2} \\
\rightarrow = &-\frac{1}{2} \cdot x_5 \leq -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

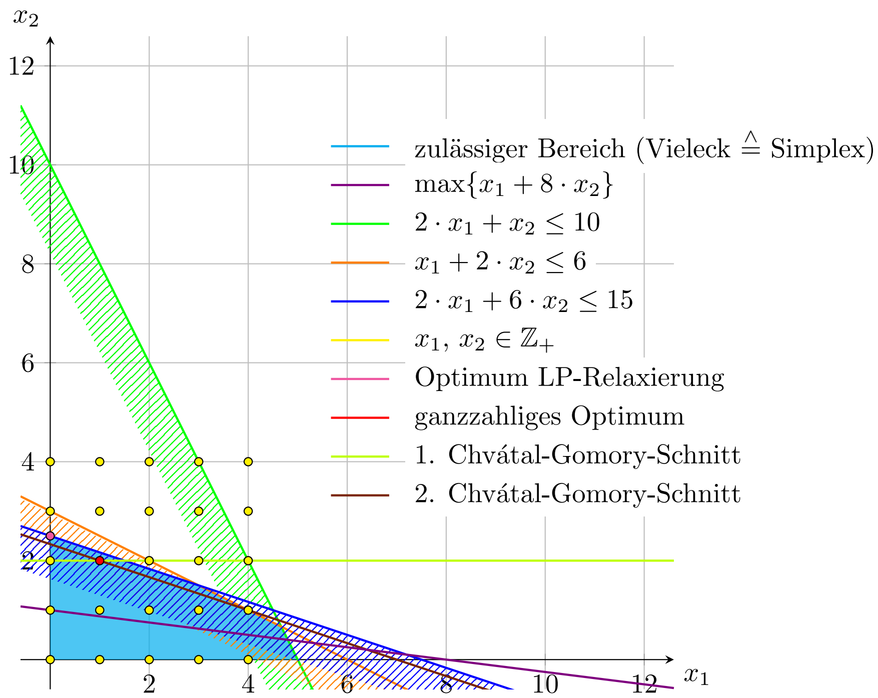
$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 5 & + & x_5 & - & 5 \cdot x_6 \\
x_4 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} \cdot x_5 & - & x_6 \\
x_2 & = & 2 & & & - & x_6 \\
x_1 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{1}{2} \cdot x_5 & + & 3 \cdot x_6 \\
x_7 & = & -\frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} \cdot x_5 & & \\
z & = & 17.5 & - & \frac{1}{2} \cdot x_5 & - & 5 \cdot x_6
\end{array}$$

Austausch: x_7 austretend, x_5 eintretend

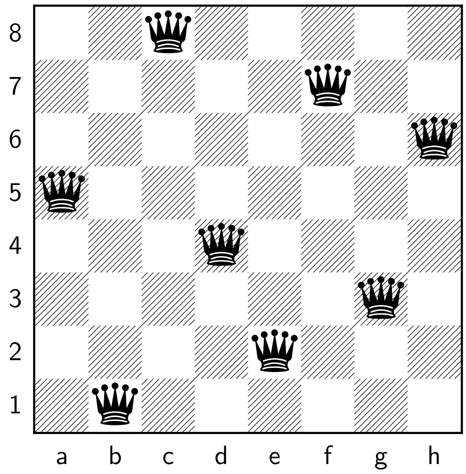
$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_3 & = & 6 & - & 5\cdot x_6 & + & 2\cdot x_7 \\
x_4 & = & 1 & - & x_6 & + & x_7 \\
x_2 & = & 2 & - & x_6 & & \\
x_1 & = & 1 & + & 3\cdot x_6 & - & x_7 \\
x_5 & = & 1 & & & + & 2\cdot x_7 \\
z & = & 17 & - & 5\cdot x_6 & - & x_7
\end{array}$$

$z^* = 17$ bei $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ ✓

b)



3



$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn in Reihe } i \text{ und Spalte } j \text{ eine Dame steht} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In jeder Reihe nur eine Dame:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

In jeder Spalte nur eine Dame:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

In jeder Diagonale eine Dame: (Links unten nach rechts oben)

$$\sum_{i=1}^{n-k} x_{i,i+k} \leq 1 \quad \forall k \in \{0, \dots, 6\}$$

$$\sum_{i=1}^{n-k} x_{i+k,i} \leq 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, 6\}$$

(Links oben nach rechts unten)

$$\sum_{i=1}^{n-k} x_{i,n+1-i-k} \leq 1 \quad \forall k \in \{0, \dots, 6\}$$

$$\sum_{i=1}^{n-k} x_{i+k,n+1-i} \leq 1 \quad \forall k \in \{1, \dots, 6\}$$