6. Schnittebenenverfahren

Wir beschränken uns auf IB der Form: $\max\{cx \mid x \in X\}$, wobei $X = \{x \mid Ax \le b,\ x \in \mathbb{Z}_+^n\}$.

Def 6.1 Eine Ungleichung $\alpha x \le \beta$ ist eine **gültige Ungleichung** für $X \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn $\alpha x \le \beta \ \forall x \in X$.

Was sind "gute" bzw. "nützliche" gültige Ungleichungen?

Beispiel 6.2 (Ganzzahliges Runden)
Wir betrachten die Menge $X = P \cap \mathbb{Z}^4$, wobei $P = \{x \in \mathbb{R}_+^4 \mid 13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \ge 723\}$. Teilt man nun diese Ungleichung durch 11, erhält man die gültige Ungleichung für P: $\frac{13}{11}x_1 + \frac{20}{11}x_2 + x_3 + \frac{6}{11}x_4 \ge \frac{72}{11}$. Da $x \ge 0$, erhält man durch Aufrunden aller Koeffizienten zur nächsten ganzen Zahl:

$$\underbrace{2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4}_{\in \mathbb{Z} \text{ mit } x \in \mathbb{Z}} \ge \frac{13}{11}x_1 + \frac{20}{11}x_2 + x_3 + \frac{6}{11}x_4 \ge \frac{72}{11}$$

Da x ganzzahlig ist und nun alle Koeffizienten ganzzahlig sind, wird das Ergebnis der linken Seite stets ganzzahlig sein. Daher können wir die rechte Seite auf die nächste ganze Zahl aufrunden und erhalten damit eine gültige Ungleichung für X: $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 7$.

Solche Nebenbedingungen kommen z.B. im sogenannten "**verallgemeinerten Transportproblem**" vor, in welchem die Nachfrage d_j des Kunden j durch verschiedene LKW-Typen befriedigt werden kann. Ein LKW des Typs i hat eine Kapazität C_i, es sind a_i viele davon vorhanden und die Kosten sind c_{ij}, wenn ein LKW vom Typ i zum Kunden j geschickt wird.

Daraus ergibt sich folgendes IP:

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.d.}\ & \sum_{i=1}^{m} C_i \cdot x_{ij} \ge d_{ij} \quad \text{für } j = 1,\dots,n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad \text{für } i = 1,\dots,m \\ & x \in \mathbb{Z}_+^{m,n} \end{aligned}$$

(x_{ij} gibt an, wie viele LKW Typ i zu Kunde j gehen).

Jede einzelne Nachfragenebenbedingung(*) ist von dem hier diskutierten Typ.

Beispiel 6.3 Gemischt-ganzzahliges Runden
Wir betrachten das selbige Beispiel wie zuvor, aber mit einer zusätzlichen kontinuierlichen Variablen. Sei dazu $X = P \cap (\mathbb{Z}^4 \times \mathbb{R})$, wobei $P = \{(y,s) \in \mathbb{R}_+^4 \times \mathbb{R}_+ \mid 13y_1 + 20y_2 + 11y_3 + 6y_4 + s \ge 723\}$.
Im Beispiel des verallgemeinerten Transportproblem: Es gibt vier Typen von LKWs und es ist zusätzlich möglich, den Kundenbedarf aus einer anderen Quelle zu bedienen. Teilt man die Nebenbedingungen durch 11, so erhält man $\frac{13}{11}y_1 + \frac{20}{11}y_2 + y_3 + \frac{6}{11}y_4 \ge \frac{72-s}{11}$. Der Term $\frac{72-s}{11}$ auf der rechten Seite wird beim Aufrunden $\lceil \frac{72-s}{11} \rceil$ von 7 auf 6 fallen, sobald s den kritischen Wert $s = 6$ erreicht hat. Aus dieser Beobachtung kann man dann die gültige Ungleichung $2y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{6}s \ge 7$ ableiten.

Wann ist eine Ungleichung $\alpha x \le \beta$ gültig für $P = \{x \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$?

Satz 6.4 $\alpha x \le \beta$ ist genau dann gültig für das LP, wenn es einen Vektor $u \ge 0$ gibt, sodass $uA \ge \alpha$ und $ub \le \beta$, also genau dann, wenn es Vektoren $u \ge 0$, $v \ge 0$ gibt, sodass $uA - v = \alpha$ und $ub \le \beta$.

Beweis: Aufgrund von LP-Dualität ist

$$\begin{aligned} \max\ & \alpha x \\ \text{s.d.}\ & x \in P \end{aligned} \iff \begin{aligned} \beta \ge \min\ & ub \\ \text{s.d.}\ & uA \ge \alpha \\ & u \ge 0 \end{aligned}$$

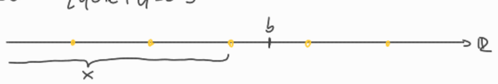
Führen wir die Schlupfvariable $v \ge 0$ ein, so erhalten wir den 2. Teil der Aussage. □

Wie sieht das bei ganzzahligen Programmen aus?

04. Juni 2024

Gültige Ungleichungen für ganzzahlige Programme: Wir betrachten dieselbe Frage für ein IP: $\{x \mid Ax \le b,\ x \in \mathbb{Z}_+^n\}$

Satz 6.5 Sei $X = \{y \in \mathbb{R} \mid y \le b\}$



dann ist die Ungleichung $y \le \lfloor b \rfloor$ gültig für X.

Beispiel 6.6 (Gültige Ungleichungen für ein IP)

Sei $X = P \cap \mathbb{Z}^n$ die Menge der ganzzahligen Punkte in P, wobei P gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 &\leq 14 \\ x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 - 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

i) Bilde eine neue Ungleichung mit nicht-negativen Gewichten und Aufsummieren der alten.
Hier: $u = (\frac{2}{7}, \frac{37}{63}, 0)^T$: $2x_1 + \frac{1}{63} x_2 \leq \frac{121}{21}$

ii) Reduktion der Koeffizienten auf der linken Seite zur nächsten ganzen Zahl (abrunden).
Hier: $2x_1 + 0x_2 \leq \frac{121}{21}$

iii) Da die linke Seite ganzzahlig ist in allen Punkten in X, kann auch die rechte Seite zur nächsten ganzen Zahl abgerundet werden.
Hier: $2x_1 \leq \lfloor \frac{121}{21} \rfloor = 5$ -> ist eine gültige Ungleichung!

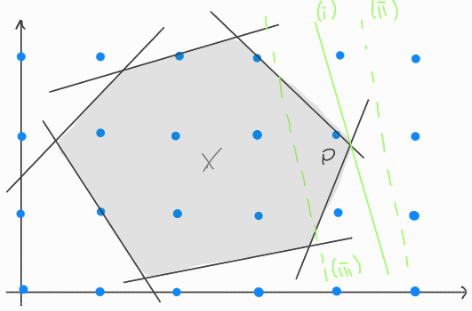
Wir können diesen Vorgang wiederholen mit einem Gewicht von $\frac{1}{2}$ nur auf dieser neuen Ungleichung, was dann die verbesserte Ungleichung $x_1 \leq \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$ ergibt.

Allgemein: Chvátal-Gomory-Verfahren zur Konstruktion einer gültigen Ungleichung für die Menge $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, wobei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$, A eine $n \times m$-Matrix mit Spalten $(a_1, \dots, a_n)$ und $u \in \mathbb{R}^m_+$.

(i) Die Ungleichung $\sum_{j=1}^n u \cdot a_j x_j \leq u \cdot b$ ist gültig für P, da $u \geq 0$ und $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \; \forall i = 1, \dots, m$

(ii) Die Ungleichung $\sum_{j=1}^n \lfloor u \cdot a_j \rfloor x_j \leq u \cdot b$ ist gültig für P, da $x \geq 0$.

(iii) Die Ungleichung: $\sum_{j=1}^n \lfloor u \cdot a_j \rfloor \cdot x_j \leq \lfloor u \cdot b \rfloor$ ist gültig für X, da x ganzzahlig ist und daher die gesamte rechte Seite ganzzahlig.



Satz 6.7 Jede gültige Ungleichung für X kann erzeugt werden, indem das CG-Verfahren endlich oft wiederholt wird.
Wir beschränken uns hier auf den 0-1-Fall. Sei daher $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, 0 \leq x_j \leq 1, \forall j = 1, \dots, n\} \neq \emptyset$ und $X = P \cap \{0,1\}^n$.
Wir nehmen an, das $\pi x \leq \pi_0$ eine gültige Ungleichung für X ist, wobei π, π_0 nur ganzzahlige Koeffizienten erhalten. Wir zeigen, dass $\pi x \leq \pi_0$ eine CG-Ungleichung ist, d.h. sie kann durch eine endliche Wiederholung des CG-Verfahren generiert werden. Der Beweis baut auf 5 Lemmata auf.

Lemma 6.8 Es gibt ein $t \in \mathbb{Z}_+$, so dass die Ungleichung $\pi x \leq \pi_0 + t$ eine gültige Ungleichung für P ist.

Beweis: $z_{LP} = \max\{\pi x \mid x \in P\}$ (beschränkt, nicht leer)

Setze: $t := \lceil z_{LP} \rceil - \pi_0$ □

Lemma 6.9 Es gibt eine (hinreichend große) ganze Zahl $M \in \mathbb{Z}_+$, so dass die Ungleichung (1) $\pi x \leq \pi_0 + M \cdot \sum_{j \in N^0} x_j + M \cdot \sum_{j \in N^1} (1 - x_j)$ gültig für P ist, für alle Partitionen (N^0, N^1) von $N := \{1, \dots, n\}$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Ungleichung (1) an den Ecken x^* von P erfüllt wird. Wenn $x^* \in \{0,1\}^n$, dann ist $\pi x^* \leq \pi_0$ und (1) wird auch erfüllt (für beliebige Werte $M \in \mathbb{Z}^+$), da auf der rechten Seite ggfs. noch weitere nicht-negative Terme dazukommen.
Sei $x^* \in P$ eine Ecke mit $x^* \notin \{0,1\}^n$. Dann gibt ein $\alpha > 0$, so dass $\sum_{j \in N^0} x_j^* + \sum_{j \in N^1} (1 - x_j^*) \geq \alpha$ für alle Partitionen (N^0, N^1) von N und alle fraktionalen Ecken x^* von P.
Konkret: Setze $\alpha := \min\{\min\{\sum_{j \in N^0} x_j^* + \sum_{j \in N^1} (1 - x_j^*) \mid (N^0, N^1) \text{ Partitionen von } N\} \mid x^* \text{ fraktionale Ecke von } P\}$
Das innere Minimum ist positiv, da bei einer fraktionalen Ecke x^* mindestens ein Index j existiert mit $x_j^* \notin \{0,1\}$. Also ist sowohl $x_j^* > 0$ als auch $1 - x_j^* > 0$. Alle anderen Terme sind ≥ 0. Da es sowohl nur endlich viele Partitionen als auch Ecken gibt, werden die Minima beide über endliche Mengen gebildet (und endliche Zahlenmengen haben stets ein minimales Element).
Wählt man $M \geq \frac{t}{\alpha}$, so folgt für alle Ecken x^* von P und alle (N^0, N^1)-Partitionen von N: $\pi x^* \leq \pi_0 + t \leq \pi_0 + M \cdot \alpha \leq \pi_0 + M \cdot \sum_{j \in N^0} x_j^* + M \cdot \sum_{j \in N^1} (1 - x_j^*)$. □

Lemma 6.10 Sei $\tau \in \mathbb{Z}_+$ und (N^0, N^1) eine Partition von N. Ist $\pi x \le \pi_0 + \tau + 1$ eine CG-Ungleichung für x^*, dann ist $\pi x \le \pi_0 + \tau + \sum_{j\in N^0} x_j^* + \sum_{j \in N^1}(1-x_j^*)$ eine CG-Ungleichung für X.

Beweis: Addiere die Ungleichung $\pi x \le \pi_0 + \tau + 1$ mit Gewicht $\frac{M-1}{M}$ zur Ungleichung (1) $\pi x \le \pi_0 + M \cdot \sum_{j \in N^0} x_j + M \cdot \sum_{j\in N^1}(1-x_j)$ mit Gewicht $\frac{1}{M}$, so entsteht daraus die bekannte Ungleichung.
(Bemerke: $\lfloor (\tau+1) \cdot \frac{M-1}{M} \rfloor = \tau$, ggfs. M noch größer wählen.) □

Lemma 6.11 Sei $p \in \{1, \dots, n\}$ und (T^0, T^1) eine Partition von $\{1, \dots, p-1\}$. Wenn $\pi x \le \pi_0 + \tau + \sum_{j \in T^0 \cup \{p\}} x_j + \sum_{j \in T^1}(1-x_j)$ und $\pi x \le \pi_0 + \tau + \sum_{j\in T^0} x_j + \sum_{j \in T^1 \cup \{p\}}(1-x_j)$ CG-Ungleichungen sind, dann ist $\pi x \le \pi_0 + \tau + \sum_{j \in T^0} x_j + \sum_{j\in T^1}(1-x_j)$ auch eine CG-Ungleichung

Beweis: Addiere die ersten beiden Ungleichungen jeweils mit Gewicht $\frac{1}{2}$, erhält man daraus die dritte (im Term $+\frac{1}{2}x_p + \frac{1}{2}(1-x_p)$ bleibt $\frac{1}{2}$ übrig, welches durch das CG-Verfahren zu 0 abgerundet wird. □

Lemma 6.12 Wenn $\pi x \le \pi_0 + \tau + 1$ eine CG-Ungleichung für X ist, dann ist $\pi x \le \pi_0 + \tau$ eine CG-Ungleichung für X.

Beweis: Da $\pi x \le \pi_0 + \tau + 1$ eine CG-Ungleichung für X ist, folgt aus Lemma 6.10, das $\pi x \le \pi_0 + \tau + \sum_{j \in N^0} x_j + \sum_{j\in N^1}(1-x_j)$ eine CG-Ungleichung für eine beliebige Aufteilung (N^0, N^1) von N. Sei $p := n$, so sind $(T^0 \cup \{p\}, T^1)$ und $(T^0, T^1 \cup \{p\})$ beides Aufteilungen von N.
Also sind $\pi x \le \pi_0 + \tau + \sum_{j \in T^0 \cup\{p\}} x_j + \sum_{j\in T^1}(1-x_j)$ und $\pi x \le \pi_0 + \tau + \sum_{j\in T^0} x_j + \sum_{j \in T^1 \cup \{p\}}(1-x_j)$ CG-Ungleichungen für X. Nach Lemma 6.11 ist dann
$\pi x \le \pi_0 + \tau + \sum_{j\in T^0} x_j + \sum_{j \in T^1}(1-x_j)$ eine gültige Ungleichung
Diese Argumente wiederhole man jetzt mit $p := n-1, n-2, \dots, 2, 1$. Am Ende sind $T^0 = T^1 = \emptyset$ und es folgt $\pi x \le \pi_0 + \tau$ ist eine CG-Ungleichung für X. □

Beweis des Satzes 6.7: Sei $\tau := t-1$, wobei t wie in Lemma 6.8 gewählt ist. Wende nun Lemma 6.12 auf die CG-Ungleichung $\pi x \le \pi_0 + t = \pi_0 + \tau + 1$ an, für $\tau = t-1, t-2, \dots, 1, 0$. Am Ende ist dann $\pi x \le \pi_0$ eine CG-Ungleichung für X. □

Angenommen, $X = P \cap \mathbb{Z}^n$ und wir kennen eine Formel F von gültigen Ungleichungen $\pi x \le \pi_0$ für X, wobei $(\pi, \pi_0) \in F$. In vielen Fällen enthält F zu viele Ungleichungen (z.B. 2^n oder mehr) um sie von Anfang an zu dem LP hinzufügen zu können. Überdies gibt es mit Blick auf die angegebene Zielfunktion auch gar nicht die Notwendigkeit gesamte konvexe Hülle $\mathrm{conv}(X)$ zu beschreiben, es genügt eine gute Beschreibung in der Nähe der Optimallösung. Wir beschreiben jetzt einen generischen Schnittebenenalgorithmus für ganzzahlige Programme $\max\{cx \mid x \in X\}$, welcher die „nützlichen Ungleichungen" aus F herausholt.

6. Juni 2024

Algorithmus 6.13 (Generisches Schnittebenenverfahren)
- Initialisierung: Setze $t := 0$ und $P^0 = P$
- Iteration t: Löse das LP $\bar{z}^t = \max\{cx \mid x \in P^t\}$. Sei x^t eine Optimallösung.
  Falls $x^t \in \mathbb{Z}^n$, dann STOPP: x^t ist eine Optimallösung für IP.
  Falls $x^t \notin \mathbb{Z}^n$, löse das Separierungsproblem für x^t bzgl. Familie F. Wenn eine Ungleichung $(\pi^t, \pi_0^t) \in F$ gefunden wurde mit $\pi x^t > \pi_0^t$ dann ist es eine Schnittebene.
  Setze $P^{t+1} = P^t \cap \{x \mid \pi^t x \le \pi_0^t\}$, $t = t+1$ und iteriere
  Andernfalls (wenn in F keine Ungleichung mit $\pi x^t > \pi_0^t$ gefunden wurde: STOPP

Wenn der Algorithmus abbricht, ohne eine ganzzahlige Lösung für das IP zu finden, dann ist zumindest das letzte P^t eine verbesserte Formulierung, die dann durch Verzweigen-und-Begrenzen gelöst werden kann.

Wir betrachten das ganzzahlige Programm $\max\{cx \mid Ax = b, x \in \mathbb{Z}^n_+\}$. Die Grundidee besteht darin, zunächst die zugehörige LP-Relaxierung $\max\{cx \mid Ax = b, x \in \mathbb{R}^n_+\}$ zu lösen und dadurch eine optimale Basis zu bestimmen. Dann wählt man eine Basisvariable die einen nicht-negativen Wert hat und generiert eine CG-Gleichung auf dieser Nebenbedingung, die zu dieser Basisvariablen gehört, um die LP optimale Lösung abzuschneiden.
Wir nehmen an, dass wir eine optimale zulässige Basis $B = (B_1, \dots, B_n) \subseteq \{1, \dots, n\}$ haben. Mit $N := \{1, \dots, n\} \setminus B$ sei die Menge der Nichtbasisvariablen bezeichnet.
Das Problem lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \max\ & \bar{z} = \sum_{j\in N} \bar{c}_j x_j \\ \text{s.d. } & x_{B_i} = \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & x \in \mathbb{Z}^n_+ \end{aligned}$$

In einer zulässigen Optimallösung sind $\bar{c} \le 0$ und in einer zulässigen Lösung gilt $\bar{b} \ge 0$. Wenn die optimalen zulässigen Basislösung x^* nicht ganzzahlig ist, dann gibt es eine Zeile $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $\bar{b}_i \notin \mathbb{Z}$. Der Chvátal-Gomory-Schnitt für diese Zeile i lautet dann: $x_{B_i} + \sum_{j\in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \le \lfloor \bar{b}_i \rfloor$. Da wir zunächst die linke Seite abrunden wird aus $=$ ein $\le$.
Wir eliminieren hier noch die Variable x_{B_i} (um die neue Nebenbedingung wieder ins Dictionary integrieren zu können). Dazu multiplizieren wir die Ungleichung mit (-1):

$-x_{B_i} - \sum_{j\in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \ge -\lfloor \bar{b}_i \rfloor$ und addieren die Gleichung aus dem Dictionary dazu: $\sum_{j\in N} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \ge \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$.

Setzen wir jetzt $f_j := \bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor$ $\forall j \in N$ und $f_0 := \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$, so lautet die Ungleichung $\sum_{j\in N} f_j x_j \ge f_0$.
Es gilt: $0 \le f_j < 1$ und $0 < f_0 < 1$.
Da $x_j^* = 0$ für alle Nichtbasisvariablen $j \in N$ in der optimalen zulässigen Basislösung, schneidet diese Ungleichung tatsächlich x^* ab.