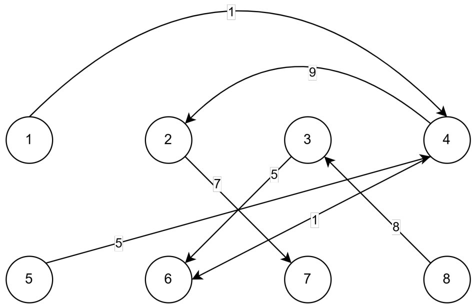
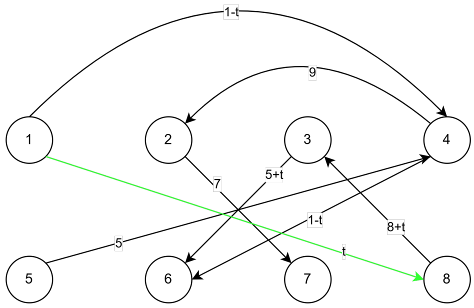
Lösungen zu Übungsblatt 3

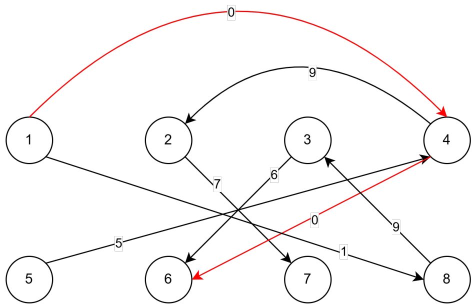
1



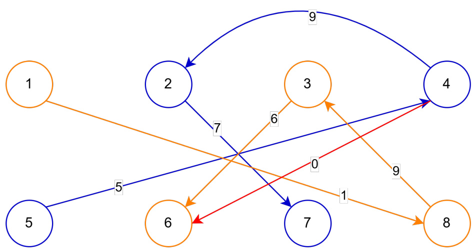
Eintretender Bogen $(1,8)$:



Austretender Bogen $(1,4)$ ($t = 1$ da $1-t$ strengste Bedingung):



Problem zerfällt in zwei Teilprobleme:



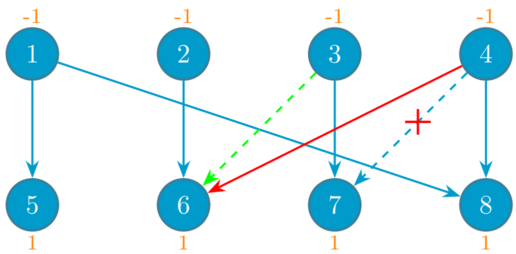
2

a)

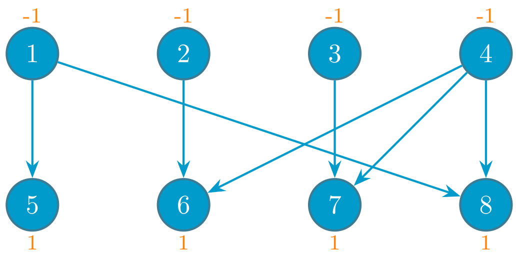
Die gegebene Startlösung ist mit Wurzel 1 stark zulässig, da alle Kanten $(i,j) \in T$ mit $x_{i,j} = 0$ von der Wurzel weg zeigen.

b)

Bereits in Iteration 3 zeigt nach dem Austausch $(4,7)$ durch $(4,6)$ der Bogen $(3,6)$ mit Fluss 0 schlussendlich zur Wurzel $w = 1$ hin. Da der Bogen $(3,6)$ nicht von der Wurzel weg zeigt, ist die Lösung nicht mehr stark zulässig.
Es hätte statt $(4,6)$ der Bogen $(3,6)$ als austretender Bogen gewählt werden müssen, um weiterhin eine stark zulässige Lösung zu behalten.



c) Fortsetzen von b)



mit resultierenden Kostenvektor c:

$$c = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc} (1,5) & (1,6) & (1,7) & (1,8) & (2,5) & (2,6) & (2,7) & (2,8) & (3,5) & (3,6) & (3,7) & (3,8) & (4,5) & (4,6) & (4,7) & (4,8) \\ 0, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right)$$

zulässiger Lösung bzw. Flussverteilung x:

$$x = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc} (1,5) & (1,6) & (1,7) & (1,8) & (2,5) & (2,6) & (2,7) & (2,8) & (3,5) & (3,6) & (3,7) & (3,8) & (4,5) & (4,6) & (4,7) & (4,8) \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right)$$

was folgenden Zielfunktionswert ergibt:

$$\begin{aligned} cx &= \underbrace{0\cdot 1}_{(1,5)} + \underbrace{0\cdot 1}_{(2,6)} + \underbrace{0\cdot 1}_{(3,7)} + \underbrace{1\cdot 1}_{(4,8)} \\ &= 0+0+0+1 \\ &= \underline{1} \end{aligned}$$

Iteration 4

1) Bestimmung fairer Marktpreise:

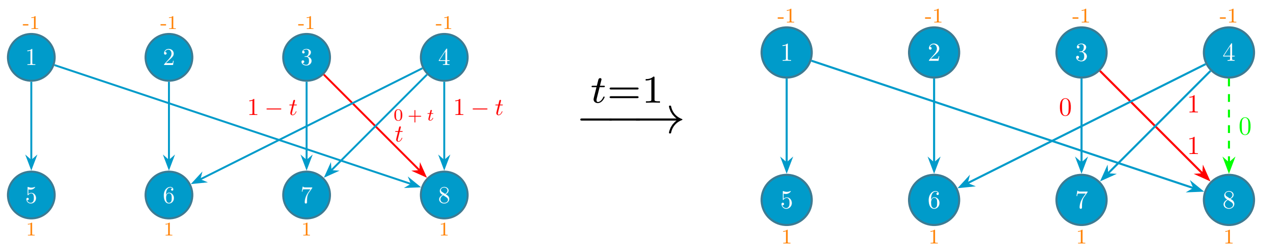
   Setze $y_1 = 0$. Daraus ergeben sich:

$$\begin{aligned} y_2 &= 1, \\ y_3 &= -1, \\ y_4 &= -1, \\ y_5 &= 0, \\ y_6 &= -1, \\ y_7 &= -1, \\ y_8 &= 0. \end{aligned}$$

2) Bestimme eintretenden Bogen:

   Wähle Bogen $(3,8)$, denn $\underbrace{y_3}_{-1} + \underbrace{c_{(3,8)}}_{0} < \underbrace{y_8}_{0}$.

3) Bestimme die neue Flussverteilung:



(1 − t ist die „extremste“ Bedingung)

Zielfunktionswert der neuen Flussverteilung:

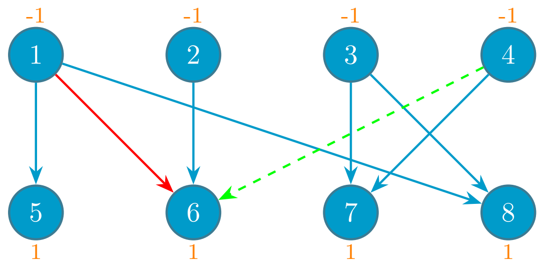
$$\begin{aligned} cx &= \underbrace{0\cdot 1}_{(1,5)} + \underbrace{0\cdot 1}_{(2,6)} + \underbrace{0\cdot 1}_{(3,8)} + \underbrace{0\cdot 1}_{(4,7)} \\ &= 0+0+0+0 \\ &= \underline{0} \end{aligned}$$

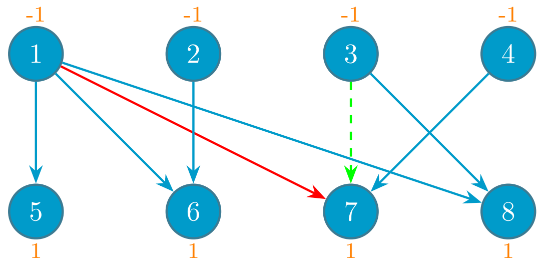
Die Lösung ist optimal! (Die niedrigsten Transportkosten sind 0, daher kann man man nicht mehr sparen.)

Es folgen noch 2 degenerierte Austausche:

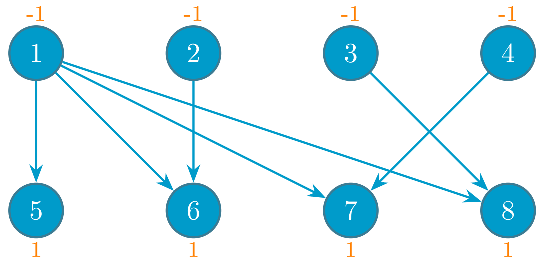
Alle Kandidaten für 2 ((2,5), (2,7), (2,8)), 3 ((3,5), (3,6)) und 4 ((4,5), (4,8)) wären in Richtung der

Wurzel $w = 1$, somit verboten nach der Regel von Cunningham, damit der Netzsimplex nicht zykelt.





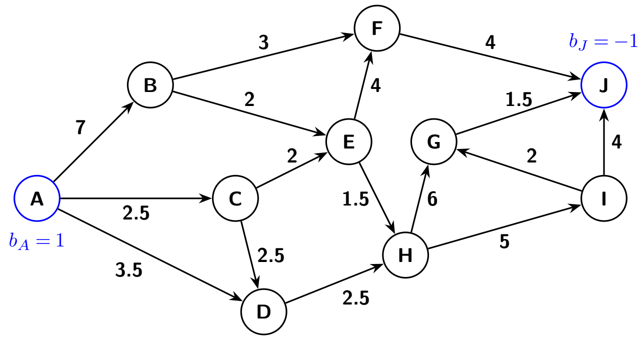
Netzsimplex terminiert mit der optimalen Lösung:



3

a)

Vorheriger Ansatz:



$$b = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array}$$

Es werden alle Bauarbeiter von A (deshalb -1) nach J (deshalb 1) "verschickt".

$$c = \begin{pmatrix} (A,B) & (A,C) & (A,D) & (B,E) & (B,F) & (C,D) & (C,E) & (C,H) & (D,H) \\ 7 & 2,5 & 3,5 & 2 & 3 & 2,5 & 2 & 4 & 2,5 \\ (E,F) & (E,H) & (F,J) & (G,J) & (H,G) & (H,I) & (I,G) & (I,J) & \\ 4 & 1,5 & 4 & 1,5 & 6 & 5 & 2 & 4 & \end{pmatrix}$$

Warenumschlagsproblem $\rightarrow \min \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e$

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kante } e \text{ auf dem kürzesten Pfad liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieser Ansatz erzeugt gezwungenermaßen eine degenerierte Baumlösung (Fluss 0 auf Kanten des Baumes), denn ausschließlich auf den Kanten des kürzesten Pfades im Ursprungsgraphen gibt es einen Fluss von 1. Durch die Wahl der Richtungen der Kanten in Kombination mit der Kostenwahl durchläuft der kürzeste Pfad nicht alle Knoten des Ursprungsgraphen, womit der Fluss auf den Kanten der Baumlösung zu diesen ausgeschlossenen Knoten 0 ist.

b)

Um keine degenerierte Baumlösung zu erzeugen, aber immer noch den kürzesten Pfad von A nach J aus der Optimallösung abzulesen zu können, muss das Warenumschlagsproblem wie folgt umformuliert werden:

$$b_A = |V| - 1, b_v = 1 \forall v \in V \setminus \{A\}$$

Bei gegebenen Graphen also:

$$b = \begin{array}{c|l} \left(\begin{array}{r} -9 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array} \end{array}$$

Das Netzsimplex-Verfahren terminiert dann mit einer Optimallösung, die dem kürzeste-Wege-Baum von A zu allen anderen Knoten entspricht, womit man auch direkt den kürzesten Pfad von A nach J ablesen kann.

5

$$b = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{r} -450 \\ 50 \\ 60 \\ 80 \\ 70 \\ 80 \\ 90 \\ 100 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{G (Gesamt)} \\ \text{Mo} \\ \text{Di} \\ \text{Mi} \\ \text{Do} \\ \text{Fr} \\ \text{Sa} \\ \text{So} \end{array} \end{array}$$

$c =$

	G	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
G		2€	2€	2€	2€	2€	2€	2€
Mo				0,75€	0,75€	0,25€	0,25€	0,25€
Di					0,75€	0,75€	0,25€	0,25€
Mi						0,75€	0,75€	0,25€
Do							0,75€	0,75€
Fr								0,75€
Sa								
So								

Warenumschlagsproblem $\rightarrow \min \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e$