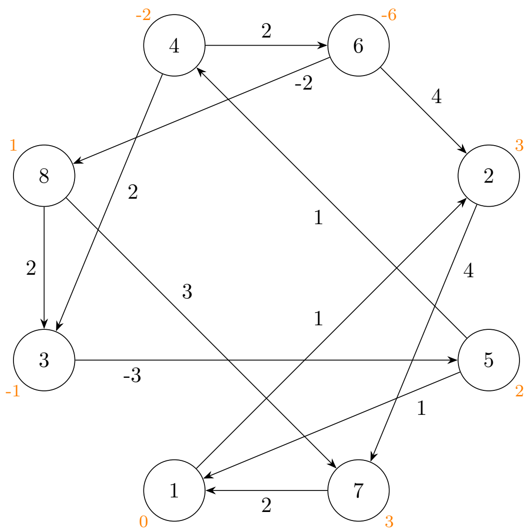
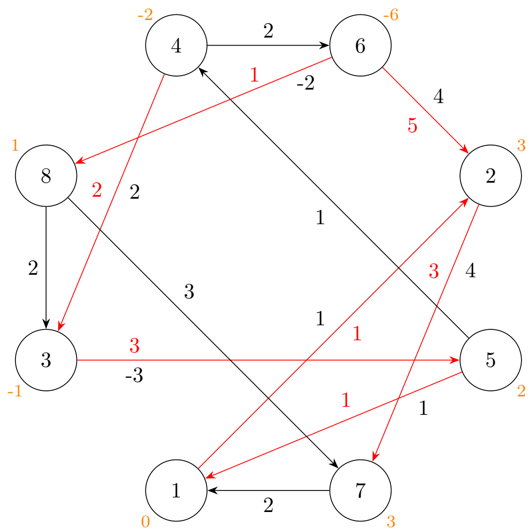
Lösungen zu Übungsblatt 2

1 Netzsimplex

Gegebene Digraph:



Initiale zulässige Baumlösung:



mit resultierenden Kostenvektor c:

$$c = \begin{pmatrix} (1,2) & (2,7) & (3,5) & (4,3) & (4,6) & (5,1) & (5,4) & (6,2) & (6,8) & (7,1) & (8,3) & (8,7) \\ 1, & 4, & -3, & 2, & 1, & 1, & 1, & 4, & -2, & 2, & 2, & 3 \end{pmatrix}$$

und zulässiger Lösung bzw. Flussverteilung x:

$$x = \begin{pmatrix} (1,2) & (2,7) & (3,5) & (4,3) & (4,6) & (5,1) & (5,4) & (6,2) & (6,8) & (7,1) & (8,3) & (8,7) \\ 1, & 3, & 3, & 2, & 0, & 1, & 0, & 5, & 1, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

was folgenden Zielfunktionswert ergibt:

$$\begin{aligned} cx &= \underbrace{1\cdot 1}_{(1,2)} + \underbrace{4\cdot 3}_{(2,7)} + \underbrace{(-3)\cdot 3}_{(3,5)} + \underbrace{2\cdot 2}_{(4,3)} + \underbrace{2\cdot 0}_{(4,6)} + \underbrace{1\cdot 1}_{(5,1)} + \underbrace{1\cdot 0}_{(5,4)} + \underbrace{4\cdot 5}_{(6,2)} + \underbrace{(-2)\cdot 1}_{(6,8)} + \underbrace{2\cdot 0}_{(7,1)} + \underbrace{2\cdot 0}_{(8,3)} + \underbrace{3\cdot 0}_{(8,7)} \\ &= 1 + 12 - 9 + 4 + 0 + 1 + 0 + 20 - 2 + 0 + 0 + 0 \\ &= 38 - 11 \\ &= \underline{27} \end{aligned}$$

Iteration 1

1) Bestimmung fairer Marktpreise:

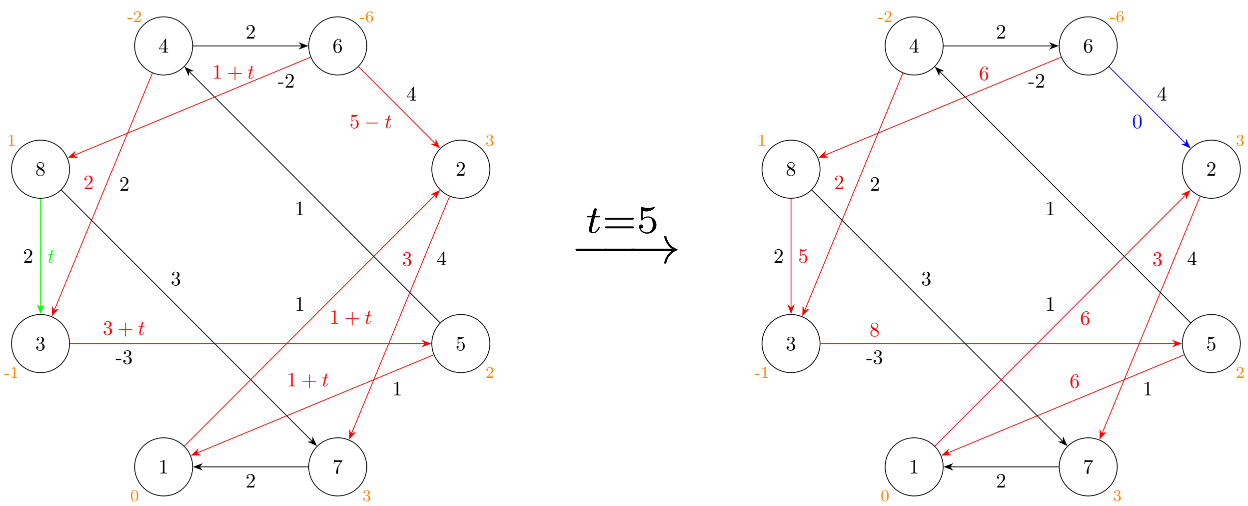
   Setze $y_1 = 0$. Daraus ergeben sich:

$$\begin{aligned} y_2 &= 1, \\ y_3 &= 2, \\ y_4 &= 0, \\ y_5 &= -1, \\ y_6 &= -3, \\ y_7 &= 5, \\ y_8 &= -5. \end{aligned}$$

2) Bestimme eintretenden Bogen (Kante, die nicht im Baum ist, einen Kreis schließt und günstiger ist):

   Wähle Bogen $(8,3)$, denn $\underbrace{y_8}_{-5} + \underbrace{c_{(8,3)}}_{2} < \underbrace{y_3}_{2}$.

3) Bestimme die neue Flussverteilung:



$(5-t$ ist die „extremste" Bedingung)

Zielfunktionswert der neuen Flussverteilung:

$$\begin{aligned} cx &= \underbrace{1\cdot 6}_{(1,2)} + \underbrace{4\cdot 3}_{(2,7)} + \underbrace{(-3)\cdot 8}_{(3,5)} + \underbrace{2\cdot 2}_{(4,3)} + \underbrace{2\cdot 0}_{(4,6)} + \underbrace{1\cdot 6}_{(5,1)} + \underbrace{1\cdot 0}_{(5,4)} + \underbrace{4\cdot 0}_{(6,2)} + \underbrace{(-2)\cdot 6}_{(6,8)} + \underbrace{2\cdot 0}_{(7,1)} + \underbrace{2\cdot 5}_{(8,3)} + \underbrace{3\cdot 0}_{(8,7)} \\ &= 6 + 12 - 24 + 4 + 0 + 6 + 0 + 0 - 12 + 0 + 10 + 0 \\ &= 38 - 36 \\ &= \underline{2} \quad (\checkmark \text{ vorher: } 27) \end{aligned}$$

Iteration 2

1) Bestimmung fairer Marktpreise:

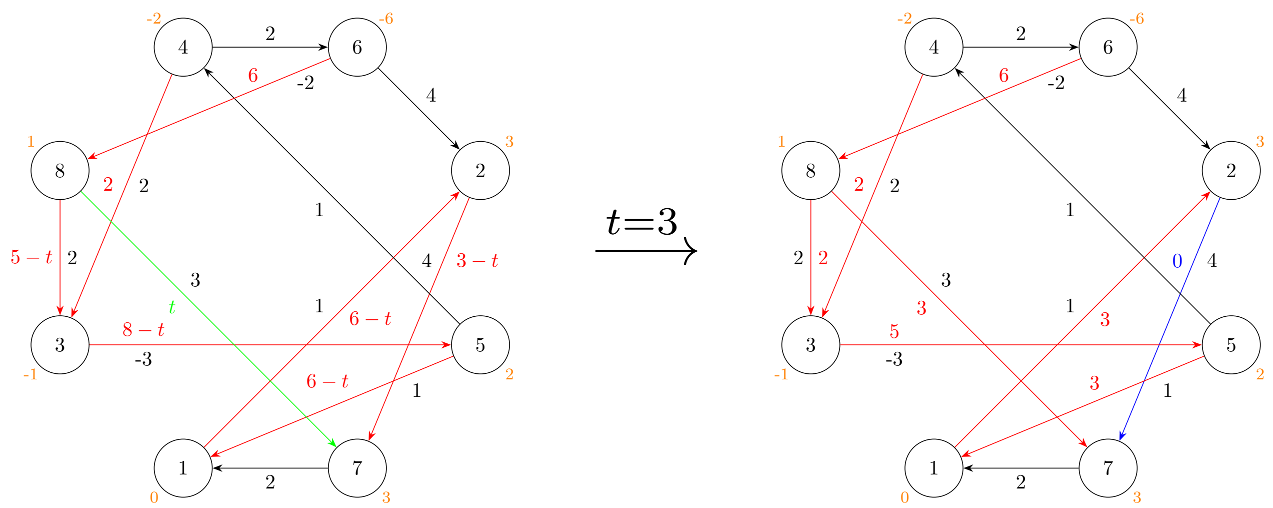
Setze $y_1 = 0$. Daraus ergeben sich:

$$y_2 = 1,$$
$$y_3 = 2,$$
$$y_4 = 0,$$
$$y_5 = -1,$$
$$y_6 = 2,$$
$$y_7 = 5,$$
$$y_8 = 0.$$

2) Bestimme eintretenden Bogen:

Wähle Bogen $(8,7)$, denn $\underbrace{y_8}_{0} + \underbrace{c_{(8,7)}}_{3} < \underbrace{y_7}_{5}$.

3) Bestimme die neue Flussverteilung:



($3 - t$ ist die „extremste" Bedingung)

Zielfunktionswert der neuen Flussverteilung:

$$cx = \underbrace{1 \cdot 3}_{(1,2)} + \underbrace{4 \cdot 0}_{(2,7)} + \underbrace{(-3) \cdot 5}_{(3,5)} + \underbrace{2 \cdot 2}_{(4,3)} + \underbrace{2 \cdot 0}_{(4,6)} + \underbrace{1 \cdot 3}_{(5,1)} + \underbrace{1 \cdot 0}_{(5,4)} + \underbrace{4 \cdot 0}_{(6,2)} + \underbrace{(-2) \cdot 6}_{(6,8)} + \underbrace{2 \cdot 0}_{(7,1)} + \underbrace{2 \cdot 2}_{(8,3)} + \underbrace{3 \cdot 3}_{(8,7)}$$
$$= 3 + 0 - 15 + 4 + 0 + 3 + 0 + 0 - 12 + 0 + 4 + 9$$
$$= 23 - 27$$
$$= \underline{-4} \quad (\checkmark \text{ vorher: } 2)$$

Iteration 3

1) Bestimmung fairer Marktpreise:

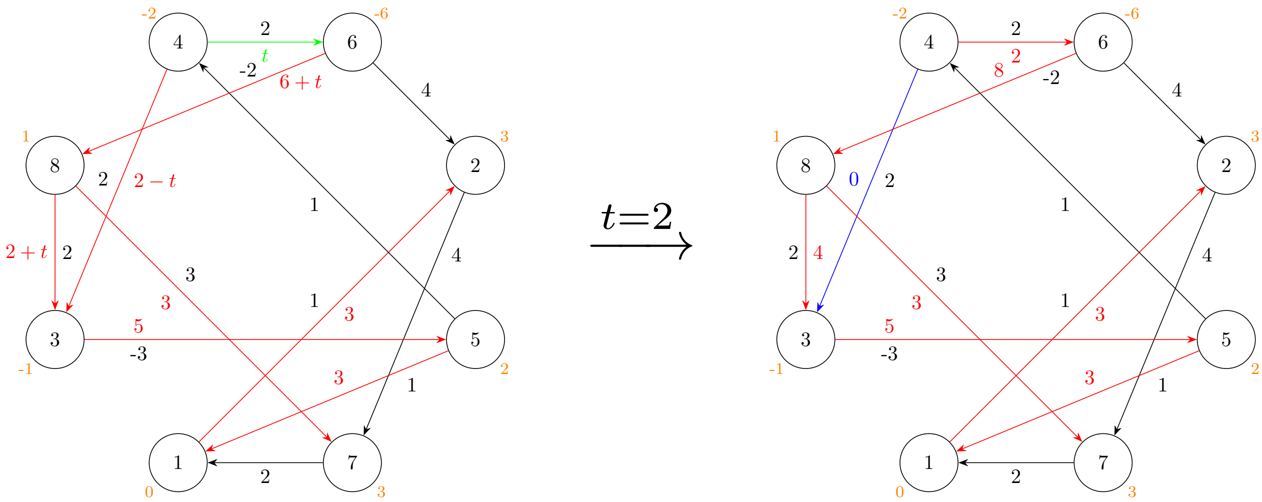
Setze $y_1 = 0$. Daraus ergeben sich:

$$\begin{aligned} y_2 &= 1, \\ y_3 &= 2, \\ y_4 &= 0, \\ y_5 &= -1, \\ y_6 &= 2, \\ y_7 &= 3, \\ y_8 &= 0. \end{aligned}$$

2) Bestimme eintretenden Bogen:

Wähle Bogen $(4,6)$, denn $\underbrace{y_4}_{0} + \underbrace{c_{(4,6)}}_{1} < \underbrace{y_6}_{2}$.

3) Bestimme die neue Flussverteilung:



(2 − t ist die „extremste“ Bedingung)

Zielfunktionswert der neuen Flussverteilung:

$$\begin{aligned} cx &= \underbrace{1\cdot 3}_{(1,2)} + \underbrace{4\cdot 0}_{(2,7)} + \underbrace{(-3)\cdot 5}_{(3,5)} + \underbrace{2\cdot 0}_{(4,3)} + \underbrace{2\cdot 2}_{(4,6)} + \underbrace{1\cdot 3}_{(5,1)} + \underbrace{1\cdot 0}_{(5,4)} + \underbrace{4\cdot 0}_{(6,2)} + \underbrace{(-2)\cdot 8}_{(6,8)} + \underbrace{2\cdot 0}_{(7,1)} + \underbrace{2\cdot 4}_{(8,3)} + \underbrace{3\cdot 3}_{(8,7)} \\ &= 3 + 0 - 15 + 0 + 4 + 3 + 0 + 0 - 16 + 0 + 8 + 9 \\ &= 17 - 31 \\ &= \underline{-16} \quad (\checkmark \text{ vorher: } -4) \end{aligned}$$

Iteration 4

1) Bestimmung fairer Marktpreise:

Setze $y_1 = 0$. Daraus ergeben sich:

$$\begin{aligned} y_2 &= 1, \\ y_3 &= 2, \\ y_4 &= 0, \\ y_5 &= -1, \\ y_6 &= 2, \\ y_7 &= 3, \\ y_8 &= 0. \end{aligned}$$

2) Bestimme eintretenden Bogen: es gibt keinen eintretenden Bogen (i,j) mit $y_i + c_{i,j} < y_j$, denn:

Es gibt nur 4 Bögen, die nicht im Baum sind: $(2,7)$, $(5,4)$, $(6,2)$, $(7,1)$
Jedoch

$$\begin{aligned} y_2 + c_{(2,7)} &= 1+4 = 5 \not< 3 = y_7 \text{ ↯} \\ y_5 + c_{(5,4)} &= -1+1 = 0 \not< 0 = y_4 \text{ ↯} \\ y_6 + c_{(6,2)} &= 2+4 = 6 \not< 1 = y_2 \text{ ↯} \\ y_7 + c_{(7,1)} &= 3+2 = 5 \not< 0 = y_1 \text{ ↯} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Optimalität** erreicht mit Zielfunktionswert: $\boxed{\mathbf{cx = -16}}$.

2

Das Warenumschlagsproblem, welches die Kosten für den Verkauf der Bondsanteile minimiert, ist wie folgt formuliert:

4 Quellen:

- $q_1 = -150$ (Bar)
- $q_2 = -200$ (Bonds A)
- $q_3 = -100$ (Bonds B)
- $q_4 = -400$ (Bonds C)

7 Senken:

- $s_1 = 200$ (Monat 1)
- $s_2 = 100$ (Monat 2)
- $s_3 = 50$ (Monat 3)
- $s_4 = 80$ (Monat 4)
- $s_5 = 160$ (Monat 5)
- $s_6 = 140$ (Monat 6)
- $s_7 = 70$ (Rest) (800-730=70)

Kostenfunktion c:

- $c_{(1,j)} = 0 \; j \in \{1, \ldots, 6\}$ (keine Kosten bei Bargeld)
- $i \in \{2,3,4\}, j \in \{1, \ldots, 6\}: \; c_{(i,j)}$ entsprechend der Matrix

	1	2	3	4	5	6
2	0,7	0,4	0,4	0,3	0,2	0,1
3	0,8	0,6	0,4	0,2	0	0
4	1	1	1	0,5	0,5	0,5

$$\begin{pmatrix} \text{Bond A} \leftrightarrow 2 \\ \text{Bond B} \leftrightarrow 3 \\ \text{Bond C} \leftrightarrow 4 \end{pmatrix}$$

- $c_{(i,7)} = 0 \; i \in \{1, \ldots, 4\}$ (auf das übrig gebliebene Geld fallen keine Kosten an)