CAPÍTULO 6

Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar este Capítulo, você será capaz de:

- Utilizar aproximadoras por séries de Maclaurin, Tchebychev e por funções racionais de Padé;
- Calcular os erros de truncamento de cada aproximação; e
- Indicar o tipo de aproximação mais adequada para cada família de função.

6 Aproximações por Séries e por Funções Racionais

Neste Capítulo, vamos abordar exclusivamente as aproximações de $y = f(x)$ com expressão conhecida, $x \in [a,\ b]$, através de outra função, $z = g(x)$, mas agora utilizando aproximadoras geradas por séries e por funções racionais. Para fins de padronização e facilidade de avaliação da qualidade da $g(x)$, vamos normalizar o intervalo $[a,\ b]$ transformando-o no intervalo padrão $[-1,\ 1]$ através da transformação linear:

$$x(t) = \frac{(b-a)t + (b+a)}{2} \tag{1}$$

pois

se $t = -1 \Rightarrow x = a$

se $t = +1 \Rightarrow x = b$

A partir dessa normalização, aplicamos os métodos de aproximação à função $f(x(t))$ no intervalo padrão $t \in [-1,\ 1]$ e, por fim, efetuamos as aproximações na função composta $f(t(x))$, em que:

$$t(x) = \frac{2x - (b+a)}{b-a} \tag{2}$$

Exemplo 6.1: para a $f(x) = sen(2x+3)$, $x \in [1,\ 15]$, obtenha o valor de $f(5)$ no domínio equivalente $[-1,\ 1]$.

Solução:

Para a função dada, temos que $f(x=5) = sen(13)$. Já no domínio $[-1,\ 1]$, aplicando a eq. (1), temos $x(t) = 7t + 8$ e a composta $f(t(x)) = sen(14t+19)$. Da eq. (2), temos $x = 5 \Rightarrow t(x) = -3/7$. Assim, $t(x) = -3/7$, substituído em $f(t(x)) = sen(14t+19)$, resulta em $f(t(x)) = sen(13)$, que é o mesmo valor.

Chamamos atenção para o baixo custo dessas transformações que, nas formas otimizadas, não excedem a 8 operações elementares.

Na aproximação de funções com expressão conhecida, uma questão fundamental é: **quais características ou propriedades a $z = g(x)$ deverá possuir para ser considerada uma aproximadora de qualidade?**

DESTAQUE Uma aproximadora ideal é aquela que cumpre os seguintes requisitos:

a) os erros de truncamento $Erro(x) = |g(x) - f(x)|$, $\forall\, x \in [a,\, b]$ devem ser mensurados previamente;
b) os erros de truncamento $Erro(x) = |g(x) - f(x)|$ devem ser bem distribuídos em todo o domínio $[a,\, b]$;
c) o tempo de resposta nas chamadas (cálculos de valores) da $z = g(x)$ deve ser mínimo; e
d) a demanda de memória para armazenar os parâmetros identificadores da função $g(x)$ deve ser mínima. FIM DO DESTAQUE

6.1 Aproximação de $y = f(x)$ por Séries

Como vimos no Capítulo 5, a aproximação de $y = f(x)$ com $x \in [a,\, b]$ pela interpolação polinomial consiste em dividir $[a,\, b]$ em n partes de comprimento $h = (b-a)/n$ e obter o interpolador $P_n(x)$ (na forma geral, de Lagrange, ou Gregory-Newton), cujo erro de truncamento máximo é da ordem de

$$Erro\ P_n(x) \leq \frac{Max\left|f^{(n+1)}(x)\right|_{x\in[a,b]}\ h^{n+1}}{4(n+1)}$$

SAIBAMAIS $f^{(n+1)}(x)$ refere-se a derivada de ordem $(n+1)$ de $f(x)$.FIMSAIBAMAIS

Entretanto, o tempo de resposta e a demanda de memória requerida são grandes, pois normalmente precisamos usar um interpolador de grau n elevado para ter um erro de truncamento pequeno. Logo, o interpolador, apesar de ser tentadoramente simples de obter, não satisfaz aos requisitos (c) e (d) de uma boa aproximadora de uma função com expressão conhecida. Também as *splines* cúbicas e as curvas de Bézier não foram desenvolvidas para o propósito deste Capítulo. Assim, abordaremos outras técnicas de aproximação de funções com expressão conhecida que forneçam aproximadoras mais próximas da ideal.

6.1.1 Aproximação por Séries de Taylor

Segundo o **teorema de Taylor**: toda função $y = f(x)$ que seja continuamente diferenciável em um domínio $[a,\ b]$ (ou o equivalente $[-1,\ 1]$) pode ser expressa exatamente pela série:

$$f(x) = f(\beta) + \frac{f'(\beta)(x-\beta)}{1!} + \frac{f''(\beta)(x-\beta)^2}{2!} + \ \cdots \ + \frac{f^{(n)}(\beta)(x-\beta)^n}{n!} + \ \cdots \tag{3a}$$

em que $\beta \in [a, b]$.

Reescrevendo a eq. (3a) com número finito de parcelas, temos:

$$f(x) = \underbrace{f(\beta) + \frac{f'(\beta)(x-\beta)}{1!} + \ \cdots \ + \frac{f^{(n)}(\beta)(x-\beta)^n}{n!}}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\beta)^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n(x)} \tag{3b}$$

em que o termo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\beta)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{3c}$$

é denominado de **resto** da série e $\xi \in [\beta, x)$ é um número com localização conhecida, mas valor desconhecido.

Conforme destacamos na eq. (3b), a primeira parte é um polinômio $P_n(x)$ de grau n, denominado de aproximador de Taylor da $y = f(x)$, **se a série for convergente**, sendo $R_n(x)$ uma estimativa do erro de truncamento.

Como vamos padronizar o domínio $[a,\ b]$ da aproximanda para $[-1,\ 1]$, podemos fixar o β da série em $\beta = 0$ (ponto médio do intervalo $[-1,\ 1]$):

$$\Rightarrow\ f(x) \cong f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \ \cdots \ + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + R_n(x)$$

Essa série é denominada de série de Taylor/Maclaurin e será denotada por $M_n(x)$.

Exemplo 6.2: confira a relação de algumas funções com suas séries de Taylor/Maclaurin:

a) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ \cdots \ + \dfrac{x^n}{n!} + \ \cdots$

b) $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ \cdots \ + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ \cdots$

c) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ \cdots \ + \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \ \cdots$

d) $arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$

e) $\int_0^x e^{-z^2}\,dz = x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \cdots$

f) $\int_0^x \cos(\sqrt{z})\,dz = x - \frac{x^2}{2*2!} + \frac{x^3}{3*4!} - \frac{x^4}{4*6!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n(2n-2)!} + \cdots \quad \forall z > 0$

Note que, depois de truncar a série do **Exemplo 6.2**, item (f), temos um único polinômio aproximando uma composição de três funções (raiz quadrada, cosseno e a integral).

Uma das grandes dificuldades na aproximação de funções por séries de Taylor é a determinação do valor de $\xi \in [\beta, x)$ que gere o resto $R_n(x)$ correto, pois ele é desconhecido. A alternativa é estimá-lo pelo seu **majorante**, resultando em um limite máximo para o erro de truncamento $R_n(x)$ via

$$Erro\ Taylor(x) \le \frac{|x-\beta|^{n+1} M}{(n+1)!}, \text{ onde } M = \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \qquad (4)$$

A seguir, vamos exemplificar o uso do majorante no erro de truncamento.

Exemplo 6.3a: delimite o erro máximo cometido ao aproximar $f(x) = e^x$, $x \in [-1,\ 1]$ por Maclaurin com $n = 5$.

Solução:

Pelo resto da série $\Rightarrow R_5(x) = \frac{f^{(5+1)}(\xi)\ |x-0|^{5+1}}{(5+1)!}$

tomamos o seu valor máximo, na ausência do valor de ξ, em que

$$M = \max_{x\in[-1,+1]} \left| f^{(6)}(x) \right| \Rightarrow M = \max_{x\in[-1,+1]} \left| e^x \right| = e^{+1} \text{ em } x = 1.$$

$$Erro\ Maclaurin(x) \le \frac{e^1 |x-0|^{5+1}}{(5+1)!}$$

Esse é o limite do erro local, para um x específico do intervalo.

Na expressão do erro de Maclaurin, como $x \in [-1,\ 1]$, o erro máximo global ocorre com $|x-0|^{5+1}$ em $x = 1$ ou $x = -1$, então

$$Erro\ Maclaurin \le \frac{|1-0|^{5+1} e^1}{(5+1)!} = 0.003775$$

Esse é o limite do erro global, para o intervalo padrão $[-1,\ 1]$.

Exemplo 6.3b: determine o grau n mínimo para aproximar $f(x) = e^x$, $x \in [-1,\ 1]$ por Taylor/Maclaurin com erro global inferior a $\varepsilon = O(10^{-6})$.

Solução:

Pelo resto máximo da série de Maclaurin, temos

$$Erro\ Maclaurin(x) \le \frac{M * |x-0|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ com } M = \max_{x\in[-1,+1]} \left|e^x\right| = e^{+1} \text{ em } x = 1 .$$

E o erro global máximo do intervalo ocorre em $x = 1$ ou $x = -1$:

$$Erro\ Maclaurin\ Max = \frac{e^{+1}\ |1-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Para $n=8 \Rightarrow Erro\ Maclaurin\ Max = 7.4908560e-06$ de ordem $O(10^{-5})$.

Para $n=9 \Rightarrow Erro\ Maclaurin\ Max = 7.4908560e-07$ de ordem $O(10^{-6})$.

Logo, a aproximação de Maclaurin com grau $n=9$ gera erro máximo da ordem de $O(10^{-6})$.

Alternativamente, temos outro limite para o erro de truncamento máximo, aplicável às séries convergentes e alternadas nos sinais.

DESTAQUE **Teorema 1**: se a série de Taylor $y = f(x)$ for convergente e com termos de **sinais alternados**, então o valor do resto $R_n(x)$ não será superior ao valor máximo do primeiro termo não nulo abandonado. FIM DO DESTAQUE

Exemplo 6.4: delimite o erro máximo cometido ao aproximar $f(x) = e^{-x}$, $x \in [-1,\ 1]$ por Maclaurin com $n=5$.

Solução:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}}_{Rn(x)}$$

a) Pelo resto da série $\Rightarrow R_5(x) = \dfrac{f^{(5+1)}(\xi)\ |x-0|^{5+1}}{(5+1)!}$, tomamos o seu valor máximo, com

$$M = \max_{x\in[-1,+1]} \left|f^{(6)}(x)\right| \Rightarrow M = \max_{x\in[-1,+1]} \left|e^{-x}\right| = e^{-(-1)}$$ em $x = -1$.

$$Erro\ Maclaurin(x) \le \frac{e^1 \left|x-0\right|^{5+1}}{(5+1)!} \quad \forall\ x \in [-1,\ +1]$$

Esse é o limite do erro local válido, para um x específico do intervalo. Tomando o erro global máximo nas extermidades do intervalo, em $x = +1$:

$$Erro\ Maclaurin\ Max = \frac{\left|1-0\right|^{5+1} e^1}{(5+1)!} = 0.003775$$

b) Como essa série de Maclaurin é de termos com sinais alternados, podemos aplicar o **Teorema 1** tomando o primeiro termo abandonado depois de $n = 5$, em $x = +1$, logo:

$$Erro\ Maclaurin\ Max = \left|\frac{(-1)^{5+1}(1)^{5+1}}{(5+1)!}\right| = 0.001388889$$

Então, considerando que os dois teoremas de cálculo de erros máximos são válidos, podemos tomar o menor limite do erro, 0.001388889 de ordem de 10^{-3}, para o aproximador de Maclaurin de grau $n = 5$:

$$e^{-x} \cong M_5(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}$$

Exemplo 6.5: determine o grau n mínimo para aproximar $f(x) = sen(x)$, $x \in [-1,\ 1]$ por Maclaurin com $\varepsilon = O(10^{-6})$.

Solução:

A série de Maclaurin para $sen(x)$ é formada por termos de expoentes ímpares:

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \cdots\ + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} + \ \cdots$$

Assim:

a) Tomando o erro de truncamento pelo valor máximo do resto da série

$$Erro\ Maclaurin(x) = \frac{\left|x-\beta\right|^{n+1} M}{(n+1)!}$$, em que $M = \max_{x\in(a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$, teremos:

$f(x) = sen(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -sen(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$;

$M = \max_{x\in(a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| = \max_{x\in[a,b]} \left|\pm sen(x)\right|$, $\forall\ n+1$ par; e

$M = \max_{x\in(a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| = \max_{x\in[a,b]} \left| \pm\cos(x) \right|$, $\forall\ n+1$ ímpar.

Como n é sempre ímpar, então $n+1$ será sempre par, $M = |sen(1)| = 0.841470984807897$, e esse erro é máximo em $x=1$, então

$$Erro\ Maclaurin\ Max = \frac{|1-0|^{n+1}\ 0.84147098}{(n+1)!} = 10^{-6}$$

Para $n=7$ ($n+1$ par),

$$Erro\ Maclaurin\ Max = \frac{|1-0|^{n+1}\ 0.84147098}{(n+1)!} = \ 2.0869816e-05\ \ (O(10^{-5})).$$

Para $n=9$,

$$Erro\ Maclaurin\ Max = \frac{|1-0|^{n+1}\ 0.84147098}{(n+1)!} = \ 2.318868e-07\ \ (O(10^{-7})).$$

Logo, pelo teorema da série de Taylor, a aproximação de grau $n=9$ tem erro de truncamento máximo menor do que a ordem de $O(10^{-6})$.

b) Como essa série de Maclaurin é convergente e de termos com sinais alternados, podemos aplicar o **Teorema 1**:

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \cdots\ + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!} + \ \cdots$$

Para a aproximação de grau $n=7$, por exemplo, o primeiro termo abandonado é de grau 9, obtido com $i=4$,

$$\left| \frac{(-1)^i (1)^{2*4+1}}{(2*4+1)!} \right| = \ 2.755732e-06$$

Logo, pelo **Teorema 1**, ao abandonar o termo de grau $n = 2i+1 = 9$, já teremos erro de truncamento máximo da ordem de $O(10^{-6})$.

Então, considerando que os dois teoremas de cálculo de erros máximos são válidos, podemos tomar a aproximação de grau $n=7$, garantindo o erro máximo global da ordem de $O(10^{-6})$:

$$sen(x) \cong M_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Exemplo 6.6: determine o grau n mínimo para aproximar $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,\ 1]$ por Maclaurin com erro máximo da ordem de $O(10^{-6})$.

Solução:

Nesse exemplo, a aplicação do majorante do teorema do resto da série de Taylor/Maclaurin, dada pela eq. (4), gera erro máximo tendendo ao infinito quando x tende a -1. Então, a aplicação do majorante nesse teorema não tem valia prática, pois de nada adianta saber que o erro máximo é inferior a infinito. Como essa série de Maclaurin é de sinais alternados, podemos aplicar o **Teorema 1**:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}}_{Rn(x)}$$

em que

$$R_n(x) \le \left|\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}\right| \le 10^{-6}$$

Então, podemos avaliar o limite do erro de truncamento pelo 1º termo abandonado com $x = 1$:

$$\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \le 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad n \ge 1000000$$

Note que a série do **Exemplo 6.6** possui velocidade de convergência muito lenta, implicando na necessidade de uma grande quantidade de termos para assegurar uma precisão ainda relativamente baixa.

Outra característica da aproximação por Taylor/Maclaurin é a não distribuição uniforme dos erros no domínio, o que exige grande número de termos nas séries com convergência lenta para assegurar **erros mínimos** (com picos máximos sempre localizados nos **extremos**). Assim, o tempo de resposta pode ficar muito alto ou até proibitivo.

Exemplo 6.7: calcule o erro máximo **exato** ao aproximar $f(x) = e^x$, $x \in [-1,\ 1]$ por Maclaurin com grau $n = 5$. Lembre-se que, no **Exemplo 6.3a**, o limite do erro de truncamento foi estimado em 0.003775.

Solução:

$$e^x \cong M_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$ ($M_5(x)$ obtido por série de Maclaurin)

$$Erro\ exato\ Maclaurin(x) = \left|M_5(x) - e^x\right|$$

x	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0
$Erro\ exato\ Maclaurin(x)$	0.0012128	0.000020243	0	0.000023354	0.00161516

Observe que os erros exatos ficaram todos abaixo do limite do erro de truncamento

0.003775 estimado pelo resto da série de Taylor/Maclaurin no **Exemplo 6.3a**. Observe também que os erros são crescentes a partir do ponto $\beta = 0$. Então, considerando a característica inerente dessa aproximação, temos que as séries de Taylor/Maclaurin não satisfazem aos requesitos (b) e (c) da aproximadora ideal.

Exemplo 6.8: monte um algoritmo que determine os coeficientes da série de Maclaurin estabelecida, a seguir, para um grau genérico, por exemplo grau $n = 20$:

$$\int_0^x e^{-z^2} dz = x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \ \cdots \ + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{i!(2i+1)} + \ \cdots$$

Solução:

Observe que esta série tem coeficientes nulos:

$$\int_0^x e^{-z^2} dz = 0x^0 + 1x^1 + 0x^2 - \frac{x^3}{1!3} + 0x^4 + \frac{x^5}{2!5} + 0x^6 - \frac{x^7}{3!7} + 0x^8 + \ \cdots \ + \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{i!(2i+1)} + \ \cdots$$
$$= c_1 x^0 + c_2 x^1 + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 x^5 + c_7 x^6 + c_8 x^7 + \ \cdots$$

Os coeficientes de grau par (índice ímpar) são nulos e os de grau ímpar (índice par) são definidos pela lei de formação em função de i, conforme o algoritmo **Cap6exem6.8.m** disponível no Caderno de Algoritmos no *link* <http://sergiopeters.prof.ufsc.br/algoritmos-livro/>.

No Caderno de Algoritmos você também encontra implementado todos os demais exemplos apresentados neste capítulo.

A seguir, vamos abordar uma técnica de aproximação que objetiva melhorar a distribuição dos erros da série de Taylor/Maclaurin bem como acelerar a sua convergência.

6.1.2 Aproximação por Polinômios de Tchebyshev

Definição1: um **polinômio de Tchebyshev** de grau n de primeira ordem é toda expressão do tipo:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \qquad \text{com } x \in [-1,\ 1] \tag{5}$$

Como

$$\arccos(x) = \theta \ \text{(ângulo)} \Rightarrow \cos(\theta) = x\ ,$$

logo

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \text{ com } \theta \in [0, +\pi]. \quad (6)$$

Para cada n, desenvolvendo a eq. (6) com o uso de identidades trigonométricas elementares, resultam as expressões de polinômios convencionais para os $T_n(x)$:

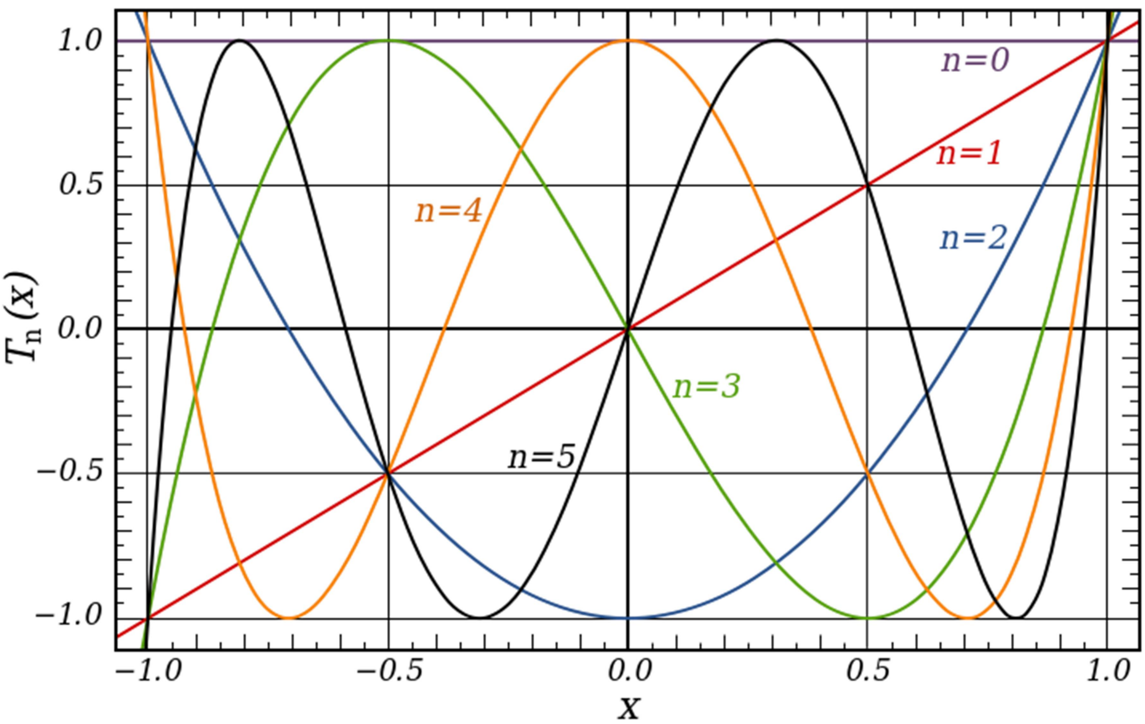
$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \cos(0 * \theta) = 1 \\
T_1(x) &= \cos(1\theta) = x \\
T_2(x) &= \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= \cos(3\theta) = 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= \cos(4\theta) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= \cos(5\theta) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
T_6(x) &= \cos(6\theta) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\
T_7(x) &= \cos(7\theta) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\
T_8(x) &= \cos(8\theta) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \\
T_9(x) &= \cos(9\theta) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x
\end{aligned} \quad (7a)$$

E a fórmula recursiva para obter $T_{n+1}(x)$, é:

$$T_{n+1}(x) = 2 * x * T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (7b)$$

No Gráfico 6.1, apresentamos os primeiros cincos polinômios de Tchebyshev de primeira ordem.

Gráfico 6.1 – Polinômios deTchebyshev de graus $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \text{ e } 5$



Fonte: Polinômios de Tchebychev (2016)

Explicitando as potências de x em função dos polinômios $T_n(x)$, que serão abreviados por T_n para facilitar o seu uso algébrico, resultam:

$$
\begin{aligned}
x^0 &= T_0 \\
x^1 &= T_1 \\
x^2 &= (T_2 + T_0)/2 \\
x^3 &= (T_3 + 3T_1)/4 \\
x^4 &= (T_4 + 4T_2 + 3T_0)/8 \\
x^5 &= (T_5 + 5T_3 + 10T_1)/16 \\
x^6 &= (T_6 + 6T_4 + 15T_2 + 10T_0)/32 \\
x^7 &= (T_7 + 7T_5 + 21T_3 + 35T_1)/64 \\
x^8 &= (T_8 + 8T_6 + 28T_4 + 56T_2 + 35T_0)/128 \\
x^9 &= (T_9 + 9T_7 + 36T_5 + 84T_3 + 126T_1)/256
\end{aligned}
\tag{7c}
$$

A seguir, vamos apresentar algumas propriedades dos polinômios de Tchebyshev.

Propriedade 1: $T_n(x)$ é um polinômio de grau n e existe um único $T_n(x)$ para cada grau n. O coeficiente de x^n em $T_n(x)$ é sempre igual a 2^{n-1}.

Propriedade 2: $|T_n(x)| \le 1$, $\forall\ x \in [-1,\ +1]$, então $\max\limits_{x\in[-1,+1]} |T_n(x)| = 1$.

Propriedade 3: todas as n raízes α_k de $T_n(x)=0$ ("nós" de Tchebyshev) são simples e obtidas diretamente via

$$\alpha_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \ \forall\ k=1,2,...,n \tag{8a}$$

Esses n "nós" são obtidos através de uma distribuição uniforme em $\theta_k \in (0,\ \pi)$ de modo que cada raiz α_k satisfaça $T_n(\alpha_k)=\cos(n\ \arccos(\alpha_k))=0$, em que $\alpha_k = \cos(\theta_k)$ e θ_k dado por,

$$\theta_k = \left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \tag{8b}$$

DESTAQUE Verificamos que $T_n(\alpha_k)=0$, substituindo os valores de x da eq. (5) pelas raízes α_k dadas pela eq. (8a), conforme segue,

$$T_n(\alpha_k)=\cos(n*\underbrace{\arccos(\cos}\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)))=\cos(n\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right))=\cos\left((2k-1)(\frac{\pi}{2})\right)=0$$

FIM DESTAQUE

Propriedade 4: os polinômios de primeira ordem, $T_n(x)$, formam uma sequência de polinômios **ortogonais**, com relação ao peso $W(x)=1\big/\sqrt{1-x^2}$, no intervalo $x\in[-1,\ +1]$, ou seja:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(x)*T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \pi, & n=m=0\\ \pi/2, & n=m\neq 0\end{cases} \tag{9}$$

Propriedade 5 (teorema de Tchebyshev): toda função $y=f(x)$ contínua em $[-1,\ 1]$, pode ser aproximada usando polinômios de Tchebyshev por meio da série:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_iT_i=b_0+b_1*T_1\left(x\right)+b_2*T_2\left(x\right)+....+b_k*T_k\left(x\right)+.... \tag{10a}$$

em que
$$\begin{cases}b_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, & i=0\\ b_i=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx, & \forall\ i=1,2,...,k\end{cases} \tag{10b}$$

Podemos obter cada coeficiente b_i da série de Tchebyschev, dados pelas eqs. (10b), fazendo o produto interno da eq. (10a) pelo polinômio ortogonal de Tchebyschev de ordem i usando a **Propriedade 4 (**ABRAMOWITZ; STEGUN, 1961).

Por exemplo, para $i = 0$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x) * T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{(b_0 * T_0(x) + b_1 * T_1(x) + b_2 * T_2(x) + ... + \ b_k * T_k(x) + ...) * T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Temos

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_0(x) * T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$$

e demais produtos internos são nulos (pela eq. 9), logo

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) * T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Para $i = 1$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x) * T_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{(b_0 * T_0(x) + b_1 * T_1(x) + b_2 * T_2(x) + ... + b_k * T_k(x) \ + ...) * T_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Temos

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_1(x) * T_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

e demais produtos internos nulos, logo

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) * T_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

e assim por diante para $i = 2, 3, ..., k$.

Desse modo, para obter um polinômio aproximador de grau k para a $f(x)$ usando o teorema de Tchebyshev, temos que efetuar $k+1$ integrais definidas, que normalmente precisam ser obtidas via integração numérica de Gauss-Tchebyshev, também chamada de **quadratura de Gauss-Tchebyshev**, que veremos no Capítulo 8. Neste momento, vamos apenas apresentar a fórmula final para aproximar numericamente os coeficientes b_i:

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) * 1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{m} \sum_{j=1}^{m} f(x_j) \right]$$

$$b_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} f(x_j) \qquad (11a)$$

$$b_i = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{m}\sum_{j=1}^{m} f(x_j)T_i(x_j)\right]$$

$$b_i = \frac{2}{m}\sum_{j=1}^{m} f(x_j)T_i(x_j),\ \forall\ i = 1,2,...,k \qquad \text{(11b)}$$

em que os x_j são m "nós" de Tchebyshev: $x_j = \cos\left(\frac{(2j-1)}{2m}\pi\right),\ \forall\ j = 1,2,...,m$,

DESTAQUE Existe um número m mínimo de "nós" de Tchebyshev para obter uma integração numérica com a precisão numérica desejada. FIM DESTAQUE

Determinados os valores dos coeficientes b_i, devemos substituir os respectivos polinômios $T_i(x)$ de Tchebychev, dados pela eq. (7a), para obter essa aproximação diretamente em função de x.

Uma alternativa mais simples, denominada de **Tchebychev-Maclaurin**, a essas aproximações numéricas via integrais é utilizar as demais propriedades e seguir algebricamente os seguintes passos:

Primeiro passo: obtemos o aproximador de Maclaurin $M_n(x)$ para $y = f(x)$ com erro $E_{\mathrm{T1}} = \varepsilon$ desejado:

$$f(x) = M_n(x) + E_{\mathrm{T1}}$$

em que

$$M_n(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ \cdots\ + a_nx^n \qquad (12)$$

Segundo passo: substituímos na eq. (12) todas as potências x^i pelas respectivas expressões em T_i dos polinômios de Tchebyshev conforme as eqs (7c) e os agrupamos pelo mesmo índice, conforme segue:

$$f(x) = a_0 * T_0 + a_1 * T_1 + a_2 * (T_2 + T_0)/2 + a_3 * (T_3 + 3T_1)/4 + a_4 * (T_4 + 4T_2 + 3T_0)/8 + ... + E_{\mathrm{T1}}$$

$$f(T) = b_0 + b_1T_1 + b_2T_2 + \ \cdots\ + b_nT_n + E_{\mathrm{T1}} \qquad (13)$$

em que o último termo $b_n * T_n < \frac{b_n * 1}{2^{n-1}}$, conforme as **Propriedades 1** e **2**.

Terceiro passo: truncamos a expressão dada na eq. (13) a partir de $b_{k+1} * T_{k+1}$ com

$k < n$ (escolhido cuidadosamente para não aumentar a ordem de grandeza do erro de truncamento) e denotamos todas as parcelas truncadas entre $k+1$ e n por E_{T2},

$$f(T) = b_0 + b_1 T_1 + b_2 T_2 + \cdots + b_k T_k + E_{\mathrm{T2}} + E_{\mathrm{T1}} \tag{14}$$

de modo que

$$|E_{\mathrm{T2}}| + |E_{\mathrm{T1}}| \leq \varepsilon .$$

Quarto passo: substituímos, na eq. (14) truncada, cada T_i pela sua respectiva expressão em x^i dada pelas expressões (7a) e agrupamos os termos em x^i, gerando o polinômio diretamente em função de x:

$$f(x) = TC_k^M(x) + E_{\mathrm{T2}} + E_{\mathrm{T1}} \tag{15a}$$

em que,

$$TC_k^M(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k \tag{15b}$$

Temos, então, um aproximador polinomial para a função $y = f(x)$ de grau $k < n$ (n é o grau do aproximador de Maclaurin na precisão E_{T1}), dado por $f(x) \cong TC_k^M(x)$, com erro $|E_{\mathrm{T2}}| + |E_{\mathrm{T1}}| < \varepsilon$. A diferença entre os graus n e k é denominada de **efeito telescópico** do aproximador de Tchebyshev. Esse efeito é inversamente proporcional à velocidade de convergência da série de Maclaurin da $f(x)$.

Exemplo 6.9: aproxime $f(x) = e^x$ em $x \in [-1, +1]$ por Tchebyshev de grau $k = 3$ usando diretamente a **Propriedade 5** (teorema de Tchebyshev) e partindo da expansão em série de Maclaurin de grau $n = 4$ (usando Tchebychev-Maclaurin).

Solução:

Usando a **Propriedade 5** (teorema de Tchebyshev), via algoritmo de Tchebyshev com as aproximações das integrais das eqs. (11), vamos obter $TC_3(x)$ de grau final $k = 3$:

$$TC_3(T_i) = 1.266065877752000 T_0 + 1.266065877752000 T_1 + 0.271495339534075 T_2 + 0.0443368498486627 T_3$$

Devemos substituir os respectivos polinômios $T_i(x)$ de Tchebychev, dados pelas expressões (7a), para obter essa aproximação diretamente em função de x.

Alternativamente, vamos usar Tchebychev-Maclaurin:

a) Aproximação de $f(x)$ por Maclaurin ($\beta = 0$) com grau $n = 4$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\max|f^{(4+1)}(x)|(x-0)^{4+1}}{(4+1)!}$$

$$e^x \cong 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + E_{T1}$$

$$M_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

com erro máximo $E_{T1} = |e^1| * |1-0|^{(4+1)} / (4+1)! = 2.26523 * 10^{-2} \cong O(10^{-2})$ (pelo teorema do resto).

b) Substituição algébrica de x^i pelos respectivos polinômios deTchebyshev , conforme as eqs. (7c):

$$e^x \cong T_0 + T_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{T_2 + T_0}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{T_3 + 3T_1}{4}\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{T_4 + 4T_2 + 3T_0}{8}\right) + E_{T1}$$

$$e^x \cong \frac{81}{64}T_0 + \frac{9}{8}T_1 + \frac{13}{48}T_2 + \frac{1}{24}T_3 + \frac{1}{192}T_4 + E_{T1}$$

Sabendo que o valor máximo de qualquer polinômio de Tchebyshev é a unidade, conforme **Propriedade 2**, vemos que o termo $(1/192)T_4$ adicionado ao erro de truncamento existente E_{T1} não alterará a sua ordem de precisão total, pois

$$E_T \cong (1/192)T_4 + E_{T1} < 0.00520833 + 0.0226523 \cong 0.0278607 \cong O(10^{-2})$$

Então, mesmo desprezando o termo de 4ª ordem ($k = 4$) da série expandida por polinômios de Tchebyshev, o erro de truncamento total E_T fica da mesma ordem de grandeza de E_{T1}, $O(10^{-2})$.

c) Truncando a série e mantendo os termos até grau $k = 3$, temos:

$$e^x \cong \frac{81}{64}T_0 + \frac{9}{8}T_1 + \frac{13}{48}T_2 + \frac{1}{24}T_3 + E_T$$

d) E substituindo os polinômios de Tchebyshev T_i em função de x_i, conforme as eqs. (7a), temos:

$$e^x \cong \frac{81}{64}x^0 + \frac{9}{8}x^1 + \frac{13}{48}(2x^2 - 1) + \frac{1}{24}(4x^3 - 3x) + E_T$$

$$e^x \cong \frac{191}{192} + x^1 + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + E_T$$

$$TC_3^M(x) = \frac{191}{192} + x^1 + \frac{13}{24}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

Em que $TC_3^M(x)$ é o aproximador de Tchebychev-Maclaurin de grau final

$k = 3$.

Então, temos o aproximador de Tchebyshev em função de T_i:

$$TC_3(T_i) = 1.266065877752000T_0 + 1.266065877752000T_1 + \\ + 0.271495339534075T_2 + 0.044336849848662 7T_3$$

E o aproximador de Tchebychev-Maclaurin em função de T_i:

$$TC_3^M(T_i) = 1.265625T_0 + 1.125T_1 + 0.270833333333333T_2 + 0.0416666666666667T_3$$

Confira o cálculo dos erros exatos para aproximação de e^x das séries de Maclaurin ($n = 4$), Tchebychev e Tchebychev-Maclaurin ($n = 3$), em relação ao valor exato, na Tabela 6.1.

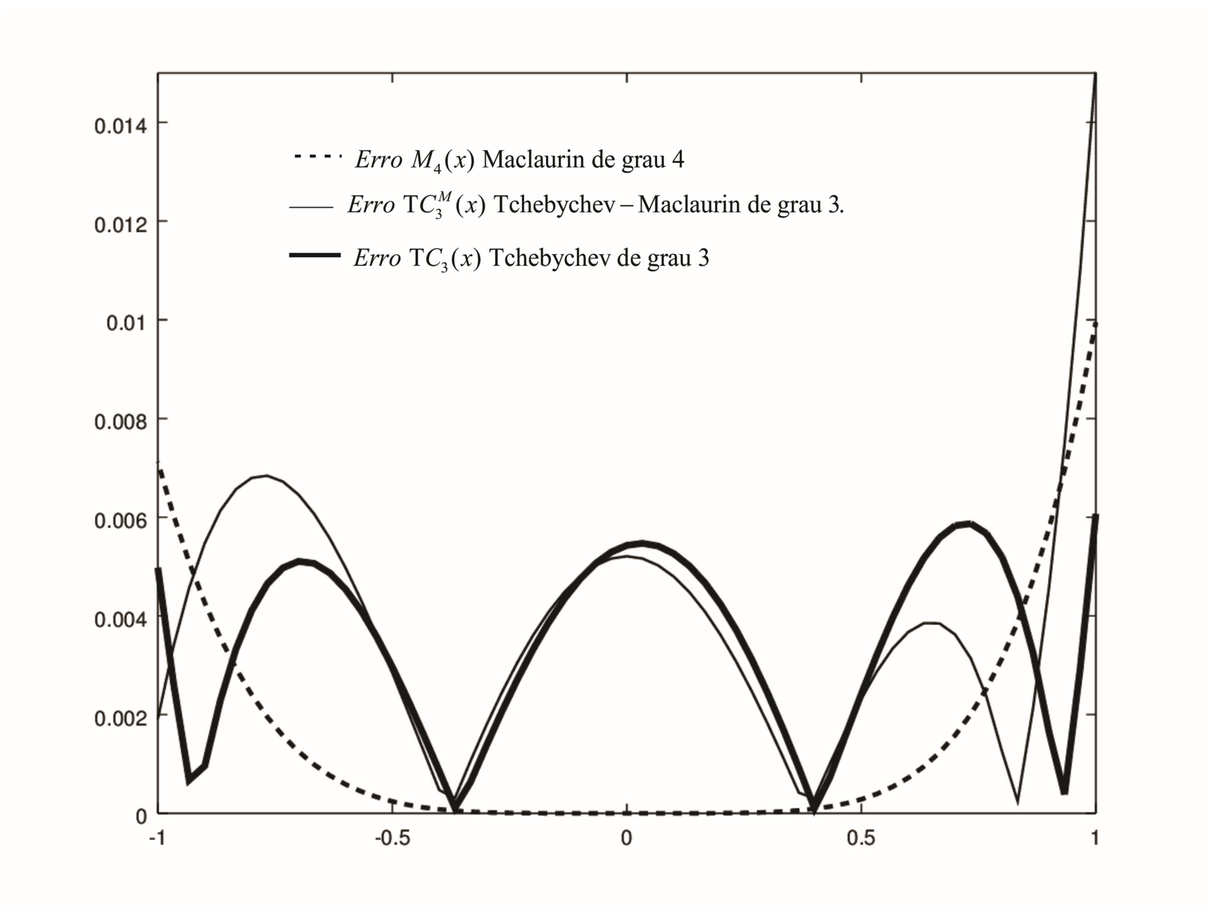
Tabela 6.1 − Erros exatos em alguns pontos e erros máximos das séries de Maclaurin, Tchebychev-Maclaurin e Tchebychev

x	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	*Erro Maximo*
Erro $M_4(x)$	0.0071	0.00024	0.0	0.00028	0.0099	0.0099
Erro $\mathrm{TC}_3^M(x)$	0.0019	0.0028	0.0052	0.0023	0.0151	0.0152
Erro $\mathrm{TC}_3(x)$	0.0049	0.0029	0.0054	0.0024	0.0060	0.00606

Fonte: Elaboração própria

Note que, nas duas aproximações de Tchebyshev, os erros estão bem distribuídos e todos se mantêm abaixo do erro de truncamento total previsto inicialmente, $E_{\mathrm{T}} = 0.0278607$, de ordem $O(10^{-2})$, mas a aproximação via teorema de Tchebychev (**Propriedade 5**) resulta em erros menores, conforme a tabela de erros anterior, representada no Gráfico 6.2 a seguir.

Gráfico 6.2: Erros da aproximação de e^x por séries de Maclaurin $M_4(x)$, Tchebychev-Maclaurin $TC_3^M(x)$ e Tchebychev $TC_3(x)$



Fonte: Elaboração própria

Nesse caso, a aproximação de Tchebyschev, de grau final $n = 3$, obtida via teorema de Tchebychev, promoveu uma melhor distribuição dos erros ao longo do intervalo (Gráfico 6.2). O erro exato máximo da série de Maclaurin de grau $n = 4$ era $0.99e-03 \cong O(10^{-2})$, e agora a série de Tchebyschev de apenas grau $n = 3$ aproxima $f(x) = e^x$ com o erro exato máximo de $0.606e-03$, ou seja, da mesma ordem de $O(10^{-2})$ e obtido com um polinômio de menor grau.

Com a aplicação do teorema de Tchebychev, podemos construir um aproximador de qualquer grau, bastanto efetuar numericamente as integrações de Tchebychev (conforme o algoritmo **Cap6exem6.9.m**) e, depois, substituir os respectivos polinômios de Tchebychev para ter uma função em x.

Exemplo 6.10: aproxime, pelo teorema de Tchebyshev e por Tchebyshev-Maclaurin, a função $f(x) = sen(x)$ em $x \in [-1, +1]$, de modo que o erro máximo seja da ordem de $O(10^{-6})$.

Solução:

Usando a **Propriedade 5** (teorema de Tchebyshev), com coeficientes obtidos via eqs. (11), obtemos aproximações até chegar ao grau final $n=5$, de modo que o erro máximo seja da ordem de $O(10^{-6})$:

$$TC_5(T_i) = 0.880101171489875T_1 - 0.0391267079653386T_3 + 0.0004995154604236624T_5$$

Em seguida, devemos substituir os respectivos polinômios $T_i(x)$ de Tchebychev, LINK Não estamos fazendo essa substituição neste momento para manter apenas cálculos em computador nesta fase de testes, sem necessidade de recorrer a substituições algébricas. FIM DO LINK dados pelas eqs. (7a), para obter essa aproximação diretamente em função de x. Vamos apresentar os erros no final.

Alternativamente, partindo da série de Maclaurin de $sen(x)$, teremos a aproximação de Tchebyshev-Maclaurin:

$$f(x) = sen(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + ... + (-1)^{i+1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

$$f(x) = sen(x) = 0 + \frac{x^1}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + 0 + \frac{x^9}{9!} + 0 + ... + (-1)^{i+1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

Conforme o **Exemplo 6.5**, a série de Maclaurin de grau $n=7$ tem limite de erro de truncamento da ordem $O(10^{-6})$, dado pelo primeiro termo abandonado $E_{T1} = 2.755732e-06$.

$$sen(x) \cong M_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$M_7(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!}$$

Substituindo algébricamente os x^i pelos polinômios de Tchebyshev em T_i, temos:

$$M_7(T_i) \cong T_1 - \frac{(T_3+3T_1)/4}{3!} + \frac{(T_5+5T_3+10T_1)/16}{5!} - \frac{(T_7+7T_5+21T_3+35T_1)/64}{7!}$$

$$M_7(T_i) \cong \frac{8111}{9216}T_1 - \frac{601}{15360}T_3 + \frac{23}{46080}T_5 - \frac{1}{322560}T_7$$

Como $|T_7| \le 1$, podemos truncar o termo $(1/322560)T_7 < 3.100 * 10^{-06}$, que é de ordem de grandeza do erro máximo da série de Maclaurin, $E_{T1} = 2.755732e-06$, e esses erros estimados somados não devem ultrapassar o limite da ordem de $O(10^{-6})$, mas $E_T \cong 2.756e-06 + 3.100e-06 = 5.856e-06$, que é de ordem $O(10^{-5})$, assim mesmo vamos proceder ao truncamento de T_7 e conferir esses erros estimados através do cálculo dos erros exatos no final da aproximação. Assim, geramos a aproximadora Tchebyshev-Maclaurin:

$$TC_5^M(T_i) = \frac{8111}{9216}T_1 - \frac{601}{15360}T_3 + \frac{23}{46080}T_5$$

$$TC_5^M(T_i) = 0.880099826388889T_1 - 0.0391276041666667T_3 + 0.000499131944444444T_5$$

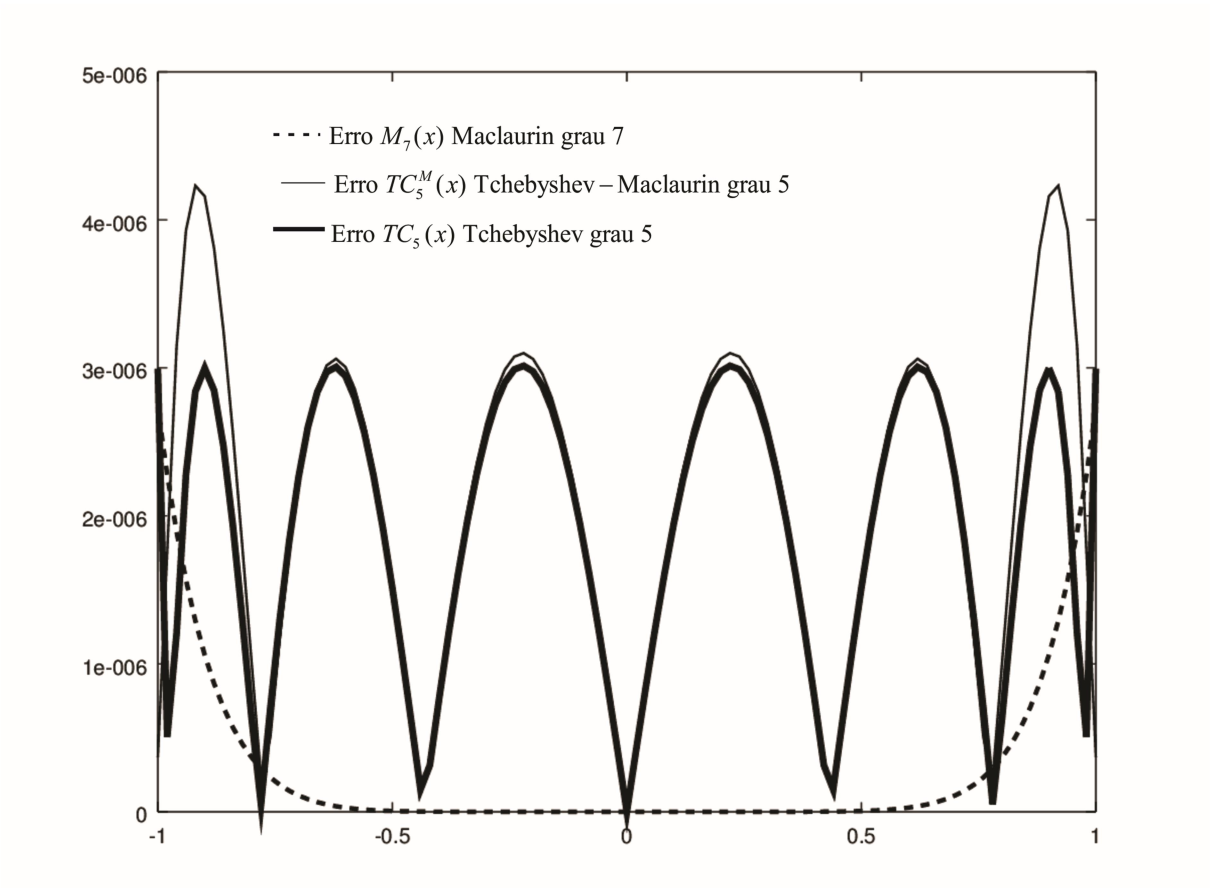
Substituindo T_i pelos polinômios deTchebyshev em x^i, temos:

$$TC_5^M(x) = \frac{8111}{9216}x^1 - \frac{601}{15360}(4x^3 - 3x) + \frac{23}{46080}(16x^5 - 20x^3 + 5x)$$

$$TC_5^M(x) = \frac{46079}{46080}x^1 - \frac{959}{5760}x^3 + \frac{23}{2880}x^5$$

$$TC_5^M(x) = 0 + \frac{46079}{46080}x^1 + 0 - \frac{959}{5760}x^3 + 0 + \frac{23}{2880}x^5$$

Gráfico 6.3 – Erros exatos entre as aproximadoras por série de Maclaurin $M_7(x)$, por Tchebyshev-Maclaurin $TC_5^M(x)$ e Tchebyshev $TC_5(x)$



Fonte: Elaboração própria

- Erro máximo MacLaurim de grau $n = 7$ é $2.7308e-06 \cong O(10^{-6})$
- Erro máximo Tchebyshev-Maclaurin de grau final $n = 5$ é $4.231483e-06 \cong O(10^{-5})$

(Nessa aproximação, o erro ficou um pouco acima da ordem $O(10^{-6})$)

- Erro máximo Tchebyshev de grau $n=5$ é $3.013737e-06 \cong O(10^{-6})$

(Nessa aproximação, o erro ficou na ordem $O(10^{-6})$ com grau menor que MacLaurin).

Note que o erro máximo estimado inicialmente para a série de Tchebyshev $TC_5(x)$ era $5.856e-06$, ou seja, maior do que o erro exato efetivamente obtido no final da aproximação numérica: $3.013737e-06$.

Nesse exemplo, a aproximação de Tchebyschev de grau $n=5$, obtida numericamente usando o teorema de Tchebychev, também promoveu uma melhor distribuição dos erros ao longo do intervalo (Gráfico 6.3). O erro exato máximo da série de Maclaurin de grau $n=7$ era $2.7308e-06 \cong O(10^{-6})$, e agora a série de Tchebyschev de apenas grau $n=5$ aproxima $f(x)=sen(x)$ com o erro exato máximo de $3.013737e-06$, ou seja da mesma ordem de $O(10^{-6})$ e obtido com uma série de menor grau.

DESTAQUE Comparando a aproximação pelo teorema de Tchebychev com a forma algébrica de Tchebychev-Maclaurin, percebemos que a primeira gera erros menores, uma vez que os coeficientes b_i são obtidos a partir da série infinita, considerando as influências de **todos os termos da série** de Tchebychev e aplicando produtos internos em conjunto com a propriedade da ortogonalidade entre todos os polinômios T_i de Tchebychev da eq. (10a). Assim, chegaremos à série truncada de Tchebychev com o grau desejado a partir da série infinita, conforme os coeficientes dados pela eq. (10b). Algebricamente, partindo da série de Maclaurin truncada, consideramos apenas os termos já truncados da série. FIM DO DESTAQUE

Exemplo 6.11: aproxime $f(x)=\ln(x)$ em $x \in [1,\ 2]$, por Tchebyshev, com erro máximo na ordem de $O(10^{-6})$, e compare com Maclaurin. Faça um gráfico com os erros.

Solução:

Primeiramente, devemos fazer a correspondente mudança de variáveis de $x \in [1,\ 2]$ para o intervalo padrão $t \in [-1,\ +1]$:

$$x(t) = \frac{(2-1)t+(2+1)}{2} = 0.5t+1.5$$

Então, $f(x(t)) = \ln(x(t)) = \ln(0.5t + 1.5)$ no intervalo $t \in [-1, \ +1]$.

Aplicando o teorema de Tchebychev à função $f(x(t))$ e testando os graus necessários, chegamos ao erro máximo desejado com grau final $n = 6$:

$$TC_6(T_i) = 0.376452812919195T_0 + 0.343145750507622T_1 - 0.0294372515228597T_2 + 0.00336708925556424T_3 - 4.33275888610656e-04T_4 + 5.94707119897031e-05T_5 - 8.50296754122976e-06T_6$$

$$Erro\ Tchebychev\ Max = 1.4721e-06$$

Agora, aplicando a expansão em série de Maclaurin, teremos a aproximação para $f(t) = \ln\left(\dfrac{(b-a)t + (b+a)}{2}\right)$ com a e b genéricos:

$$f(t) = \ln\big(0.5(b+a)\big) + \frac{1}{1}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)t^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 t^2 + + \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^3 t^3 - ...(-1)^{(i+1)}\frac{1}{i}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^i t^i + ...$$

Como é uma série alternada nos sinais, podemos estimar o limite de erro tomando o primeiro termo abandonado, depois do grau n:

$$\max\left|(-1)^{(n+2)}\frac{1}{n+1}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^{n+1} t^{n+1}\right| \cong O\left(10^{-6}\right) \text{ em } t = 1.$$

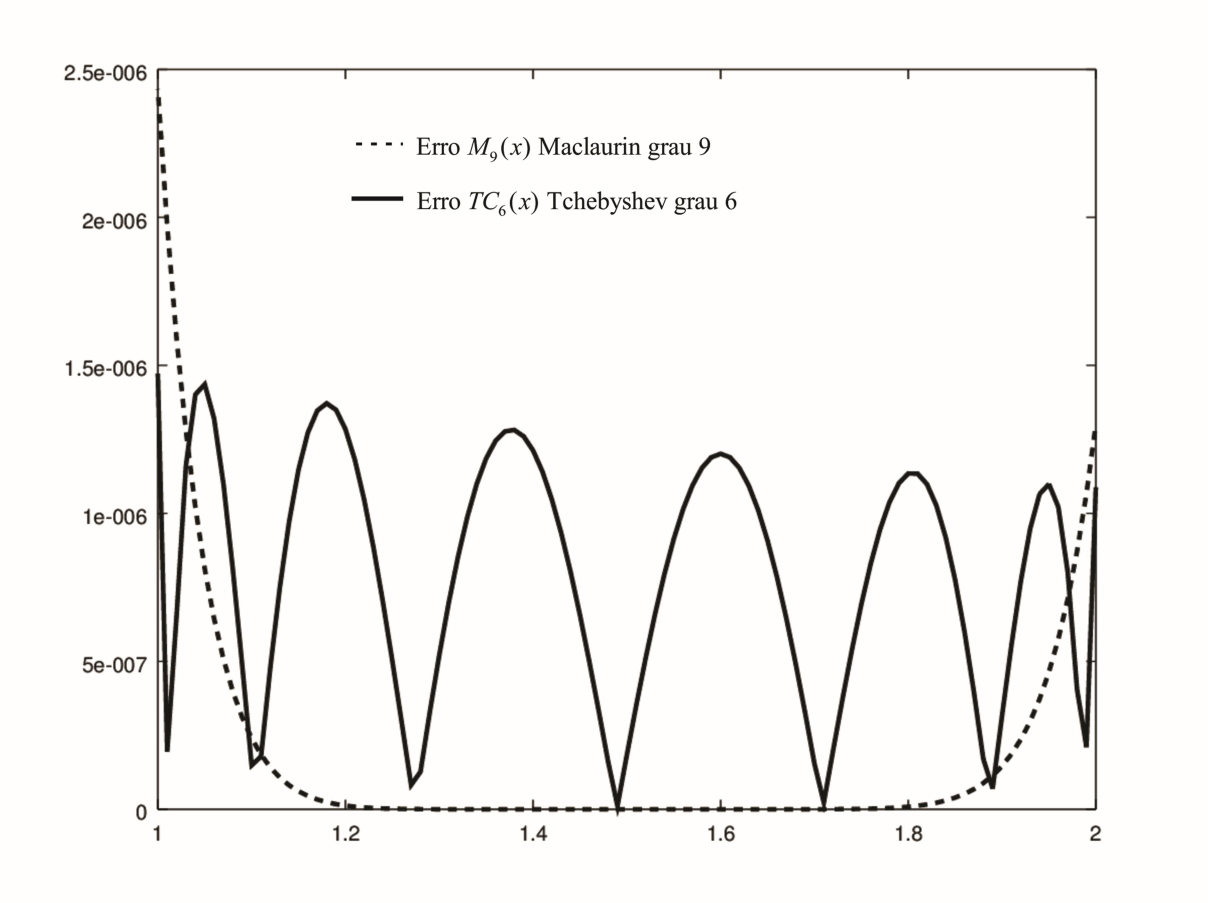
Para $n = 9$, o primeiro termo abandonado será de grau 10 e gerará o erro máximo $1.69350878 * 10^{-6}$.

Calculando os coeficientes de Maclaurin de grau $n = 9$, temos:

$$M_9(x) = 4.05465108108164e-01 + 3.33333333333333e-01x - 5.55555555555556e-02x^2 + 1.23456790123457e-02x^3 - 3.08641975308642e-03x^4 + 8.23045267489712e-04x^5 + -2.28623685413809e-04x^6 + 6.53210529753740e-05x^7 - 1.90519737844841e-05x^8 + 5.64502926947676e-06x^9$$

Com $Erro\ M_9(x)\ Max\ = 2.4334e-06$

Gráfico 6.4 − Erros exatos das aproximadoras por série de Maclaurin $M_9(x)$ e de Tchebyschev $TC_6(x)$



Fonte: Elaboração própria

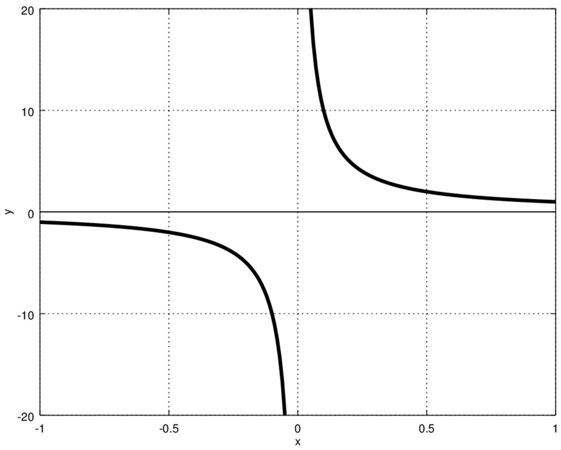
Então, com grau $n = 6$, a série de Tchebyshev aproxima $f(x) = \ln(x)$ em $x \in [1,\ 2]$ com o mesmo erro máximo na ordem de $O(10^{-6})$ que uma série de Mclaurin de grau $n = 9$.

DESTAQUE Apesar de todas as vantagens das aproximações polinomiais de $y = f(x)$, em especial as de Tchebyshev, também existem desvantagens que são inerentes aos próprios polinômios aproximadores, por exemplo, seus gráficos podem se tornar sinuosos com o aumento do grau e normalmente não aproximam eficientemente funções assintóticas por possuírem comportamento não assintótico. FIM DO DESTAQUE

No Caderno de Algoritmos você encontra implementados todos os exemplos deste capítulo, como por exemplo: **Cap6exem6.11.m**, onde os polinômios de Tchebychev são calculados genericamente para qualquer grau, através da relação de recorrência dada pela eq. (7b).

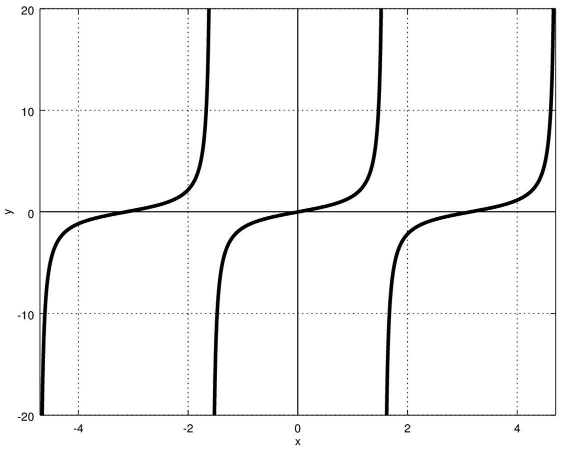
Para funções $y = f(x)$ que sejam assíntotas como as funções dos Gráficos 6.5 e 6.6, o grau n de um aproximador polinomial será muito elevado, impactando diretamente nos requisitos (c) e (d) de uma aproximadora ideal.

Gráfico 6.5 – Função assintótica $y = 1/x$



Fonte: Elaboração própria

Gráfico 6.6 – Função assintótica $y = tg(x)$



Fonte: Elaboração própria

A seguir, vamos abordar uma técnica de aproximação de $y = f(x)$ utilizando aproximadoras não polinomiais.

6.2 Aproximação Racional de Padé

Definição 2: uma **função racional** de grau total M é toda expressão do tipo $R_{nm}(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$, em que $M = n + m$.

Por exemplo, a função hiperbólica $f(x)=\frac{1}{x}$ é uma racional de grau $M=1$, em que $R_{01}(x)=\frac{P_o(x)}{Q_1(x)}$.

Definição 3: a **aproximação racional de Padé** de uma $y=f(x)$ consiste em obter uma $R_{nm}(x)$ tal que:

$$f(x)\cong R_{nm}(x)=\frac{a_0+a_1x+\ \cdots\ +a_nx^n}{b_0+b_1x+\ \cdots\ +b_mx^m} \tag{16}$$

Com as seguintes **condições de aproximação**:

$$f(0)=R_{nm}(0);\ f'(0)=R'_{nm}(0);\ f''(0)=R''_{nm}(0);\ ...\ ;f^{(M)}(0)=R^{(M)}_{nm}(0) \tag{17}$$

em que $M=n+m$.

Note que essas condições de aproximação são exatamente as mesmas do aproximador de Taylor, que, nesse caso, são aplicadas para obter um polinômio de grau n, enquanto no aproximador de Padé são aplicadas para determinar uma racional de grau $M=n+m$.

Para obter a racional $R_{nm}(x)$ satisfazendo as condições da eq. (17), iniciamos aproximando a função original $f(x)$ por um aproximador de Maclaurin de grau M conforme os passos a seguir.

Primeiro passo: obtemos o aproximador de Maclaurin de grau $M=n+m$:

$$f(x)=M_M(x)+\mathrm{E_T}$$

$$M_M(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ \cdots\ +c_Mx^M$$

com n e m estabelecidos previamente e $n=m$ ou $n=m+1$.

Segundo passo: tomamos os polinômios $P_n(x)=a_0+a_1x+\ \cdots\ +a_nx^n$ e $Q_m(x)=1+b_1x+\ \cdots\ +b_mx^m$ com os coeficientes a_k e b_j a serem determinados, fixamos o primeiro coeficiente em $b_0=1$ (sem perda de generalidade) e consideramos que $M_M(x)=R_{nm}(x)$, o que resulta em:

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ \cdots\ +c_Mx^M=\frac{a_0+a_1x+\ \cdots\ +a_nx^n}{1+b_1x+\ \cdots\ +b_mx^m} \tag{18}$$

Terceiro passo: aplicamos as condições de aproximação da eq. (17) na eq. (18), inicialmente explicitando as incógnitas a_k em função dos c_i e b_j, o que resulta em:

a) $f(x=0) = R_{nm}(x=0)$

$$\Rightarrow c_0 + 0 = \frac{a_0 + 0}{1+0} \Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{1} \Rightarrow a_0 = c_0$$

b) $f'(x=0) = R'_{nm}(x=0)$

$$\Rightarrow c_1 + 2c_2x^1 + \cdots + M * c_M x^{M-1} = \left(a_1 + 2a_2x^1 \cdots + n * a_n x^{n\text{-}1}\right)\left(1 + b_1x + \cdots + b_m x^m\right)^{-1} +$$
$$-1\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_n x^n\right)\left(1 + b_1x + \cdots + b_m x^m\right)^{-2}\left(b_1 + 2b_2x^1 \cdots + m * b_m x^{m\text{-}1}\right)$$
$$\Rightarrow c_1 = \left(a_1\right)\left(1\right)^{-1} - 1\left(a_0\right)\left(1\right)^{-2}\left(b_1\right)$$
$$\Rightarrow a_1 = c_1 + b_1 * c_0$$

c) $f''(x=0) = R''_{nm}(x=0)$

$$\Rightarrow 2c_2 + 6c_3x^1 + \cdots + M * (M-1) * c_M x^{M-2} = \left(2a_2 + 6a_3x^1 + \cdots + n * (n-1) * a_n x^{n\text{-}2}\right)\left(1 + b_1x + \cdots + b_m x^m\right)^{-1} +$$
$$-1\left(a_1 + 2a_2x^1 + \cdots + n * a_n x^{n\text{-}1}\right)\left(1 + b_1x + \cdots + b_m x^m\right)^{-2}\left(b_1 + 2b_2x^1 + 3b_2x^2 + \cdots + m * b_m x^{m\text{-}1}\right) +$$
$$-1\left(a_1 + \cdots + a_n x^n\right)\left(1 + b_1x + \cdots + b_m x^m\right)^{-2}\left(b_1 + 2b_2x^1 + 3b_2x^2 + \cdots + m * b_m x^{m\text{-}1}\right) +$$
$$+2\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_n x^n\right)\left(1 + b_1x + \cdots + b_m x^m\right)^{-3}\left(b_1 + 2b_2x + \cdots + m * b_m x^{m\text{-}1}\right)\left(b_1 + 2b_2x^1 + \cdots + m * b_m x^{m\text{-}1}\right)$$
$$-1\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_n x^n\right)\left(1 + b_1x + \cdots + b_m x^m\right)^{-2}\left(2b_2 \; + 6b_3x^1 + \cdots + m * (m\text{-}1) * b_m x^{m\text{-}2}\right)$$
$$\Rightarrow 2c_2 = \left(2a_2\right)\left(1\right)^{-1} - 1\left(a_1\right)\left(1\right)^{-2}\left(b_1\right) - 1\left(a_1\right)\left(1\right)^{-2}\left(b_1\right) + 2\left(a_0\right)\left(1\right)^{-3}\left(b_1\right)\left(b_1\right) - 1\left(a_0\right)\left(1\right)^{-2}\left(2b_2\right)$$
$$\Rightarrow 2c_2 = 2a_2 - 2a_1b_1 + 2a_0b_1^2 - 2a_0b_2 \quad (\div 2)$$
$$\Rightarrow a_2 = c_2 + a_1b_1 - a_0b_1^2 + a_0b_2$$

E substituindo a_1 e a_0, em a_2, temos

$$\Rightarrow a_2 = c_2 + (b_1 * c_0 + c_1)b_1 - c_0b_1^2 + c_0b_2 = c_2 + c_0b_1^2 + c_1b_1 - c_0b_1^2 + c_0b_2$$
$$\Rightarrow a_2 = c_2 + b_1c_1 + b_2c_0$$

Estendendo para as demais derivadas, até ordem M, explicitamos os valores de a_k:

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_1 = c_1 + b_1c_0 \\ a_2 = c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 \\ a_3 = c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0 \\ a_4 = c_4 + b_1c_3 + b_2c_2 + b_3c_1 + b_4c_0 \\ a_5 = c_5 + b_1c_4 + b_2c_3 + b_3c_2 + b_4c_1 + b_5c_0 \\ \qquad \vdots \\ a_n = c_n + b_1c_{n-m+1} + \cdots + b_nc_{n-m} \end{cases} \tag{19}$$

E os valores dos b_j são obtidos gerando e solvendo o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} \\ & \vdots & & \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m\text{-}1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{bmatrix} \qquad (20a)$$

Para padronizar a apresentação do sistema da eq. (20a), conforme definimos no Capítulo 2, com as incógnitas contendo índices na ordem crescente e sem afetar a sua solução, podemos efetuar a troca das colunas da matriz dos coeficientes resultando no sistema equivalente:

$$\begin{bmatrix} c_n & c_{n-1} & \cdots & c_{n-m+1} \\ c_{n+1} & c_n & \cdots & c_{n-m+2} \\ & \vdots & & \\ c_{n+m-1} & c_{n+m-2} & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{bmatrix} \qquad (20b)$$

Note que as eqs. (20a) e (20b) formam um sistema linear simétrico de ordem $m \times m$. Se nessas equações ocorrer c_i com i negativo, então consideramos $c_i = 0$.

Primeiramente temos que resolver a eq. (20a), ou a (20b), para obter os b_j, e, depois, substituí-los nas eq. (19), para obter os a_k.

DESTAQUE Esses sistemas são muito mal condicionados e, nesses casos, temos um acúmulo significativo de erros de arredondamento nas soluções obtidas por métodos diretos, conforme efeitos citados no Capítulo 2. Assim, é recomendável utilizar o método de Cholesky (como no **Exemplo 6.16**) ou, se não for possível, utilizar o método de Gauss com pivotação total (como no **Exemplo 6.12**, no qual é **mandatória uma pivotação**, de modo que o método de Cholesky não pode mais ser aplicado, uma vez a matriz torna-se não simétrica). FIM DO DESTAQUE

A obtenção desses sistemas, dados pelas eqs. (19) e (20), pela aplicação direta das condições de aproximação, conforme a eq. (17), é extremamente trabalhosa. Alternativamente, podemos obter esses sistemas considerando as condições de aproximação dadas pela eq. (17), reescritas da seguinte forma,

$$f^{(k)}(x=0) - R_{nm}^{(k)}(x=0) = 0, \text{ com } k = 0,1,2,...,M \qquad (21)$$

Observe que, na forma da eq. (21), podemos inferir que "$x=0$ é a única raiz da equação $f(x)-R_{nm}(x)=0$ com multiplicidade $M+1$", conforme a **Propriedade 13**, que vimos no Capítulo 3, pois tem derivadas nulas até ordem M.

Vamos mostrar essa dedução alternativa das eqs. (19) e (20), conforme apresentam Burden e Faires (2011), reescrevendo a eq. (18) da seguinte forma,

$$f(x)-R_{nm}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ \cdots\ +c_Mx^M-\frac{a_0+a_1x+\ \cdots\ +a_nx^n}{1+b_1x+\ \cdots\ +b_mx^m}=0$$

$$f(x)-R_{nm}(x)=\frac{\left(c_0+c_1x+c_2x^2+\ \cdots\ +c_Mx^M\right)\left(1+b_1x+\ \cdots\ +b_mx^m\right)-\left(a_0+a_1x+\ \cdots\ +a_nx^n\right)}{\left(a_0+a_1x+\ \cdots\ +a_nx^n\right)}=0$$

Essa equação também é satisfeita se apenas o seu numerador $h(x)$ for nulo, ou seja, se:

$$h(x)=\left(c_0+c_1x+c_2x^2+\ \cdots\ +c_Mx^M\right)\left(1+b_1x+\ \cdots\ +b_mx^m\right)-\left(a_0+a_1x+\ \cdots\ +a_nx^n\right)=0 \quad (22)$$

Então, se $x=0$ é raiz de $h(x)=0$, $x=0$ também será raiz de $f(x)-R_{nm}(x)=0$ e será uma raiz de no mínimo multiplicidade M. Se os termos de $h(x)$ de graus menores ou iguais a M forem nulos, então todas as derivadas de $h(x)$ serão nulas até ordem M; e a partir da derivada de ordem $M+1$, as derivadas podem ser não nulas, conforme a **Propriedade 13** do Capítulo 3, reescrita para $h(x)$ a seguir,

$$\begin{cases} h^{(k)}(x=0)=0,\ \text{com}\ \ k=0,1,2,...,M \\ h^{(M+1)}(x=0)\neq 0 \end{cases}$$

Logo, $h(x)$ deve ter termos nulos de ordem 0 até $M=n+m$ e termos não nulos de ordem $M+1=n+m+1$ em diante até $M+m=n+2m$, conforme,

$$\begin{aligned} h(x)=&\left(\sum_{i=0}^{0}c_ib_{0-i}-a_0\right)x^0+\left(\sum_{i=0}^{1}c_ib_{1-i}-a_1\right)x^1+\left(\sum_{i=0}^{2}c_ib_{2-i}-a_2\right)x^2+...+\left(\sum_{i=0}^{n}c_ib_{n-i}-a_n\right)x^n+... \\ &\left(\sum_{i=0}^{n+1}c_ib_{n+1-i}-a_{n+1}\right)x^{n+1}+\left(\sum_{i=0}^{n+2}c_ib_{n+2-i}-a_{n+2}\right)x^{n+2}+...+\left(\sum_{i=0}^{n+m}c_ib_{n+m-i}-a_{n+m}\right)x^{n+m}+O(x^{n+m+1})=0 \end{aligned}$$

em que

$$O(x^{n+m+1})=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}c_ib_{k-i}-a_k\right)x^{n+m+1}+\cdots+\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{k}c_ib_{k-i}-a_k\right)x^{n+m+m}=0$$

são termos não nulos de ordem entre $M+1$ e $M+m$

Com $b_j = 0$, para índices $j > m$ e $a_k = 0$ para índices $k > n$, a fim de manter os respectivos graus m e n no denominador e no numerador de R_{nm}, conforme a eq. (16).

Logo, genericamente, devemos resolver o sistema a seguir,

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{k} c_i b_{k-i} - a_k = 0, \text{ com } k = 0,1,2,\ldots,M\,(= n+m) \end{cases} \tag{23}$$

Como $a_k = 0$ para índices $k > n$, devemos separar o sistema dado na eq. (23) nos dois subsistemas a seguir:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{k} c_i b_{k-i} = 0, \text{ para } k = n+1, n+2, \ldots, M\,(n+m) \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} a_k = \sum_{i=0}^{k} c_i b_{k-i}, \text{ para } k = 0,1,2,\ldots,n \end{cases} \tag{25}$$

Para resolver esses dois subsistemas, precisamos resolver primeiramente a eq. (24), obtendo os b_j, e, depois, substituí-los na eq. (25), obtendo os a_k, exatamente como as eqs. (20) e (19).

A seguir, vamos apresentar um exemplo de aproximação racional.

Exemplo 6.12: obtenha a aproximadora racional de Padé $R_{32}(x)$ para $f(x) = arctg(x)$, $x \in [-1, \ +1]$. Avalie o erro exato da $R_{32}(x)$ no intervalo dado.

Solução:

Temos $n = 3$, $m = 2$ e $M = 5$ com $f(x) = arctg(x)$, cuja série de Maclaurin de grau $M = 5$ é:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \underbrace{- \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots}_{E_T}$$

Como o erro de truncamento máximo dessa série pode ser calculado pelo teorema do resto da série de Taylor, em que,

$$R_5(x) \le \frac{\max_{x\in[-1,+1]} \left| f^{(5+1)}(x) \right| (x-0)^{5+1}}{(5+1)!}$$

$\max_{x\in[-1,+1]} \left| f^{(5+1)}(x) \right| = \left| -240x(3-10x^2+3x^4)/(1+x^2)^6 \right| = 100.459$, em $x = -0.228243$

$$R_5(x) \le \frac{100.459(1-0)^{5+1}}{(5+1)!} \le 0.139526388888$$

Logo, $E_{T_1} = 0.139526389$.

Alternativamente, pelo **Teorema 1**, o erro de truncamento estimado na série de Maclaurin é o primeiro termo não nulo abandonado $E_{T_1} = \left| -\frac{x^7}{7} \right|_{x\in[-1,+1]}$ para séries alternadas nos sinais, dado por $E_{T_1} = \frac{1}{7} = 0.14286...$

Observe que temos a mesma ordem do erro máximo estimado pelo teorema do resto, então:

$$f(x) = arctg(x) \cong M_5(x) = 0 + x + 0x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 0x^4 + \frac{1}{5}x^5$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} c_0 = 0 & c_3 = -1/3 \\ c_1 = 1 & c_4 = 0 \\ c_2 = 0 & c_5 = 1/5 \end{array}$$

Conforme a eq. (15),

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 = \frac{P_3(x)}{Q_2(x)}$$

em que

$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ e $Q_2(x) = 1 + b_1x + b_2x^2$.

Para determinar os coeficientes b_j , aplicamos a eq. (20a):

$$\begin{bmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 3/5 \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

LINK Nesse sistema simétrico, temos coeficiente nulo na diagonal principal e o método de Cholesky não pode ser aplicado diretamente, por isso precisamos aplicar uma pivotação, que normalmente quebra a simetria da matriz, e depois aplicar outro método eliminativo como o Gauss. FIM DO LINK

Ou aplicamos a eq. (20b) usando o método de Cholesky, pois, nesse caso, a matriz manteve-se simétrica:

$$\begin{bmatrix} c_3 & c_2 \\ c_4 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 3/5 \end{cases}$$

E, depois, aplicando b_j na eq. (19), obtemos a_k :

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_1 = c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 = c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ a_3 = c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0 \end{cases}$$ para $\mathrm{m} = 2 \Rightarrow b_3 = 0$, pois $Q_2(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + 0x^3$

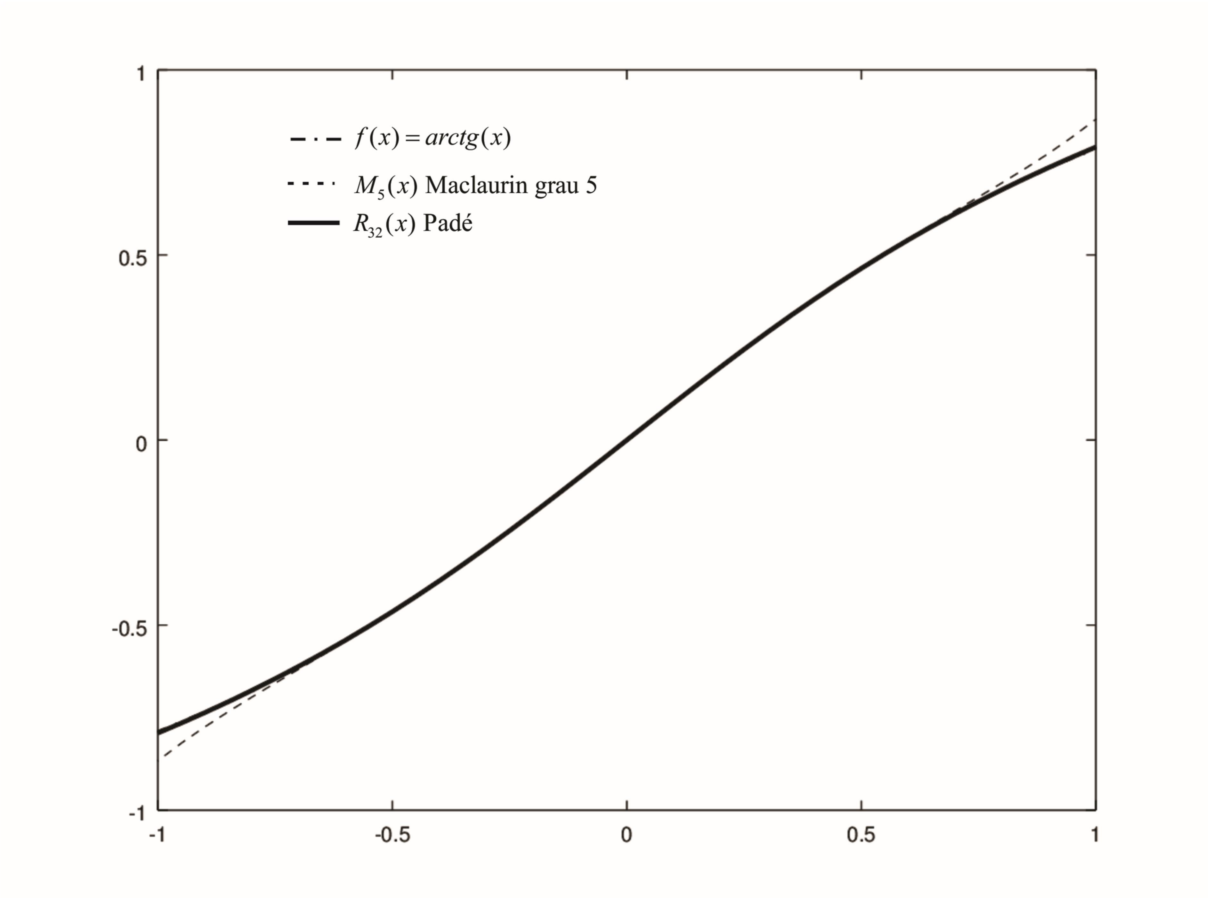
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \quad + 0 * 0 = 1 \\ a_2 = 0 \quad + 0 * 1 + (3/5) * 0 = 0 \\ a_3 = -1/3 + 0 * 0 + (3/5) * 1 + 0 * 0 \ = 4/15 \end{cases}$$

Então,

$$f(x) = arctg(x) \cong R_{32}(x) = \frac{0 + 1x + 0x^2 + (4/15)x^3}{1 + 0x + (3/5)x^2} = \frac{x(15 + 4x^2)}{15 + 9x^2}$$

Confira no Caderno de Algoritmos, o algoritmo de Padé no arquivo Cap6exemplo6.12.m aplicado ao Exemplo 6.12.

Gráfico 6.7 – Representação de $f(x) = arctg(x)$ e suas aproximadoras por Maclaurin $M_5(x)$ e Padé $R_{32}(x)$



Fonte: Elaboração própria

A distribuição de erros das aproximadoras por Maclaurin e Padé em relação à função exata $f(x) = arctg(x)$ pode ser conferida, a seguir, na Tabela 6.2 e no Gráfico 6.8.

$Erro$ exato $M_5(x) = |M_5(x) - arctg(x)|$ ($M_5(x)$ obtido por série Maclaurin com $n = 5$).

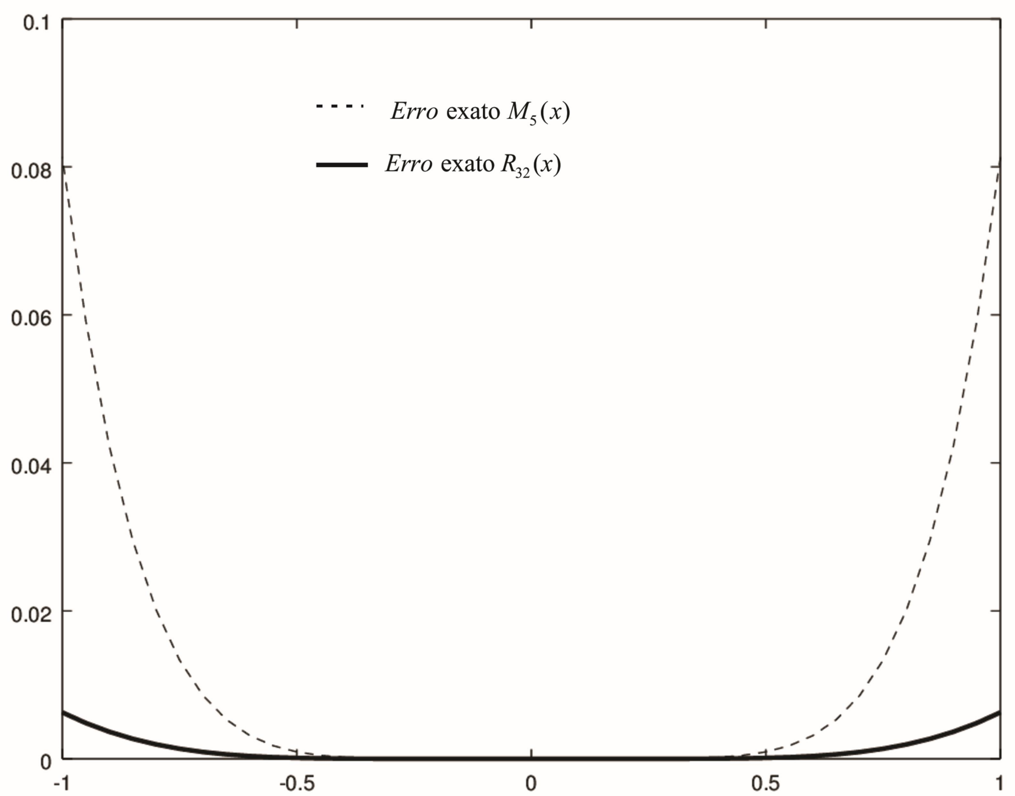
$Erro$ exato $R_{32}(x) = |R_{32}(x) - arctg(x)|$ ($R_{32}(x)$ obtido por Padé com $n = 3$ e $m = 2$).

Tabela 6.2 − Erros das aproximadoras por Maclaurin e Padé

x	-1	-0.5	0.0	0.5	1.0
$Erro$ exato $M_5(x)$	0.081269	0.000936	0.0	0.000936	0.081269
$Erro$ exato $R_{32}(x)$	0.006268	0.0001205	0.0	0.0001205	0.0062685

Fonte: Elaboração própria

Gráfico 6.8 − Representação dos erros das aproximadoras por Maclaurin $M_5(x)$ e Padé $R_{32}(x)$



Fonte: Elaboração própria

Note que os erros da aproximação de Padé são significativamente menores do que os erros da série de Maclaurin que gerou essa aproximação (ambas de grau $n=5$), no entanto não estão uniformemente distribuídos, mantendo as características da série geradora, conforme o Gráfico 6.8.

Para a aproximação de Maclaurin com grau $n=5$, temos um erro de truncamento máximo estimado de $E_{T_1}=0.139526389$ que, se avaliado de forma exata, chega a 0.081269, conforme a Tabela 6.2 , enquanto o erro máximo exato obtido com a aproximação de Padé $R_{32}(x)$ é no máximo 0.0062685. Para atingir um erro de truncamento dessa mesma ordem de 0.006, seria necessário uma série de Maclaurin de grau $n=165$, enquanto na aproximação de Padé foi usado apenas grau total $M=5$.

A seguir, vamos apresentar um exemplo comparativo das aproximações de funções com expressão conhecida apresentadas até este momento com o objetivo de validar a aproximação racional de Padé para os casos de funções assintóticas. Também vamos obter aproximações sucessivas da $f(x)=\ln(x)$, no domínio $[0,\ 1]$, buscando abranger as regiões próximas do ponto $x=0$ onde a função se torna assintótica.

Exemplo 6.13: aproxime a $f(x)=\ln(x)$, no intervalo $x\in[0.1,\ 1]$, usando interpolador polinomial, série de Maclaurin, de Tchebychev e de Padé, de modo que os erros máximos sejam, se possível, da ordem de $O(10^{-6})$. Plote os gráficos dos erros locais, apresente os erros máximos atingidos em cada caso, compare os resultados e indique qual é a forma de aproximação mais eficiente.

Solução:

O intervalo $x\in[0.1,\ 1]$ precisa ser transformado para o intervalo padrão $t\in[-1,\ +1]$, gerando a função $f(t)=\ln(0.45t+0.55)$.

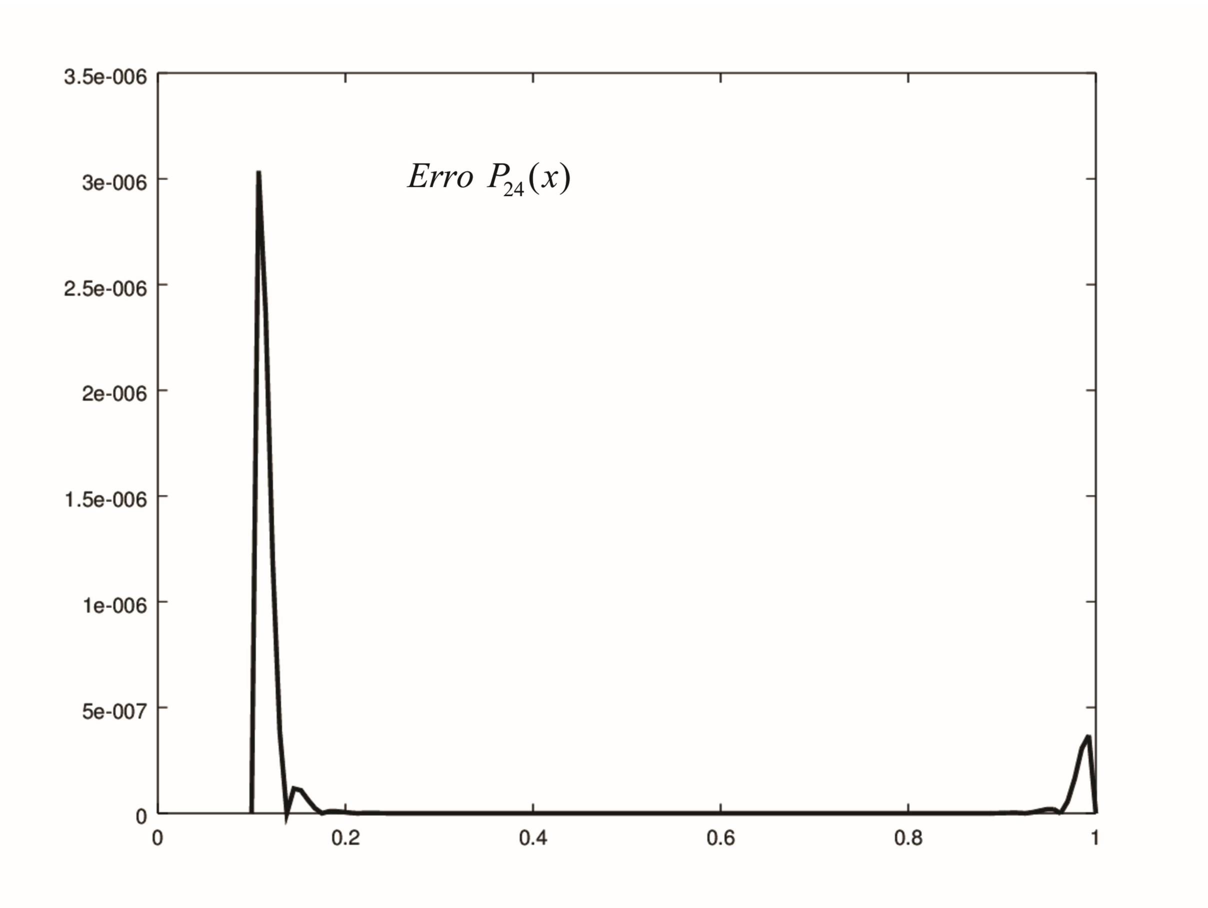
Aplicando tentativas para cada método, através dos respectivos algoritmos, teremos os seguintes resultados para os erros máximos e locais:

a) Para **interpolador polinomial**:

para grau 24 $\rightarrow$ $Erro\ P_{24}\ Max = 3.03621213415539e-06$ $(O(10^{-6}))$.

Com erros locais conforme o Gráfico 6.9 a seguir:

Gráfico 6.9 – Erro local do interpolador polinomial P_{24} de grau 24



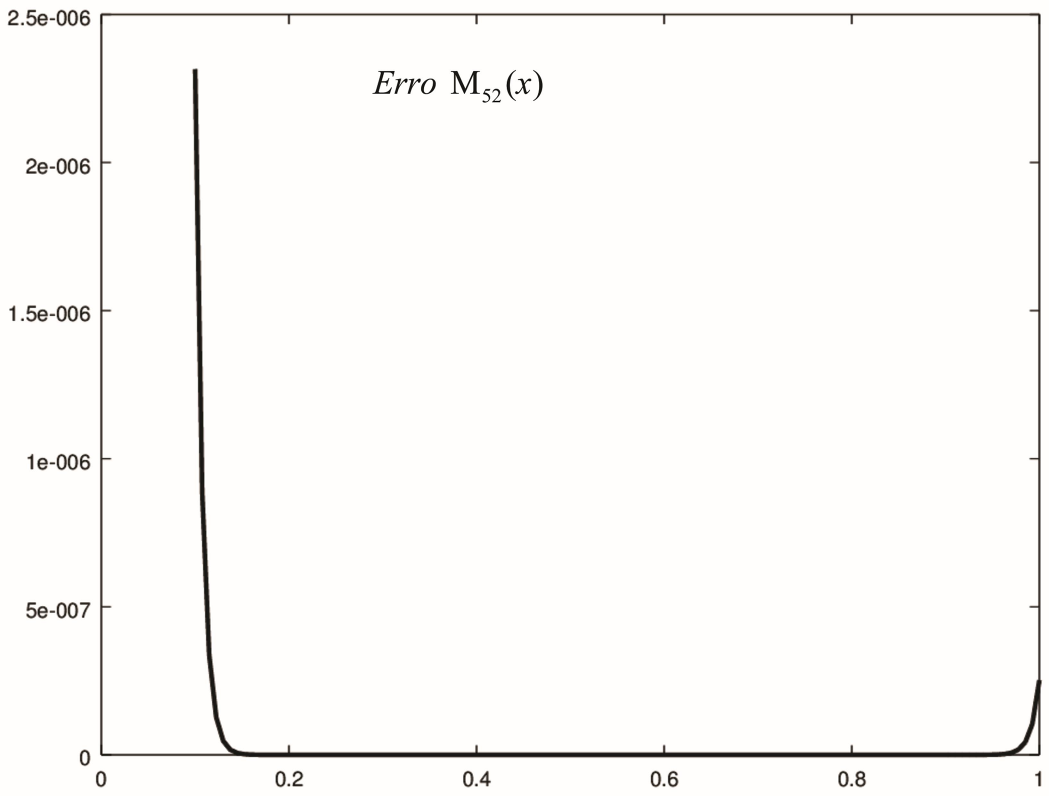
Fonte: Elaboração própria

b) Para **séries de Maclaurin**:

para grau $52 \quad \rightarrow \quad Erro\ \mathrm{M}_{52}\ Max = 2.31509887838044e-06 \ \ (O(10^{-6}))$;

Com erros locais conforme o Gráfico 6.10 a seguir:

Gráfico 6.10 – Erro local de Maclaurin M_{52} grau 52



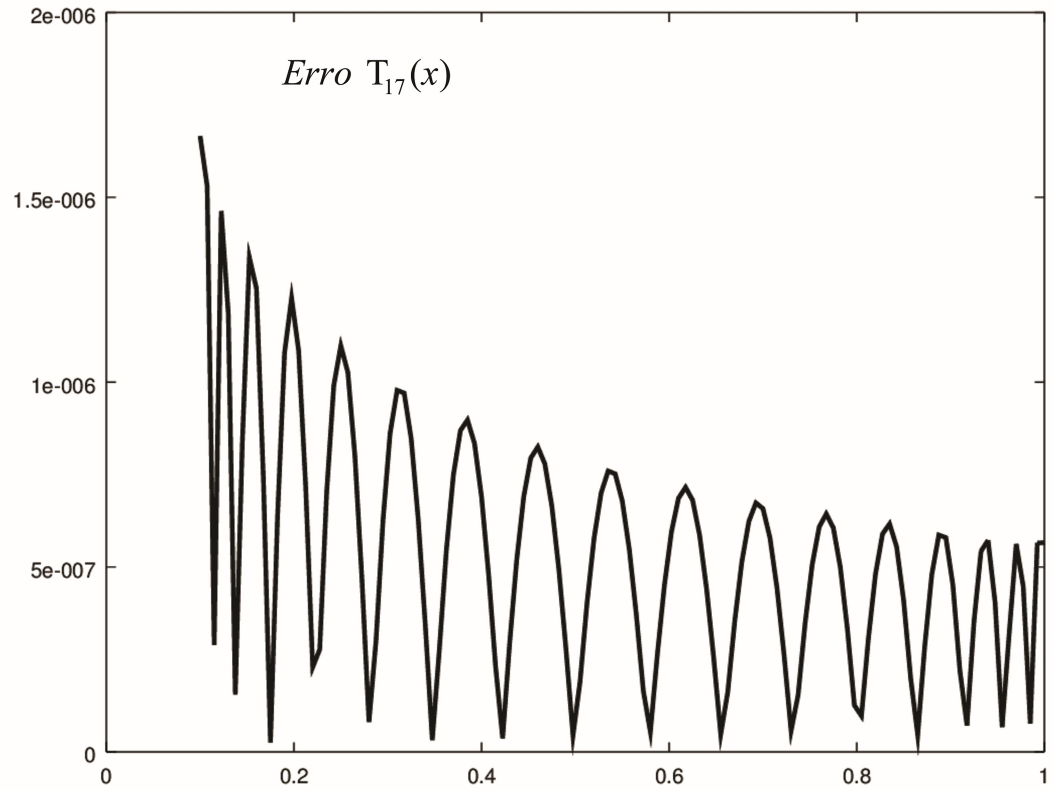
Fonte: Elaboração própria

c) Para **série de Tchebyschev**:

para grau $17 \rightarrow$ $Erro\ \mathrm{T}_{17}\ Max = 1.66541020307776e-06$ $(O(10^{-6}))$.

Com erros locais conforme o Gráfico 6.11 a seguir:

Gráfico 6.11 − Erro local de Tchebychev T_{17} de grau $n = 17$



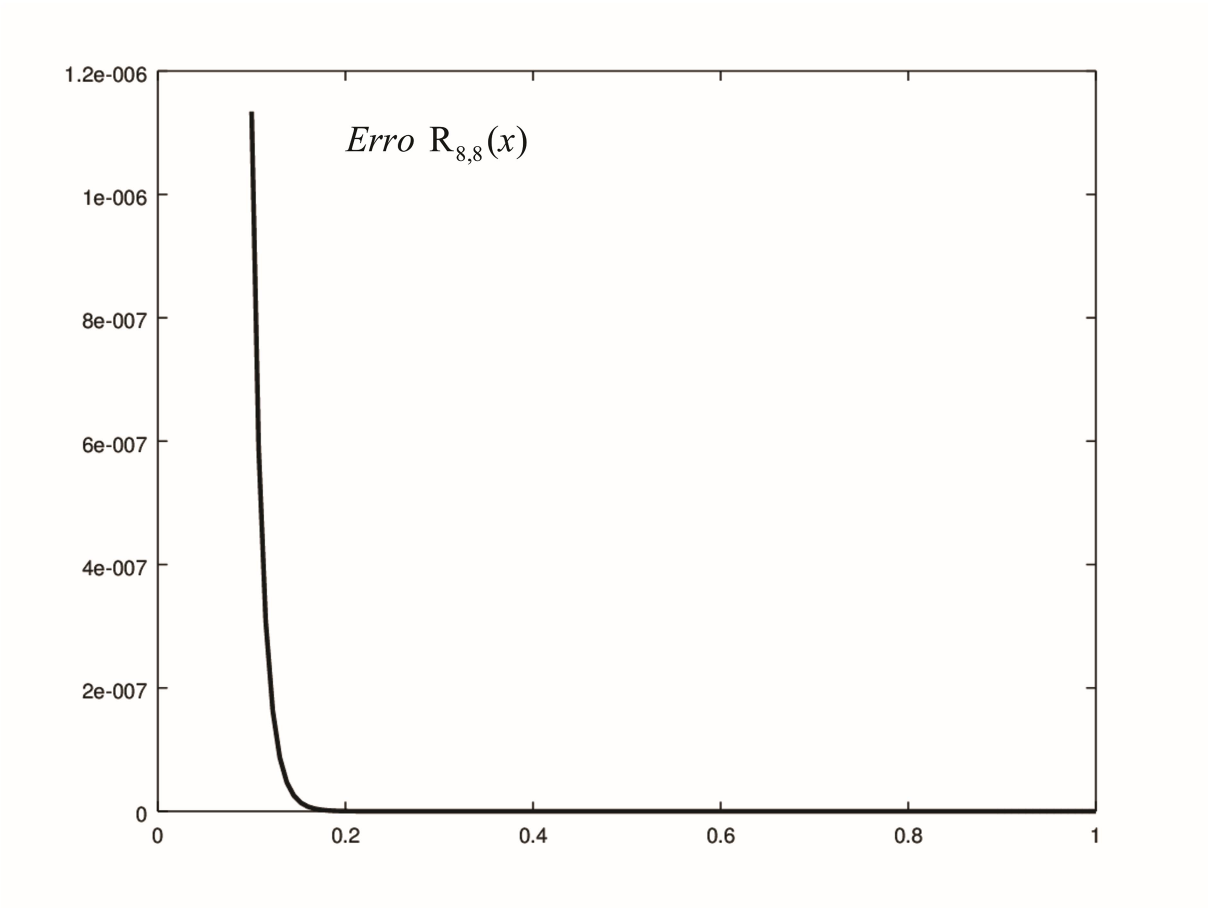
Fonte: Elaboração própria

d) Para a **racional de Padé**:

para grau $M = 8+8 \;\; \rightarrow \;\; Erro\ \mathrm{R}_{8,8}\ Max = 1.13394381573428e-06$ ($O(10^{-6})$).

Com erros locais conforme o Gráfico 6.12 a seguir:

Gráfico 6.12 − Erro local de Padé $R_{88}(x)$



Fonte: Elaboração própria

Observe que os erros máximos ocorrem na região mais próxima do ponto $x = 0$, que é onde a função se torna assintótica. Para esses casos, a aproximação por funções racionais de Padé se torna mais eficiente, pois aproxima $f(x)$ com o menores graus entre as aproximações testadas.

A seguir, vamos apresentar aproximações para a mesma função, mas avançando na direção do ponto $x = 0$ onde a função se torna assintótica.

Exemplo 6.14: aproxime $f(x) = \ln(x)$, no intervalo $x \in [0.01,\ 0.1]$, com interpolador polinomial, série de Maclaurin, de Tchebyshev e de Padé, de modo que os erros máximos sejam, se possível, da ordem de $O(10^{-6})$. Imprima os erros máximos atingidos em cada caso, compare os resultados e indique qual é a forma de aproximação mais eficiente.

Solução:

O intervalo $x \in [0.01,\ 0.1]$ precisa ser transformado para o intervalo padrão $t \in [-1,\ +1]$, gerando a função $f(t) = \ln(0.045t + 0.055)$.

Aplicando tentativas para cada método, teremos:

a) Para **interpolador polinomial**:

para grau $24 \quad \to \quad Erro\ P_{24}\ Max = 3.03622053099417e-06$ $(O(10^{-6}))$

b) Para **séries de Maclaurin**:

para grau $52 \quad \to \quad Erro\ \mathrm{M}_{52}\ Max = 2.31509887882453e-06$ $(O(10^{-6}))$

c) Para **série de Tchebyschev**:

para grau $17 \to Erro\ \mathrm{T}_{17}\ Max = 1.66541021329181e-06$ $(O(10^{-6}))$

d) Para a **racional de Padé**:

para grau $M = 8+8 \quad \to \quad Erro\ \mathrm{R}_{8,8}\ Max = 1.13394346801243e-06$ $(O(10^{-6}))$

Também para esse subintervalo, a aproximação por funções racionais de Padé se torna mais eficiente, pois aproxima $f(x)$ com os menores graus.

Vamos reduzir o subintervalo para a mesma função, avançando mais na direção do ponto onde a função se torna assintótica.

Exemplo 6.15: aproxime $f(x) = \ln(x)$, no intervalo $x \in [0.001,\ 0.01]$, com interpolador polinomial, série de Maclaurin, de Tchebyshev e de Padé, de modo que os erros máximos sejam, se possível, da ordem de $O(10^{-6})$. Imprima os erros máximos atingidos em cada caso, compare os resultados e indique qual é a forma de aproximação mais eficiente.

Solução:

O intervalo $x \in [0.001,\ 0.01]$ precisa ser transformado para o intervalo padrão $t \in [-1,\ +1]$, gerando a função $f(t) = \ln(0.0045t + 0.0055)$.

Aplicando sucessivas tentativas para cada método, teremos:

a) Para **interpolador polinomial**:

para grau $24 \quad \to \quad Erro\ P_{24}\ Max = 3.03621929909070e-06$ $(O(10^{-6}))$

b) Para **séries de Maclaurin**:

para grau $52 \quad \to \quad Erro\ \mathrm{M}_{52}\ Max = 2.31509887793635e-06$ $(O(10^{-6}))$

c) Para **série de Tchebyschev**:

para grau $17 \to Erro\ \mathrm{T}_{17}\ Max = 1.66541022306177e-06$ $(O(10^{-6}))$

d) Para a **racional de Padé**:

para grau $M = 8+8 \quad \to \quad Erro\ \mathrm{R}_{8,8}\ Max = 1.13394295997438e-06$ $(O(10^{-6}))$.

Também para esse subintervalo, a aproximação por funções racionais de Padé se torna mais eficiente, pois aproxima $f(x)$ com os menores graus.

Observe que os graus necessários para aproximar $f(x)=\ln(x)$, nos sucessivos subintervalos, foram praticamente os mesmos, mas o tamanho dos subintervalos estão sendo reduzidos em dez vezes, respectivamente nos **Exemplos 6.13**, **6.14** e **6.15**, ou seja:

a) para $x \in [0.1,\ 1]$, temos comprimento de intervalo 0.900;

b) para $x \in [0.01,\ 0.1]$, temos comprimento de intervalo 0.090; e

c) para $x \in [0.001,\ 0.01]$, temos comprimento de intervalo 0.009.

DESTAQUE Para todos os casos testados de aproximação de funções assintóticas, as funções racionais de Padé foram as mais eficientes, ou seja, aproximam $f(x)$ com o menores graus possíveis, comprovando a característica principal desse tipo de aproximador. FIM DO DESTAQUE

Acesse o algoritmo do **Exemplo 6.13** no Caderno de Algoritmos, arquivo **Cap6exemplo6.13.m**, onde você poderá alterar o comprimento do intervalo e testar também os exemplos 6.14 e 6.15.

A seguir, vamos avaliar a consequência do aumento sucessivo do grau M do aproximador de Padé.

Exemplo 6.16: aproxime $f(x)=\ln(x)$ em $x \in [+0.001,\ +1.0]$ por Padé com $n=m$ ou $n=m+1$ para que o erro máximo seja, se possível, na ordem de $O(10^{-6})$. Imprima os erros máximos atingidos em cada teste. Compare a solução desse exemplo com os resultados dos **Exemplos 6.13**, **6.14** e **6.15**, do ponto de vista da eficiência computacional.

Solução:

Obtida via algoritmo *Cap6exem6.16.m* disponível no Caderno de Algoritmos:

$\rightarrow \quad Erro\ \mathrm{R}_{8,8}\ Max = 1.0442$

$\rightarrow \quad Erro\ \mathrm{R}_{16,16}\ Max = 0.39409$

$\rightarrow \quad Erro\ \mathrm{R}_{32,32}\ Max = 0.13720$

$\rightarrow \quad Erro\ \mathrm{R}_{64,64}\ Max = 0.0030835$

$\rightarrow \quad Erro\ \mathrm{R}_{128,128}\ Max = 0.0036341$

$\rightarrow \quad Erro\ \mathrm{R}_{256,256}\ Max = \ 1.6256e-04$

Comparando o **Exemplo 6.16** com os **Exemplos 6.13**, **6.14** e **6.15**, percebemos que é computacionalmente muito mais eficiente trabalhar com subintervalos menores do domínio de cálculo desejado, a fim de obter aproximadores de graus menores. Para o intervalo total $x \in [+0.001,\ +1.0]$ do **Exemplo 6.16**, serão necessários graus maiores do que $m = 256$ nos dois polinômios de Padé para atingirmos erros máximos de ordem $O(10^{-6})$, mas os sistemas lineares gerados a partir de $m = 256$ se tornam indeterminados ou até impossíveis de serem resolvidos, mesmo usando o método de Cholesky. Por outro lado, se subdividimos $x \in [+0.001,\ +1.0]$ em três subintervalos, $x \in [0.1,\ 1]$, $x \in [0.01,\ 0.1]$ e $x \in [0.001,\ 0.01]$, conforme os **Exemplos 6.13**, **6.14** e **6.15**, serão necessários dois polinômios de apenas grau 8 para que os aproximadores de Padé tenham erros máximos de $O(10^{-6})$ em cada subintervalo.

Destacamos que não há uma forma conhecida de determinar previamente os valores de n e m para $R_{nm}(x)$ satisfazer a precisão desejada. Trata-se de um processo de tentativas e avaliação do erro**.** Porém, os melhores resultados ocorrem com $n = m$ se M for par ou $n = m+1$ se M for ímpar. Para exemplificar essa situação, vamos aproximar a $f(x) = e^x$ por Padé, com $M = 4$, tomando três combinações distintas de n e m e estimando os respectivos erros de truncamento máximos:

a) $\boldsymbol{n = 2}$ e $\boldsymbol{m = 2}$ $\Rightarrow e^x \cong R_{22}(x) = \dfrac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2} \qquad \Rightarrow$

$Erro\ R_{22}\ Max = 0.0039961$

b) $\boldsymbol{n = 4}$ e $\boldsymbol{m = 0}$ $\Rightarrow e^x \cong R_{40}(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} \qquad \Rightarrow$

$Erro\ R_{40}\ Max = 0.0099485$ (reduz-se a série de Maclaurin do Exemplo 6.9)

c) $\boldsymbol{n = 0}$ e $\boldsymbol{m = 4}$ $\Rightarrow e^x \cong R_{04}(x) = \dfrac{1}{1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}} \qquad \Rightarrow$

$Erro\ R_{04}\ Max = 0.051615$

Os resultados confirmam que, das três aproximações apresentadas, a R_{22} é a que apresentou menor erro de truncamento.

6.3 Conclusões

Em relação aos métodos de aproximação de uma função $y = f(x)$ com expressão conhecida e contínua no domínio $[a,b]$ de interesse, podemos concluir que a aproximação por série de Taylor/Maclaurin é suficiente e eficiente, para séries convergentes e com elevada velocidade de convergência. Mas se o gráfico da $y = f(x)$ tiver comportamento do tipo assintótico, devemos utilizar o aproximador racional de Padé. Para as funções não assintóticas e com séries de Maclaurin de convergência lenta, devemos utilizar o aproximador de Tchebyshev, especialmente devido ao seu acentuado efeito telescópico. Para as funções descontínuas do tipo “degrau” e periódicas no domínio de interesse, devemos utilizar a aproximação por séries de Fourier, conforme apresentado em Burden e Faires (2011).