

# 1. Checkliste

- Dualer Simplex ✓
- Gemischt-ganzzahlige Optimierung ✓
- Modellierung mit Binär-Variablen
- Branch-and-Bound ✓
- Schnittebenenverfahren

# 2. Dualer Simplex

Ein LP mit Standardform

$$\begin{array}{ll}\max & cx \\ \text{so dass} & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0\end{array}$$

- heißt – **primal zulässig** wenn  $b \geq 0$   
– **dual zulässig** wenn  $c \leq 0$

## Zielsetzung

„Normaler“ Simplex    Start: primal zulässig, dual nicht unbedingt  $\rightarrow$  iteriere bis dual zulässig  $\rightarrow$  optimal.

**Dualer Simplex**        Start: **dual zulässig**, primal nicht  $\rightarrow$  iteriere, bis primal zulässig  $\rightarrow$  optimal.

- Als austretende Variable wird die Basisvariable gewählt, die ein negatives  $b_i$ , und unter allen solchen das kleinste hat.
  - Es gibt keine austretende Variable (alle  $b_i \geq 0$ )  $\rightarrow$  Dictionary ist nun auch primal zulässig  $\rightarrow$  optimal und terminiere.
- Als eintretende Variable wird die Nichtbasisvariable gewählt, die in der Zeile der austretenden Variable einen positiven Koeffizienten (negatives  $\bar{a}_{ij} < 0, \bar{a} = -a$ ), und unter allen solchen das kleinste Verhältnis  $\frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{ij}} \left( = \frac{|c_{ij}|}{a_{ij}} \right)$  hat.
  - Es gibt keine eintretende Variable (alle  $\bar{a}_{ij} \geq 0$ )  $\rightarrow$  das duale Problem ist unbeschränkt  $\rightarrow$  das primale Problem ist unzulässig, terminiere.
- Austausch mittels Umstellen und Einsetzen in allen anderen Gleichungen (wie bei normalen Simplex)
- $c \not\leq 0 \rightarrow$  Phase 1: Dualer Simplex mit künstlicher Zielfunktion  $z = -1 \cdot x \rightarrow$  terminiert mit primal zulässigem Dictionary  $\rightarrow$  Phase 2: originale Zielfunktion einsetzen + normaler Simplex

Beispiel:

primales Dictionary:

$$\begin{aligned}x_1 &= -4 + 3 \cdot x_2 - 11 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 \\x_3 &= 3 - 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_4 - 2 \cdot x_5 \\z &= 12 - 4 \cdot x_2 - 1 \cdot x_4 - 1 \cdot x_5\end{aligned}$$

- dual zulässig da  $c \leq 0$
- austretende Variable:  $x_1$  ( $b_1 = -4 < 0$ )
- eintretende Variable:  $x_5$  (kleinstes  $\frac{c_j}{a_{1j}}$ :  $\frac{c_5}{a_{15}} = \frac{1}{1} = 1 < \frac{4}{3} = \frac{c_2}{a_{12}}$ )

$$\begin{aligned}x_5 &= 4 + 1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 11 \cdot x_4 \\x_3 &= -5 - 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 19 \cdot x_4 \\z &= 8 - 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 12 \cdot x_4\end{aligned}$$

- dual zulässig da  $c \leq 0$
- austretende Variable:  $x_3$  ( $b_3 = -5 < 0$ )
- eintretende Variable:  $x_2$  (einzige Variable mit positivem Koeffizienten)

$$\begin{aligned}x_5 &= 1 - \frac{1}{5} \cdot x_1 - \frac{3}{5} \cdot x_3 - \frac{2}{5} \cdot x_4 \\x_2 &= 1 + \frac{2}{5} \cdot x_1 + \frac{1}{5} \cdot x_3 + \frac{19}{5} \cdot x_4 \\z &= 7 - \frac{7}{5} \cdot x_1 - \frac{1}{5} \cdot x_3 - \frac{79}{5} \cdot x_4\end{aligned}$$

Dictionary ist nun auch primal zulässig, da  $b \geq 0 \rightarrow$  optimal

### 3. Gemischt-ganzzahlige Optimierung

- Ganzzahliges Lineares Programm (Integer Linear Program, **ILP**):

$$\max\{A \cdot x \leq b \mid x \in \mathbb{Z}^n\}$$

- Gemischt-ganzzahliges Lineares Programm (Mixed Integer Linear Program, **MILP**):

$$\max\{A \cdot x \leq b \mid x \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{Z}^p, p \in \mathbb{Z}, 1 \leq p \leq n\}$$

- Binär-ganzzahliges Programm (Binary Integer Program, **BIP**):

$$\max\{A \cdot x \leq b \mid x \in \{0,1\}^n\}$$

### 4. Branch-and-Bound

1. LP-Relaxierung: Ganzzahl-Bedingung ignorieren,  $LP(S)$  mit Simplex lösen:  $\bar{z} \leftarrow z$  ( $\bar{z} :=$  obere Schranke), wenn  $x$  Brüche enthält  $\rightarrow \underline{z} = -\infty$  (untere Schranke)
2. Verzweigen: Teile Problem  $S_i$  in  $S_{i1} := S_i \cap \{x \mid x_j \leq \lfloor x_j \rfloor\}$  und  $S_{i2} := S_i \cap \{x \mid x_j \geq \lceil x_j \rceil\}$ , und füge beide zu einer Warteschlange hinzu.  $x_j$  ist Variable mit Bruch in der Lösung von  $S_i$ .
3. Reoptimiere erstes Problem  $LP(S_i)$  in Warteschlange mit dualem Simplex:
  - Füge Ganzzahl-Bedingung an  $x_j$  als neue NB-Variable hinzu:
    - $x_j \leq a \rightarrow x'_j := -x_j + a, x'_j \geq 0$  (Gleichung von  $x_j$  einsetzen)
    - $x_j \geq b \rightarrow x'_j := x_j - b, x'_j \geq 0$  (Gleichung von  $x_j$  einsetzen)
  - der berechnete LP-Optimalwert  $\bar{z}^i$  ist obere Schranke für diesen Teilbaum
  - Ist  $LP(S_i)$  unzulässig  $\rightarrow$  schneide ab (aufgrund Unzulässigkeit)
  - Ist  $\bar{z}^i \leq \underline{z} \rightarrow$  schneide ab (aufgrund der Schranke)
  - $x \in \mathbb{Z}^n$ :  $\underline{z} \leftarrow \max\{\underline{z}, \bar{z}^i\}$ ,  $x^* \leftarrow x$ , schneide ab (aufgrund Optimalität)
  - $x$  enthält Brüche  $\rightarrow$  verzweige wie oben beschrieben
4. Gib  $x^*$  und  $\underline{z}$  zurück, wenn Warteschlange leer ist.

Beispiel:

LP:

$$\left. \begin{array}{rcll} \max & 4 \cdot x_1 & - & x_2 \\ \text{so dass} & 7 \cdot x_1 & - & 2 \cdot x_2 \leq 14 \\ & & & x_2 \leq 3 \\ & 2 \cdot x_1 & - & 2 \cdot x_1 \leq 3 \\ & & & x \leq \mathbb{Z}^2 \end{array} \right\} S$$

LP-Relaxierung:

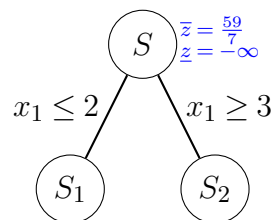
$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & \frac{20}{7} & - \frac{1}{7} \cdot x_3 - \frac{2}{7} \cdot x_4 \\ x_2 & = & 3 & - x_4 \\ x_5 & = & \frac{23}{7} & + \frac{2}{7} \cdot x_3 - \frac{10}{7} \cdot x_4 \\ z & = & \frac{59}{7} & - \frac{4}{7} \cdot x_3 - \frac{1}{7} \cdot x_4 \end{array}$$

optimale Dictionary nach Simplex

→ obere Schranke  $\bar{z} = \frac{59}{7}$ , fraktionale Lösung  $x = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ 3 \end{pmatrix}$

→ Verzweigen

Aufzählungsbaum:



Mit  $S_1 := S \cap \{x \mid x_1 \leq 2\}$ ,  $S_2 := S \cap \{x \mid x_1 \geq 3\}$ ,  $Q = [S_1, S_2]$  (Warteschlange)

LP( $S_1$ ) lösen:

$x_1 \leq 2 \rightarrow x'_1 := -x_1 + 2, x'_1 \geq 0$   
Neues Dictionary:

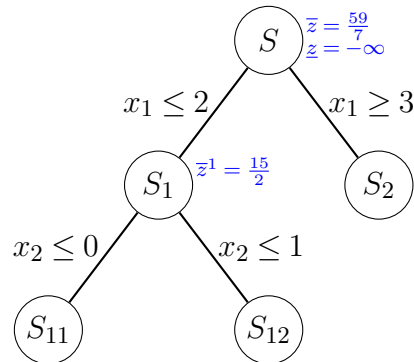
$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & \frac{20}{7} & - \frac{1}{7} \cdot x_3 - \frac{2}{7} \cdot x_4 \\ x_2 & = & 3 & - x_4 \\ x_5 & = & \frac{23}{7} & + \frac{2}{7} \cdot x_3 - \frac{10}{7} \cdot x_4 \\ x'_1 & = & -\frac{6}{7} & + \frac{1}{7} \cdot x_3 + \frac{2}{7} \cdot x_4 \\ z & = & \frac{59}{7} & - \frac{4}{7} \cdot x_3 - \frac{1}{7} \cdot x_4 \end{array}$$

Reoptimieren mit dualen Simplex liefert:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & 2 & - x'_1 \\ x_2 & = & \frac{1}{2} & + \frac{1}{2} \cdot x_5 - x'_1 \\ x_3 & = & 1 & + x_5 + 5 \cdot x'_1 \\ x_4 & = & \frac{5}{2} & - \frac{1}{2} \cdot x_5 + 5 \cdot x'_1 \\ z & = & \frac{15}{2} & - \frac{1}{2} \cdot x_5 - 3 \cdot x'_1 \end{array}$$

→ obere Schranke  $\bar{z}^1 = \frac{15}{2}$ ,  $\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^2 \rightarrow$  Verzweigen

Aufzählungsbaum:



Mit  $S_{11} := S_1 \cap \{x \mid x_2 \leq 0\} = S \cap \{x \mid x_1 \leq 2, x_2 \leq 0\}$ ,  
 $S_{12} := S_1 \cap \{x \mid x_2 \geq 1\} = S \cap \{x \mid x_1 \leq 2, x_2 \geq 1\}$ ,  
 $Q = [S_2, S_{11}, S_{12}]$

LP( $S_2$ ) lösen:

$$x_1 \geq 3 \rightarrow x'_1 := x_1 - 3, x'_1 \geq 0$$

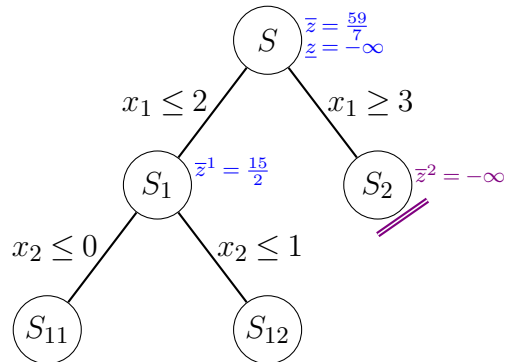
Neues Dictionary:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{20}{7} - \frac{1}{7} \cdot x_3 - \frac{2}{7} \cdot x_4 \\ x_2 &= 3 - x_4 \\ x_5 &= \frac{23}{7} + \frac{2}{7} \cdot x_3 - \frac{10}{7} \cdot x_4 \\ x'_1 &= -\frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot x_3 - \frac{2}{7} \cdot x_4 \\ z &= \frac{59}{7} - \frac{4}{7} \cdot x_3 - \frac{1}{7} \cdot x_4 \end{aligned}$$

Reoptimieren: LP unzulässig (austretend  $x'_1$ , kein eintretend da alle negativ)

→ obere Schranke  $\bar{z}^2 = -\infty$ , Abschneiden wegen Unzulässigkeit

Aufzählungsbaum:



$$Q = [S_{11}, S_{12}]$$

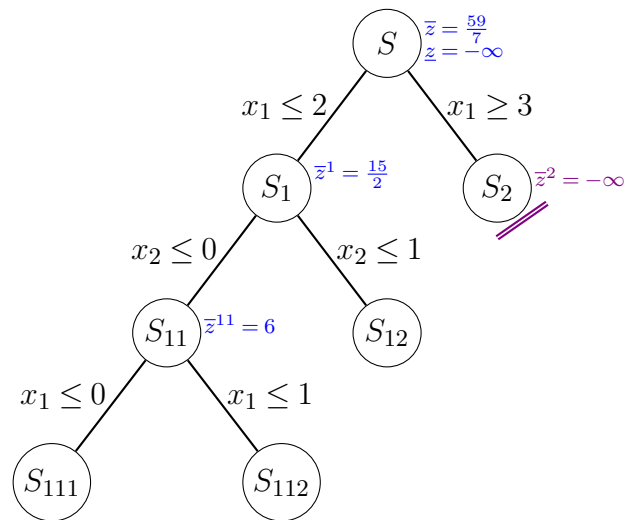
LP( $S_{11}$ ) lösen:

$$x_1 \leq 2 \rightarrow x'_1 := -x_1 + 2, x'_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0 \rightarrow x'_2 := -x_2, x'_2 \geq 0$$

Reoptimieren:  $\bar{z}^{11} = 6, \bar{x}^{11} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Verzweigen}$

Aufzählungsbaum:



$$Q = [S_{12}, S_{111}, S_{112}]$$

LP( $S_{12}$ ) lösen:

$$x_1 \leq 2 \rightarrow x'_1 := -x_1 + 2, x'_1 \geq 0$$

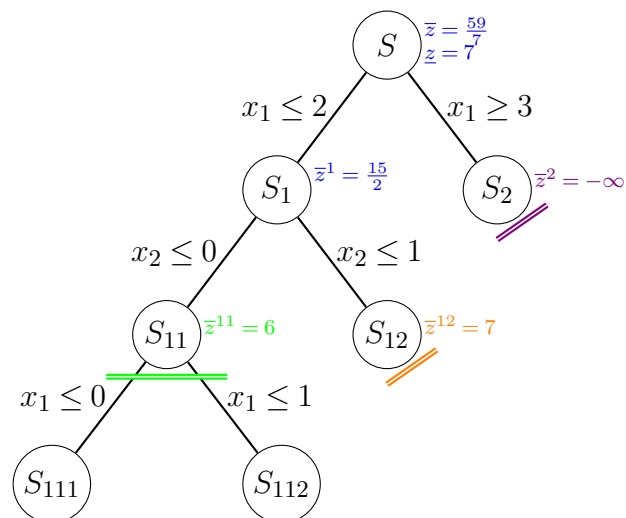
$$x_2 \geq 1 \rightarrow x'_2 := -x_2 + 1, x'_2 \geq 0$$

Reoptimieren:  $\bar{z}^{12} = 7, \bar{x}^{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \checkmark \rightarrow \underline{z} = 7$ , Abschneiden

wegen Optimalität

Abschneiden von  $S_{111}, S_{112}$  da deren obere Schranke  $\bar{z}^{11} = 6 < 7 = \underline{z}$

Aufzählungsbaum:



$Q = [] \rightarrow$  Fertig!

## 5. Gomorys fraktionales Schnittebenenverfahren

- IP mit LP-Relaxierung lösen (Ganzzahl-Bedingung ignorieren, Simplex)
- Wenn  $x \in \mathbb{Z}^n \rightarrow$  optimal und terminiere
- Sonst  $\exists i : x_i \notin \mathbb{Z} \rightarrow$  Mache aus Zeile  $i$  mittels Chvátal-Gomory-Schnitt eine weitere Ungleichung, und füge diese als neue Schlupfvariable dem Dictionary hinzu:

$$\begin{aligned}(a_i - \lfloor a_i \rfloor) \cdot x &\geq b_i - \lfloor b_i \rfloor \\ (-a_i + \lfloor a_i \rfloor) \cdot x &\leq -b_i + \lfloor b_i \rfloor \quad (\text{Standardform}) \\ x_{n+i} &= -b_i + \lfloor b_i \rfloor - (-a_i + \lfloor a_i \rfloor) \cdot x\end{aligned}$$

$$(\lfloor -a \rfloor = -\lceil a \rceil)$$

- Auf neuem Dictionary wieder dualen Simplex anwenden

Beispiel:

IP:

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & + & x_2 \\ \text{so dass} & 3 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 \leq 5 \\ & & & x_2 \leq 2 \\ & & & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

Nach Lösen der LP-Relaxierung mit Simplex erhält man:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & \frac{1}{3} & - \frac{1}{3} \cdot x_3 + \frac{2}{3} \cdot x_4 \\ x_2 & = & 2 & - x_4 \\ z & = & \frac{7}{3} & - \frac{1}{3} \cdot x_3 - \frac{1}{3} \cdot x_4 \end{array}$$

Dictionary optimal mit  $z^* = \frac{7}{3}$ , aber  $x_1 \notin \mathbb{Z} \rightarrow$  Hinzufügen neuer Ungleichung für  $x_1$  mittels Chvátal-Gomory-Schnitt:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor \right) \cdot x_3 + \left( -\frac{2}{3} - \left\lfloor -\frac{2}{3} \right\rfloor \right) \cdot x_4 &\geq \frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot x_3 + \frac{1}{3} \cdot x_4 &\geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Neues Dictionary:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & \frac{1}{3} & - \frac{1}{3} \cdot x_3 + \frac{2}{3} \cdot x_4 \\ x_2 & = & 2 & - x_4 \\ x_5 & = & -\frac{1}{3} & + \frac{1}{3} \cdot x_3 + \frac{1}{3} \cdot x_4 \\ z & = & \frac{7}{3} & - \frac{1}{3} \cdot x_3 - \frac{1}{3} \cdot x_4 \end{array}$$

Reoptimieren mit dualen Simplex  $\rightarrow x_5$  austretend,  $x_3$  eintretend:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & 0 & + x_4 - x_5 \\ x_2 & = & 2 & - x_4 \\ x_3 & = & 1 & - x_4 + 3 \cdot x_5 \\ z & = & 2 & - x_5 \end{array}$$

Dictionary ist optimal mit ganzzahliger Lösung  $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $z^* = 2 \checkmark$

## 6. Chvátal-Gomory-Schnitt