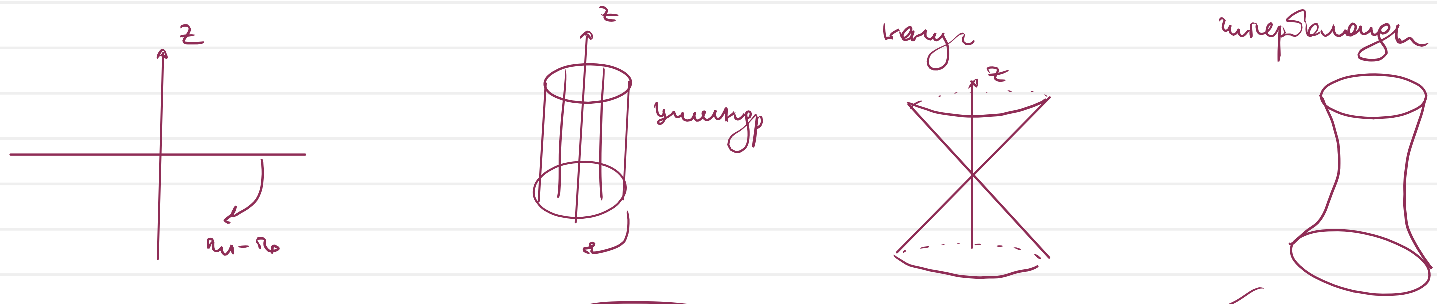


2 семейства образующих

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \to \left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{a}+1\right)=\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

2 семейства прямых

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x}{a}-1=k\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a}+1=\frac{1}{k}\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x}{a}-1=k\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right) \\ \frac{x}{a}+1=\frac{1}{k}\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right) \end{cases} \end{array}\right.$$

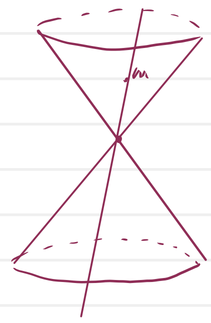
семейство прямых (пересеч пл-ти)

6) ур-е прямолинейн. образ.

$4x^2+4y^2-z^2=0$ — конус

$M(3;4;10)$; $M \in$ конусу

$O(0;0;0)$

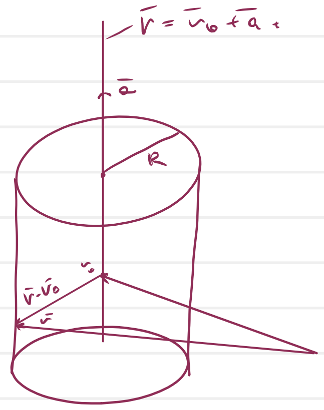


Ответ:
$$\begin{cases} x=3t \\ y=4t \\ z=10t \end{cases}$$

7) ур-е цилиндра ось $\bar r=\bar r_0+\bar a t$

R - радиус

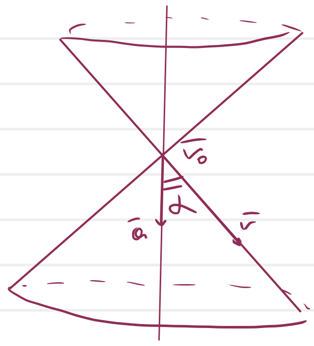
$$R=\frac{|[\bar r-\bar r_0;\bar a]|}{|\bar a|}$$



2) Ур-е конуса $\bar r=\bar r_0+\bar a t$

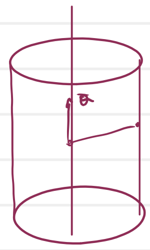
$(\bar r-\bar r_0;a)=$
$=|r-r_0|\cdot|a|\cdot\cos\alpha$

$$\cos\alpha=\frac{|(\bar r-\bar r_0;a)|}{|r-r_0||a|}$$



8) цилиндр

ось $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}$ $M(1;1;2)$



$a=(1;1;1)$

$v_0=(1;2;3)$

20.11.

Аффинные преобразования

1) Афф. преобр. пл-ти наз линейное взаимооднозначное соотв пл-ти

$$\begin{cases} x'=ax+by+c \\ y'=dx+ey+f \end{cases}$$
линейное

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}\neq 0$$
взаимоодн

• переводят
1. прямую $\xrightarrow{в}$ прямую ($\| \to \|$; пересек → пересек)
2. отрезок $\xrightarrow{в}$ отрезок
3. кривые II-го пор в кр того же типа

*Замена базиса:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=S\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Св-ва

1. Обратное - аффинность
2. Сохр отн. отр $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$
3. Сохр отн площадей

$S \to S'$ $\quad \frac{S'}{S} = |\Delta| = \begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}$

4. Сущ ед. аф. преоб перевод $\Delta \xrightarrow{\varphi} \Delta$

① $x' = 7x - y + 1$
$y' = 4x + 2y + 4$

1.1 Найти образ точки $(1;1)$
подставить в $x';y'$

$x' = 7 - 1 + 1 = 7$
$y' = 4 + 2 + 4 = 10$
$(1;1) \to (7;10)$

1.2. Найти прообраз точки $(0;2)$

$\begin{cases} 0 = 7x - y + 1 \\ 2 = 4x + 2y + 4 \end{cases}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$x = -\frac{2}{9}$; $y = -\frac{5}{9}$

Образ вектора в общем виде

$x' = ax + by + c$
$y' = dx + ey + f$
$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$
$x_1' = ax_1 + by_1 + c$
$x_2' = ax_2 + by_2 + c$
$x_2' - x_1' = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1)$
аналогично $y_2' - y_1'$
$AB(x;y) \to (ax + by; dx + ey)$

1.3. Найти образ вектора $(1;1)$

$\overline{AB} = (1;1)$
$A = (0;0)$; $B = (1;1)$
$\varphi(B) = (7;0)$ — обр т.B
$\varphi(A) = (1;4)$ — обр т.A
$\overline{A'B'} = (6;6)$

преобразуем точки начала и конца

1.4. Найти прообраз прямой

$2x' - y' - 6 = 0$
вставим туда
$2(7x - y + 1) - (4x + 2y + 4) - 6 = 0$
$10x - 4y - 8 = 0$
$5x - 2y - 4 = 0$

1.5 Найти образ прямой

$x + 3y + 1 = 0$
штрихи уже наши

$Ax' + By' + C = 0 \iff A(7x - y + 1) + B(4x + 2y + 4) + C = 0$
$x(7A + 4B) + (-A + 2D)y + C = 0$

$\begin{cases} 7A + 4B = 1 \\ -A + 2B = 3 \\ A + 4B + C = 1 \end{cases}$ $\quad A = \frac{-5}{9}$, $B = \frac{11}{9}$, $C = -\frac{10}{3}$

1.6. Найти неподвижные точки

$\varphi(x^*; y^*) = (x^*; y^*)$
их нет у сдвига

$\begin{cases} x^* = 7x^* - y^* + 1 \\ y^* = 4x^* + 2y^* + 4 \end{cases}$ $\oplus$ $\begin{cases} 6x^* - y^* = -1 \\ 4x^* + y^* = -4 \end{cases}$ $\quad x^* = \frac{-1}{2}$, $y^* = -2$

② инвариантные прямые перех сами в себя.
не обязательно т. перех сами в себя.

Найти инв. пр.

$$\begin{cases} x' = 2x+3y \\ y' = -y \end{cases}$$

$Ax' + By' + C = 0$ ← должны совпасть

$A(2x+3y) + B(-y) + C = 0 \iff x(2A) + y(3A-B) + C = 0$

λ – коэф. пропорц.

$$\begin{cases} C = \lambda C \\ 2A = \lambda A \\ 3A - B = \lambda B \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda = 1 \\ A = 0 \\ B = 0 \\ C \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ – не прямая} \\ \begin{cases} C = 0 \\ \lambda = 2 \\ A = B \end{cases} \Rightarrow x + y = 0 \\ \begin{cases} C = 0 = A \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$$

(3)

A, B – 2 неподвижные т. $\Rightarrow$ AB – неподвижн. прямая

$A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$

$$AB: \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \qquad \varphi(x_1; y_1) = (x_1; y_1), \quad \varphi(x_2; y_2) = (x_2; y_2)$$

$$\varphi(AB) = \begin{cases} \varphi(x) = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ \varphi(y) = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

(4) $A(1;0)$ $B(0;1)$ $C(1;1)$

$A'(-3;5)$ $B' = (4;-3)$ $C'(0;0)$

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

Перевести 3 точки = перевод точки и 2х векторов

$A(1;0)$ $\overline{AB}(-1;1)$, $\overline{AC}(0;1)$ — без констант.

$A'(-3;5)$ $\overline{A'B'} = (7;-8)$, $\overline{A'C'} = (3;-5)$

$$\begin{cases} 7 = -a + b \\ 3 = b \end{cases} \quad \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \end{cases} \qquad -3 = -4 \cdot 1 - c \Rightarrow c = 1, \quad 5 = 3 + f \Rightarrow f = 2$$

$$\begin{cases} -8 = -d + e \\ -5 = e \end{cases} \quad \begin{cases} e = -5 \\ d = 3 \end{cases}$$

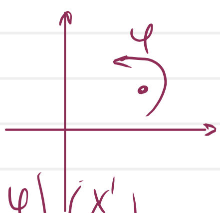
$$\begin{cases} x' = -4x + 3y + 1 \\ y' = 3x - 5y + 2 \end{cases}$$

Примеры Аффинных преобразований

1. Поворот
2. Сдвиг (|| перенос)
3. Отражение
4. Сжатие / растяжение

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(5) 1. Поворот на φ вокруг $(x_0; y_0)$

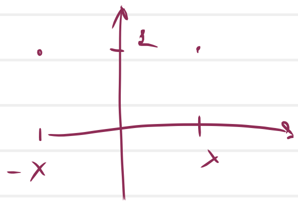


смещение в точку

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

2) Симметрия отн O_y

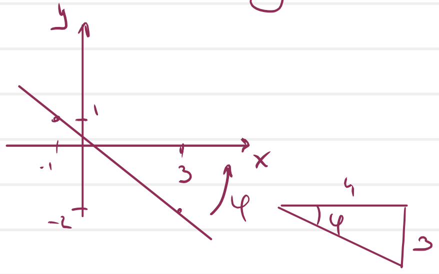


$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

3) Симметрия отн O_y

$3x+4y-1=0$



$(-1;+1) \to (0;0)$

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+1\\ y-1\end{pmatrix}$$

$(3;-2) \to (4;-3)$

$$tg^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$tg\,\varphi = \frac{3}{4}$

$\frac{9}{16}+1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{4}{5} \\ \sin\varphi = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x^4\\ y^4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{array}{c} x' \\ \begin{pmatrix}x+1\\ y-1\end{pmatrix} \\ y' \end{array} =$$

прямая стала осью X

Симметрия

$$\begin{pmatrix}x'''\\ y'''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^4\\ y^4\end{pmatrix}$$

Поворот обратно

$$\begin{pmatrix}x^{(4)}\\ y^{(4)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'''\\ y'''\end{pmatrix}$$

Сдвиг обратно

$$\begin{pmatrix}x^{(5)}\\ y^{(5)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^{(4)}-1\\ y^{(4)}+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ +\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\ y-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ +1\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\ y-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix}7 & 24\\ 24 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\ y-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

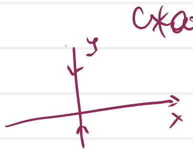
сжатие к двум взаимно ⊥ осям (главные оси)

ортогональн преобр (сдвиг, поворот отражение)

Т Любое аффинное преобр можно предст в виде $\varphi = h_2 \circ h_1 \circ g$

$(S^T \cdot S = E)$

Пример сжатие вдоль O_y.



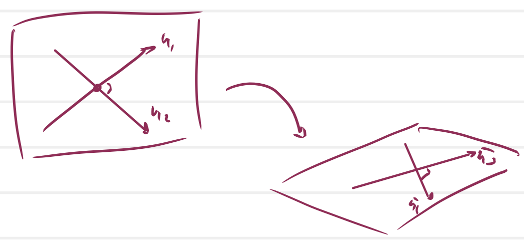
$x' = x$

$y' = \lambda y$

⑥ $\varphi: \begin{cases} x' = 2x+5y+0 \\ y' = -11x+10y+0 \end{cases}$ $\quad \varphi = h_2 \circ h_1 \circ g$

Гл напр.

$(\alpha;\beta)$ и $(\beta;-\alpha)$



Новые $(2\alpha+5\beta; -11\alpha+10\beta) \perp (2\beta-5\alpha; -11\beta-10\alpha)$ (*)

Считаем скалярн. произв $(2\alpha+5\beta)(2\beta+5\alpha)+(-11\alpha+10\beta)(-11\beta-10\alpha)=0$

$100\alpha^2-100\beta^2=0$ $\quad \alpha=\pm\beta$

$(1;1)\ ;\ (1;-1)$ – два задают вектора

$\downarrow(*)\qquad\downarrow(*)$

$(7;-1)\qquad(-3;-21)$

Угол поворота $\cos\varphi=\dfrac{(1;1)\cdot(7;-1)}{\sqrt{2}\sqrt{50}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$ $\quad \sin\varphi=\dfrac{-4}{5}$ $\quad$ Поворот по час стрелке

$(1;1)\quad\sqrt{2}\rightarrow\sqrt{50}\qquad \lambda_1=5$

$(-1;1)\quad\sqrt{2}\rightarrow\qquad \lambda_2=15$

– растяжение вдоль главных осей.

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}5&0\\0&15\end{pmatrix}}_{\text{растях}}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}}_{\text{поворот}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$