28. Mai 2024

5. Modellierung gemischt-ganzzahliger Programme und Verzweigen und Begrenzen (branch and bound)

Was ist ein ggP?

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, ein Zeilenvektor $c \in \mathbb{Q}^n$, eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$ und ein Vektor $x \in \mathbb{Q}^n$ der Variablen. Dann ist $\max\{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ein LP.

Wenn alle Variablen ganzzahlig sein müssen, handelt es sich um ein **ganzzahliges lineares Programm** (integer linear programm, ILP) $\max\{cx \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}_+^n\}$.

Wenn einige, aber nicht alle Variablen ganzzahlig sind, dann: **gemischt-ganzzahliges lineares Programm** (mixed integer LP, MILP, MIP) $\max\{cx \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}_+^{n-p} \times \mathbb{Z}_+^p\}$ für ein festes $p \in \mathbb{Z}_+$ mit $1 \leq p \leq n$.

Sind alle ganzzahligen Variablen beschränkt auf $\{0,1\}$, spricht man von einem 0-1- oder **binär-ganzzahliges lineares Programm** (BIP).

(M)IPs sehen fast so aus wie LPs. Daher spielen LP-Techniken beim Lösen von (M)IPs eine Rolle. Die naheliegende Idee, die LP-Lösung einfach nur zu runden, ist oftmals falsch

Beispiel 5.1.

Gegeben sei: $\max\ x_1 + 0{,}64 x_2$

s.d. $50x_1 + 31x_2 \leq 250$

$3x_1 - 2x_2 \geq -4$

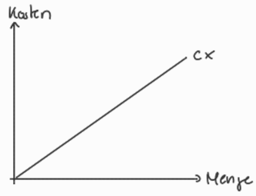
$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$

Die Optimallösung des LPs: $\left(\frac{376}{193}, \frac{950}{193}\right)^T \approx (1{,}948, 4{,}922)^T$ ist weit von der ganzzahligen Optimallösung entfernt: $(5,0)^T$

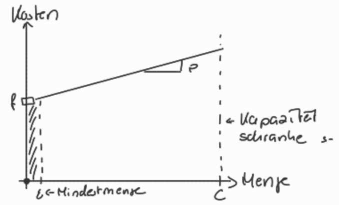
Für BIPs ist die Situation oftmals noch schlimmer: Ist die LP-Lösung $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})^T$ so weiß man nicht, welche Richtung man runden sollte. Es ist in vielen Fällen sogar schwer zu sagen, ob überhaupt eine zulässige Lösung in 0-1 existiert

Modellierung mit ganzzahligen Variablen

- <u>Fixkosten</u>: Eine typische nicht-lineare Kostenfunktion ist: $h(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ f + p \cdot x & , 0 \leq x \leq c \end{cases}$



lineare Kosten



nicht-lineare Kosten

mit Konstanten $f, p > 0$.

Dazu definiert man eine zulässige Variable $y \in \{0,1\}$ mit $y = 1$, falls $x > 0$ und $y = 0$ sonst. Dann ersetzt man $h(x)$ durch $fy + px$ als Zielfunktion und fügt die Nebenbedingung $x \leq c \cdot y$ hinzu.

Das ist noch nicht ganz korrekt, denn wenn $x = 0$, dann kann trotzdem $y = 1$ sein. Wenn die Zielfunktion minimiert wird, treten solche Lösungen jedoch nicht als Optimallösung auf. Alternative dazu: Man definiert ein $\varepsilon > 0$ und fügt die Nebenbedingung $x \geq \varepsilon \cdot y$ hinzu.

- <u>Das 0-1-Rucksack-Problem</u>:

Es gibt ein Budget b für die Investition in Projekte im folgenden Jahr und n mögliche Projekte, wobei a_j die Investition ins Projekt j und c_j der erwartete Gewinn ist. Ziel ist es, eine Teilmenge der Projekte auszuwählen, so dass das Budget nicht überschritten wird und der erwartete Gewinn maximiert wird.

<u>Mengen</u>: Eine Menge $N := \{1, \dots, n\}$ an Projekten.

<u>Parameter</u>: Die Werte a_j und c_j für jedes Projekt $j \in N$, Gesamtbudget b

<u>Variablen</u>: Die binäre Entscheidung $x_j \in \{0,1\}$ mit der Bedeutung: $x_j = 1 \Leftrightarrow$ Projekt j gewählt

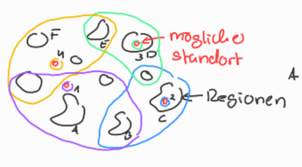
<u>Zielfunktion</u>: Der zu erwartende Gewinn wird maximiert $\rightarrow \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

<u>Nebenbedingungen</u>: Das Budget darf nicht überschritten werden $\rightarrow \sum_{j \in N} a_j \cdot x_j \leq b$.

- <u>Das Mengen-Überdeckungsproblem</u>:

Gegeben ist eine Anzahl von Regionen, für die ein Service bereit gestellt werden soll (z.B. Feuerwehr)

Für jeden potentiellen Standort ist bekannt, welche Regionen dieser versorgen kann und wie hoch die Kosten dafür sind. Das Ziel ist es, eine Teilmenge der potentiellen Standorte auszuwählen, so dass alle Regionen abgedeckt sind und die Kosten minimal.



$$A = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline A & 1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 & 0 \\ E & 0 & 0 & 1 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

<u>Mengen</u>: Sei $M := \{1, \dots, m\}$ die Menge der Regionen und $N := \{1, \dots, n\}$ die Menge der Standorte. Sei $S_j \subseteq M$ diejenige Teilmenge der Regionen, die durch Standort $j \in N$ bedient werden kann.

<u>Parameter</u>: Kosten c_j für Standort $j \in N$. Eine 0-1-Inzidenzmatrix A, so dass $a_{ij} = 1$ falls $i \in S_j$ und $a_{ij} = 0$ sonst.

<u>Variablen</u>: Die binäre Entscheidung $x_j \in \{0,1\}$ mit $x_j = 1 \Leftrightarrow$ Standort j gewählt

<u>Zielfunktion</u>: Minimiere die Gesamtkosten: $\min \sum_{j \in N} c_j x_j$

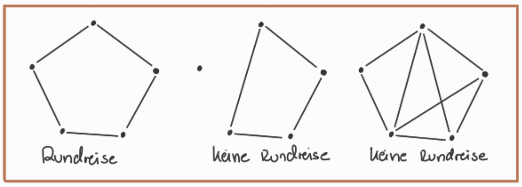
<u>Nebenbedingung</u>: Mindestens 1 Standort muss Region i bedienen: $\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i \in M$ (set-covering)

Varianten des Problems:

- Mengen-Aufteilungs-Problem (set partitioning, mit $=$)
- Mengen-Packungs-Problem (set packing, mit $\leq$)

Das Handlungsreisendenproblem (TSP, Traveling salesman problem)

Ein Handlungsreisender muss n Orte jeweils genau einmal besuchen und dann zum Ausgangsort zurückkehren. Die Reisezeit von Ort i zu j ist c_{ij}.
Gesucht ist eine Reihenfolge, welche die Rundreise in kürzester Zeit ermöglicht.



<u>Mengen</u>: Die Menge der Orte $N := \{1, \dots, n\}$

<u>Parameter</u>: Die Werte c_{ij}

<u>Variablen</u>: $x_{ij} \in \{0,1\}$ mit $x_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ Ort i ist direkter Vorgänger von Ort j in Rundreise.

<u>Zielfunktion</u>: Minimiere die Gesamtreisezeit $\to \min \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} c_{ij} x_{ij}$

<u>Nebenbedingungen</u>: Der Handlungsreisende verlässt jeden Ort i genau einmal: $\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} x_{ij} = 1 \ \forall i \in N$

Er kommt in jedem Ort genau einmal an: $\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} x_{ij} = 1 \ \forall j \in N$

Eine mögliche Lösung könnte so aussehen:

(eine unzusammenhängende Ansammlung von Subtouren)

Dagegen gibt es eine weitere Nebenbedingung $\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1 \ \forall S \subset N, S \neq \emptyset$. Das sind jedoch $O(2^{|N|})$ viele Nebenbedingungen

(Rekord: derzeit ca. 100.000 Orte)

Verzweigen - und - Begrenzen (branch - and - bound)

zentrales Beispiel

$$
S \begin{cases}
\max & 4x_1 - x_2 \\
& 7x_2 - 2x_2 \leq 14 \\
& x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 - 2x_1 \leq 3
\end{cases}
$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^2$$

<u>Schranke</u>: Wir fügen die Schlupfvariablen ein (x_3, x_4, x_5) und lösen die sogenannte <u>LP-Relaxierung</u>, in welcher die Ganzzahligkeitsbedingungen vernachlässigt werden. Die optimale Basislösung:

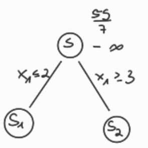
$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= \max & \tfrac{59}{7} - \tfrac{4}{7}x_3 - \tfrac{1}{7}x_4 \\
x_1 &= & \tfrac{20}{7} - \tfrac{1}{7}x_3 - \tfrac{2}{7}x_4 \\
x_2 &= & 3 \qquad\quad - x_4 \\
x_5 &= & \tfrac{23}{7} + \tfrac{2}{7}x_3 - \tfrac{10}{7}x_4 \\
& & x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir eine obere Schranke $\bar{z} = \frac{59}{7}$ und die fraktionale Lösung $\bar{x}_1 = \frac{20}{7}$, $\bar{x}_2 = 2$. Da wir keine ganzzahlige zulässige Lösung haben, setzen wir $\underline{z} = -\infty$.

<u>Verzweigen</u>: Da $\underline{z} < \bar{z}$, müssen wir verzweigen. Eine einfache Idee ist es, sich eine ganzzahlige Variable auszuwählen, die in der Basis ist und einen fraktionalen Wert hat und das Problem wird entlang dieses fraktionalen Wertes in zwei zu teilen.

Wenn $x_j = \bar{x}_j \notin \mathbb{Z}$, können wir setzen: $S_1 = S \cap \{x \mid x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor\}$ und $S_2 = S \cap \{x \mid x_j \geq \lceil \bar{x}_j \rceil\}$. Es gilt $S = S_1 \cup S_2$ und $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Ferner ist die Optimallösung $\bar{x}$ von $LP(S)$, d.h. die LP-Relaxierung von S, weder zulässig in $LP(S_1)$ noch in $LP(S_2)$. Falls es keine mehrfache LP-Optimallösungen gibt, $\max\{\bar{z}_1, \bar{z}_2\} < \bar{z}$ sein, d.h. die obere Schranke nimmt strikt ab.

Da $\bar{x}_1 = \frac{20}{7} \in \mathbb{Z}$, setzen wir $S_1 := S \cap \{x \mid x_1 \leq 2\}$ und $S_2 := S \cap \{x \mid x_1 \geq 3\}$. Die Unterprobleme (hier: S_1, S_2), Blätter im Aufzählungsbaum, die noch gelöst werden müssen, heißen



Aufzählungsbaum

b+b - Baum

aktive Knoten

30. Mai 2024

<u>Knotenwahl</u>: Die Liste beinhaltet S_1 und S_2. Wir wählen S_1.

<u>Reoptimierung</u>: Wie sollte $LP(S_1)$ gelöst werden, ohne wieder von vorne zu beginnen? Da wir nur eine einzelne obere bzw. untere Schranke als neue Nebenbedingung in $LP(S)$ hinzugefügt haben, bleibt die optimale Basislösung von $LP(S)$ zumindest dual erhalten.

Daher nimmt man zum Reoptimieren das duale Simplex-Verfahren. Üblicherweise reichen wenig Pivot-Schritte aus, um eine neue LP-optimale Lösung zu finden.

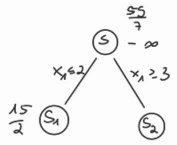
Wendet man dies auf $LP(S_1)$ an, so schreibt man die neue Bedingung $x_1 \leq 2$ als $x_1 + s = 2$, $s \geq 0$, welches über die Nichtbasisvariablen wie folgt ausgedrückt werden kann: $-\frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_2 + s = -\frac{6}{7}$.

Damit haben wir die dual zulässige Darstellung:

$$
\begin{aligned}
\bar{z}_1 &= \max & \tfrac{59}{7} - \tfrac{4}{7}x_3 - \tfrac{1}{7}x_4 \\
x_1 &= & \tfrac{20}{7} - \tfrac{1}{7}x_3 - \tfrac{2}{7}x_4 \\
x_2 &= & 3 \qquad\quad - x_4 \\
x_5 &= & \tfrac{23}{7} + \tfrac{2}{7}x_3 - \tfrac{10}{7}x_4 \\
s &= & -\tfrac{6}{7} + \tfrac{1}{7}x_3 + \tfrac{2}{7}x_4 \\
& & x_1, \dots, x_5, s \geq 0
\end{aligned}
$$

Nach zwei dualen Simplexschritten ist das LP reoptimiert mit: $\bar{z}_1 = \max \ \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x_5 - 3s$ mit $z^* = \frac{15}{2}$

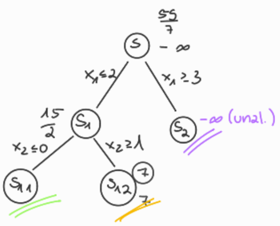
$$\begin{aligned} x_1 &= 2 && - s \\ x_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_5 && - s \\ x_3 &= 1 + x_5 && + 5s \\ x_4 &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}x_5 && - 6s \\ & x_1, \dots, x_5, s \geq 0 \end{aligned}$$



<u>Verzweigen:</u> Da S_1 nicht abgeschnitten werden kann, nutze die gleiche Verzweigungsregel wie vorher und erzeugen zwei neue Knoten $S_{11} := S_1 \cap \{x \mid x_2 \leq 0\}$ und $S_{12} = S_1 \cap \{x \mid x_2 \geq 1\}$ und fügen diese hinzu.

<u>Knotenwahl:</u> Die Liste der aktiven Knoten besteht aus S_2, S_{11}, S_{12}. Wir wählen S_2.

<u>Reoptimierung:</u> Wir lösen $LP(S_2)$ mit dem dualen Simplex wie zuvor. Die Bedingung $x_1 \geq 3$ wird mittels Schlupfvariablen zunächst als $x_1 - t = 3, t \geq 0$ geschrieben, dann mittels Nichtbasisvariablen ausgedrückt: $\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 + t = -\frac{1}{7}$.



Daraus folgt: $\bar{z}_2 = \max \ \frac{59}{7} - \frac{4}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4$

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{20}{7} - \tfrac{1}{7}x_3 - \tfrac{2}{7}x_4 \\ x_2 &= 3 \qquad\quad - x_4 \\ x_5 &= \tfrac{23}{7} + \tfrac{2}{7}x_3 - \tfrac{10}{7}x_4 \\ t &= -\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{7}x_3 - \tfrac{2}{7}x_4 \\ & x_1, \dots, x_5, t \geq 0 \end{aligned}$$

Dieses LP ist offenbar unzulässig, $\bar{z}_2 = -\infty$ und somit kann Knoten S_2 aufgrund von Unzulässigkeit abgeschnitten werden.

<u>Knotenwahl:</u> S_{11} und S_{12} aktive Knoten. Wähle S_{12}.

<u>Reoptimierung:</u> Es ist $S_{12} = S \cap \{x \mid x_1 \leq 2, x_2 \geq 1\}$

Das $LP(S_{12})$ hat Optimallösung $\bar{x}^{12} = (2,1)^T$ mit Zielfunktionswert 7. Da $\bar{x}^{12} \in \mathbb{Z}^2$, ist $z^{12} = 7$.

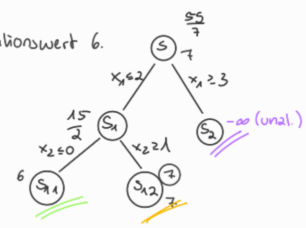
<u>Beste gefundene Lösung anpassen:</u> Da die Lösung von $LP(S_{12})$ ganzzahlig ist, passen wir den Wert der bislang besten gefundenen Lösung an:

$\underline{z} = \max\{\underline{z}^{-\infty}, 7\}$ und merken uns die Lösung $(2,1)^T$. S_{12} wird abgeschnitten aufgrund von Optimalität.

<u>Knotenwahl:</u> Wähle letzten Knoten S_{11}.

<u>Reoptimierung:</u> $S_{11} = S \cap \{x \mid x_1 \leq 2, x_2 \leq 0\}$. Das resultierende $LP(S_{11})$ hat die Optimallösung $\bar{x}^{11} = (\frac{3}{2}, 0)^T$ mit Zielfunktionswert 6.

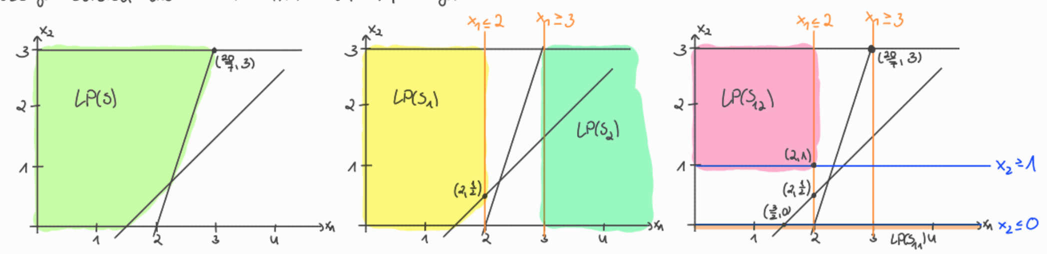
Da $\underline{z} = 7 \geq \bar{z}^{11} = 6$, wird der Knoten S_{11} aufgrund der Schranke abgeschnitten.



<u>Knotenwahl:</u> Liste der aktiven Knoten leer ist, terminiert das Verfahren.

Die Lösung $x = (2,1)^T$ mit $z = 7$ ist optimal.

Der zulässige Bereich des Problems mit allen Aufteilungen:



Verzweigen und Begrenzen

Algorithmus 5.2

Schritt 1: Initialisierung. Initiales Problem S auf die Liste der aktiven Probleme, $\underline{z} := -\infty$, beste Lösung x^* unbekannt oder leer.

Schritt 2: Ist Liste leer? Wenn ja, dann Ausgabe des optimalen x^*, falls eins gefunden. → STOPP

Schritt 3: Wähle ein Problem S^i von der Liste.

Schritt 4: Löse $LP(S^i)$. Der LP-Optimalwert $\bar{z}^i$ ist die obere Schranke vom Problem S^i und x^i die LP-Lösung.

Schritt 5: Ist $LP(S^i)$ unzulässig? Wenn ja, schneide den Knoten ab und gehe zu 2.

Schritt 6: Ist $\bar{z}^i \leq \underline{z}$? Wenn ja, schneide den Knoten ab und gehe zu 2.

Schritt 7: Ist x^i ganzzahlig? Wenn ja, setze $\underline{z} := \bar{z}^i$ und merke die Lösung $x^* = x^i$. Schneide Knoten ab und gehe zu 2.

Schritt 8: Teile S^i auf in S^{i1} und S^{i2} und füge diese zur Liste der aktiven Knoten hinzu. Gehe zu 2.