Numerik und Stochastik

Labor #1

05.04.2023

Marcel Völschow

HAW
HAMBURG

Aufgabe 1

Berechne die folgenden Summen

a) $\sum_{k=0}^{1000} k^2$

b) $\sum_{k=3}^{1000} \frac{1}{k}$

c) $\sum_{k=0}^{1000} \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{14}\right)$

sowohl *mit* als auch *ohne* eine for-Schleife. Liefern beide Methoden das gleiche Ergebnis?

Aufgabe 2

Erzeuge für $x \in [0.01, 20]$ jeweils vier Plots der Funktionen

(a) $f(x) = 5 \cdot \exp(x/3)$

(b) $g(x) = 0.1 \cdot x^4$

mit normaler Achsenskalierung, logarithmischer x-Achse, logarithmischer y-Achse und doppelt-logarithmischer Achse. Nutze dafür die Befehle `semilogx`, `semilogy` und `loglog`. Ordne die vier Plots für jede Funktion in einem 2×2 Schema an. Füge jeweils Titel, Achsenbeschriftung und Grid-Linien hinzu.

Aufgabe 3

Im Alltag sprechen wir schnell von *Chaos*, wenn uns etwas komplex und unvorhersehbar erscheint. Die Mathematik kennt jedoch eine präzise Definition dafür, wann es sich bei einem gegebenen System um ein *deterministisch-chaotisches* System handelt. Zu den bekanntesten Merkmalen gehört der *butterfly effect*: Kleine Variationen in den Anfangsbedingungen eines Systems führen dazu, dass sich das System völlig anders entwickelt.
Das einfachste Modell zum Studium des Schmetterlingseffekts ist der logistische Iterator

$$x_{n+1} = r\, x_n\, (1 - x_n)$$

der zum Beispiel in der Populationsdynamik Anwendung findet. Hierbei ist r ein Modellparameter mit $r \in [0, 4]$, die Sequenz beginnt mit einem beliebigen Wert $x_0 \in [0, 1]$. Mit diesen Werten können wir die obige Gleichung nutzen, um den Nachfolger x_1 zu berechnen, und so weiter. Für die meisten Werte von r verhält sich der logistische Iterator eher unspektakulär und produziert einfache konvergente Folgen, aber innerhalb eines spezifischen chaotischen Bereichs passieren seltsame Dinge.

a) Schreibe eine Funktion `log_next`, um das nächste Element x_{n+1} für ein gegebenes x_n und r zu berechnen. Printe die ersten 20 Elemente für $x_0 = 0.1$ und $r = 1.5$.

b) Implementiere eine Funktion `log_sequence`, die einen Anfangswert x_0, einen Parameter r und eine Anzahl von Elementen n nimmt, die logistische Sequenz bis zum Element n berechnet und sie als Liste zurückgibt.

c) Zeige, dass für $r = 2.5$ die langfristige Entwicklung einer Sequenz unabhängig von deiner Wahl von x_0 ist, indem du 5 Sequenzen mit verschiedenen $x_0 \in (1, 0)$ bis x_{30} in einem gemeinsamen Graphen plottest.

d) Erstelle eine Liste von 5 leicht unterschiedlichen Anfangswerten im Bereich $x_0 = 0.6 \pm 10^{-6}$. Setze $r = 3.85415$ und berechne die logistische Sequenz für jeden deiner fünf Anfangswerte bis zu x_{30}. Visualisiere deine fünf Sequenzen in einem Plot.