Lösungen zu Übungsblatt 1

1

a)

G ist nicht bipartit, da es einen ungeraden Kreis enthält. Ein Beispiel für einen ungeraden Kreis ist $(1,2,3,1)$.

b)

G besitzt einen solchen Zyklus, beispielsweise $(1,3,2,4,3,6,4,5,6,7,5,2,1)$.

c)

G ist nicht k-regulär, da $\deg(1) = 2 \neq 4 = \deg(2)$.

d)

Der Digraph D ist stark zusammenhängend, da man von jedem Knoten jeden anderen erreichen kann. Es wird im folgenden gezeigt, dass von Knoten 1 alle anderen Knoten erreichbar sind und umgekehrt Knoten 1 von allen anderen Knoten erreicht werden kann.

Knoten	2	3	4	5	6	7
Pfad von Knoten 1	$(1,2)$	$(1,2,3)$	$(1,2,3,4)$	$(1,2,3,4,5)$	$(1,2,3,4,5,6)$	$(1,2,3,4,5,7)$
Pfad zu Knoten 1	$(2,3,1)$	$(3,1)$	$(4,2,3,1)$	$(5,2,3,1)$	$(6,4,2,3,1)$	$(7,6,4,2,3,1)$

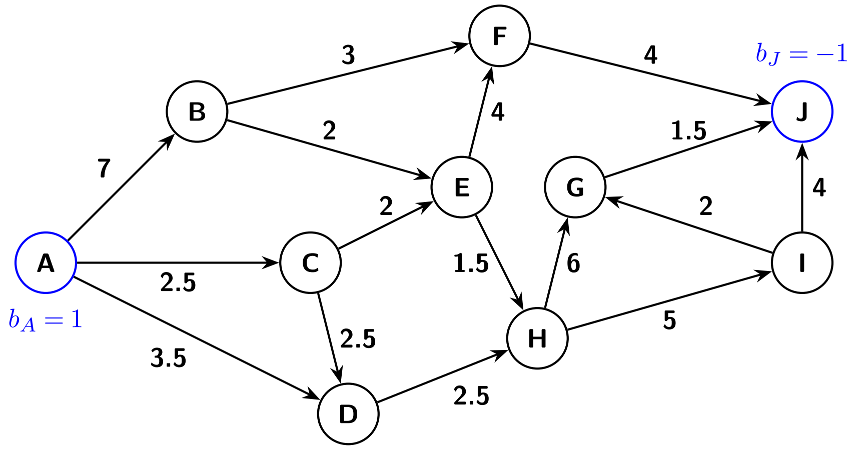
e)

Einen solchen Kreis kann es nicht geben, da die durch die Konstellation der Kanten bei Knoten 1, 2 und 3 zwingenderweise der Kreis $(3,1,2,3)$ abgelaufen werden muss. Dieser Kreis wäre nur einfach, wenn 3 der Start- und Endknoten wäre. Dann wurden allerdings Knoten 4, 5, 6 und 7 nicht besucht, womit die Teilbedingung des Besuchens aller Knoten nicht erfüllt wäre.

f)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} (1,2) & (2,3) & (3,1) & (3,4) & (3,6) & (4,2) & (4,5) & (5,2) & (5,6) & (5,7) & (6,4) & (7,6) \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
-1 & & 1 & & & & & & & & & \\
1 & -1 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & 1 & -1 & -1 & -1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & -1 & -1 & & & & 1 & \\
 & & & & & & 1 & -1 & -1 & -1 & & \\
 & & & & 1 & & & & 1 & & -1 & 1 \\
 & & & & & & & & & 1 & & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

2



$$b = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array}$$

Es werden alle Bauarbeiter von A (deshalb -1) nach J (deshalb 1) "verschickt".

$$c = \begin{pmatrix} (A,B) & (A,C) & (A,D) & (B,E) & (B,F) & (C,D) & (C,E) & (C,H) & (D,H) \\ 7 & 2{,}5 & 3{,}5 & 2 & 3 & 2{,}5 & 2 & 4 & 2{,}5 \\ (E,F) & (E,H) & (F,J) & (G,J) & (H,G) & (H,I) & (I,G) & (I,J) & \\ 4 & 1{,}5 & 4 & 1{,}5 & 6 & 5 & 2 & 4 & \end{pmatrix}$$

Warenumschlagsproblem $\rightarrow \min \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e$

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{wenn Kante } e \text{ auf dem kürzesten Pfad liegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3

Def. Brücke

Eine Kante e in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine **Brücke**, wenn $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.

Beweisen Sie folgende Aussage: In einen zusammenhängenden Graphen G, wo jeder Knoten einen geraden Grad hat, gibt es keine Brücke.

Beweis

<u>Beweis mittels Widerspruch</u>

Angenommen, G sei zusammenhängend und jeder Knoten habe einen geraden Grad. Weiterhin nehme man an, G enthalte eine Brücke e.

Entfernt man e, zerfällt der Graph in zwei Zusammenhangskomponenten G_1 und G_2. Die Knoten in G hatten vor dem Entfernen alle geraden Grad. Durch das Entfernen von e verlieren genau die beiden Knoten, an denen e anliegt, je eine Kante — ihr Grad wird daher ungerade. Alle anderen Knoten behalten ihren Grad.

Nach dem **Handschlag-Lemma** müsste in jeder Zusammenhangskomponente die Summe der Knotengrade gerade sein. Da jedoch in G_1 und G_2 jeweils ein Knoten mit ungeradem Grad existiert, wäre dies nicht möglich. Dies ist ein Widerspruch. Also kann G keine Brücke enthalten. □

Handschlag-Lemma

Ist $G = (V, E)$ ein einfacher (ungerichtet, keine Schleifen) Graph, so gilt:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

„Die Summe aller Knotengrade ist gleich der doppelten Anzahl der Kanten, denn jede Kante liegt an zwei Knoten, liefert also zwei zusätzliche Grade."

Daraus folgt sofort: jeder Graph hat eine gerade Anzahl an Knoten mit ungeradem Grad.
(sonst wäre ja $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot k + 1 \neq 2 \cdot |E|, \ k \in \mathbb{N}$)

4

Lemma 1.23

Sei $T = (V, E)$ ein Baum und $v_1 \in V$ ein beliebiger Knoten. Dann können die Knoten in V so als $v_2, \ldots, v_n$ und die Kanten in E so als $e_2, \ldots, e_n$ aufgezählt werden, dass es für alle $i = 2, \ldots, n$ genau eine Kante e_i gibt, deren einer Endknoten v_i und deren anderer Endknoten $v_1, \ldots, v_{i-1}$ ist.

Lemma 1.24

Sei T ein aufspannender Baum für einen Digraph D und $n := |V|$. Seien die Knoten und Bögen wie in Lemma 1.23 aufgezählt. Sei B eine $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrix von $\tilde{A}$, wobei die Zeilen von B gemäß der Knotenreihenfolge in V permutiert sind. Die Spalten von B entsprechen den Bögen von T in der aufgezählten Reihenfolge.

$\rightarrow$ Dann ist B eine obere Dreiecksmatrix mit von Null verschieden Einträgen entlang der Hauptdiagonalen.

Beweis zu Lemma 1.24

Da aus den restlichen $n-1$ Zeilen die fehlende Zeile rekonstruiert werden kann, kann die Zeile von Knoten v_1 aus der Knoten-Inzidenz-Matrix A entfernt werden (ohne Informationsverlust).

Daher enthält die Matrix B nur die Zeilen von Knoten $v_2, \ldots, v_n$ und die Spalten von Bögen $e_2, \ldots, e_n$.

Nach Lemma 1.23 hat die Kante e_i einen Endknoten v_i, daher hat hat der Eintrag $B_{i,i}$ den Wert -1 (Start) oder 1 (Ende), somit ist die Hauptdiagonale von Null verschieden.

Das andere Ende der Kante e_i ist v_j mit $j < i$. Daher sind alle Einträge in B unterhalb der Hauptdiagonalen gleich Null, da dort $j > i$ gilt. Damit ist B eine obere Dreiecksmatrix.

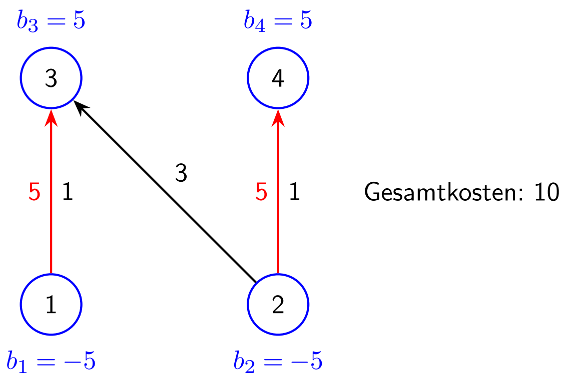
□

5

Gegeben ein Warenumschlagsproblem mit positiven Kantenkosten. Widerlegen sie folgende Aussage:

Werden das Angebot an einer Quelle und der Bedarf an einer Senke simultan um eine Einheit verringert, dann verringern sich auch die Gesamtkosten des optimalen Warenumschlags.

Gegenbeispiel:



Reduzierung von b_1 und b_4 um 1