Numerik und Stochastik

Labor #3

17.05.2024

Marcel Völschow

HAW HAMBURG

Aufgabe 1

Ein anfänglich ladungsfreier Kondensator mit einer Kapazität C wird zusammen mit einem Widerstand R an eine Ladespannung V_{L} angeschlossen und geladen. Nach der Kirchhoffschen Regel gilt für die Spannung $V(t)$ am Kondensator die Differentialgleichung

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{RC}\left(V_{\mathrm{L}} - V(t)\right)$$

Die analytische Lösung dieser Gleichung lautet

$$V(t) = V_L\left(1 - \exp\left(-t/\tau\right)\right)$$

mit der Zeitkonstante $\tau = RC$.

a) Implementiere den Differentialgleichungsterm sowie die analytische Lösung $V(t)$ als Python-Funktionen. Setze `R=10`, `C=0.5`, `V_L=5`. Löse das Anfangswertproblem für eine Anfangsspannung $V(0) = 0$ V im Intervall `t_span=(0,50)` mit einer Schrittweite `h=1.` mit dem Euler- sowie dem RK4-Verfahren. Plotte deine Ergebnisse zusammen mit der analytischen Lösung $V(t)$.

b) Berechne die absolute Abweichung zwischen der analytischen Lösung sowie den per Euler- und RK4-Verfahren ermittelten Lösungen. Wie groß ist die maximale Abweichung? Zu welcher Zeit ist die Abweichung am größten?

c) Ersetze im DGL-Term die konstante Ladespannung V_{L} durch eine Wechselspannung

$$V_{\mathrm{L}}(t) = V_A \sin\left(\omega_{\mathrm{L}}\, t\right)$$

mit der Spannungsamplitude V_A und der Wechselspannungskreisfrequenz ω_L. Löse das Anfangswertproblem für $V(0) = 0$ V mit den Parametern $R = 1\ \Omega$, $C = 0{,}01$ F, $V_{\mathrm{A}} = 5$ V und $\omega_{\mathrm{L}} = 100\pi 1/\mathrm{s}$ mit einer Schrittweite von $h = 5\ \mu$s im Bereich von $t = 0$ s bis $t = 0{,}2$ s. Plotte das Ergebnis zusammen mit der Ladespannung. Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen der Ladespannung und der Kondensatorspannung? Bei welcher Amplitude pendelt sich die Spannung über dem Kondensator ein?

Aufgabe 2

Der Rotor einer Windkraftanlage sei als starrer Körper mit einem Trägheitsmoment I angenähert. Für die Auslenkung des Rotors $\phi(t)$ gilt dann die Differentialgleichung

$$I\ddot{\phi} = K\, v(t) - c\dot{\phi}(t)$$

wobei $v(t)$ die (zeitabhängige) Windgeschwindigkeit $\dot{\phi}(t)$ die Winkelgeschwindigkeit des Rotors, K den Umwandlungsfaktor von Windgeschwindigkeit zu Rotor-Drehmoment und c die Dämpfung infolge diverser Reibungsprozesse bezeichnet. Der Wind frischt periodisch auf und wieder ab und wird durch folgende Funktion modelliert:

$$v(t) = v_{\mathrm{w}}\, \sin^2\left(\omega_{\mathrm{w}}\, t\right)$$

Hierbei ist v_{w} die Amplitude der Windgeschwindigkeit und ω_{w} die Kreisfrequenz der Periode.

a) Übersetze die Differentialgleichung 2. Ordnung in ein System zweier Differentialgleichungen 1. Ordnung. Implementiere die beiden Differentialgleichungsterme als Python-Funktionen.

b) Setze `c=1`, `I=100`, `K=1`, `v_w=5` sowie `om_w=0.1`. Integriere das Differentialgleichungssystem mit den Anfangsbedingungen `phi_0 = np.array([0,0])` und der Schrittweite `h=0.1` im Bereich `t_span = (0,600)`. Plotte $\phi(t)$ sowie $\dot{\phi}(t)$. Hinweis: Nutze für $\phi(t)$ die Normalisierung `phi_norm = ((phi_rk4) % (2*np.pi))`.

c) Nach zirka 5 Minuten hat die Winkelgeschwindigkeit des Rotors einen stationären Zustand erreicht und oszilliert um eine mittlere Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega}$. Wie groß ist dieser Wert?