3. Dualitätstheorie

Wir betrachten das folgende LP:

$$\begin{array}{llllll} \max & 4x_1 & + x_2 & + 5x_3 & + 3x_4 & \\ \text{s.d.} & x_1 & - x_2 & - x_3 & + 3x_4 & \leq 1 \\ & 5x_1 & + x_2 & + 3x_3 & + 8x_4 & \leq 55 \\ & -x_1 & + 2x_2 & + 3x_3 & - 5x_4 & \leq 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Anstelle es zu lösen, wollen wir den Zielfunktionswert z^* abschätzen. Dazu brauchen wir eine hinreichend gute Lösung.

So zum Beispiel: $(0, 0, 1, 0) \to$ zulässig, $z^* \geq 5$

$(2, 1, 1, \frac{1}{3}) \to$ zulässig, $z^* \geq 15$

$(3, 0, 2, 0) \to$ zulässig, $z^* \geq 22$

Das ist unsystematisches Raten und der Simplex-Methode hoffnungslos unterlegen. Selbst wenn man auf diese Weise zufällig eine Optimallösung errät, hätte man damit noch keinen Beweis der Optimalität. Statt untere Schranken wollen wir jetzt obere Schranken für z^* suchen. Es gilt $z^* \leq 110$.

Wir multiplizieren die zweite Nebenbedingung mit 2:

$$2(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) \leq 10x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 16x_4 \leq 2 \cdot 55 = 110$$

Danach sind alle Koeffizienten größer-gleich als die jeweiligen Koeffizienten der Zielfunktion. Also können wir die Zielfunktion abschätzen:

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 16x_4 \leq 110$$

Diese Abschätzung gilt für alle zulässigen Lösungen, also auch für eine optimale. Wir können das noch verbessern! Es gilt $z^* \leq 58$. Wie das? Addiere die 2. und 3. Ungleichung, dann erhält man:

$$(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) + (-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 55 + 3 = 58$$

Auch hier sind die Koeffizienten stets größer-gleich den Koeffizienten der Zielfunktion.

Allgemein betrachtet bilden wir nicht-negative Linearkombinationen aus den Nebenbedingungen. Seien dazu $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^+$. Dann erhalten wir folgende Ungleichung:

$$y_1(x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4) + y_2(5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4) + y_3(-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4) \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Um sie mit der Zielfunktion vergleichen zu können, stellen wir diese Ungleichung um:

$$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + (3y_1 + 8y_2 - 5y_3)x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$$

Diese linke Seite der Ungleichung wollen wir nutzen, um die Zielfunktion abzuschätzen. Das funktioniert, wenn die Koeffizienten jeweils größer-gleich den Koeffizienten der Zielfunktion sind:

$$\begin{array}{rl} y_1 + 5y_2 - y_3 & \geq 4 \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq 1 \\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3 & \geq 5 \\ 3y_1 + 8y_2 - 5y_3 & \geq 3 \end{array}$$

Wenn $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ und sie diese vier Ungleichungen erfüllen, dann erfüllt jede zulässige Lösung x_1, x_2, x_3, x_4 die Ungleichung $\underbrace{4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4}_{z^*} \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$

Das gilt insbesondere für den Optimalwert: $z^* \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$ 16. März 2024

Die rechte Seite dieser Gleichung sollte so klein wie möglich sein, damit die Schranke möglichst gut ist. Damit ist das „Problem der best-möglichen oberen Schranke" wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{lllll} \min & y_1 & + 55y_2 & + y_3 & \\ \text{s.d.} & y_1 & + 5y_2 & - y_3 & \geq 4 \\ & -y_1 & + y_2 & + 2y_3 & \geq 1 \\ & -y_1 & + 3y_2 & + 3y_3 & \geq 5 \\ & 3y_1 & + 8y_2 & - 5y_3 & \geq 3 \\ & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

Interessanterweise ist dieses Problem wieder ein LP, genannt das **duale lineare Optimierungsproblem**. Das Originalproblem wird auch als **primales lineares Optimierungsproblem** bezeichnet.

Das duale Problem

Gegeben sei ein primales LP in Standardform:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.d.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \end{array}$$

Dann ist das dazugehörige duale LP gegeben durch:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{s.d.} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j = 1, \dots, n \\ & y_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \end{array}$$

Satz 3.1

Ist $x_1, \dots, x_n$ eine primale zulässige Lösung und $y_1, \dots, y_m$ eine duale zulässige Lösung, so gilt $c^T x \leq b^T y$.

Beweis: $c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = b^T y$. □

Korollar 3.2

Ist $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ und $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ ein Paar primal-dual zulässiger Lösungen mit $c^Tx^* = b^Ty^*$, dann sind sie Optimallösungen für das primale bzw. duale Problem.

Beweis: Sei $(x_1, \dots, x_n)$ eine beliebige primale zulässige Lösung und $(y_1, \dots, y_m)$ eine beliebige duale zulässige Lösung. Wenden die Abschätzung aus Satz 3.1. zweimal an und erhalten: $c^Tx \leq b^Ty^* = c^Tx^*$, $b^Tx \geq c^Tx = b^Ty^*$ □

Mit Satz 3.1 und Korollar 3.2 können wir leicht zeigen, dass die primal zulässige Lösung $x = (0, 14, 0, 5)$ optimal ist. Wir nehmen dazu die dual zulässige Lösung $y = (11, 0, 6)$ und erhalten $c^Tx = b^Ty$.

Um diesen Satz anwenden zu können, müssen wir immer ein Paar primal-dualer Lösungen angeben. Dieses ist eine schwache Dualitätsaussage im Vergleich zum nächsten Satz. Es genügt, dass das Problem eine primal zulässige Lösung hat. Dies ist die starke Dualitätsaussage der linearen Programmierung.

Satz 3.3 (Gale, Kuhn, Tucker)

Wenn das primale LP eine Optimallösung x^* hat, dann hat auch das zugehörige duale LP eine Optimallösung y^* und es gilt $c^Tx^* = b^Ty^*$.

Die zentrale Idee des Beweises dieses Satzes wollen wir zunächst am vorherigen Beispiel zeigen. Um das LP mit dem Simplex-Verfahren zu lösen, führen wir die drei Schlupfvariablen x_5, x_6, x_7 ein. Ferner haben wir die Dualvariablen y_1, y_2, y_3 als Multiplikatoren der drei Gleichungen. Man kann also sagen, dass y_1 und x_5, y_2 und x_6 und y_3 und x_7 gehören zusammen.

Das Simplex-Verfahren liefert folgendes optimales Dictionary:

$$\begin{aligned} x_2 &= 14 - 2x_1 - 4x_3 - 5x_5 - 3x_7 \\ x_4 &= 5 - x_1 - x_3 - 2x_5 - x_7 \\ x_6 &= 1 + 5x_1 + 9x_3 + 21x_5 + 11x_7 \\ z &= 29 - x_1 - 2x_3 - 11x_5 - 6x_7 \end{aligned}$$

Die Schlupfvariablen in der z-Gleichung haben die Koeffizienten -11 bei x_5, 0 bei x_6 und -6 bei x_7. Das Negative dieser Werte liefert dann die Werte dieser Werte liefert dann die Optimallösung für das Duale: $y_1 = 11$, $y_2 = 0$, $y_3 = 6$.

Beweis: Es genügt eine dual zulässige Lösung y^* mit $b^Ty^* = c^Tx^*$ anzugeben. Aus Korollar 3.2 folgt dann, dass sie eine Optimallösung für das duale LP ist.

Dazu lösen wir das primale LP mit dem Simplex-Verfahren:

Als erstes führen wir Schlupfvariablen $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ ein: $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$

Danach lösen wir das LP und erhalten am Ende folgende umgeformte letzte z-Gleichung: $z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c}_k x_k$.

Da z^* der Optimalwert mit Lösung x^* ist, gilt $z^* = c^Tx^*$. Wir setzen nun $y_i^* := -\bar{c}_{n+i}$ für alle $i = 1, \dots, m$ und zeigen, dass y^* dual zulässig ist. Es ist $\bar{c}_{n+i} \leq 0$ (wegen Optimalität des letzten Dictionaries), also $y_i^* \geq 0 \; \forall i = 1, \dots, m$.

Wir substituieren c^Tz für z und setzen die Definition der Schlupfvariablen in die z-Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c^Tx = z &= z^* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c}_k x_k \\ &= z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{n+i} \Big(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) \\ &\overset{\text{Def } y^*}{=} z^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \Big(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) \\ &= (z^* - b^Ty^*) + \sum_{j=1}^{n} \Big(\bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\Big) x_j \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Also folgt durch Koeffizientenvergleich: $z^* = b^Ty^*$ und $c_j = \bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$.

Da $\bar{c}_j \leq 0$, folgt für alle $j = 1, \dots, n$: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j$. $\rightarrow$ Also ist y^* dual zulässig und besitzt daher den richtigen Zielfunktionswert. □

Zum primale LP: $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ s.d. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \;\; \forall i = 1, \dots, m$, $x_j \geq 0 \;\; \forall j = 1, \dots, n$

gehört das duale LP: $\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ s.d. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \;\; \forall j = 1, \dots, n$, $y_i \geq 0 \;\; \forall i = 1, \dots, m$

Das duale LP kann umgeschrieben werden zu:

$$\max \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i \quad \text{s.d.} \; \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i \leq -c_j \;\; \forall j = 1, \dots, n, \quad y_i \geq 0 \;\; \forall i = 1, \dots, m$$

Damit liegt das duale LP wieder in Standardform vor. Wir bilden das duale LP zu diesem dualen LP:

$$\min \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \quad \text{s.d.} \; \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \geq -b_i \;\; \forall i = 1, \dots, m, \quad x_j \geq 0 \;\; \forall j = 1, \dots, n$$

Auch dieses kann wieder umgeschrieben werden:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{s.d.} \; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \;\; \forall i = 1, \dots, m, \quad x_j \geq 0 \;\; \forall j = 1, \dots, n$$

$\Leftarrow$ primales LP vom Anfang

Satz 3.4

Das Duale des Dualen ist das Primale

Beweis: siehe oben!

Korollar 3.5

Das primale LP hat genau dann eine Optimallösung, wenn das dazugehörige duale LP eine Optimallösung hat.

Beweis: Wenn das primale LP eine Optimallösung hat, dann hat nach Satz 3.3 das duale LP eine Optimallösung. Wenn das duale LP eine Optimallösung besitzt, dann hat nach dem Satz 3.3 auch das primale LP eine Optimallösung, da nach Satz 3.4 das Duale des Dualen das Primale ist. □

Korollar 3.6

i) Wenn das primale LP unbeschränkt ist, dann ist das duale LP unzulässig.

ii) Wenn das duale LP unbeschränkt ist, dann ist das primale LP unzulässig.

Beweis: i) Angenommen, es gibt eine dual zulässige Lösung y. Dann wäre nach Satz 3.1 $c^Tx \le b^Ty$ für alle primal zulässigen Lösungen. Setze $M = b^Ty$. Da das primale LP unbeschränkt ist, gibt es zu M eine zulässige Lösung x' mit $c^Tx > M$ ↯ (Satz 3.1)

ii) Man argumentiert analog unter Verwendung von Satz 3.4

Kor. 3.7

Wenn das primale LP und das duale LP eine zulässige Lösung haben, dann haben sie auch beide Optimallösungen.

Aber: Das primale und duale LP können auch beide gleichzeitig unzulässig sein, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel

P)
$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.d.}\ & x_1 - x_2 \le 1 \\ & -x_1 + x_2 \le -2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ D)
$$\begin{aligned} \min\ & y_1 - 2y_2 \\ \text{s.d.}\ & y_1 - y_2 \ge 2 \\ & -y_1 + y_2 \ge -1 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Beide LP sind unzulässig!

Der praktische Nutzen der Dualitätstheorie

i) Wenn ein LP mit sehr viel mehr Ungleichungen als Variablen lösen möchte (z.B. $m=99$, $n=9$), dann wird das primale Dictionary 100 Zeilen haben. Dualisiert man das LP, so hat ein duales Dictionary nur 10 Zeilen. Da die Anzahl der Simplex-Iterationen (empirisch) proportional zur Anzahl der Zeilen des Dictionary ist und relativ unabhängig von der Anzahl der NBs. Der Simplex terminiert so schneller.

ii) Die Optimallösung des dualen LP liefert ein Optimalitätszertifikat für die primale Optimallösung: Um uns von der Optimalität einer primalen Lösung x^* zu überzeugen, ermitteln wir die dazugehörige Duallösung y^*. Wir setzen diese in das duale LP ein, um zu testen, ob sie dual zulässig ist. Danach testen wir noch $c^Tx^* = b^Ty^*$.
Der Aufwand, die Optimalität auf diese Weise zu verifizieren, ist wesentlich geringer als das primale LP mit dem Simplex zu lösen.

21. Mai 2024

Unter gewissen Umständen kann das Optimalitätszertifikat y^* allein aus der Optimallösung x^* gewonnen werden. Die Idee ist, die Gleichung $cx^* = by^*$ in ihre Bestandteile zu zerlegen.

Satz 3.8

Satz vom gegenseitigen (komplementären) Schlupf.

Sei x^* eine primal zulässige Lösung und y^* eine dual zulässige Lösung. Dann sind x^*, y^* genau dann Optimallösungen, wenn: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$ oder $x_j^* = 0$ $\forall j = 1, \dots, n$

und $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = c_j$ oder $x_i^* = 0$ $\forall i = 1, \dots, m$

Beweis: Seien x^*, y^* primal-dual zulässige Lösungen. Dann gilt: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \le b_i$ $\forall i$, $x^* \ge 0$ und $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \ge c_j$ $\forall j$, $y^* \ge 0$.

Daraus folgt dann:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j^*\Big) y_i^* \le b_i y_i^* \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \text{und} \quad c_j x_j^* \le \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\Big) \cdot x_j^* \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Summiert man diese Ungleichungen für alle i bzw. für alle j, dann erhalten wir die Abschätzung: $cx^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \le \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\Big) x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\Big) y_i^* \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = by^*$

Also gilt $cx^* = by^*$ genau dann, wenn $\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\Big) y_i = b_i y_i^*$ (a) und $c_j x_j^* = \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\Big) x_j^*$ (b)

Um die Gleichheit für (a) zu bekommen, muss $y_i^* = 0$ oder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$ gelten. Entsprechend für die Gleichheit in (b) muss $x_j^* = 0$ oder $c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$ sein.
Genau dann, wenn diese Eigenschaften erfüllt sind, gilt $cx^* = by^*$. Genau dann sind sie optimal □

Den "gegenseitigen Schlupf" erkennt man, wenn man primale Schlupfvariablen für die i-te primale Ungleichung und duale Schlupfvariablen y_{m+j} für die j-te duale Ungleichung einführt. Dann sagt Satz 3.8, dass aus jedem der $n+m$ primal-dualen Variablen Paaren (mind.) eine den Wert Null haben muss.

Korollar 3.9

Eine primal zulässige Lösung x^* ist genau dann optimal, wenn es eine dual zulässige Lösung y^* gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j \text{ für alle } j \text{ mit } x_j^* > 0 \text{ und } y_i^* = 0 \text{ für alle } i \text{ mit } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i.$$

Beweis: Ist x^* eine optimale primale Lösung, dann gibt es nach dem Dualitätssatz (Satz 3.8) eine optimale duale Lösung y^*. Insbesondere ist y^* dual zulässig, wie behauptet.
Das Paar x^*, y^* erfüllt die Bedingungen aus Satz 3.8, also auch die Bedingungen aus dem Korollar 3.9.
Sei umgekehrt y^* eine dual zulässige Lösung, die die Bedingungen aus Korollar 3.9 erfüllt. Dann erfüllt sie auch die Bedingung aus Satz 3.8. Also ist x^* nach Satz 3.8 eine primal optimale Lösung (und y^* ist dual optimal). □

Korollar 3.9 wird genutzt, um eine mutmaßlich primal optimale Lösung x^* zu überprüfen, wenn kein Optimalitätszertifikat y^* mitgeliefert wurde. Dazu setzt man als erstes das lineare Gleichungssystem aus Korollar 3.9 auf. Dann löst man dieses System und erhält als Lösung den Vektor y^*. Wenn die Lösung eindeutig und dual zulässig ist, dann ist x optimal. (Man kann zeigen, dass eine eindeutige Lösung entsteht, wenn x^* nicht-degenerierte Basislösung ist.)

Beispiel 3.10

i)
$$\begin{array}{lrrrrrrl}
\max & 18x_1 & -7x_2 & +12x_3 & -5x_4 & & +8x_6 & \\
\text{s.d.} & 2x_1 & -6x_2 & +2x_3 & +7x_4 & +3x_5 & +8x_6 & \le 1 \\
 & -3x_1 & -x_2 & +4x_3 & -3x_4 & +x_5 & +2x_6 & \le -2 \\
 & 8x_1 & -3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & & +2x_6 & \le 4 \\
 & 4x_1 & & +8x_3 & +7x_4 & +x_5 & +3x_6 & \le 1 \\
 & 5x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +6x_4 & -2x_5 & -x_6 & \le 5 \\
 & & & & x_1, \dots, x_6 & & & \ge 0
\end{array}$$

Es wird behauptet, $x^* = (2, 4, 0, 0, 7, 0)$ sei eine optimale Lösung. Das Gleichungssystem aus Korollar 3.9. sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{rrrrrl}
2y_1 & -3y_2 & +8y_3 & +4y_4 & +5y_5 & = 18 \\
-6y_1 & -y_2 & -3y_3 & & +2y_5 & = -7 \\
3y_1 & +y_2 & & -y_4 & -2y_5 & = 0 \\
 & y_2 & & & & = 0 \\
 & & & & y_5 & = 0
\end{array}$$

Seine eindeutige Lösung $y^* = (\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 1, 0)$ ist dual zulässig

ii)
$$\begin{array}{lrrrrrl}
\max & 8x_1 & -9x_2 & +12x_3 & +4x_4 & +11x_5 & \\
\text{s.d.} & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & +x_4 & +3x_5 & \le 1 \\
 & x_1 & +7x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & \le 1 \\
 & 5x_1 & +4x_2 & -6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & \le 22 \\
 & & & x_1, \dots, x_5 & & & \ge 0
\end{array}$$

Es wird behauptet, $x^* = (0, 2, 0, 7, 0)$ sei eine optimale Lösung.

Gleichungssystem:
$$\left.\begin{array}{rrrl}
-3y_1 & +7y_2 & +4y_3 & = -9 \\
y_1 & -2y_2 & +2y_3 & = 4 \\
 & y_2 & & = 0
\end{array}\right\}$$
eindeutige Lösung $y^* = (3{,}4;\ 0;\ 0{,}3)$ ist nicht dual zulässig wegen

$\Leftrightarrow x^*$ ist nicht optimal!

Zur ökonomischen Bedeutung der Dualvariablen

Für viele LPs aus ökonomischen Anwendungen kann man den Dualvariablen $y_1, \dots, y_m$ eine Bedeutung zuweisen.

Satz 3.11

Wenn ein LP in Standardform mindestens eine nicht-degenerierte optimale Basislösung hat, dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Ist $|t_i| \le \varepsilon$ $\forall i = 1, \dots, m$ dann hat das Problem
$$\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{s.d.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + t_i & \forall i = 1, \dots, m \\
 & x_j \ge 0 & \forall j = 1, \dots, n
\end{array}$$
eine optimale Lösung und dessen Optimalwert ist $z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* t_i$ mit z^* Optimalwert des LP und $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ Optimallösung des Duals.

Satz 3.11 zeigt den Effekt von z.B. kleinen Schwankungen in den Rohstoffen auf den Profit einer Firma. Mit jeder Extraeinheit von Ressource i wächst der Gewinn um y_i^* Euro. Somit zeigt y_i^* den maximalen Betrag an, den die Firma für eine zusätzliche Einheit von Ressource i zahlen sollte. Daher wird y_i^* auch als Marginalwert der i-ten Ressource oder auch Schattenpreis bezeichnet

Beispiel 3.12

Ein Förster hat 100 km² Wald. Diese zu fällen und mit Eichen aufzuforsten, würde 10€/km² kosten und einen Ertrag von 50 Euro/km² bringen.

Alternative: Kiefer, kostet jetzt 50€/km² und später 120€/km² einbringt.

Der Nettoprofit sind 40€ bzw. 70€ pro km². Der profitablere Anbau von Kiefern kann nicht auf der gesamten Fläche stattfinden, da er nur 4000€ zur Deckung der unmittelbaren Kosten hat. Das Problem des Försters ist:
$$\begin{array}{lrrl}
\max & 40x_1 & +70x_2 & \\
\text{s.d.} & x_1 & +x_2 & \le 100 \\
 & 10x_1 & +50x_2 & \le 4000 \\
 & & x_1, x_2 & \ge 0
\end{array}$$

Die Optimallösung ist $x_1 = 25$ und $x_2 = 75$ mit $z^* = 6250$€

Unteranderem Kapital ist eine limitierende Ressource und kann durch Bankkredit erhöht werden. Angebot: 100€ jetzt, bei Ernte 180€ zurückzahlen. Lohnt sich das?

Nach Satz 3.11 müssen wir die Dualvariablen nutzen: $y_1^* = 32{,}5$ und $y_2^* = 0{,}75$

Der Förster sollte den Kredit nur aufnehmen, wenn die Zinsen weniger als 0,75€ pro geliehenen Euro ausmachen.

Diese Aussage kann man auch direkt sehen: Förster leiht t Euro $\Rightarrow$ LP:
$$\begin{array}{lrrl}
\max & 40x_1 & +70x_2 & \\
\text{s.d.} & x_1 & +x_2 & \le 100 \\
 & 10x_1 & +50x_2 & \le 4000 + t \\
 & & x_1, x_2 & \ge 0
\end{array}$$

Jede zulässige Lösung x_1, x_2 dieses Problems erfüllt: $40x_1 + 70x_2 = 32{,}5 \cdot (x_1 + x_2) + 0{,}75(10x_1 + 50x_2) \le 3250 + 0{,}75 \cdot (4000 + t) = 6250 + 0{,}75t$

Der Zusatzgewinn wird niemals größer als $0{,}75t$.

Nehmen wir an, es gibt eine weitere Option: Kirschholz, kostet a€/km²

Dann sind die Gesamtkosten für die Investition $(32{,}5 + 0{,}75a)$€/km² und der Anbau lohnt nur, wenn der spätere Ertrag diesen Wert übersteigt.