Домашняя работа №1

Осуществите подстановку и приведите к нормальной форме — форме, в которой не осталось редексов, — указывая при этом основные шаги:

1 $x := \mathbf{K}$ и $y := \mathbf{B}$ в $y\ (\lambda z.\ x\ x\ (x\ z\ x))\ (\lambda x.\ x\ x\ x)\ \mathbf{I}$
Решение:

$$y\ (\lambda z.\ x\ x\ (x\ z\ x))\ (\lambda x.\ x\ x\ x)\ \mathbf{I}[x := \mathbf{K}, y := \mathbf{B}]$$

$$B(\lambda z.KK(KzK))(\lambda x.xxx)I$$

$$(\lambda z.KK(KzK))((\lambda x.xxx)I)$$

$$(\lambda z.KK(KzK))(III)$$

$$(\lambda z.KK(KzK))I$$

$$KK(KIK)$$

$$KKI$$

$$K$$

2 $x := \mathbf{S}$ в $x\ (\lambda z\ x.\ z\ x)\ (\lambda z\ y\ x.\ x)\ x$
Решение:

$$x\ (\lambda z\ x.\ z\ x)\ (\lambda z\ y\ x.\ x)x[x := S]$$

$$S(\lambda zx.zx)(\lambda zyx.x)S$$

$$(\lambda zx.zx)S((\lambda zyx.x)S)$$

$$(\lambda zx.zx)S(\lambda yx.x)$$

$$SK_*$$

$$(\lambda fgx.fx(gx))(\lambda yx.x)$$

$$\lambda gx.K_*x(gx)$$

$$\lambda gx.gx$$

Приведите к нормальной форме, указывая основные шаги:

3 $(\lambda x\ x\ x.\ x)\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}\ \mathbf{S}$
Решение:

$$(\lambda x.\lambda x.\lambda x.x)IKS$$

$$(\lambda x.\lambda x.x)KS$$

$$(\lambda x.x)S$$

$$S$$

4 $(\lambda x\ y\ z.\ y\ x\ z)\ (y\ x)\ (\lambda x.\ x\ x)\ f$
Решение:

$$(\lambda y'z.y'(yx)z)(lambdax.xx)f$$

$$(\lambda z.(\lambda x.xx)(yx)z)f$$

$$(yx)(yx)f$$

5 I S K S K S (S K K K)

Решение:

$$ISKSKS(SKKK)$$
$$SKSKS(SKKK)$$
$$(\lambda x.Kx(Sx))KS(SKKK)$$
$$KS(SKKK)$$
$$KS(KK(KK))$$
$$KSK$$
$$S$$

Введём булевы значения:

$$\mathbf{tru} := \mathbf{K}$$
$$\mathbf{fls} := \mathbf{K}_*$$
$$\mathbf{not} := \lambda b.\ b\ \mathbf{fls}\ \mathbf{tru}$$
$$\mathbf{and} := \lambda b_1\ b_2.\ b_1\ b_2\ \mathbf{fls}$$

6 Убедитесь, что **and** работает как надо: покажите, что если ему подавать аргументы **tru** и **fls**, будут получаться логически правильные результаты.

Решение:

Проверим , что $and\ tru\ fls = fls$

$$(\lambda b1b2.b1b2fls)tru\ fls$$
$$tru\ fls\ fls$$
$$KK_*K_*$$
$$K_*$$
$$fls$$

Верно.

Проверим, что $and\ tru\ tru = tru$

$$(\lambda b1b2.b1\ b2\ fls)KK$$
$$KKK_*$$
$$K$$
$$tru$$

Верно.

Проверим, что $and\ fls\ fls = fls$

$$(\lambda b1b2.\lambda b1\ b2\ K_*)K_*K_*$$
$$K_*K_*K_*$$
$$K_*$$
$$fls$$

Верно.

Проверим, что $and\ fls\ tru = fls$

$$(\lambda b1b2.b1\ b2\ fls)fls\ tru$$
$$(\lambda b1b2.b1\ b2\ K_*)K_*K$$
$$K_*KK_*$$
$$K_*$$
$$fls$$

7 Напишите функцию **or**(b_1, b_2).
Решение: $\lambda b1b2.b1\ tru\ b2$

Напишите лямбда-термы:

8 Функцию **mult**(a, b), перемножающую два числа Чёрча.
Решение:

$$mul := \lambda n1n2.\lambda sz.n1\ (\lambda z'.add\ n2\ z'\ s\ z)\ 0$$

9 Функцию **iszero**(a), которая возвращает **tru**, если ей подать **0**, и **fls** в противном случае.
Решение:

$$iszero := \lambda n.n(\lambda x.fls)\ tru$$

10 Функцию **pow**(a, b), которая вычисляет a^b, где a и b — числа Чёрча.
Решение:

$$\lambda n1n2.\lambda sz.n2\ (\lambda z'.mul\ z'\ n1)1$$

11 Функцию **iseven**(n), которая возвращает **tru**, если n — чётное число Чёрча, и **fls** в противном случае. Существует короткое решение.
Решение: Введем вспомогательную функцию $not := \lambda x.x\ fls\ tru$. Тогда

$$iseven := \lambda n.n\ (\lambda x.not\ x)\ tru$$

12 Функцию **xor**(b_1, b_2).
Решение:

$$xor := \lambda a\ b.and\ (or\ a\ b)\ (not\ (and\ a\ b))$$

13 Функцию **pred**(n), которая находит предыдущее число Чёрча. Подсказка:

```
def pred(n):
  prd = 0
  cur = 0
  for i in range(0, n):
    prd = cur
    cur = cur + 1
  return prd
```