1. Lineares Programmierungsproblem

Als **lineares Programmierungsproblem** (LP) wird die **Maximierung** einer **linearen Funktion** unter Berücksichtigung von **linearen Nebenbedingungen** bezeichnet.
Es hat die **Standardform**:

$$\begin{array}{rrl} \text{max} & cx & \text{(Maximieren der linearen Funktion)} \\ \text{so dass} & Ax \leq b & \text{(Nebenbedingungen)} \\ & x \geq 0 & \text{(Nicht-Negativitätsbedingungen)} \end{array}$$

- Ein Vektor x heißt **zulässige Lösung**, wenn er alle Nebenbedingungen erfüllt.
- Eine zulässige Lösung, die die Zielfunktion maximiert, heißt **optimale Lösung**.
- Ein Lineares Programm, dass keine zulässige Lösung hat, heißt **unzulässig**.
- Ein Lineares Programm, bei dem es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ eine zulässige Lösung gibt, heißt **unbeschränkt**.

2. Umwandlung in die Standardform

- Aus einem Minimierungsproblem wird ein Maximierungsproblem durch Multiplikation der Zielfunktion mit -1:
$$\max\{-1 \cdot cx\}$$
- Aus einer $\geq$-Ungleichung wird eine $\leq$-Ungleichung durch Multiplikation beider Seiten mit -1:
$$\begin{aligned} a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 &\geq b \\ \text{wird zu } -a_1 \cdot x_1 - a_2 \cdot x_2 &\leq -b \end{aligned}$$
- Aus einer Gleichung $\sum_j A_{ij} x_j = b_i$ werden zwei Ungleichungen $\sum_j A_{ij} x_j \leq b_i$ und $\sum_j (-A_{ij}) x_j \leq -b_i$
- Eine Variable x_j ohne Nichtnegativitätsbedingung wird innerhalb aller Gleichungen/Ungleichungen ersetzt durch die beiden Variablen x_j^+ und x_j^- mit den Bedingungen
$$\begin{aligned} x_j &= x_j^+ - x_j^- \\ x_j^+, x_j^- &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Standard-Simplex

- Das Standard-Simplex-Verfahren arbeitet mit sogenannten **Dictionaries**.
- Für ein Optimierungsproblem der Form

$$\begin{array}{rll} \max & cx & \\ \text{so dass} & a_i \cdot x & \leq b_i \; i = 1, \ldots, m \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

  wird ein **Dictionary** konstruiert, indem
  - aus jeder der m Ungleichungen $a_i \cdot x \leq b_i$ eine Gleichung $x_{n+i} = b - (a_i \cdot x)$ ($x_{n+i} \triangleq$ **Schlupfvariable**, $n = \#$ Variablen) gebildet wird.
  - aus der Zielfunktion cx die **Zielfunktionsvariable** $z = cx$ gebildet wird.

  Das Dictionary hat schlussendlich die Form:

$$\begin{array}{rcl} x_{n+i} & = & b - (a_i \cdot x) \; i = 1, \ldots, m \\ \underbrace{z}_{\text{Basisvariablen}} & = & \underbrace{cx \qquad\qquad\qquad}_{\text{Nichtbasisvariablen}} \end{array}$$

- In jeder Iteration des Simplex-Verfahrens wird eine der **Nichtbasisvariablen** ausgewählt, die in die Basis aufgenommen wird (**eintretende Variable**) und eine der **Basisvariablen**, die die Basis verlässt (**austretende Variable**) (genaueres auf weiterer Karte).
- Jedes Dictionary entspricht einer zulässigen Lösung, der sogenannten **Basislösung**, indem man alle Nichtbasisvariablen (die rechts von =) auf Null setzt.
- Wenn auch eine der Basisvariablen den Wert 0 hat, dann heißt die Basislösung **degeneriert**.
- Obwohl nicht explizit angegeben, gilt im Dictionary immer noch die Nicht-Negativität für alle originalen Variablen, als auch die Schlupfvariablen!

4. Austausch

- Als **eintretende Variable** wählt man die **Nichtbasisvariable** (rechts vom =) in der Zielfunktion-Zeile (die Zeile mit z), die ein **positiven Koeffizienten** hat und den **kleinsten Index** hat.
  - Gibt es keine eintretende Variable (alle Koeffizienten sind negativ), ist die Basislösung des Dictionaries optimal und das Simplex-Verfahren terminiert.
- Als **austretende Variable** wählt man die Basisvariable (links vom =), die die Erhöhung der eintretenden Variable (durch ihre Nicht-Negativitätsbed.) am strengsten einschränkt.
  - Falls mehrere Basisvariablen eine gleiche Einschränkung erzeugen, wählt man die mit dem **kleinsten Index**.
  - Gibt es keine austretende Variable (die Koeffizienten der eintretende Variable ist in allen Zeilen positiv), ist das Problem unbeschränkt.
- Die Gleichung der austretenden Variable wird zu der eintretenden Variable umgestellt, und die so gewonnene Gleichung für die eintretende Variable wird in allen anderen

Zeilen eingesetzt (mit den dortigen Vorfaktoren multipliziert!).

5. 2-Phasen-Simplex

- **Problem** bei **Initialisierung**: Wenn die Nulllösung (alle Variablen 0) unzulässig ist (weil mindestens ein b_i negativ ist), dann kann das Optimierungsproblem nicht direkt in ein Dictionary umgewandelt werden → **2-Phasen-Simplex**
- **Phase 1**: Hilfsproblem mit Standard-Simplex lösen
  - Aus dem Originalproblem wird ein Hilfsproblem gebildet:

$$\begin{array}{rrl} \max & \underline{-x_0} & \\ \text{so dass} & a_i \cdot x \underline{-x_0} & \leq b_i \;\; i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq 0 \;\; j = \underline{0}, \ldots, n \end{array}$$

  → stets zulässige Lösung mit $x_0 = -\min\{b_i\}$, $x_j = 0 \;\; j \neq 0$

  → Originalproblem hat Lösung ⇔ Hilfsproblem hat Lösung mit $x_0 = 0$

  - Erstes Dictionary mit Zielfunktionswert ω ist noch unzulässig (falls ein b_i negativ):

$$\begin{aligned} x_{n+i} &= b - (a_i \cdot x - x_0) \;\; i = 1, \ldots, m \\ \omega &= -x_0 \end{aligned}$$

  → Erster Austausch: eintretende Variable x_0, austretende Variable die mit dem kleinsten b_i → Dictionary zulässig

  - Wie gewohnt mit Standard-Simplex maximieren, bis terminiert:

$$\begin{aligned} \omega = 0 &\rightarrow \text{Originalproblem hat zulässige Lösung} \\ \omega \neq 0 &\rightarrow \text{Originalproblem unzulässig} \end{aligned}$$

  (bei $\omega = 0$ ist die Hilfsvariable x_0 eine Nichtbasisvariable!)

- **Phase 2**: Hilfsproblem-Dictionary umwandeln und Standard-Simplex
  - Hilfsproblem terminiert mit $\omega = 0$
  - Hilfsproblem-Dictionary umwandeln in Originalproblem-Dictionary:
    - Entfernen der Spalte mit x_0 (Hilfsvariable)
    - Entfernen der Zeile mit ω (Zielfunktionsvariable)
    - Einfügen der originalen linearen Zielfunktion $z = cx$, wobei Variablen in der Basis durch die Gleichungen im Dictionary ersetzt werden (erfordert noch 1x zusammenfassen)
  - Wie gewohnt mit Standard-Simplex maximieren, bis terminiert

Beispiel Hilfsproblem aufstellen:

Optimierungsproblem in Standardform:

$$\begin{array}{lrrrrrrrl}
\max & & x_1 & - & x_2 & + & 3\cdot x_3 & & \\
\text{s.d.} & - & x_1 & + & x_2 & - & 2\cdot x_3 & \leq & -10 \\
 & & x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & x_3 & \leq & 15 \\
 & & 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 3\cdot x_3 & \leq & 20 \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Das dazu aufgetellte Hilfsproblem:

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrl}
\max & & & & & & & - & x_0 & & \\
\text{s.d.} & - & x_1 & + & x_2 & - & 2\cdot x_3 & - & x_0 & \leq & -10 \\
 & & x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & x_3 & - & x_0 & \leq & 15 \\
 & & 2\cdot x_1 & + & x_2 & + & 3\cdot x_3 & - & x_0 & \leq & 20 \\
 & & & & & & & & x_0, x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Dictionary des Hilfsproblems:
(noch unzulässig, Austausch mit x_0 eintretend noch erforderlich)

$$\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_4 & = & -10 & + & x_1 & - & x_2 & + & 2\cdot x_3 & + & x_0 \\
x_5 & = & 15 & - & x_1 & + & 2\cdot x_2 & - & x_3 & + & x_0 \\
x_6 & = & 20 & - & 2\cdot x_1 & - & x_2 & - & 3\cdot x_3 & + & x_0 \\
\omega & = & 0 & & & & & & & - & x_0
\end{array}$$

Beispiel Umformung:

Phase 1: Hilfsproblem terminiert mit:

$$\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_1 & = & 10 & - & x_0 & + & x_2 & - & 2\cdot x_3 & - & x_4 \\
x_5 & = & 5 & + & 2\cdot x_0 & + & x_2 & - & 5\cdot x_3 & + & x_4 \\
x_6 & = & 0 & + & 3\cdot x_0 & - & 3\cdot x_2 & + & x_3 & + & 2\cdot x_4 \\
\omega & = & 0 & - & x_0 & & & & & &
\end{array}$$

$\omega = 0 \rightarrow$ Dictionary optimal $\rightarrow$ Originalproblem hat zulässige Lösung

Phase 2: Dictionary aus Hilfsproblems aufstellen: x_0-Spalte und ω-Zeile entfernen

$$\begin{array}{rcrrrrrrrrr}
x_1 & = & 10 & & & + & x_2 & - & 2\cdot x_3 & - & x_4 \\
x_5 & = & 5 & & & + & x_2 & - & 5\cdot x_3 & + & x_4 \\
x_6 & = & 0 & & & - & 3\cdot x_2 & + & x_3 & + & 2\cdot x_4 \\
z & = & & + & x_1 & - & x_2 & + & 3\cdot x_3 & &
\end{array}$$

(Ausdrücken des fehlenden x_1 durch die Gleichung in der Basis)

$z = (10 + x_2 - 2\cdot x_3 - x_4) - x_2 + 3\cdot x_3$

$\rightarrow z = 10 + x_3 - x_4$

Somit erstes Dictionary der zweiten Phase:

$$\begin{array}{rcrrrrrrr}
x_1 & = & 10 & + & x_2 & - & 2\cdot x_3 & - & x_4 \\
x_5 & = & 5 & + & x_2 & - & 5\cdot x_3 & + & x_4 \\
x_6 & = & 0 & - & 3\cdot x_2 & + & x_3 & + & 2\cdot x_4 \\
z & = & 10 & & & + & x_3 & - & x_4
\end{array}$$

6. Eindeutigkeit der Lösung

Das Simplex-Verfahren terminiert mit:

- In der Zielfunktion-Zeile kommen **alle Nichtbasisvariablen** mit **negativen Koeffizienten** vor, dann ist die Lösung **eindeutig**.
  (Die Nichtbasisvariablen sind 'fest' mit 0, denn ein positiver Wert (Nicht-Negativitätsbed.) würde den Zielfunktionswert durch den negativen Koeffizienten verringern.)
- In der Zielfunktion-Zeile sind **einige Nichtbasisvariablen nicht vertretend** (Koeffizient 0), dann ist die Lösung **nicht eindeutig**.
  (Nur die vertretenden Nichtbasisvariablen sind 'fest' mit 0, die anderen können beliebig gewählt werden, ohne den Zielfunktionswert zu ändern, solange die Nicht-Negativitätsbedingung der Basisvariablen erfüllt bleiben.)

→ Bestimmung des Lösungsraumes:

  - Spalten der vertretenden Nichtbasisvariablen entfernen
  - Aus den Gleichungen und Nicht-Negativitätsbedingungen eigene Gleichungen bilden

Beispiel:

Simplex terminiert mit:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_4 & = & 3 & + & x_2 & - & 2\cdot x_5 & + & 7\cdot x_3 \\
x_1 & = & 1 & - & 5\cdot x_2 & + & 6\cdot x_5 & - & 8\cdot x_3 \\
x_6 & = & 4 & + & 9\cdot x_2 & + & 2\cdot x_5 & - & x_3 \\
z & = & 8 & & & & & - & x_3
\end{array}
$$

Die letzte Zeile zeigt, dass jede Optimallösung $x_3 = 0$ erfüllt, aber nicht notwenigerweise $x_2 = 0$ und $x_5 = 0$.
Das Dictionary impliziert somit:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_4 & = & 3 & + & x_2 & - & 2\cdot x_5 \\
x_1 & = & 1 & - & 5\cdot x_2 & + & 6\cdot x_5 \\
x_6 & = & 4 & + & 9\cdot x_2 & + & 2\cdot x_5
\end{array}
$$

Aus $x_4, x_5, x_6 \geq 0$ folgt, das jede Optimallösung folgendes System erfüllt:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3 & + & x_2 & - & 2\cdot x_5 & \geq & 0 \\
1 & - & 5\cdot x_2 & + & 6\cdot x_5 & \geq & 0 \\
4 & + & 9\cdot x_2 & + & 2\cdot x_5 & \geq & 0
\end{array}
\xrightarrow{\text{Umstellen}}
\underbrace{
\begin{array}{rrcrcr}
- & x_2 & + & 2\cdot x_5 & \leq & 3 \\
 & 5\cdot x_2 & - & 6\cdot x_5 & \leq & 1 \\
- & 9\cdot x_2 & - & 2\cdot x_5 & \leq & 4 \\
 & & & x_2, x_5 & \geq & 0
\end{array}
}_{\substack{\text{Lösungsraum} \\ \text{aller Optimallösung}}}
$$

7. Tableau-Simplex

- Gleichung des Dictionaries statt $x_{n+i} = b_i - (a_i \cdot x)$ als $a_i \cdot x + x_{n+i} = b_i$ schreiben (Schlupfvariable links vom =)
- Zielfunktion statt $z = cx$ als $-z + cx = 0$ schreiben $\to$ negativer Wert im Tableau
- Matrix aus Dictionary aufstellen, indem alle Variablen entfernt werden
- Wähle als **Pivot-Spalte** (vgl. eintretende Variable) eine Spalte, die in der letzten Zeile (Zielfunktion-Zeile) einen positiven Koeffizienten hat
  - Alle Koeffizienten $\leq 0 \to$ optimales Tableau
- Wähle als **Pivot-Zeile** (vgl. austretende Variable) diejenige Zeile i, die in der Pivot-Spalte r einen positiven Koeffizienten hat und unter allen solchen Zeilen den kleinsten Quotienten b_i/a_{ir} hat (b_i letzter Wert der Zeile, a_{ir} Pivot-Element)
  - Alle Koeffizienten in der Pivot-Spalte $\leq 0 \to$ unbeschränkt
- Mache „Gauß-Elimination" mit dem **Pivot-Element** a_{ir}, indem
  - Pivot-Zeile i durch a_{ir} dividiert wird $\to$ Pivot-Element 1 danach
  - Alle Koeffizienten (der Pivot-Spalte) der anderen Zeilen auf 0 bringen, indem jeweils mit einem geeigneten Vielfachen der Pivot-Zeile subtrahiert wird (wie bei Gauß ...)
- Am Ende steht die Belegung der Variablen der Optimallösung sowie der optimale Zielfunktionswert in der letzten Zeile (jeweils negativ!)

Beispiel:

Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rcccccccc}
\max & 5\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & & \\
\text{so dass} & 3\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & 4\cdot x_1 & + & x_2 & + & 2\cdot x_3 & \leq & 11 \\
 & 3\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & \leq & 8
\end{array}
$$

Umwandlung in modifiziertes Dictionary:

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
 & 2\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & = & 5 \\
 & 4\cdot x_1 & + & x_2 & + & 2\cdot x_3 & & & + & x_5 & & = & 11 \\
 & 3\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & & & & & + \; x_6 & = & 8 \\
-z+ & 5\cdot x_1 & + & 4\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & & & & & & = & 0
\end{array}
$$

Umwandlung in Tableau (Variablen entfernen):

$$
\begin{array}{cccccc|c}
 & & & & & & \mathbf{b_i} \\
2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Zielfunktion-Zeile   negativer Zielfunktionswert

Austausch: Pivot-Spalte $r = 1$, Pivot-Zeile $i = 1$

Pivot-Zeile

Pivot-Element

$$
\begin{array}{cccccc|c}
2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Pivot-Spalte

Zeile 1 ist Pivot-Zeile, da dort der Quotient $\frac{b_i}{a_{ir}}$ unter allen anderen Zeilen am kleinsten ist, denn $\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{5}{2} < \frac{11}{4} = \frac{b_2}{a_{21}}$ und $\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{5}{2} < \frac{8}{3} = \frac{b_3}{a_{31}}$

„Gauß-Elimination“ mit dem Pivot-Element $a_{ir} = 2$ (Türkis):

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & \cdot \frac{1}{2} \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 & -4\cdot I \\
3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 & -3\cdot I \\
5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5\cdot I
\end{array}
$$

Führt zu neuem Tableau:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\
0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{25}{2}
\end{array}
$$

Austausch: Pivot-Spalte $r = 3$, Pivot-Zeile $i = 3$ … und so weiter

8. Duales LP

Aus dem primalen LP in Standardform:

$$\begin{array}{rrl} \max & c^T x & \\ \text{so dass} & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

wird das duale LP in Standardform:

$$\begin{array}{rrl} \min & b^T y & \\ \text{so dass} & A^T y & \geq c \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

Beispiel:

Primale LP

$$\begin{array}{rrrrrcl} \max & \overbrace{4\cdot x_1 & +1\cdot x_2 & +5\cdot x_3 & +3\cdot x_4}^{C} & & \\ \text{so dass} & 1\cdot x_1 & -1\cdot x_2 & -1\cdot x_3 & +3\cdot x_4 & \leq & 1 \\ & 5\cdot x_1 & +1\cdot x_2 & +3\cdot x_3 & +8\cdot x_4 & \leq & 55 \\ & -1\cdot x_1 & +2\cdot x_2 & +3\cdot x_3 & -5\cdot x_4 & \leq & 3 \\ & A & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Umwandlung in duales LP durch Transponieren von A sowie Vertauschen von c und b:

Duale LP

$$\begin{array}{rrrrcl} \min & 1\cdot y_1 & +55\cdot y_2 & +3\cdot y_3 & & \\ \text{so dass} & 1\cdot y_1 & +\ 5\cdot y_2 & -1\cdot y_3 & \geq & 4 \\ & -1\cdot y_1 & +\ 1\cdot y_2 & +2\cdot y_3 & \geq & 1 \\ & -1\cdot y_1 & +\ 3\cdot y_2 & +3\cdot y_3 & \geq & 5 \\ & 3\cdot y_1 & +\ 8\cdot y_2 & -5\cdot y_3 & \geq & 3 \\ & A^T & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

9. Dualitätsaussagen

- **Schwache Dualitätsaussage**:
  - Wenn x^* eine zulässige Lösung des primalen LP ist und y^* eine zulässige Lösung des dualen LP ist, dann gilt:
    $$c^T x^* \leq b^T y^*$$
  - Wenn (x^*, y^*) ein Paar primal-dual zulässiger Lösungen mit $c^T x^* = b^T y^*$ ist, dann sind x^* und y^* optimale Lösungen des primalen bzw. dualen LP.
- **Starke Dualitätsaussage**:
  - Wenn das primale LP eine optimale Lösung x^* hat, dann hat auch das zugehörige duale LP eine optimale Lösung y^* mit $c^T x^* = b^T y^*$.
- Das Duale des Dualen ist das Primal
- Das primale LP hat eine optimale Lösung $\Leftrightarrow$ das duale LP hat eine optimale Lösung (aus starker Dualitätsaussage und 2x Dual $\rightarrow$ Primal)
- Wenn das primale LP unbeschränkt ist, dann ist das duale LP unzulässig, und umgekehrt.
- Wenn das primale LP und das duale LP zulässig sind, dann haben beide auch eine optimale Lösung.

10. Satz von gegenseitigen Schlupf

Satz von gegenseitigen Schlupf/Dualitätssatz:

Wenn (x^*, y^*) ein Paar primal-dual zulässiger Lösungen ist, dann sind x^* und y^* optimale Lösungen des primalen bzw. dualen LP genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \left(a^T\right)_j \cdot y^* = c_j \quad \text{oder} \quad x_j^* = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \\ \text{und} \quad & \\ & a_i \cdot x^* = b_i \quad \text{oder} \quad y_i^* = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

Optimalitätszertifikat:

Eine zulässige Lösung x^* des primalen LP ist genau dann optimal, wenn es eine dual zulässige Lösung y^* gibt, so dass

$$\left(a^T\right)_j \cdot y^* = c_j \text{ für alle } j \text{ wo } x_j^* > 0 \text{ und } y_i^* = 0 \text{ für alle } i \text{ wo } a_i \cdot x^* < b_i$$

Beispiel:

Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{lrrrrrrcr}
\max & 18\cdot x_1 & -7\cdot x_2 & +12\cdot x_3 & +5\cdot x_4 & & +8\cdot x_6 & & \\
\text{so dass} & 2\cdot x_1 & -6\cdot x_2 & +\ 2\cdot x_3 & +7\cdot x_4 & +3\cdot x_5 & +8\cdot x_6 & \leq & 1 \\
& -\ 3\cdot x_1 & -1\cdot x_2 & +\ 4\cdot x_3 & -3\cdot x_4 & +1\cdot x_5 & +2\cdot x_6 & \leq & -2 \\
& 8\cdot x_1 & -3\cdot x_2 & +\ 5\cdot x_3 & -2\cdot x_4 & & +2\cdot x_6 & \leq & 4 \\
& 4\cdot x_1 & & +\ 8\cdot x_3 & +7\cdot x_4 & -1\cdot x_5 & +3\cdot x_6 & \leq & 1 \\
& 5\cdot x_1 & +2\cdot x_2 & -\ 3\cdot x_3 & +6\cdot x_4 & -2\cdot x_5 & -1\cdot x_6 & \leq & 5
\end{array}
$$

Behauptung: $x^* = \left(2, 4, 0, 0, 7, 0\right)$ ist optimale Lösung des primalen LP.

Da $x_1^*, x_2^*, x_5^* > 0$ sind, werden die Spalten $1, 2, 5$ transponiert:

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
2\cdot y_1 & -3\cdot y_2 & +8\cdot y_3 & +4\cdot y_4 & +5\cdot y_5 & = & 18 \\
-6\cdot y_1 & -1\cdot y_2 & -3\cdot y_3 & & +2\cdot y_5 & = & -7 \\
3\cdot y_1 & +1\cdot y_2 & & -1\cdot y_4 & -2\cdot y_5 & = & 0
\end{array}
$$

Hinzufügen von $y_2 = 0$ und $y_5 = 0$, denn

$$
\begin{array}{l}
a_1 \cdot x^* = 1 = 1 = b_1 \\
a_2 \cdot x^* = -3 < -2 = b_2 \\
a_3 \cdot x^* = 4 = 4 = b_3 \\
a_4 \cdot x^* = 1 = 1 = b_4 \\
a_5 \cdot x^* = 4 < 5 = b_5
\end{array}
$$

Endgültiges Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
2\cdot y_1 & -3\cdot y_2 & +8\cdot y_3 & +4\cdot y_4 & +5\cdot y_5 & = & 18 \\
-6\cdot y_1 & -1\cdot y_2 & -3\cdot y_3 & & +2\cdot y_5 & = & -7 \\
3\cdot y_1 & +1\cdot y_2 & & -1\cdot y_4 & -2\cdot y_5 & = & 0 \\
& y_2 & & & & = & 0 \\
& & & & y_5 & = & 0
\end{array}
$$

Einsetzen von $y_2 = 0$ und $y_5 = 0$ in die Gleichungen darüber und Lösen mittels Gauß-Verfahren liefert die eindeutige Lösung $y^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 1, 0\right)$, welche dual zulässig ist, denn:

$$y^* \geq 0 \text{ und } A^T \cdot y^* \geq c$$

Die Lösung x^* ist somit optimal!