Numerik und Stochastik

Labor #2

24.04.2024

Marcel Völschow

HAW
HAMBURG

Aufgabe 1

Der Breitengrad ϕ eines Ortes bestimmt maßgeblich die Länge eines Tages T im Jahreslauf. Für die Bestimmung von T werden zwei Hilfsgrößen berechnet. Zunächst

$$\delta = -\arcsin\left(\sin\epsilon\,\cos\left(\omega\,(N+10)\right)\right)$$

mit der ekliptikalen Schiefe $\epsilon = 23{,}44$ deg und Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\,\pi/365.24$ d sowie der Zeit N, die seit Neujahr vergangen ist (in Tagen). Anschließend

$$H = \arccos\left(-\tan\delta\,\tan\phi\right)$$

womit sich schließlich über

$$T = 24\text{ hrs}\cdot H/\pi$$

die Tageslänge (in Stunden) ergibt.

a) Implementiere eine Funktion `tageslaenge(phi,N)`, die für einen gegebenen Breitengrad `phi` und eine gegebene Zeit `N` seit Neujahr die Länge des Tages berechnet. Beachte, dass die Winkelfunktionen Argumente in Radian erwarten. Verwende die Numpy-Funktionen `degrees` und `radians`, um bei Bedarf zwischen den Einheiten zu wechseln.

b) Erstelle ein Array `Ns` mit 1000 Werten zwischen 0 und 365. Berechne mit diesem Array die Tageslängen im Verlauf eines Jahres für Flensburg ($\phi = 54{,}8$ deg) und Garmisch-Partenkirchen ($\phi = 47{,}5$). Nutze `matplotlib`, um den jährlichen Verlauf der Tageslängen für beide Orte zu visualisieren.

c) An welchem Tag N wird das Minimum sowie das Maximum erreicht? Wie viele Stunden scheint die Sonne im Sommer länger in Flensburg, wie viele Stunden scheint sie im Winter länger in Garmisch-Partenkirchen? Was passiert bei Orten, die noch weiter im Norden oder noch weiter im Süden liegen?

Aufgabe 2

Warme Objekte strahlen ein ganzes Spektrum an Wellenlängen λ ab. Derartige Objekte werden gerne als sogenannte *Schwarzkörperstrahler* idealisiert, die ein *Planck-Spektrum* emittieren. Ein Ansatz zur Bestimmung des Emissionsmaximums λ_{max} eines solchen idealen Strahlers mit gegebener Temperatur T führt zu folgender *transzendenten* Gleichung:

$$5 - 5\,\exp\left(-x\right) - x = 0$$

a) Implementiere die obige Gleichung als Python-Funktion `f(x)`. Bestimme ihre Ableitung und implementiere diese als Funktion `df(x)`. Zeichne die beiden Funktionen im Intervall $[0, 10]$ in einem gemeinsamen Plot. Achte auf die korrekte Beschriftung des Plots.

b) Studiere das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens, indem Du die Elemente der Iteration $(x_0, x_1, x_2...)$ plottest. Nach wie vielen Schritten erreichst Du eine Näherung mit *maximaler* Genauigkeit? Was passiert, wenn Du die Iteration fortlaufen lässt?

c) Studiere das Konvergenzverhalten des Bisektionsverfahrens, indem Du den Betrag der Differenz zwischen der Ober- und der Untergrenze als Funktion des Iterationsschrittes plottest. Nach wie vielen Schritten erreichst Du eine Näherung mit *maximaler* Genauigkeit?

Aufgabe 3

Photovoltaikanlagen nutzen den photoelektrischen Effekt, um eine elektrische Spannung zu generieren. Oberhalb der Atmosphäre könnte ein perfektes PV-Element bei idealer Ausrichtung $S_0 = 1368\ \mathrm{W/m^2}$ generieren. Innerhalb der Atmosphäre hängt dieser Wert aufgrund diverser Streuprozesse stark vom Sonnenstand h ab, der zwischen 0 (Horizont) und 90 deg liegen kann (Zenit). Bei gegebenem h lässt sich die maximale Einstrahlung S mit Hilfe folgender Formel annähern:

$$S = 1353\ \mathrm{W/m^2} \cdot 0.7^A$$

A bestimmt sich über

$$A = \left(\frac{1}{\sin h}\right)^{0{,}678}$$

a) Die Datei `hh_ssw_2024.csv` beinhaltet die im Minutentakt für Hamburg (Mitte) berechnete Höhe der Sonne h (in Grad) ab Sonnenaufgang am Tag der Sommersonnenwende 2024. Lese die Zeitstempel sowie die Höhen h ein. Visualisiere die Höhe der Sonne als Funktion der Zeit.

b) Implementiere eine Funktion `einstrahlung(h)`, die für eine gegebene Sonnenhöhe h die Einstrahlung S berechnet. Berechne damit die Einstrahlung S für die im vorherigen Aufgabenteil eingelesenen Sonnenhöhen. Visualisiere den Verlauf von S (in kW) als Funktion der Zeit (in Stunden). Welche maximale Leistung pro Quadratmeter kann eine PV-Anlage in Hamburg unter idealen Bedingungen folglich liefern?

c) Begründe, warum sich bei einer Darstellung von S (in kW) als Funktion der Zeit (in Stunden) die über den Tag gewonnene elektrische Energie (in kWh) als Integral über S bestimmen lässt. Wie hoch ist die über den Tag gewonnene elektrische Energie, wenn das Integral über eine Summe angenähert wird?

Aufgabe 4

Das von der Sonne emittierte Licht deckt ein breites Spektrum an Wellenlängen λ ab. Eine gute Näherung für die Intensitätsverteilung des Sonnenlichts stellt das Planck-Spektrum dar:

$$B(\lambda) = \frac{2\,h\,c^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{\exp\left(hc/\lambda k_\mathrm{B} T\right) - 1}$$

Hierbei bezeichnet h die Planck-Konstante, c die Lichtgeschwindigkeit, k_B die Boltzmann-Konstante und $T = 5780$ K die Temperatur der Sonne. Zwischen 380 nm und 750 nm sprechen wir vom optischen Bereich. PV-Elemente aus Silizium generieren elektrische Energie aus Photonen mit einer Wellenlänge unterhalb von 1100 nm.

a) Schreibe eine Funktion `B(lam,T)`, die für eine gegebene Wellenlänge `lam` und Temperatur `T` die Planck-Intensität berechnet.

b) Erstelle ein Array aus Wellenlängen zwischen 100 nm und 1200 nm. Berechne für jede Wellenlänge im Array die zugehörige Planck-Intensität. Zeichne die Planck-Intensität als Funktion der Wellenlänge.

c) Berechne den Anteil der Sonnenstrahlung, der von einem Si-PV-Element verwertet werden kann. Berechne dafür mit Hilfe der Simpson-Regel das Integral des Planck-Spektrums zwischen 10 nm und 1100 nm. Teile diesen Wert durch eine Näherung für die gesamte Abstrahlung, indem Du das Integral zwischen 10 nm und 10000 nm bestimmst. Was passiert bei Untergrenzen kleiner als 10 nm?