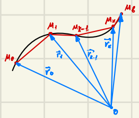
Th Если Γ - непр. диф. , то она спрямляема

$|\vec{r}'(t)| < C$
$\forall t \in [a, b]$
$\exists\, C > 0$



$\Gamma = \{\vec{r}(t);\ a \le t \le b\}$

Лагранж

$$S_L = \sum_{k=1}^{n} |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n} |\vec{r}\,'(\xi_k)|\,(t_k - t_{k-1})$$

$$\le C \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = C \cdot (b-a)$$

$\Downarrow$

$\exists \sup\limits_{T} S_L$, точная в.г. множ-ва ломаных

$\Downarrow$

У ломаной есть длина и она спрямляема

ч.т.д.

$S(t)$ - длина дуги кривой $\Gamma_t = \{\vec{r}(\tau),\ a \le \tau \le t\}$

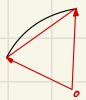
Γ

$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(t(s)) \qquad 0 \le s \le S$

Th 2 Пусть Γ - гладкая кривая, тогда

$\forall t_0 \in (a, b): \quad S'(t_0) = |\vec{r}\,'(t_0)|$

Д-во:



$|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)| \le S(t_1) - S(t_0) \le |\vec{r}\,'(\xi)| \cdot |t - t_0|$

$\forall t_1 \in [t, t_0]$

$\Downarrow$

$$\left|\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}\right| \le \frac{|S(t) - S(t_0)|}{|t - t_0|} \le |\vec{r}\,'(\xi)| \qquad \Big| \lim$$

$\Downarrow$

$S'(t_0) = |\vec{r}\,'(t_0)|$

ч.т.д.

Если Непр. дифф. Γ параметризована нат. параметром, то:

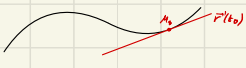
$|\vec{r}\,'(s)| = 1 \qquad \forall s \in (0, S]$

Д-во: $\vec{\rho}(s) = \vec{r}(t(s))$

$$\left|\frac{d\vec{\rho}}{ds}\right| = |\vec{r}\,'(t(s))\, t'(s)| = \left|\frac{r'(t(s))}{S'(t(s))}\right| = 1$$

$= \vec{r}\,'(t(s))$

ч.т.д.



Пусть $\vec{\tau}(s) = \vec{r}\,(s)$ и $\exists\ \frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}$

$\left|\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}\right| = k > 0$ — кривизна кривой (если 0, то прямая)

Тогда: $\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds} = k \cdot \vec{\nu}$, $|\vec{\nu}| = 1$

$(\vec{\tau}(s); \vec{\tau}(s)) = 1$

$2\left(\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}, \vec{\tau}(s)\right) = 0 \Rightarrow (\vec{\nu}(s), \tau(s)) = 0$

Замечание: $\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{S'(t)}$

$$\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} = \frac{\vec{r}\,''(t)\, S'(t) - S''(t) \cdot \vec{r}\,'(t)}{S'^2} \cdot \frac{1}{S'}$$

$\frac{1}{\frac{dS}{dt}} = \frac{dt}{dS}$

Теор: $\boxed{k = \left|\left[\vec{\tau}(s), \frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}\right]\right|}$

$\vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$, $\quad \frac{d\vec{\tau}(s)}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$

$$k = \left|\left[\frac{\vec{r}\,'(t)}{S'(t)}, \frac{\vec{r}\,''(t)\, S'(t) - \cancel{S''(t) \cdot \vec{r}\,'(t)}}{S'^3}\right]\right|$$

$$\boxed{k = \frac{|[\vec{r}', \vec{r}'']|}{|\vec{r}'(t)|^3}}$$ считаем по ней

Замеч $\vec{v} \perp \vec{\tau}$

$$[r'; r''] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$$