1. Checkliste

- Dualer Simplex ✓
- Gemischt-ganzzahlige Optimierung ✓
- Modellierung mit Binär-Variablen
- Branch-and-Bound ✓
- Schnittebenenverfahren

2. Dualer Simplex

Ein LP mit Standardform

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ \text{so dass} \quad & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

heißt
- **primal zulässig** wenn $b \geq 0$
- **dual zulässig** wenn $c \leq 0$

Zielsetzung

„Normaler“ Simplex	Start: primal zulässig, dual nicht unbedingt → iteriere bis dual zulässig → optimal.
Dualer Simplex	Start: **dual zulässig**, primal nicht → iteriere, bis primal zulässig → optimal.

- Als austretende Variable wird die Basisvariable gewählt, die ein negatives b_i, und unter allen solchen das kleinste hat.
  - Es gibt keine austretende Variable (alle $b_i \geq 0$) → Dictionary ist nun auch primal zulässig → optimal und terminiere.
- Als eintretende Variable wird die Nichtbasisvariable gewählt, die in der Zeile der austretenden Variable einen positiven Koeffizienten (negatives $\overline{a}_{ij} < 0, \overline{a} = -a$), und unter allen solchen das kleinste Verhältnis $\frac{\overline{c}_j}{\overline{a}_{ij}} \left(= \frac{|c_{ij}|}{a_ij} \right)$ hat.
  - Es gibt keine eintretende Variable (alle $\overline{a}_{ij} \geq 0$) → das duale Problem ist unbeschränkt → das primale Problem ist unzulässig, terminiere.
- Austausch mittels Umstellen und Einsetzen in allen anderen Gleichungen (wie bei normalen Simplex)
- $c \not\leq 0$ → Phase 1: Dualer Simplex mit künstlicher Zielfunktion $z = -1 \cdot x$ → terminiert mit primal zulässigem Dictionary → Phase 2: originale Zielfunktion einsetzen + normaler Simplex

Beispiel:

primales Dictionary:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & -4 & + & 3 \cdot x_2 & - & 11 \cdot x_4 & + & 1 \cdot x_5 \\
x_3 & = & 3 & - & 1 \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_4 & - & 2 \cdot x_5 \\
z & = & 12 & - & 4 \cdot x_2 & - & 1 \cdot x_4 & - & 1 \cdot x_5
\end{array}$$

- dual zulässig da $c \leq 0$
- austretende Variable: x_1 $\left(b_1 = -4 < 0\right)$
- eintretende Variable: x_5 $\left(\text{kleinstes } \frac{c_j}{a_{1j}} : \ \frac{c_5}{a_{15}} = \frac{1}{1} = 1 < \frac{4}{3} = \frac{c_2}{a_{12}}\right)$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_5 & = & 4 & + & 1 \cdot x_1 & - & 3 \cdot x_2 & + & 11 \cdot x_4 \\
x_3 & = & -5 & - & 2 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & - & 19 \cdot x_4 \\
z & = & 8 & - & 1 \cdot x_1 & - & 1 \cdot x_2 & - & 12 \cdot x_4
\end{array}$$

- dual zulässig da $c \leq 0$
- austretende Variable: x_3 $\left(b_3 = -5 < 0\right)$
- eintretende Variable: x_2 (einzige Variable mit positivem Koeffizienten)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_5 & = & 1 & - & \frac{1}{5} \cdot x_1 & - & \frac{3}{5} \cdot x_3 & - & \frac{2}{5} \cdot x_4 \\
x_2 & = & 1 & + & \frac{2}{5} \cdot x_1 & + & \frac{1}{5} \cdot x_3 & + & \frac{19}{5} \cdot x_4 \\
z & = & 7 & - & \frac{7}{5} \cdot x_1 & - & \frac{1}{5} \cdot x_3 & - & \frac{79}{5} \cdot x_4
\end{array}$$

Dictionary ist nun auch primal zulässig, da $b \geq 0 \rightarrow$ optimal

3. Gemischt-ganzzahlige Optimierung

- Ganzzahliges Lineares Programm (Integer Linear Program, **ILP**):

$$\max\{A \cdot x \leq b \mid x \in \mathbb{Z}^n\}$$

- Gemischt-ganzzahliges Lineares Programm (Mixed Integer Linear Program, **MILP**):

$$\max\{A \cdot x \leq b \mid x \in \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{Z}^p, p \in \mathbb{Z}, 1 \leq p \leq n\}$$

- Binär-ganzzahliges Program (Binary Integer Program, **BIP**):

$$\max\{A \cdot x \leq b \mid x \in \{0,1\}^n\}$$

4. Branch-and-Bound

1. LP-Relaxierung: Ganzzahl-Bedingung ignorieren, $LP(S)$ mit Simplex lösen: $\overline{z} \leftarrow z$ ($\overline{z} :=$ obere Schranke), wenn x Brüche enthält $\rightarrow \underline{z} = -\infty$ (untere Schranke)
2. Verzweigen: Teile Problem S_i in $S_{i1} := S_i \cap \{x \mid x_j \leq \lfloor x_j \rfloor\}$ und $S_{i2} := S_i \cap \{x \mid x_j \geq \lceil x_j \rceil\}$, und füge beide zur Warteschlange L hinzu. x_j ist Variable mit Bruch in der Lösung von S_i.
3. Reoptimiere erstes Problem $LP(S_i)$ in Warteschlange mit dualem Simplex:
   - Füge Ganzzahl-Bedingung an x_j als neue NB-Variable hinzu:
     - $x_j \leq a \rightarrow x'_j := -x_j + a, x'_j \geq 0$ (Gleichung von x_j einsetzen)
     - $x_j \geq b \rightarrow x'_j := x_j - b, x'_j \geq 0$ (Gleichung von x_j einsetzen)
   - der berechnete LP-Optimalwert $\overline{z}^i$ ist obere Schranke für diesen Teilbaum
   - Ist $LP(S_i)$ unzulässig $\rightarrow$ schneide ab (aufgrund Unzulässigkeit)
   - Ist $\overline{z}^i \leq \underline{z} \rightarrow$ schneide ab (aufgrund der Schranke)
   - $x \in \mathbb{Z}^n$: $\underline{z} \leftarrow \max\{\underline{z}, \overline{z}^i\}$, $x^* \leftarrow x$, schneide ab (aufgrund Optimalität)
   - x enthält Brüche $\rightarrow$ verzweige wie oben beschrieben
4. Gib x^* und $\underline{z}$ zurück, wenn Warteschlange leer ist.

Beispiel:

LP:

$$\left.\begin{array}{rrcrcr} \max & 4\cdot x_1 & - & x_2 & & \\ \text{so dass} & 7\cdot x_1 & - & 2\cdot x_2 & \leq & 14 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & 2\cdot x_1 & - & 2\cdot x_1 & \leq & 3 \\ & & & x & \leq & \mathbb{Z}^2 \end{array}\right\} S$$

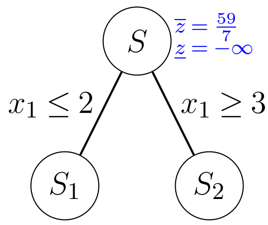
LP-Relaxierung:

$$\underbrace{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & \frac{20}{7} & - & \frac{1}{7}\cdot x_3 & - & \frac{2}{7}\cdot x_4 \\ x_2 & = & 3 & & & - & x_4 \\ x_5 & = & \frac{23}{7} & + & \frac{2}{7}\cdot x_3 & - & \frac{10}{7}\cdot x_4 \\ z & = & \frac{59}{7} & - & \frac{4}{7}\cdot x_3 & - & \frac{1}{7}\cdot x_4 \end{array}}_{\text{optimale Dictionary nach Simplex}}$$

$\rightarrow$ obere Schranke $\overline{z} = \frac{59}{7}$, fraktionale Lösung $x = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Verzweigen

Aufzählungsbaum:



Mit $S_1 := S \cap \{x \mid x_1 \leq 2\}$, $S_2 := S \cap \{x \mid x_1 \geq 3\}$, $L = [S_1, S_2]$ (Warteschlange)

LP(S_1) lösen: $x_1 \leq 2 \rightarrow x_1' := -x_1 + 2,\ x_1' \geq 0$
Neues Dictionary:

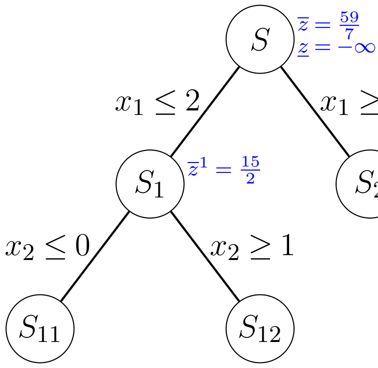
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & \frac{20}{7} & - & \frac{1}{7}\cdot x_3 & - & \frac{2}{7}\cdot x_4 \\ x_2 & = & 3 & & & - & x_4 \\ x_5 & = & \frac{23}{7} & + & \frac{2}{7}\cdot x_3 & - & \frac{10}{7}\cdot x_4 \\ x_1' & = & -\frac{6}{7} & + & \frac{1}{7}\cdot x_3 & + & \frac{2}{7}\cdot x_4 \\ z & = & \frac{59}{7} & - & \frac{4}{7}\cdot x_3 & - & \frac{1}{7}\cdot x_4 \end{array}$$

Reoptimieren mit dualem Simplex liefert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 2 & & & - & x_1' \\ x_2 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2}\cdot x_5 & - & x_1' \\ x_3 & = & 1 & + & x_5 & + & 5\cdot x_1' \\ x_4 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{1}{2}\cdot x_5 & + & 5\cdot x_1' \\ z & = & \frac{15}{2} & - & \frac{1}{2}\cdot x_5 & - & 3\cdot x_1' \end{array}$$

$\rightarrow$ obere Schranke $\overline{z}^1 = \frac{15}{2}$, $\overline{x}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^2 \rightarrow$ Verzweigen

Aufzählungsbaum:



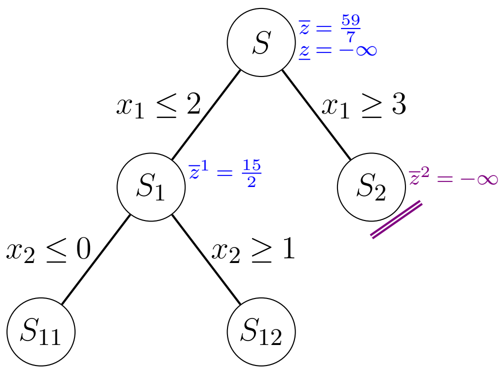
Mit $S_{11} := S_1 \cap \{x \mid x_2 \le 0\} = S \cap \{x \mid x_1 \le 2, x_2 \le 0\}$,
$S_{12} := S_1 \cap \{x \mid x_1 \ge 3\} = S \cap \{x \mid x_1 \le 2, x_2 \ge 1\}$,
$L = [S_2, S_{11}, S_{12}]$

LP(S_2) lösen: $x_1 \ge 3 \to x_1' := x_1 - 3,\ x_1' \ge 0$
Neues Dictionary:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & = & \frac{20}{7} & - & \frac{1}{7} \cdot x_3 & - & \frac{2}{7} \cdot x_4 \\
x_2 & = & 3 & & & - & x_4 \\
x_5 & = & \frac{23}{7} & + & \frac{2}{7} \cdot x_3 & - & \frac{10}{7} \cdot x_4 \\
x_1' & = & -\frac{1}{7} & - & \frac{1}{7} \cdot x_3 & - & \frac{2}{7} \cdot x_4 \\
z & = & \frac{59}{7} & - & \frac{4}{7} \cdot x_3 & - & \frac{1}{7} \cdot x_4
\end{array}$$

Reoptimieren: LP unzulässig (austretend x_1', kein eintretend da alle negativ)
$\to$ obere Schranke $\overline{z}^2 = -\infty$, Abschneiden wegen Unzulässigkeit

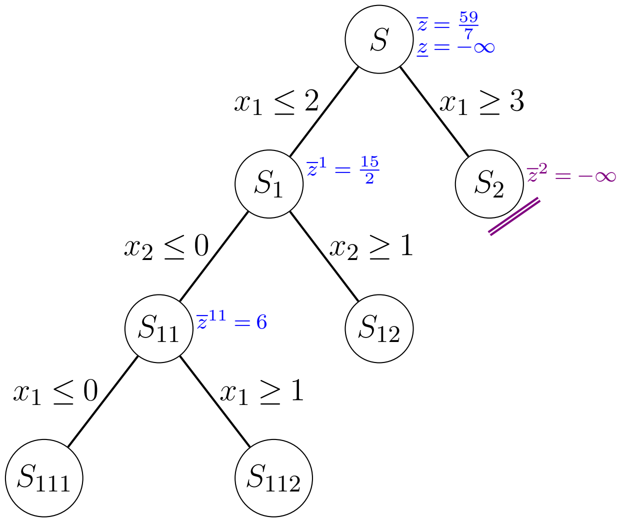
Aufzählungsbaum:



$L = [S_{11}, S_{12}]$

LP(S_{11}) lösen: $x_1 \le 2 \to x_1' := -x_1 + 2,\ x_1' \ge 0$
$x_2 \le 0 \to x_2' = -x_2,\ x_2' \ge 0$
Reoptimieren: $\overline{z}^{11} = 6$, $\overline{x}^{11} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{Z}^2 \to$ Verzweigen

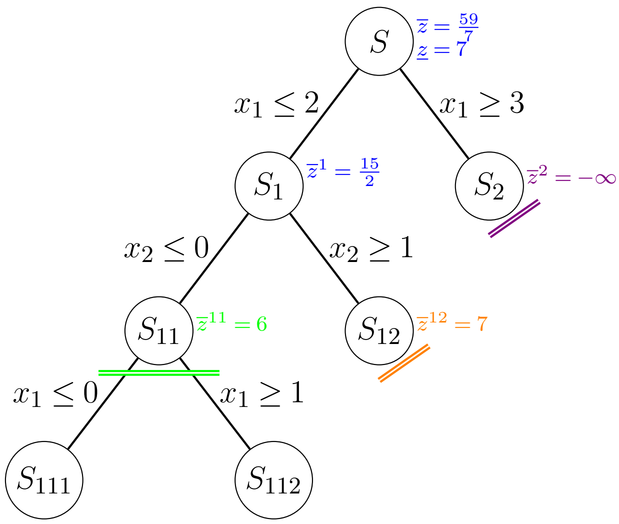
Aufzählungsbaum:



$L = [S_{12}, S_{111}, S_{112}]$

LP(S_{12}) lösen: $x_1 \leq 2 \rightarrow x_1' := -x_1 + 2,\, x_1' \geq 0$
$x_2 \geq 1 \rightarrow x_2' = -x_2 + 1,\, x_2' \geq 0$
Reoptimieren: $\overline{z}^{12} = 7$, $\overline{x}^{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ ✓ $\rightarrow \underline{z} = 7$, Abschneiden wegen Optimalität
Abschneiden von S_{111}, S_{112} da deren obere Schranke $\overline{z}^{11} = 6 < 7 = \underline{z}$

Aufzählungsbaum:



$L = [] \rightarrow$ Fertig!

5. Gomorys fraktionales Schnittebenenverfahren

- IP mit LP-Relaxierung lösen (Ganzzahl-Bedingung ignorieren, Simplex)
- Wenn $x \in \mathbb{Z}^n \rightarrow$ optimal und terminiere
- Sonst $\exists i : x_i \notin \mathbb{Z} \rightarrow$ Mache aus Zeile i mittels **Chvátal-Gomory-Schnitt** eine weitere Ungleichung, und füge diese als neue Schlupfvariable dem Dictionary hinzu:

$$\begin{aligned}
(a_i - \lfloor a_i \rfloor) \cdot x &\geq b_i - \lfloor b_i \rfloor \\
(-a_i + \lfloor a_i \rfloor) \cdot x &\leq -b_i + \lfloor b_i \rfloor \quad \text{(Standardform)} \\
x_{n+i} &= -b_i + \lfloor b_i \rfloor - (-a_i + \lfloor a_i \rfloor) \cdot x
\end{aligned}$$

$(\lfloor -a \rfloor = -\lceil a \rceil)$

- Auf neuem Dictionary wieder dualen Simplex anwenden

Beispiel:

IP:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{so dass} & 3 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & \leq & 5 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}_+
\end{array}$$

Nach Lösen der LP-Relaxierung mit Simplex erhält man:

$$\begin{array}{rclcrcr}
x_1 & = & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{3} \cdot x_3 & + & \frac{2}{3} \cdot x_4 \\
x_2 & = & 2 & & & - & x_4 \\
z & = & \frac{7}{3} & - & \frac{1}{3} \cdot x_3 & - & \frac{1}{3} \cdot x_4
\end{array}$$

Dictionary optimal mit $z^* = \frac{7}{3}$, aber $x_1 \notin \mathbb{Z} \rightarrow$ Hinzufügen neuer Ungleichung für x_1 mittels Chvátal-Gomory-Schnitt:

$$\left(\frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor\right) \cdot x_3 + \left(-\frac{2}{3} - \left\lfloor -\frac{2}{3} \right\rfloor\right) \cdot x_4 \geq \frac{1}{3} - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{3} \cdot x_3 + \frac{1}{3} \cdot x_4 \geq \frac{1}{3}$$

Neues Dictionary:

$$\begin{array}{rclcrcr}
x_1 & = & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{3} \cdot x_3 & + & \frac{2}{3} \cdot x_4 \\
x_2 & = & 2 & & & - & x_4 \\
x_5 & = & -\frac{1}{3} & + & \frac{1}{3} \cdot x_3 & + & \frac{1}{3} \cdot x_4 \\
z & = & \frac{7}{3} & - & \frac{1}{3} \cdot x_3 & - & \frac{1}{3} \cdot x_4
\end{array}$$

Reoptimieren mit dualem Simplex $\rightarrow x_5$ austretend, x_3 eintretend:

$$\begin{array}{rclcrcr}
x_1 & = & 0 & + & x_4 & - & x_5 \\
x_2 & = & 2 & & & - & x_4 \\
x_3 & = & 1 & - & x_4 & + & 3 \cdot x_5 \\
z & = & 2 & & & - & x_5
\end{array}$$

Dictionary ist optimal mit ganzzahliger Lösung $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $z^* = 2$ ✓

6. Chvátal-Gomory-Verfahren

nicht verwechseln mit **Chvátal-Gomory-Schnitt**!

Ziel: fraktionale Lösung wegschneiden

- Wähle Vektor $u \in \mathbb{R}_+^m$, so dass möglichst viele Variablen eliminiert werden
- Betrachte Linearkombination der Ungleichungen mit u
- Runde links ab, sofern $x \geq 0$
- Runde rechts ab, sofern links ganzzahlig

Beispiel:

IP:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.d.} & 2 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & - & 2 \cdot x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

und fraktionale Lösung: $x^* = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ (nicht optimal)

Wähle $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Neue Ungleichung:

$$1 \cdot (2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2) + \frac{3}{2} \cdot (x_1 - 2 \cdot x_2) \leq 1 \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot 1$$

$$\left(2 + \frac{3}{2}\right) \cdot x_1 + (3 - 3) \cdot x_2 \leq 4 + \frac{3}{2}$$

$$\frac{7}{2} \cdot x_1 \leq \frac{11}{2}$$

wegen $x_1 \geq 0$ runde links ab:

$$3 \cdot x_1 \leq \frac{11}{2}$$

wegen links ganzzahlig runde rechts ab:

$$3 \cdot x_1 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \; x_1 \leq \frac{5}{3}$$

wegen links ganzzahlig runde rechts ab:

$$x_1 \leq 1$$

Neue Ungleichung $x_1 \leq 1$ schneidet x^* ab